*ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ*
*ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ*

*ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ*

# Μηχανική Ι

Μοσχίδης Νικόλαος

Σεπτέμβριος 2015

# Άδειες Χρήσης



# Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

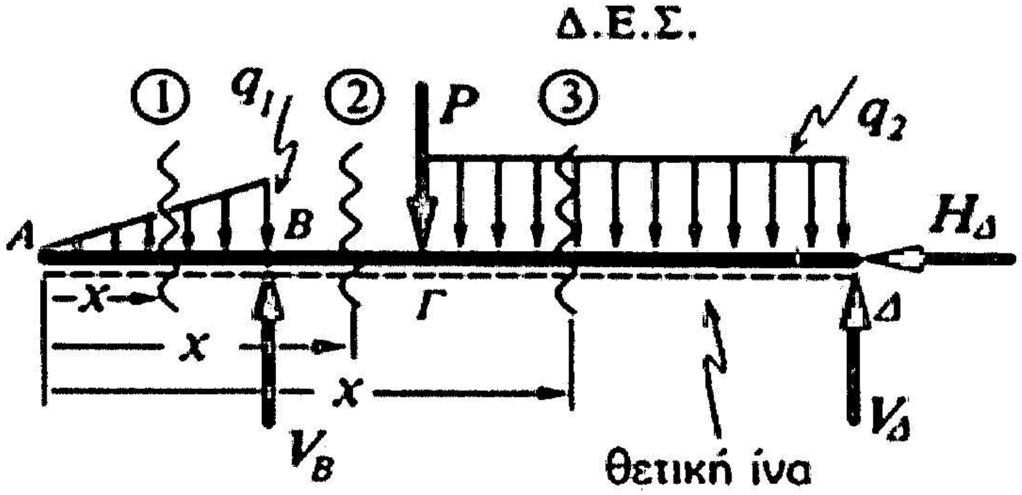
Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

# ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

# Σημειώσεις

Μάρτιος 2014

από το Δ και 2,5m από το Β. Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. αντικαθιστώντας τις στηρίξεις με τις δυνάμεις που μεταβιβάζουν:




Εφαρμόζοντας τις 3 εξισώσεις ισορροπίας έχουμε:

$$\sum F_x = 0 \quad : \quad \underline{H_\Delta = 0}$$

$$\sum M_B = 0 \Longrightarrow$$

$$-6x0{,}5 + 10x1 + 12x2{,}5 - V_\Delta \cdot 4 = 0$$

$$\Longrightarrow V_\Delta = 9{,}25kN$$

$$\sum M_\Delta = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad -6x4{,}5 + V_B \cdot 4 - 10x3 - 12x1{,}5 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{V_B = 18{,}75kN}$$

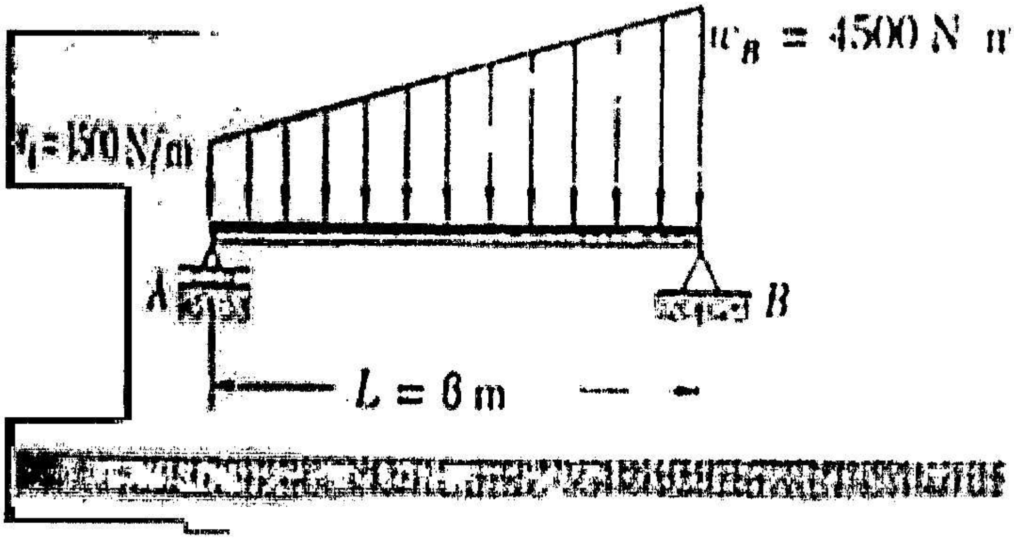
**Επαλήθευση:** $\sum F_y \stackrel{?}{=} 0 \quad :$

$$-6 + 18{,}75 - 10 - 12 + 9{,}25 \stackrel{?}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \stackrel{!}{=} 0$$

**<u>Παράδειγμα 6:</u>**

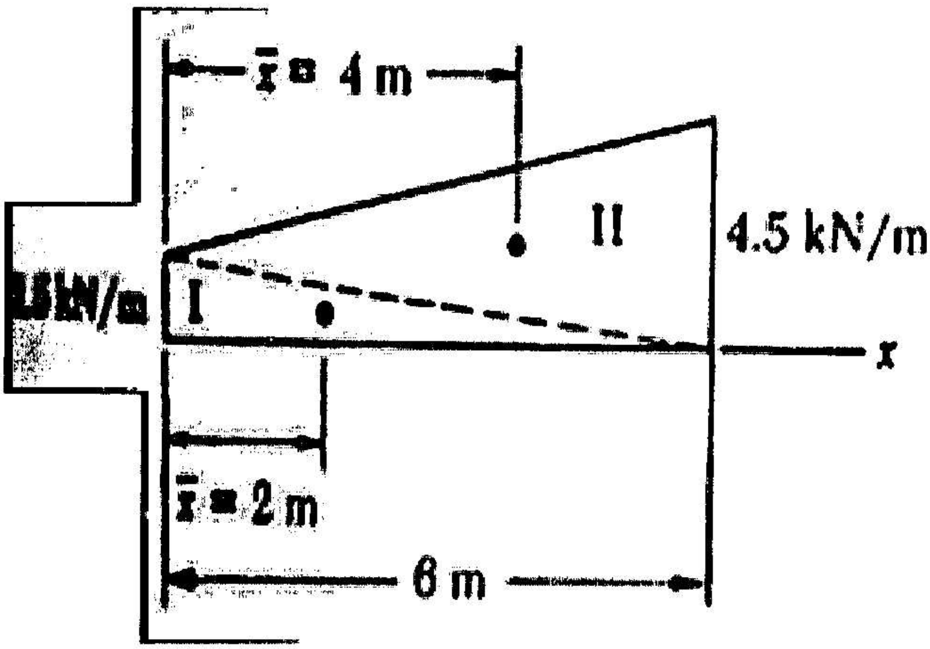
Στην δοκό ΑΒ του Σχήματος της επόμενης Διαφάνειας, ασκείται στο τμήμα ΑΒ το τραπεζοειδώς κατανεμημένο φορτίο q(x) με ελάχιστη τιμή 1.500 N/m και μέγιστη τιμή 4.500 N/m.

Ζητείται ο υπολογισμός των αντιδράσεων των στηρίξεων με όλους τους δυνατούς τρόπους ή μεθόδους.




**<u>Λύση:</u>**

Η τραπεζοειδής φόρτιση ισοδυναμεί με δύο τριγωνικές φορτίσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα της επόμενης διαφάνειας.



Διαιρέσαμε το χώρο κάτω από την καμπύλη της φόρτισης σε δύο τρίγωνα και για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς μετατρέψαμε τα δοσμένα φορτία σε kN/m.

Υπάρχουν δύο (2) τρόποι επίλυσης της παραπάνω άσκησης:

1. Να υπολογίσουμε τη συνιστώσα των δύο τριγωνικών φορτίσεων που συγκρωτούν την τραπεζοειδή κατανομή και
2. Να εργαστούμε με τις δύο συνιστώσες των δύο τριγωνικών φορτίσεων, στις οποίες αναλύσαμε την τραπεζοειδή φόρτιση.

Οπότε έχουμε:

F1 = ½ * 1.500 * 6 =>

⇒ F1 = 4.500 N =>

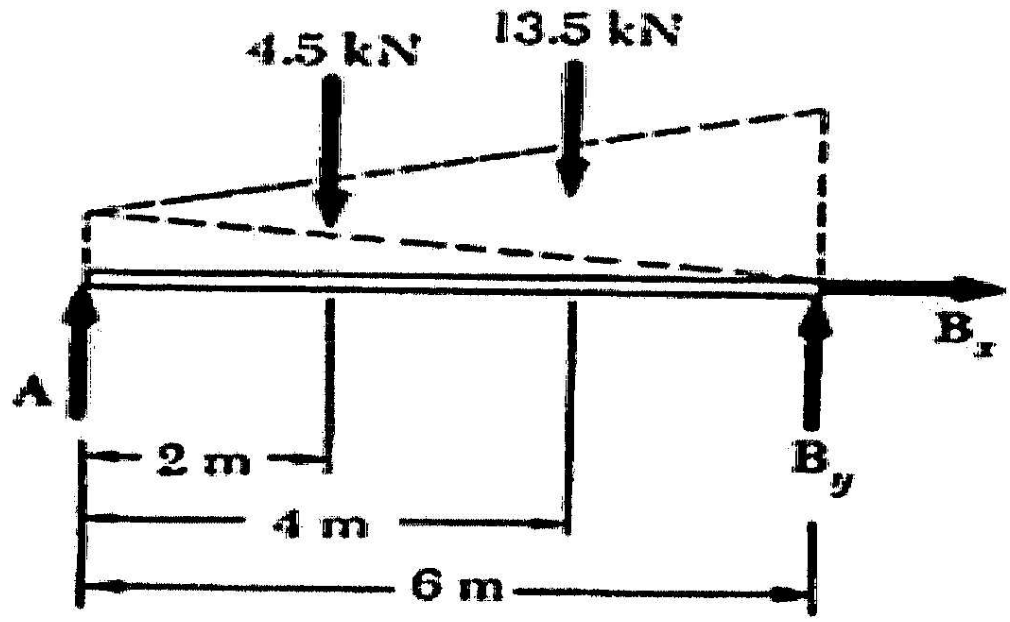
⇒ F1 = 4.5 KN.

Οπότε έχουμε:

F2 = ½ * 4.500 * 6 =>

⇒ F2 = 13.500 N =>

⇒ F2 = 13.5 KN.




Η συνισταμένη των F1 και F2 έστω W ισούται με το άθροισμα των F1 και F2. Άρα: W = 4.5 + 13.5 => W = 18 KN.

Εφόσον W η συνισταμένη των F1 και F2, η ροπή της W ως προς το σημείο A της δοκού θα ισούται με το άθροισμα των ροπών των F1 και F2 ως προς το αυτό σημείο A.

Οπότε έχουμε:

F1 * 2 + F2 * 4 = W * x (1),

όπου x η απόσταση της συνισταμένης των F1 και F2 από το A.

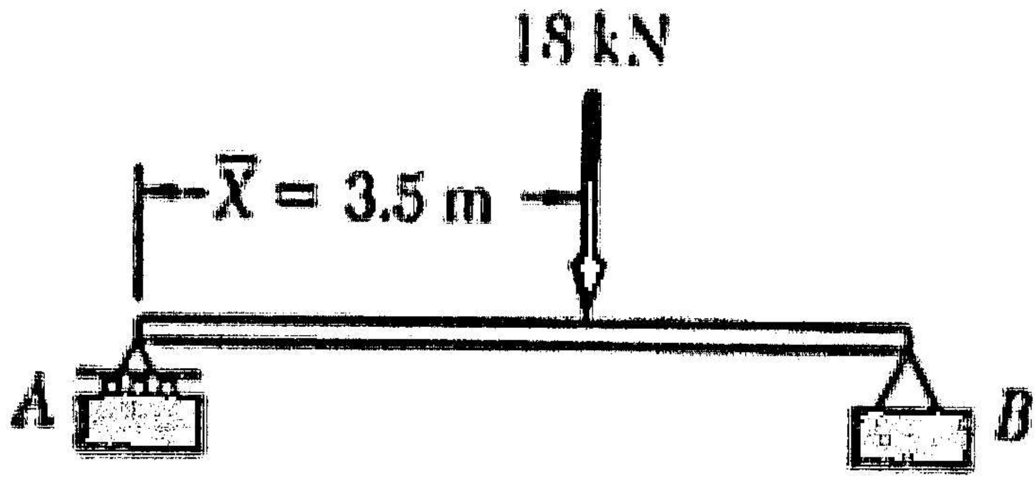
Από (1) έχουμε:

x = (F1 * 2 + F2 * 4) / W =>

=> x = (4,5 * 2 + 13,5 * 4) / 18 =>

- ⇒ x = (9 + 54) / 18 =>
- ⇒ x = 63 / 18 =>
- ⇒ **x = 3,5 m**.

Άρα η απόσταση του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης των F1 και F2, της W από το άκρο A της δοκού είναι ίση με 3,5 m.




Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη δοκό:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow Bx = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$$

=> - 18 kN * 3,5 m + By * 6 m = 0 =>

=> By = 18 kN * 3,5 m / 6 m =>

=> **$B_y$=10,5 kN ↑**

$$\Sigma M_B = 0 =>$$

$$=> +18\ kN * 2,5\ m - A * 6\ m = 0 =>$$

$$=> A = +18\ kN * 2,5\ m\ /\ 6\ m =>$$

$$=> A = 7,5\ KN$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε εάν αντί να εργαστούμε με τη συνισταμένη των F1 και F2, εργαστούμε με αυτές καθαυτές τις F1 και F2, χωρίς να τις αθροίσουμε.

Γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για αυτήν την περίπτωση:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 => Bx = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 =>$$

=>-(4,5kN)(2m)-(13,5kN)(4m)+By(6m)=0=>

=> **$B_y$ = 10,5 kN ↑**

$$\Sigma M_B = 0 =>$$

=>(4,5kN)(4m)+(13,5kN)(2m)-A(6m) = 0 =>

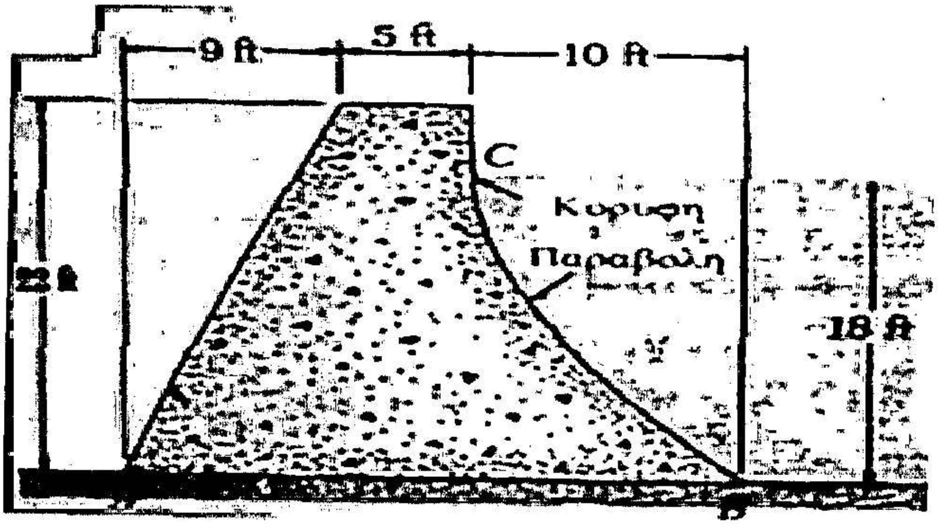
=>18 KN m + 27 KN m – A * (6m) = 0 =>

=> A = 45 KN m / 6m =>

$$=> A = 7,5\ KN$$

<u>Παράδειγμα 7:</u>

Στο σχήμα δίνεται η διατομή ενός φράγματος από οπλισμένο σκυρόδεμα.



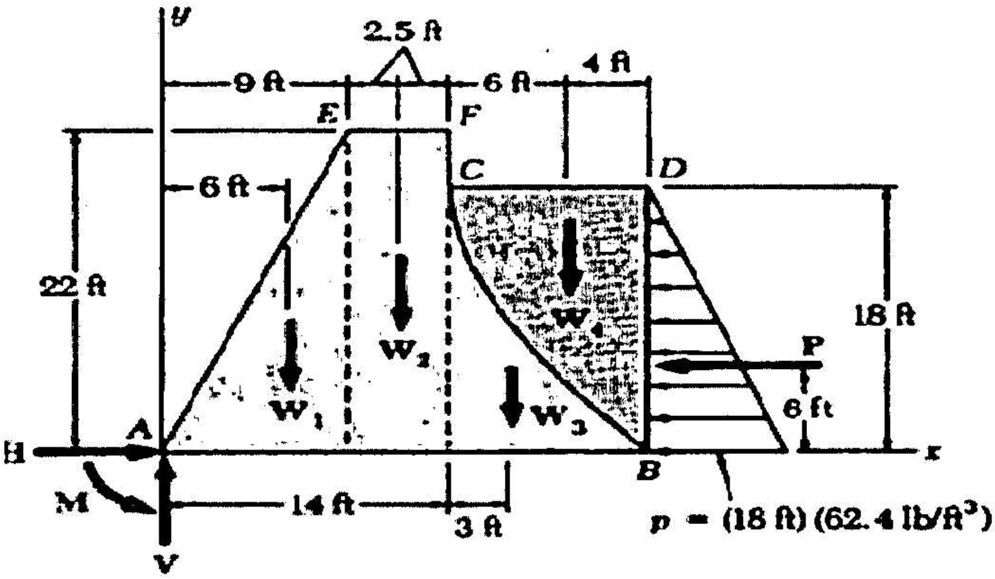

Θεωρείστε διατομή πλάτους 1 ft (0,30m) και υπολογίστε:

τη συνισταμένη των αντιδράσεων που ασκούνται από το έδαφος πάνω στη βάση του φράγματος AB,

Ειδικό βάρος σκυροδέ-ματος = 150 lb/ft$^3$ = 23.55Kn/m$^3$, νερού = 62,4 lb/ft$^3$ = 10 Kn/m$^3$.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

Σαν ελεύθερο σώμα επιλέγουμε τη διατομή AEFCDBA, πάχους 1 ft, του φράγματος και του νερού. Οι αντιδράσεις του εδάφους πάνω στη βάση AB παριστάνονται από ισοδύναμο σύστημα δύναμης-ζεύγους στο A.



Άλλες δυνάμεις που ενεργούν στο ελεύθερο σώμα είναι το βάρος του φράγματος, το οποίο παριστάνεται από τα βάρη των συνιστωσών **$W_1$**, **$W_2$**, και **$W_3$**, το βάρος του νερού **$W_4$** και η συνισταμένη **P** των δυνάμεων πίεσης που ασκούνται στη διατομή BD από το νερό δεξιά της διατομής BD.

$$W_1 = \frac{1}{2}(9\text{ft})(22\text{ft})(1\text{ft})(150\,\ell b/\text{ft}^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_1 = 14850\,\ell b$$

$$W_2 = (5\text{ft})(22\text{ft})(1\text{ft})(150\,\ell b/\text{ft}^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_2 = 16500\,\ell b$$

$$W_3 = \frac{1}{3}(10\text{ft})(18\text{ft})(1\text{ft})(150\,\ell b/\text{ft}^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_3 = 9000\,\ell b$$

$$W_4 = \frac{2}{3}(10\text{ft})(18\text{ft})(1\text{ft})(62{,}4\,\ell b/\text{ft}^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_4 = 7488\,\ell b$$

$$P = \frac{1}{2}(18\text{ft})(1\text{ft})(18\text{ft})(62{,}4\,\ell b/\text{ft}^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 10109\,\ell b$$

**Εξισώσεις ισορροπίας:**

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 =>$$

$$=> H - P = 0 =>$$

$$=> H - 10109\ \ell b = 0 =>$$

$$=> H = 10110\ \ell b \rightarrow$$

$$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0 =>$$

$$=> V - 14850\ell b - 16500\ell b - 9000\ell b - 7488\ell b = 0 =>$$

$$=> V = 47840\ell b \uparrow$$

$$\Sigma M_A = 0 =>$$

$$=> -(14850\ \ell b)(6ft) - (16500\ \ell b)(115\ ft) - (9000\ell b)(17\ ft) -$$

$$-(7488\ \ell b)(20ft) + (10109\ \ell b)(6ft) + M = 0 =>$$

$$=> M = 520960\ \ell b \cdot ft$$

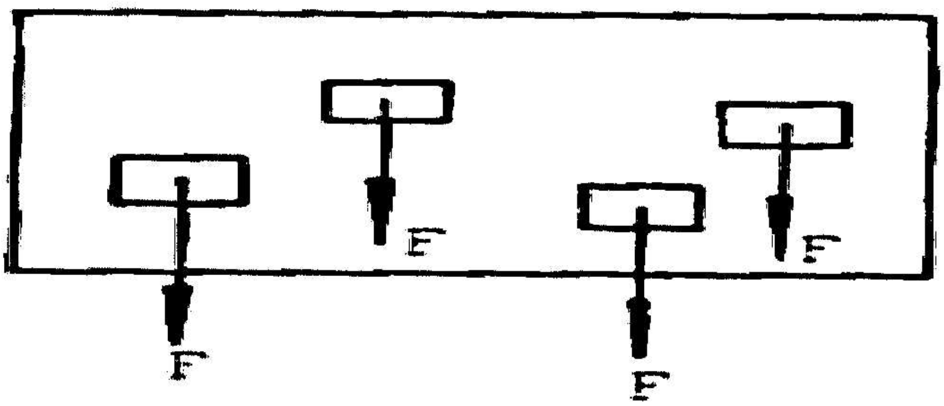
# ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ

Κάθε αντικείμενο ή σώμα αποτελείται από πολλά μόρια. Πάνω σε κάθε μόριο ξεχωριστά ασκείται έλξη προς το κέντρο της γης. Και επειδή τα διάφορα αντικείμενα είναι σχετικά πολύ μικρά σε σύγκριση με τη γη, οι δυνάμεις έλξης πάνω σε κάθε μόριο μπορούν να θεωρηθούν ως παράλληλες μεταξύ τους.

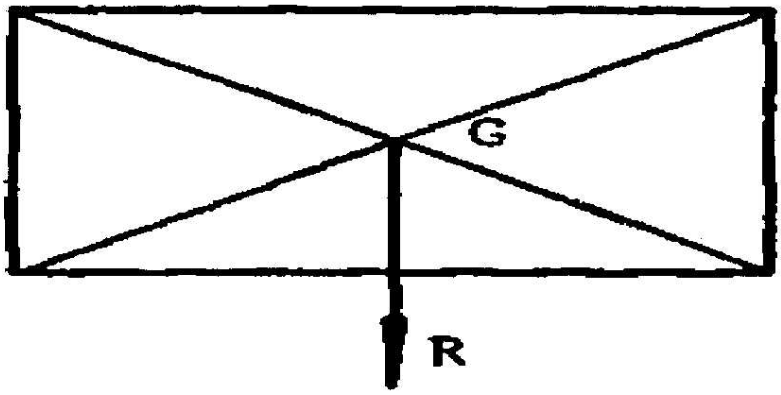
Οι παράλληλες αυτές δυνάμεις μπορούν να αντικατασταθούν από μια δύναμη, τη συνισταμένη, που θα ισούται με το βάρος του σώματος και θα περνά από ένα συγκεκριμένο σημείο πάνω στο σώμα, που ονομάζεται κέντρο βάρους του σώματος.

Με άλλα λόγια μπορεί να θεωρηθεί πως η μάζα του σώματος συμπυκνώνεται στο κέντρο βάρους του και το ίδιο το βάρος του σώματος έλκεται κατακόρυφα προς τα κάτω περνώντας ακριβώς από αυτό το σημείο.

Αν υποθέσουμε πως τα μόρια ενός σώματος τα συμβολίζουμε με μικρά τετραγωνάκια, τότε κάθε τετραγωνάκι έλκεται κατακόρυφα προς τα κάτω.

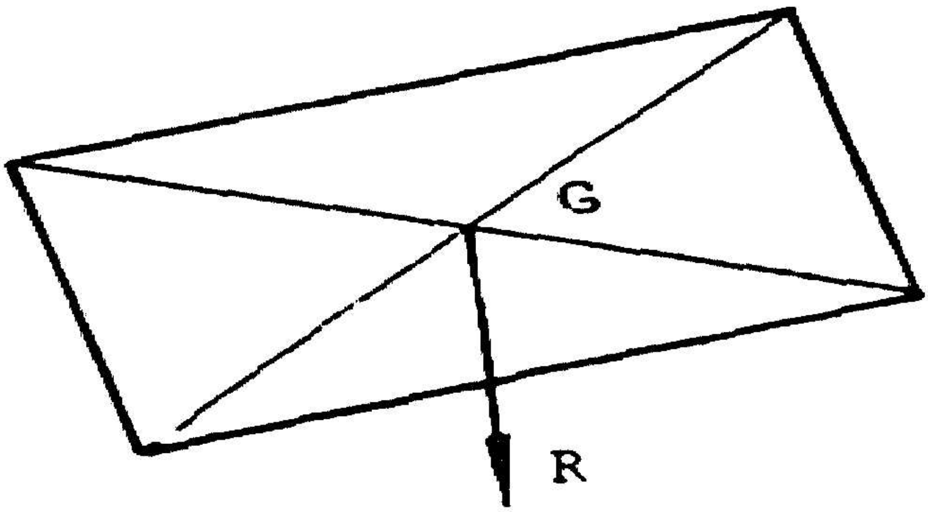



Όλες αυτές τις δυνάμεις μπορούμε να τις αντικαταστήσουμε με μια δύναμη (τη συνισταμένη R) που θα περνά από το σημείο G που είναι το κέντρο βάρους του σώματος



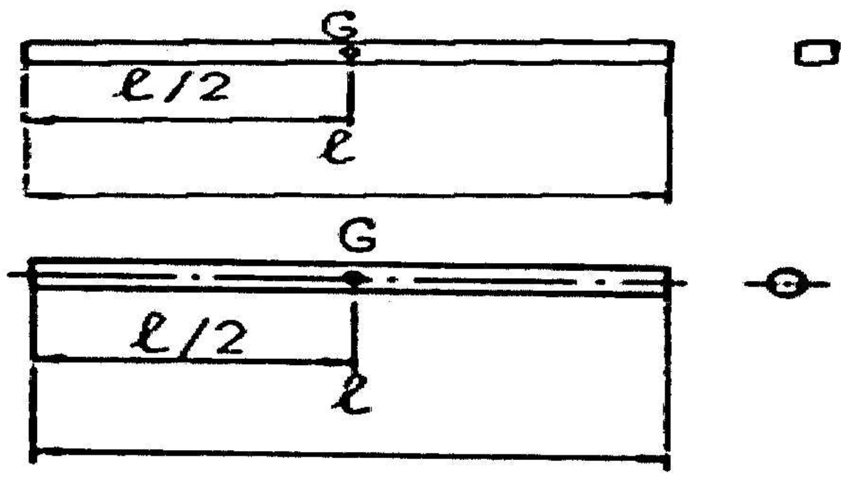
Αν το ίδιο σώμα αλλάξει θέση τότε:

- Το μέγεθος της συνισταμένης δε θα αλλάξει, αφού το βάρος του σώματος δεν άλλαξε.
- Η διεύθυνση και φορά της συνισταμένης δε θα αλλάξουν, αφού η γη θα συνεχίσει να έλκει το σώμα κατακόρυφα
- Το κέντρο βάρους "G" δε θα αλλάξει.



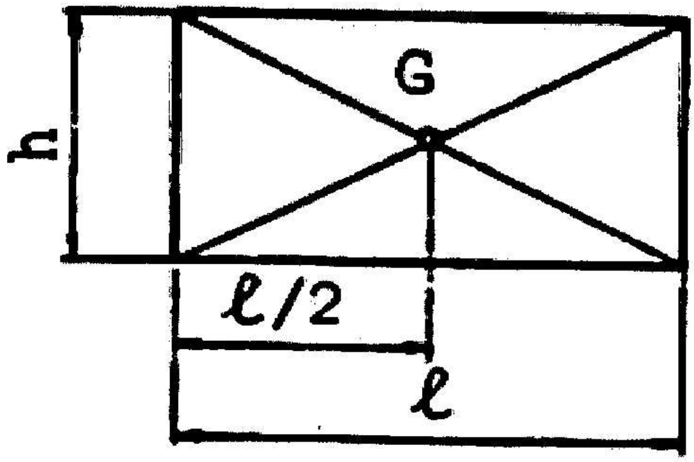

8 / 3

Αν οι διαστάσεις του εμβαδού της διατομής του σώματος είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με το μήκος του και η μάζα του είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη, τότε το Κ.Β. θα βρίσκεται στο μέσο ακριβώς της απόστασης.




$$X_o = \frac{\ell}{2}$$

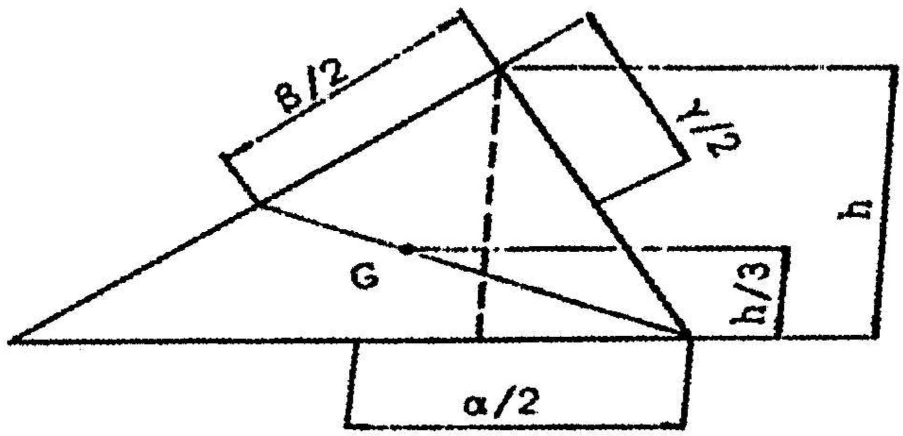
Το Κ.Β. ορθογώνιου παραλληλόγραμμου βρίσκεται στο κέντρο του:




$$X_o = \frac{\ell}{2} \quad \text{και} \quad y_o = \frac{h}{2}$$

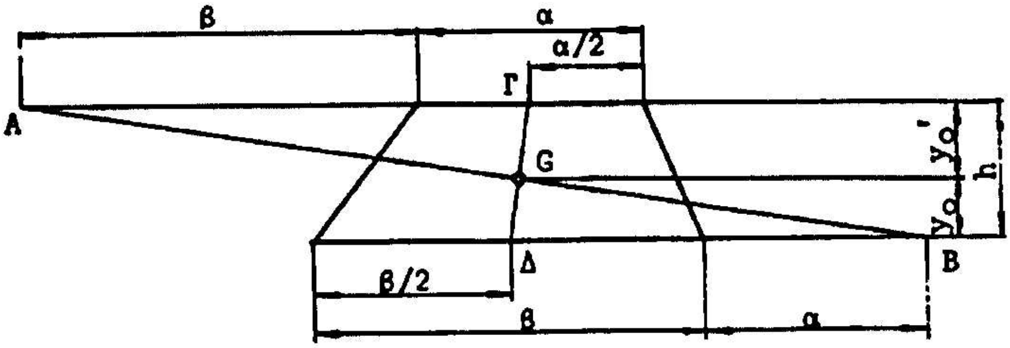
## ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ – ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Για να προσδιορίσουμε το Κ.Β. ενός τριγώνου, πρέπει πρώτα να βρούμε το μέσο των πλευρών του τριγώνου και μετά να τα ενώσουμε με τις απέναντι από κάθε πλευρά γωνίες. Το σημείο G όπου τέμνονται είναι το Κ.Β..



## ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ – ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

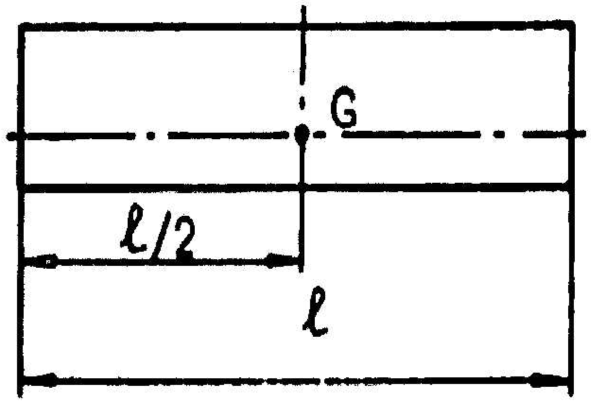
Για να προσδιορίσουμε γραφικά το Κ.Β. του τραπεζίου προσθέτουμε στην πλευρά α την πλευρά β και στη β προσθέτουμε την α στο αντίθετο άκρο, προσδιορίζοντας τα σημεία Α και Β. Ενώνουμε με ευθεία τα σημεία Α και Β.

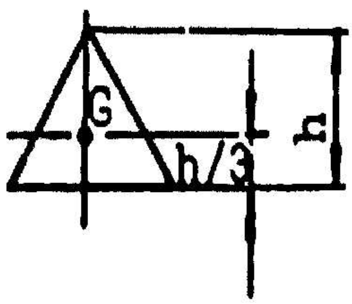



Επίσης, βρίσκουμε το μέσο των πλευρών α και β και τα ενώνουμε με ευθεία ΓΔ. Εκεί που τέμνονται οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι το Κ.Β. του τραπεζιού.

$$y_o = \frac{h}{3} \cdot \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta} \qquad y_o' = \frac{h}{3}$$

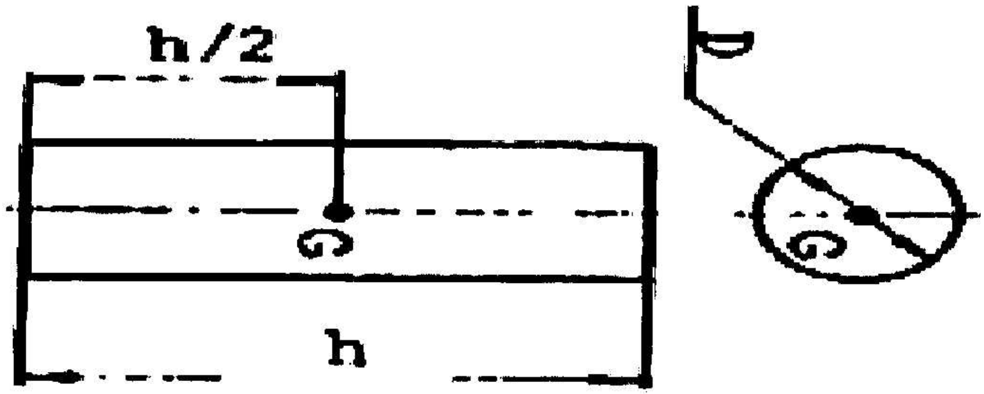
## ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ – ΤΡΙΓΩΝΟ



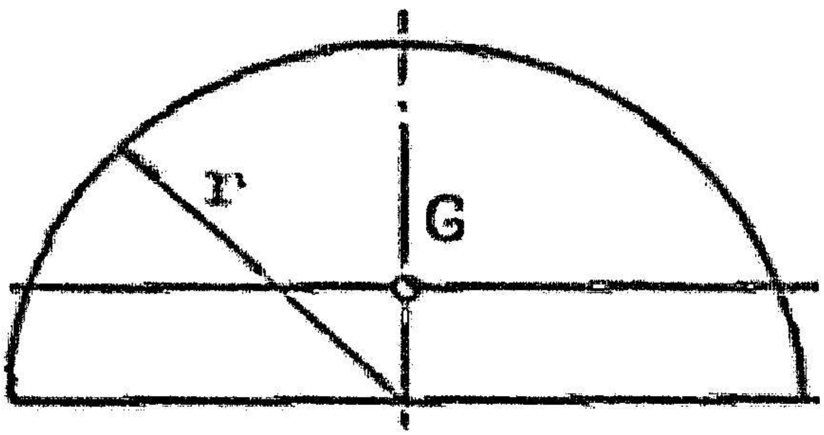
$$x_o = \frac{\ell}{2}, \quad y_o = \frac{h}{3}$$

<u>**ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ – ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ**</u>



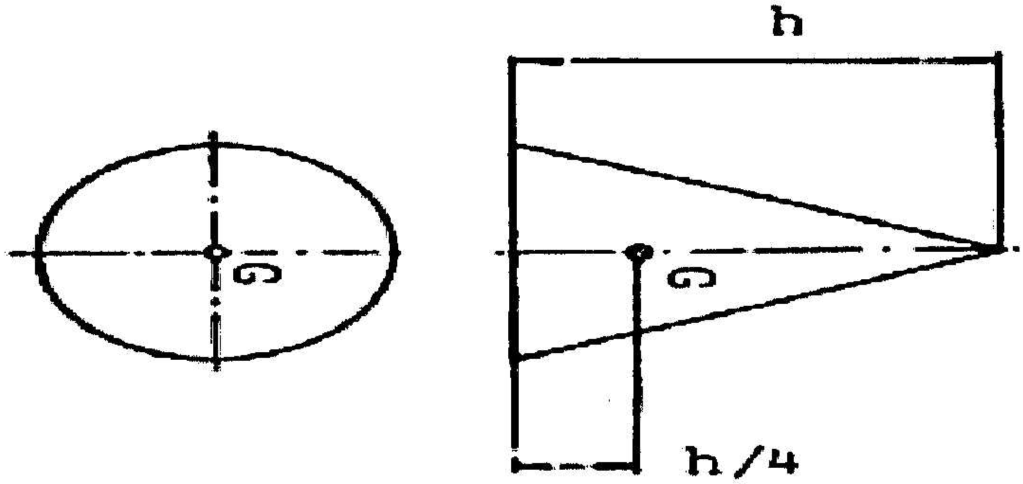

$$x_o = \frac{D}{2} \quad y_o = \frac{h}{2}$$

<u>**ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ – Ημικύκλιο**</u>



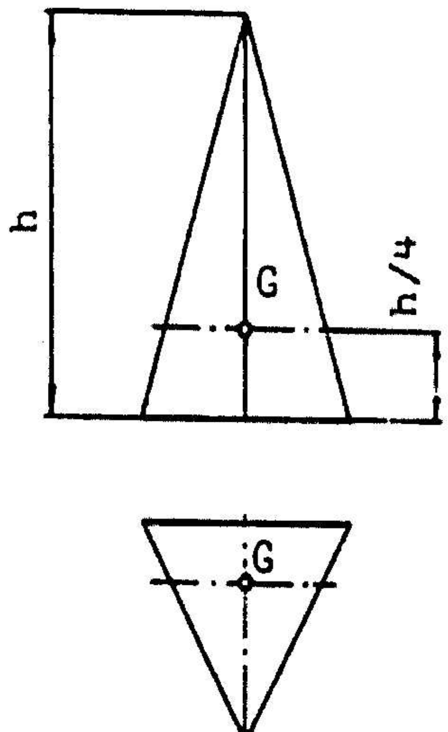

$$y_o = \frac{4 \cdot r}{3\pi} = 0,4244r$$

**ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ – Κώνος**




$$y_o = \frac{h}{4}$$

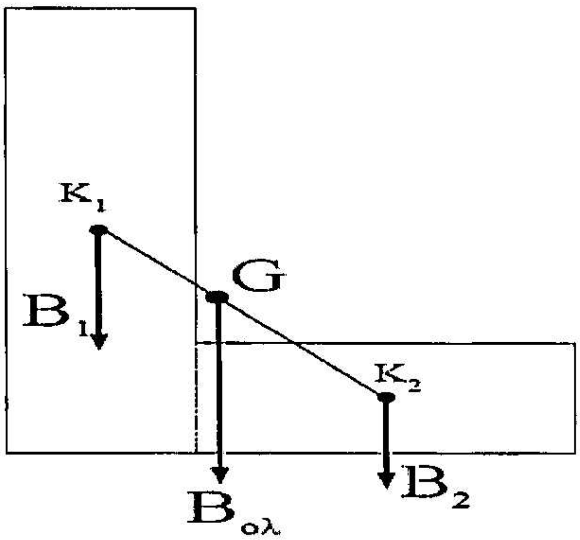
**ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ – Πυραμίδα**




$$y_o = \frac{h}{4}$$

## Η έννοια του κέντρου βάρους:

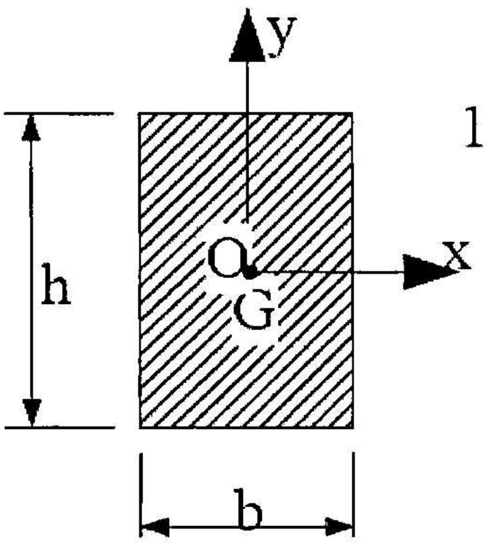
Έστω ότι ένα σώμα αποτελείται από δύο ή περισσότερα μέρη 1, 2 ... με απλό σχήμα, και ότι τα βάρη των μερών του είναι $B_1$, $B_2$ ... . Οι δυνάμεις $B_1$, $B_2$ ... θα ενεργούν στα σημεία $K_1$, $K_2$ ... και το συνολικό βάρος Βολ θα ενεργεί σε κάποιο σημείο G που είναι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των παράλληλων δυνάμεων $B_1$, $B_2$ ... και ονομάζεται κέντρο βάρους του σώματος (για συντομία κ.β.).




Υπολογισμός του κέντρου βάρους:

Από τον πρακτικό ορισμό του κ.β. που δόθηκε, προκύπτουν κάποιοι τύποι με ολοκληρώματα για τον υπολογισμό της θέσης του κ.β..

Στην πράξη όμως για τα απλά σχήματα παίρνουμε έτοιμα τα αποτελέσματα των ολοκληρωμάτων από τους Πίνακες των επόμενων διαφανειών.

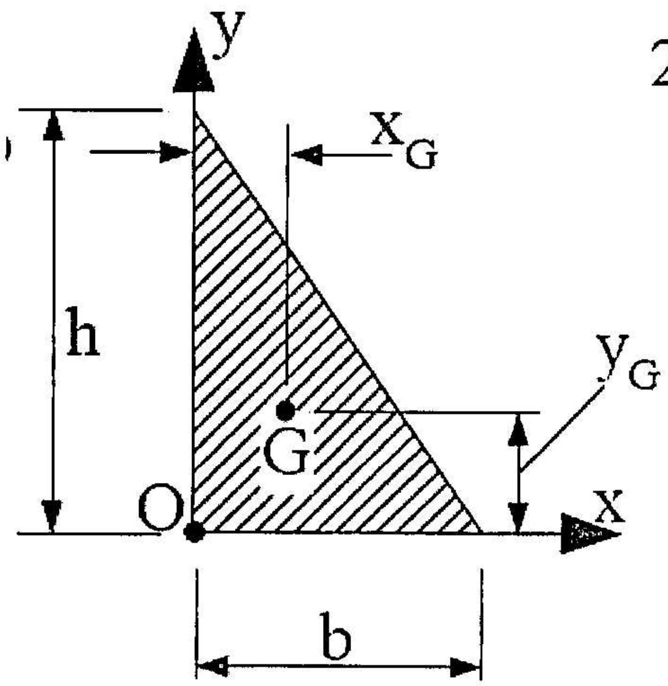



1) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

$A = bh$

$x_G = 0$

$y_G = 0$

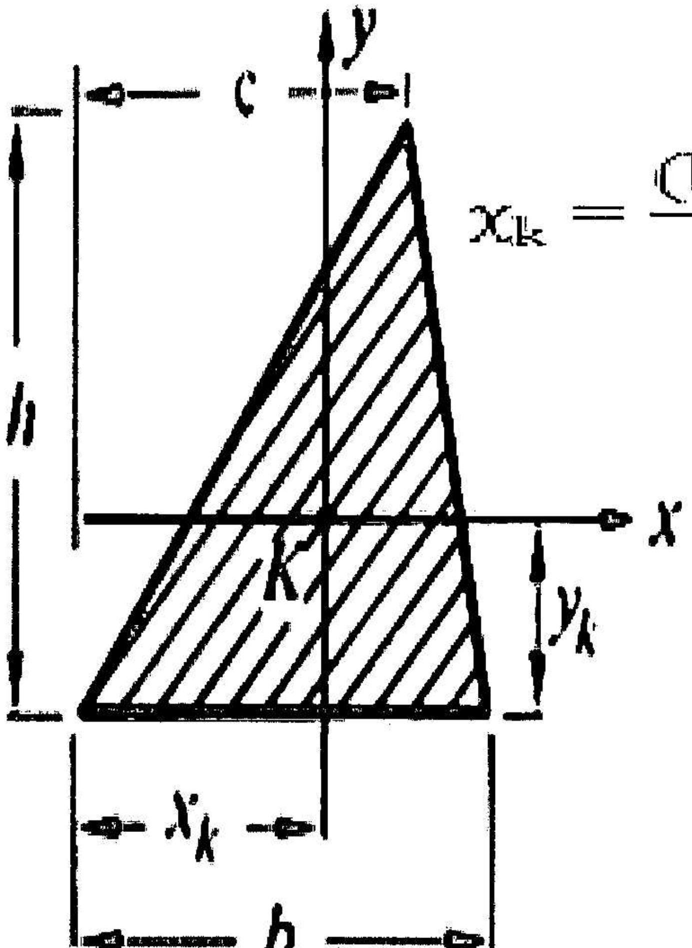



2) Ορθογώνιο τρίγωνο

$A = 1/2\ bh$

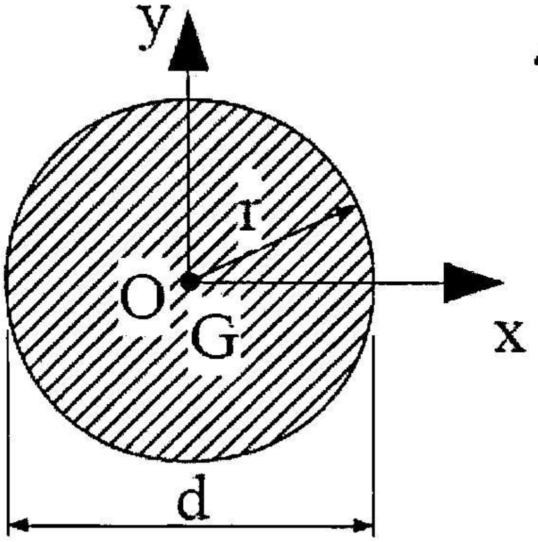
$x_G = 1/3\ b$

$y_G = 1/3\ h$




$$x_k = \frac{(b + c)}{3}, y_k = \frac{h}{3}$$

$$F = \frac{bh}{2}$$



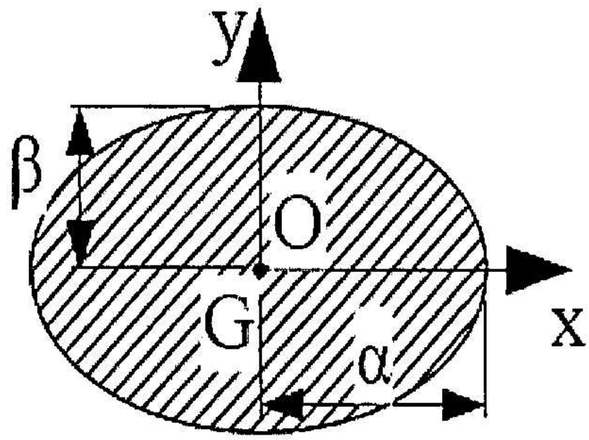

4) Κύκλος

$(d=2r)$

$A=\pi r^2[=(\pi/4)d^2]$

$x_G=0$

$y_G=0$

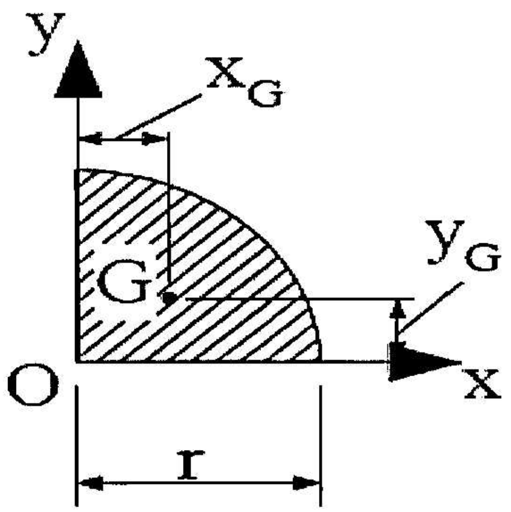



5) Έλλειψη

$A=\pi\alpha\beta$

$x_G=0$

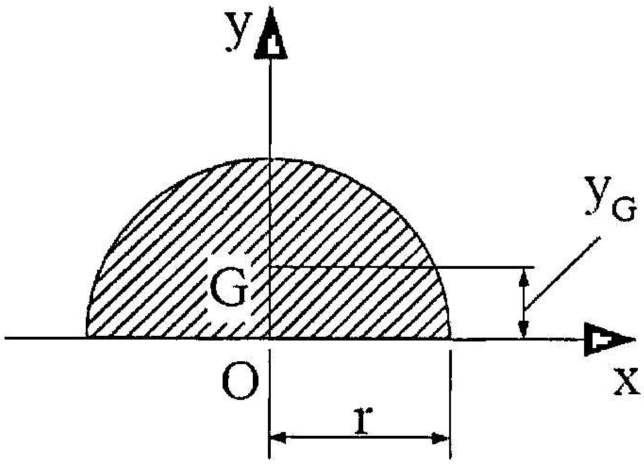
$y_G=0$




8) Τεταρτημόριο κύκλου

$$A=\frac{r^2\pi}{4}$$

$$x_G=y_G=\frac{4R}{3\pi}$$

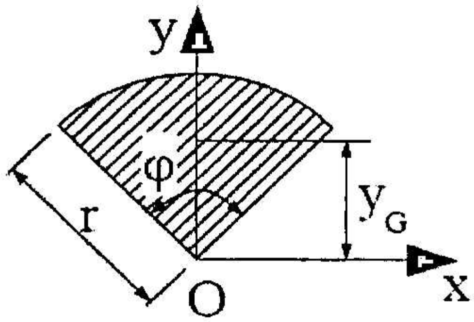



9) Ημικύκλιο

$$A=\frac{r^2\pi}{2}$$

$$x_G = 0$$

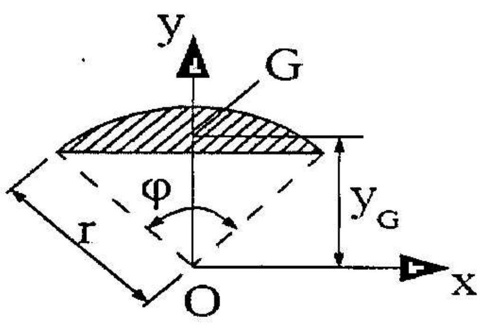
$$y_G=\frac{4R}{3\pi}$$




1) Κυκλικός τομέας (y διχοτόμος της φ)

$$A=\frac{r^2\varphi}{2}$$ (

$$x_G=0,\ y_G=\frac{4R}{3\varphi}$$




7) Κυκλικό τμήμα (y διχοτόμος της φ)

$$A=\frac{1}{2}r^2(\varphi-\sin\varphi)$$

$$x_G=0,\ y_G=\frac{4r}{3}\ \frac{\sin^3\varphi}{\varphi-\sin\varphi}$$

**Για τα σύνθετα σχήματα υπολογίζουμε το κ.β. με την εξής διαδικασία:**

**Βήμα 1:** Διαλέγουμε ένα κεντρικό σύστημα συντεταγμένων (π.χ. XOY )

**Βήμα 2:** Κόβουμε το σχήμα σε τμήματα με απλό σχήμα, και τους δίνουμε ονόματα (π.χ. 1, 2, 3...)

**Βήμα 3:** Υπολογίζουμε τα εμβαδά των τμημάτων: $A_1$, $A_2$, $A_3$ ...

**Βήμα 4:** Βρίσκουμε από το σχήμα τις συντεταγμένες των κέντρων των τμημάτων: ($X_1$, $Y_1$), ($X_2$, $Y_2$), ($X_3$, $Y_3$) ... . (Πρέπει να υπολογισθούν όλες ως προς το κεντρικό σύστημα συντεταγμένων που διαλέξαμε στο βήμα 1).

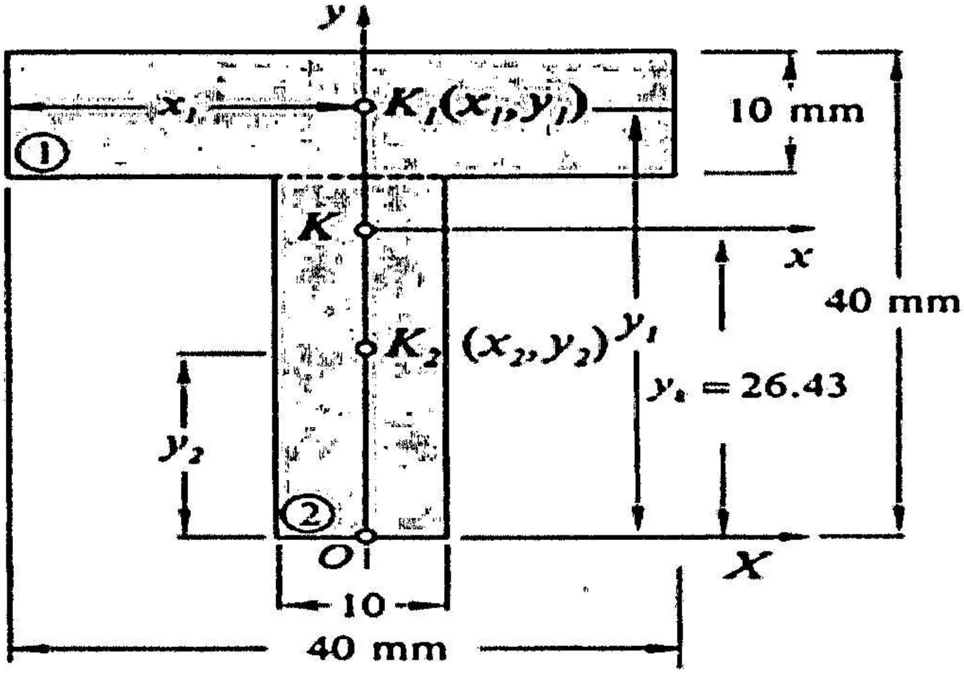
**Βήμα 5:** Εφαρμόζουμε τους τύπους:

$$x_G = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots}{A_1 + A_2 + \ldots},$$

$$y_G = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \ldots}{A_1 + A_2 + \ldots}$$

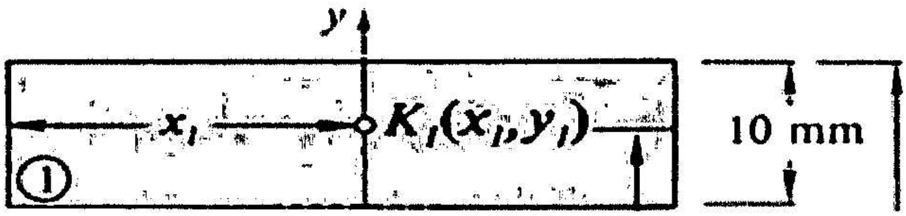
Τα αποτελέσματα $X_G$, $Y_G$ είναι οι συντεταγμένες του γενικού κ.β. ως προς το σύστημα συντεταγμένων που είχαμε διαλέξει στο βήμα 1.

**Παράδειγμα 1:** Να προσδιοριστεί το κέντρο βάρους Κ διατομής σχήματος Τ:

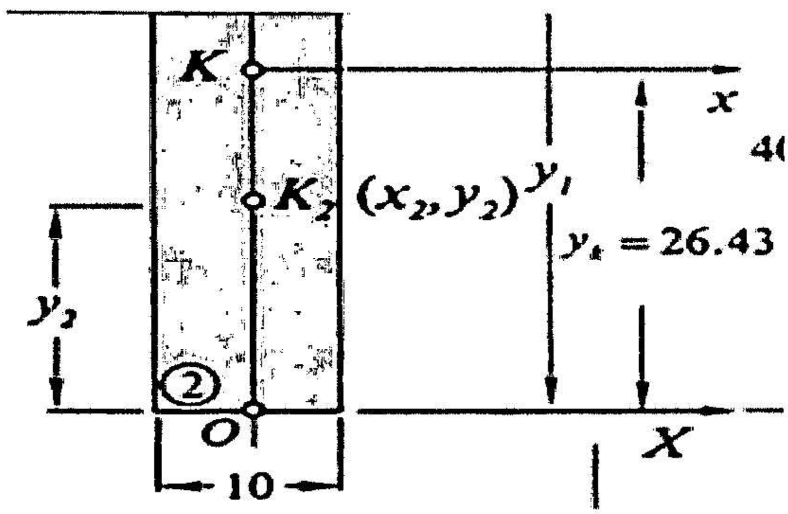



Από το σχήμα της εκφώνησης, παρατηρούμε ότι η διατομή αποτελείται από το άθροισμα των ορθογωνίων (1) και (2).

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1):




Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2):



Τα εμβαδά αυτών είναι:

για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (1)

$A_1 = 40 \times 10 = 400\ mm^2$ και

για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (2)

$A_2 = 30 \times 10 = 300\ mm^2$.

Θεωρούμε ορθοκανονικό Σύστημα αξόνων ΟΧΥ τέτοιο ώστε ο άξονας Υ να είναι άξονας συμμετρίας της διατομής. Επειδή, ο Υ είναι άξονας συμμετρίας, το Κ κείται πάνω σε αυτόν.

Χωρίζοντας τη διατομή του σώματος σε άθροισμα των επιφανειών (1) και (2), έχουμε ότι εάν $y_1$ και $y_2$ είναι οι τεταγμένες των τοπικών κέντρων βάρους της καθεμιάς, ισχύουν οι σχέσεις:

$Y_1 = 40 - (10 / 2) = 35$ mm

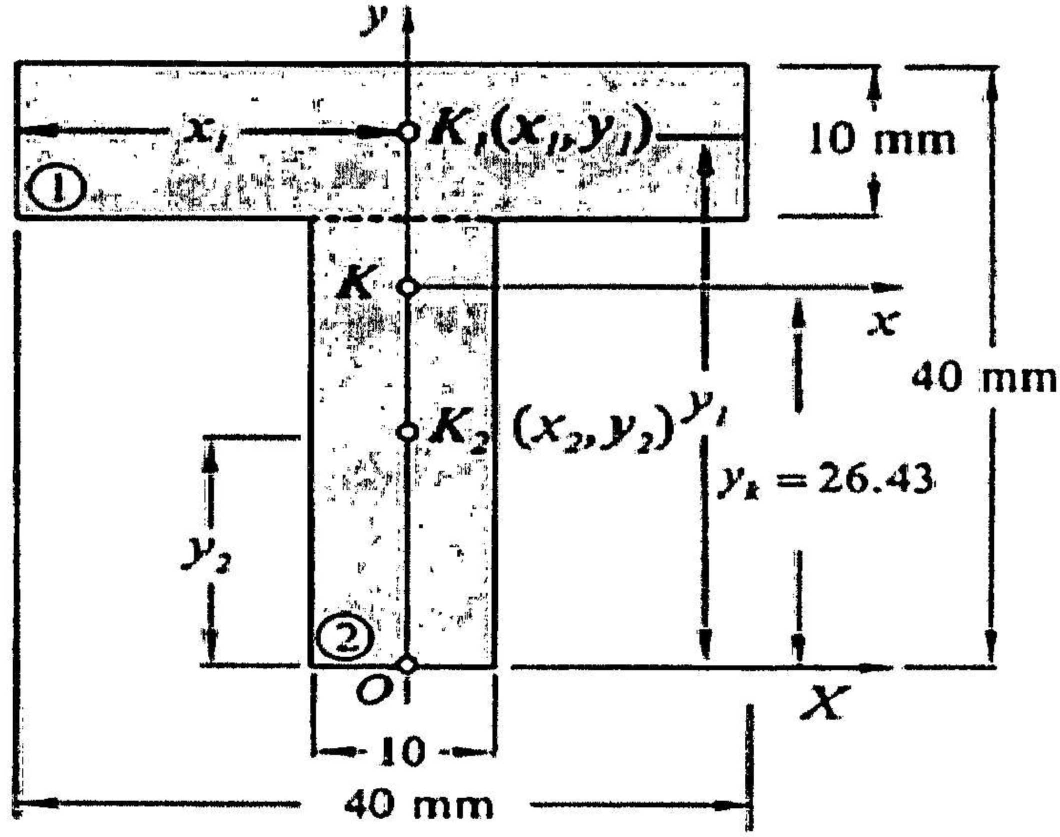
$Y_2 = (40 - 10) / 2 = 15$ mm

Οπότε έχουμε:

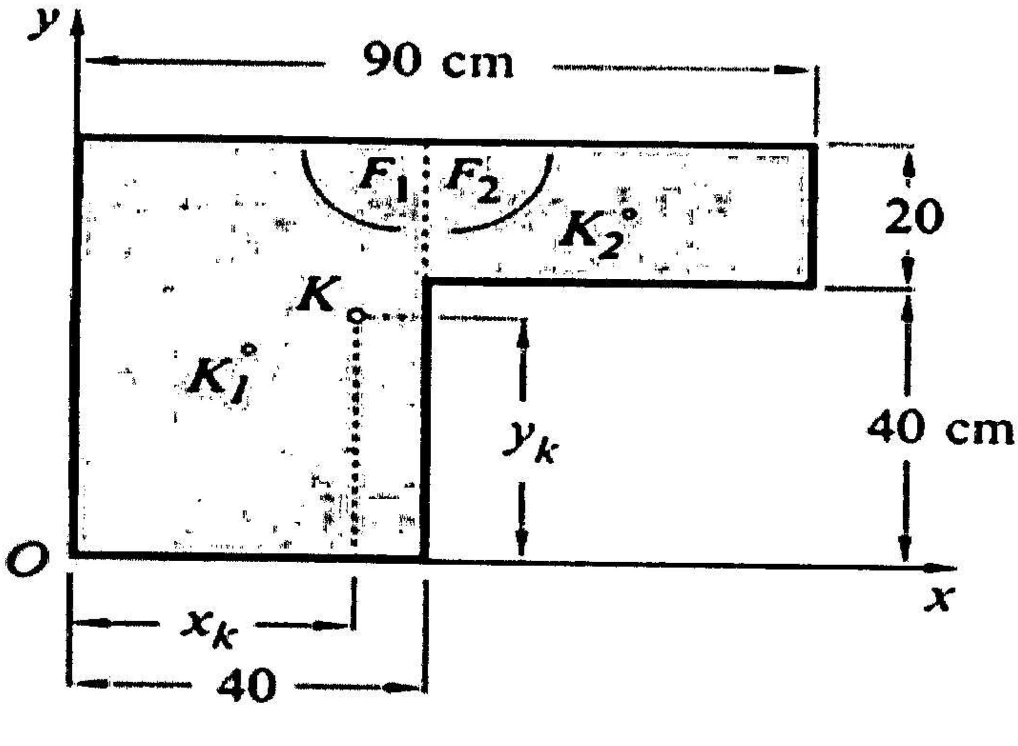
$$y_k = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} =$$

$$= \frac{400x35 + 300x15}{400 + 300} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\bar{y} = y_k = 26{,}43mm}$$



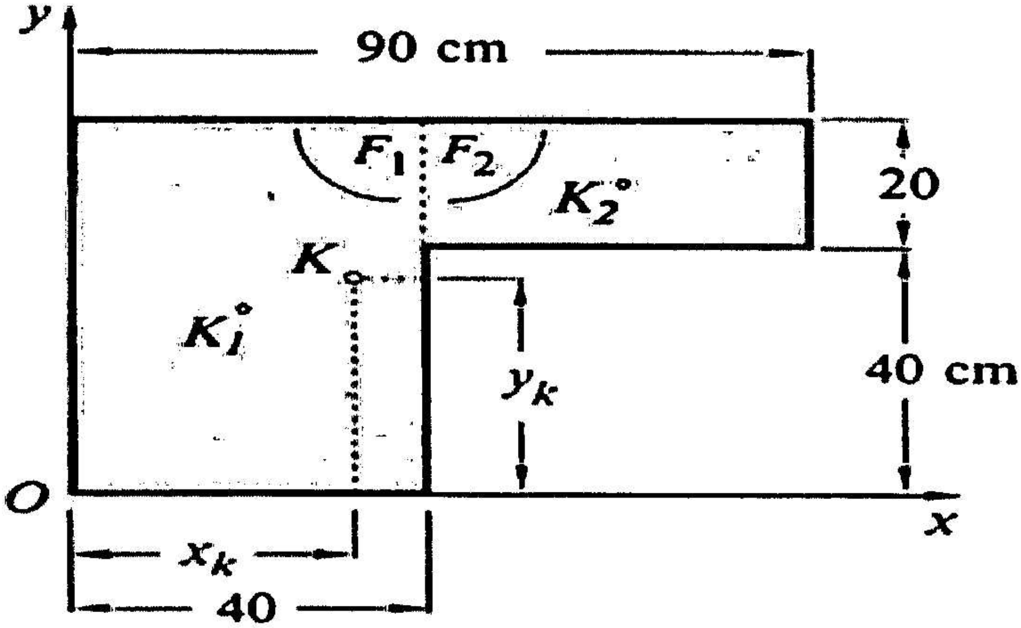

**<u>Παράδειγμα 2:</u>** Να προσδιοριστεί το κέντρο βάρους K της διατομής του γωνιακού ελάσματος, που φαίνεται παρακάτω:



Λύση:

Για την επίλυση τέτοιων σύνθετων διατομών, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Ορίζουμε σύστημα αξόνων Οχy, έτσι ώστε η διατομή να βρίσκεται (κατά προτίμηση) στο (Ι) τεταρτημόριο των αξόνων.




Χωρίζουμε τη διατομή σε άθροισμα δύο ορθογωνίων παραλληλογράμμων 1 και 2 των οποίων υπολογίζουμε το εμβαδόν τους $F_1$ και $F_2$.

$F_1=40x60=2400cm^2$ και $F_2=50x20=1000cm^2$

Συνολικό Εμβαδόν Διατομής:

$F=F_1+F_2=3400cm^2$

Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες ($\chi_i$,$y_i$) του Κ.Β. του καθενός από αυτά ως προς το σύστημα αξόνων Οχy, οπότε βρίσκουμε:

$\chi_1=40/2=20cm$ $y_1=60/2=30cm$

$\chi_2=40+50/2=65cm$ $y_2=40+20/2=50cm$

Έστω $\chi_K$,$y_K$ οι ζητούμενες συντεταγμένες του Κ.Β. της διατομής. Ισχύει:

$$X_k=\frac{(20x2400)cm^3+(65x1000)cm^3}{3400cm^2}=$$

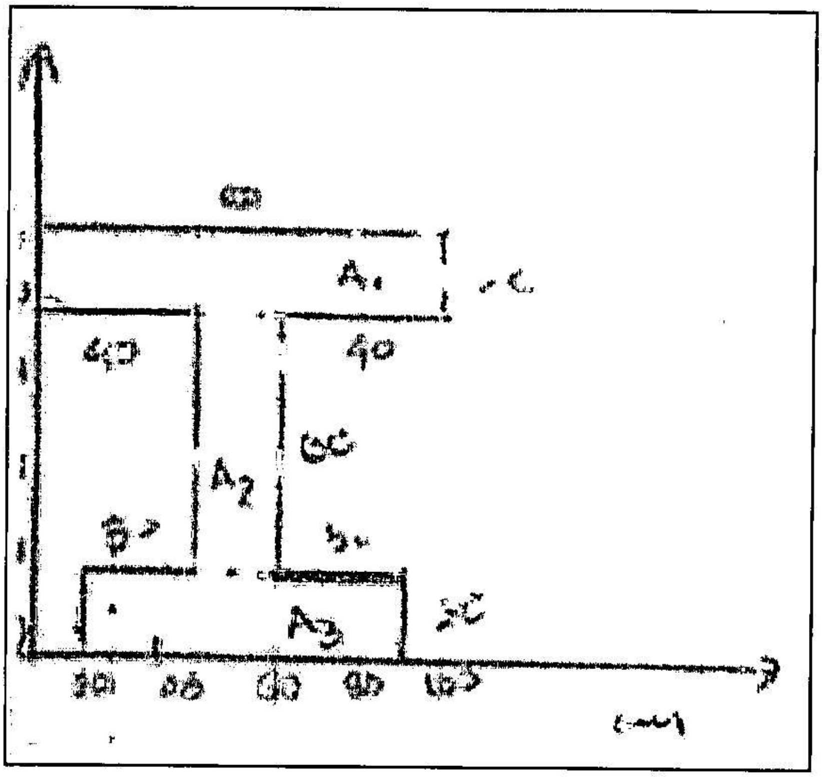
$$= \frac{113000\text{cm}^3}{3400\text{cm}^2} \Rightarrow \quad \chi_k = 33{,}24\text{cm}$$

$$y_k = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i} = \frac{y_i F_1 + y_2 F_2}{F} =$$

$$= \frac{(30\text{x}2400)\text{cm}^3 + (50\text{x}1000)\text{cm}^3}{3400\text{cm}^2} =$$

$$= \frac{122000\text{cm}^3}{3400\text{cm}^2} = 35{,}88\text{cm}$$

**<u>Παράδειγμα 3:</u>** Να προσδιοριστεί το κέντρο βάρους K της διατομής που φαίνεται παρακάτω: Οι διαστάσεις είναι σε cm.



**Λύση:**

Για την επίλυση τέτοιων σύνθετων διατομών, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Ορίζουμε σύστημα αξόνων Οχy, έτσι ώστε η διατομή να βρίσκεται (κατά προτίμηση) στο (I) τεταρτημόριο των αξόνων.

Χωρίζουμε τη διατομή σε άθροισμα τριών ορθογωνίων παραλληλογράμμων 1, 2 και 3 των οποίων υπολογίζουμε τα εμβαδά τους $A_1$, $A_2$και $A_3$:

$A_1$=20x100=2.000cm$^2$,

$A_2$= 20x60 =1.200cm$^2$,

και $A_3$=20x80=1.600cm$^2$

**Συνολικό Εμβαδόν Διατομής: $A = A_1 + A_2 + A_3$ = 4.800cm$^2$**

Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες ($\chi_i$,$y_i$) του Κ.Β. του καθενός από αυτά ως προς το σύστημα αξόνων Οχy, οπότε βρίσκουμε:

$X_{k1}$ = 50 cm, $y_{k1}$ = 60+20+10 = 90 cm

$X_{k2}$=40+10=50cm, $y_{k2}$=20+30=50cm

$$x_{k3} = \frac{10+30+20+30}{2} = 50\text{cm}$$

$y_{k3}$=10cm.

Ισχύει:

$$x_k = \frac{x_{k1}\cdot A_1 + x_{k2}\cdot A_2 + x_{k3}\cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

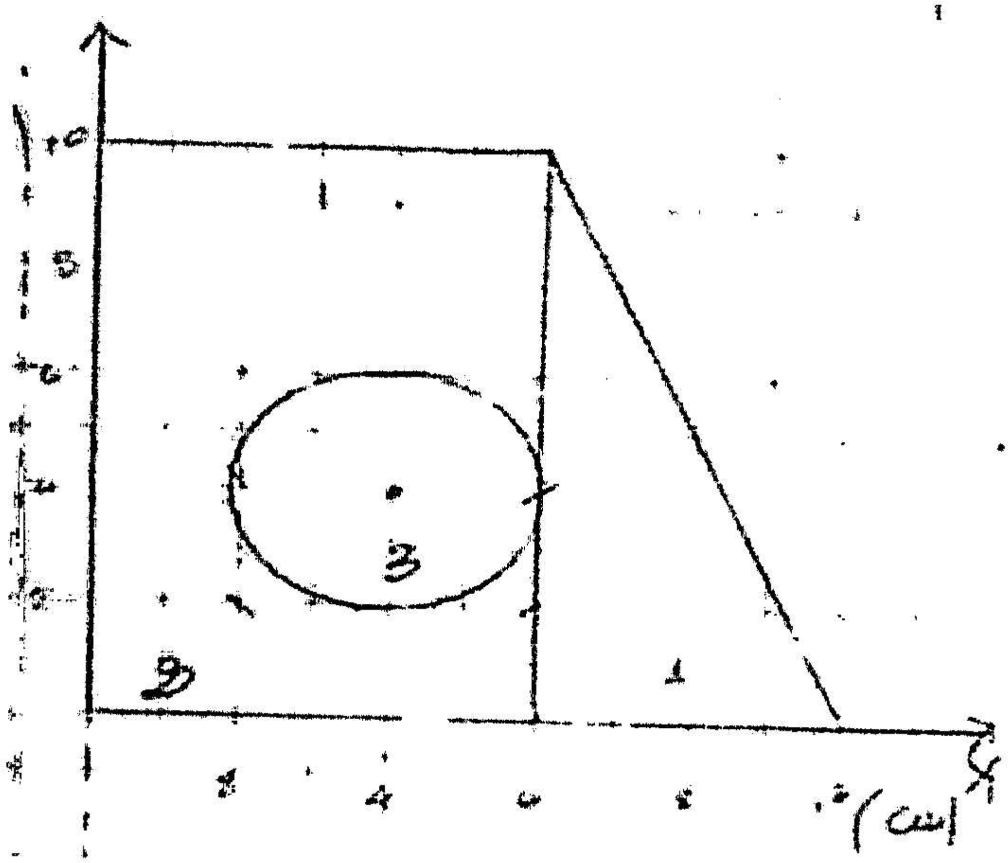
$$y_k = \frac{y_{k1}\cdot A_1 + y_{k2}\cdot A_2 + y_{k3}\cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Οπότε έχουμε:

$$x_k = \frac{50 \cdot 2000 + 50 \cdot 1200 + 50 \cdot 1600}{2000 + 1200 + 1600} = 50\text{cm}$$

$$y_k = \frac{90 \cdot 2000 + 50 \cdot 1200 + 10 \cdot 1600}{2000 + 1200 + 1600} = 53{,}333 \text{ cm}$$

**<u>Παράδειγμα 4:</u>** Να προσδιοριστεί το κέντρο βάρους Κ της διατομής που φαίνεται παρακάτω: α) χωρίς να ληφθεί υπόψη η οπή 3 και β) λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη της οπής 3. Οι διαστάσεις είναι σε cm.




**<u>Λύση:</u>**

Για την επίλυση τέτοιων σύνθετων διατομών, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Ορίζουμε σύστημα αξόνων Οxy, έτσι ώστε η διατομή να βρίσκεται (κατά προτίμηση) στο (Ι) τεταρτημόριο των αξόνων.

**α) Χωρίζουμε τη διατομή σε άθροισμα ενός τριγώνου 1 και ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου 2** και των οποίων υπολογίζουμε τα εμβαδά τους $A_1$και $A_2$:

$$A_1 = \frac{4 \cdot 10}{2} = 20cm^2$$

$$A_2 = 10 \cdot 6 = 60cm^2$$

**Συνολικό Εμβαδόν Διατομής: $A = A_1 + A_2 = 80$ cm$^2$**

Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες ($\chi_i$,$y_i$) του Κ.Β. του καθενός από αυτά ως προς το σύστημα αξόνων Οχy, οπότε βρίσκουμε:

$$x_{k1} = \left(\frac{1}{3} * 4\right) + 6 = 7{,}33cm$$

$$x_{k2} = \frac{1}{2} * 6 = 3cm$$

$$y_{k1} = \frac{1}{3} * 10 = 3{,}33\ cm$$

$$y_{k2} = \frac{1}{2} * 10 = 5cm$$

Ισχύει:

$$x_k = \frac{x_{k1} \cdot A_1 + x_{k2} \cdot A_2 + x_{k3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_k = \frac{y_{k1} \cdot A_1 + y_{k2} \cdot A_2 + y_{k3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Οπότε:

$$x_k = \frac{7{,}33 \cdot 20 + 3 \cdot 60}{20 + 60} = 1{,}8325 \text{ cm}$$

$$y_k = \frac{3{,}33 \cdot 20 + 5 \cdot 60}{20 + 60} = \frac{66{,}6 + 300}{80} = 4{,}5825 \text{ cm}$$

**β) Χωρίζουμε τη διατομή σε αλγεβρικό άθροισμα των τριών τμημάτων: του τριγώνου 1, του παραλληλογράμμου 2 και της κυκλικής οπής 3**, των οποίων υπολογίζουμε τα εμβαδά τους $A_1$, $A_2$και $A_3$:

$$A_1 = \frac{4 \cdot 10}{2} = 20\text{cm}^2$$

$$A_2 = 10 \cdot 6 = 60\text{cm}^2$$

$$A_3 = \pi R^2 = 12{,}56\text{cm}^2$$

**Συνολικό Εμβαδόν Διατομής:**

**A** = $A_1 + A_2 + A_3$ = **92,56 cm²**

Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες ($\chi_i$,$y_i$) του Κ.Β. του καθενός από αυτά ως προς το σύστημα αξόνων Οχy, οπότε βρίσκουμε:

$$x_{k1} = \frac{4}{3} + 6 = 7{,}33\text{cm}$$

$$x_{k2} = \frac{6}{2} = 3\text{cm}$$

$$x_{k3} = 4\text{cm}$$

Ισχύει:

$$x_K = \frac{x_{k1} \cdot A_1 + x_{k2} \cdot A_2 + x_{k3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Οπότε:

$$x_k = \frac{7{,}33 \cdot 20 + 3 \cdot 60 - 4 \cdot 12{,}56}{20 + 60 - 12{,}56} =$$

$$= \frac{146{,}6 + 180 - 50{,}24}{67{,}44} = 4{,}09\text{cm}$$

$$y_{k1} = \frac{10}{3} = 3{,}33\,\mathrm{cm}$$

$$y_{k2} = \frac{10}{2} = 5\,\mathrm{cm}$$

$$y_{k3} = 4\,\mathrm{cm}$$

Ισχύει:

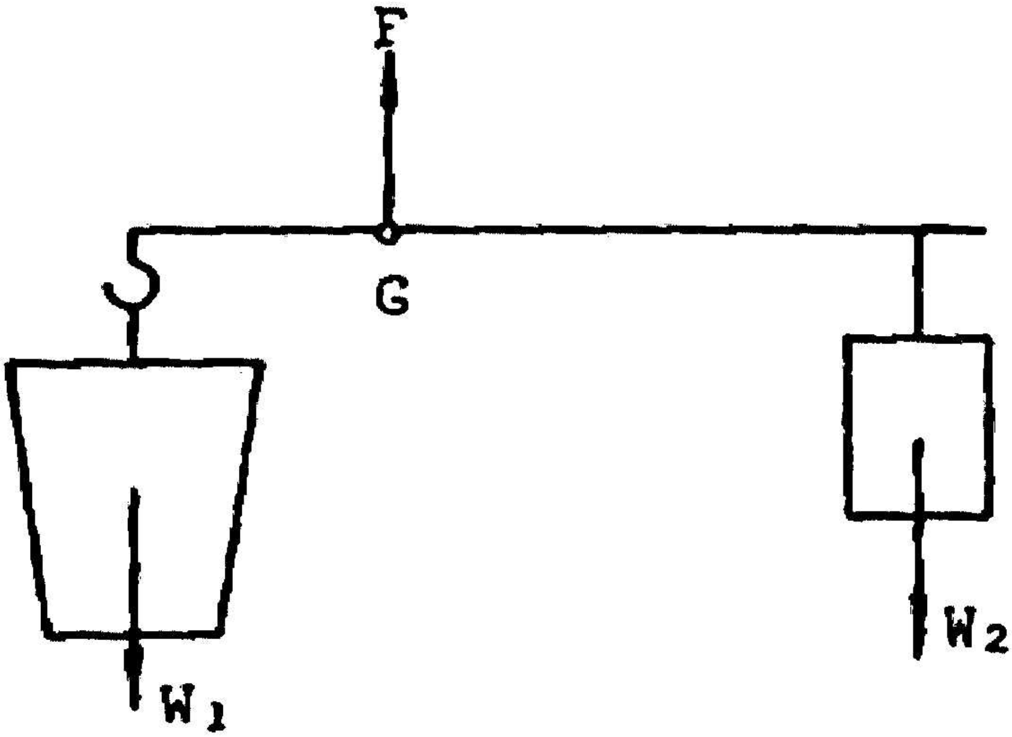
$$y_k = \frac{y_{k1} \cdot A_1 + y_{k2} \cdot A_2 + y_{k3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Οπότε:

$$y_k = \frac{3{,}33 \cdot 20 + 5 \cdot 60 - 4 \cdot 12{,}56}{67{,}44} =$$

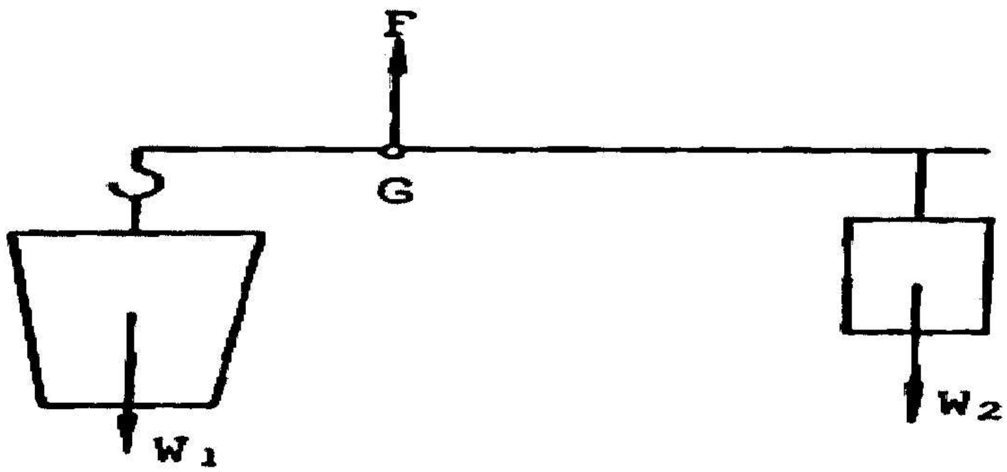
$$= \frac{66{,}6 + 300 - 50{,}24}{67{,}44} = 4{,}69\ \mathrm{cm}$$

**<u>Παράδειγμα 6:</u>** Να προσδιοριστεί το κέντρο βάρους G του κανταριού του σχήματος:




<u>Λύση:</u>

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος Δ.Ε.Σ. του κανταριού:



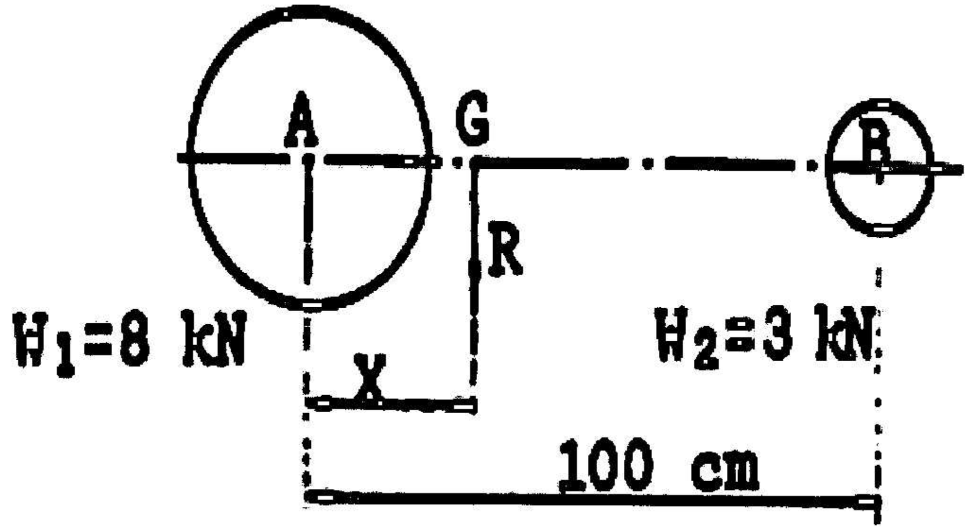

Η δύναμη F είναι ίση και αντίθετη με τη συνισταμένη των $W_1$ και $W_2$.

ΣFy = 0 =>

⇒ $-W_1 - W_2 + F = 0$ =>

⇒ $F = W_1 + W_2 = 8 + 3 = 11KN$

Μπορούμε να παραστήσουμε σχηματικά τη διάταξη και ως εξής:




Όπου R η συνισταμένη των $W_1$ και $W_2$.

Εφόσον το Καντάρι ισορροπεί ισχύει η εξίσωση ισορροπίας των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο της μάζας του.

Οπότε έχουμε:

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F \cdot X - W_2 \times 100 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{W_2 x 100}{R} \quad \Rightarrow$$

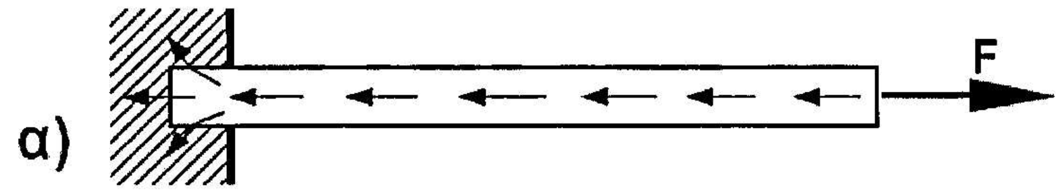
$$\Rightarrow X = \frac{3x100}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{300}{11} = 27{,}27 \text{cm} \Rightarrow$$

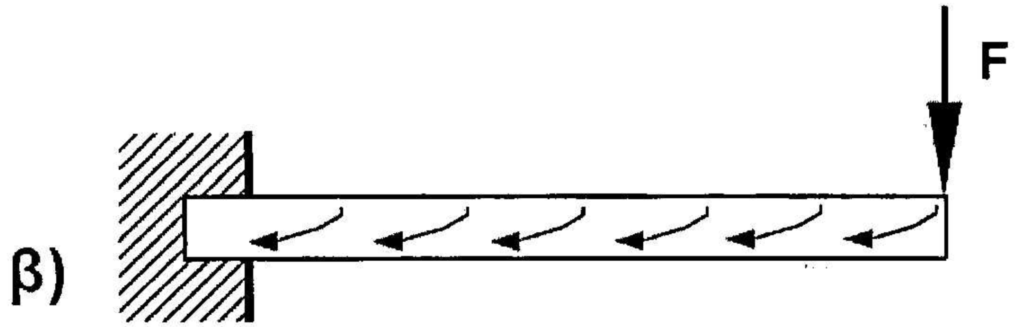
$\Rightarrow$ X = 27,27 cm => X = 272,2 mm.

# ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Μ,Ν,Q

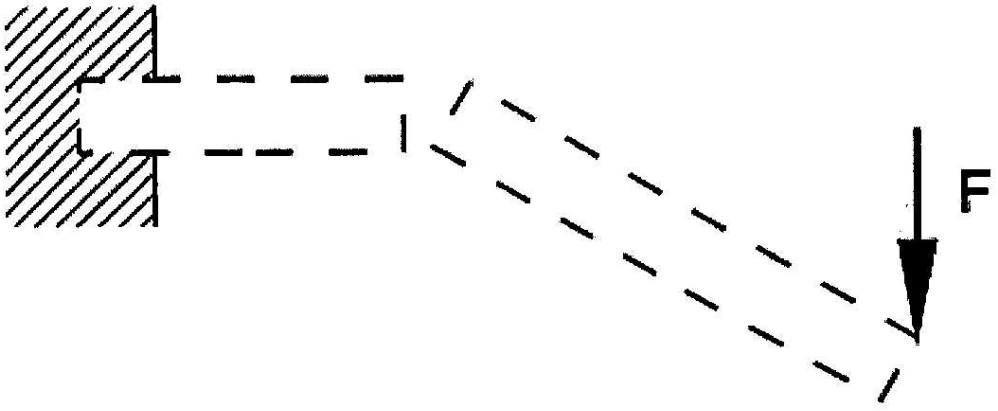
Τα φορτία που ασκούνται σε κάποιο σώμα από εξωτερικές αιτίες μεταδίδονται στο εσωτερικό του, και διατρέχουν το σώμα για να μεταδοθούν στις στηρίξεις.

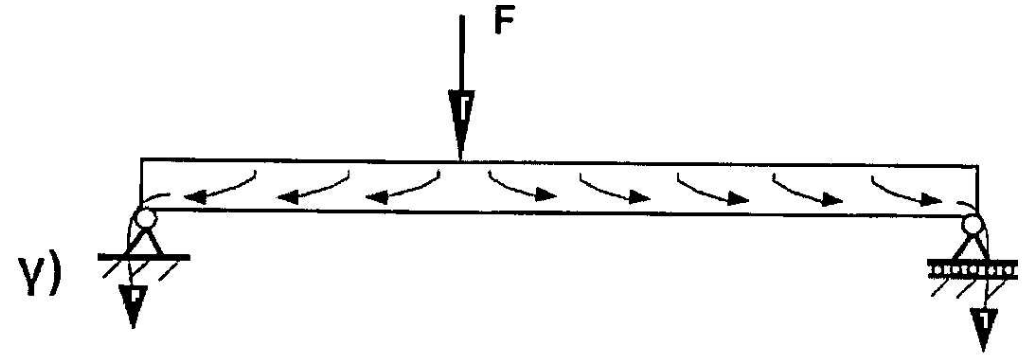



α) Δύναμη παράλληλη με το μήκος της δοκού μεταβιβάζεται μέσω της δοκού αναλλοίωτη.




β) Όταν μεταβιβάζεται μία δύναμη κάθετη στο μήκος της δοκού, δημιουργείται ταυτόχρονα και μια ροπή. (Καταλαβαίνουμε την ύπαρξη της ροπής από το ότι μετά από τυχόν θραύση το δεξιό τμήμα περιστρέφεται πριν πέσει).

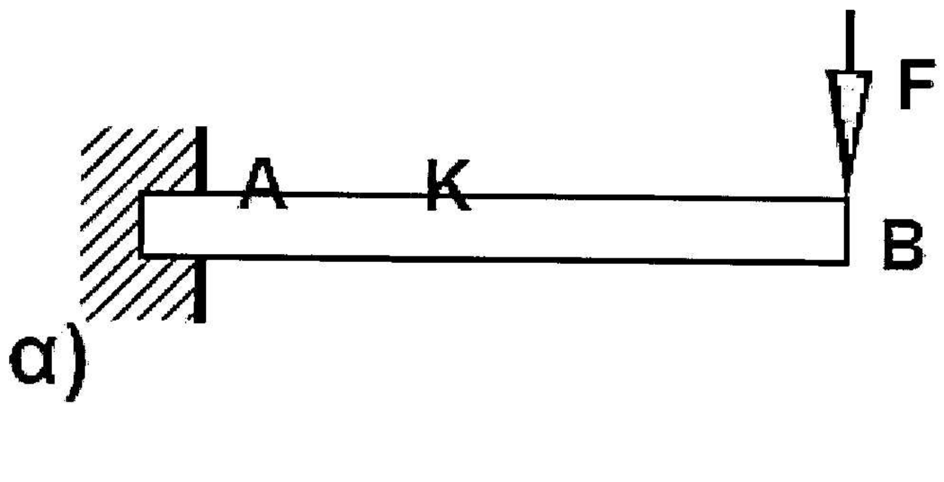




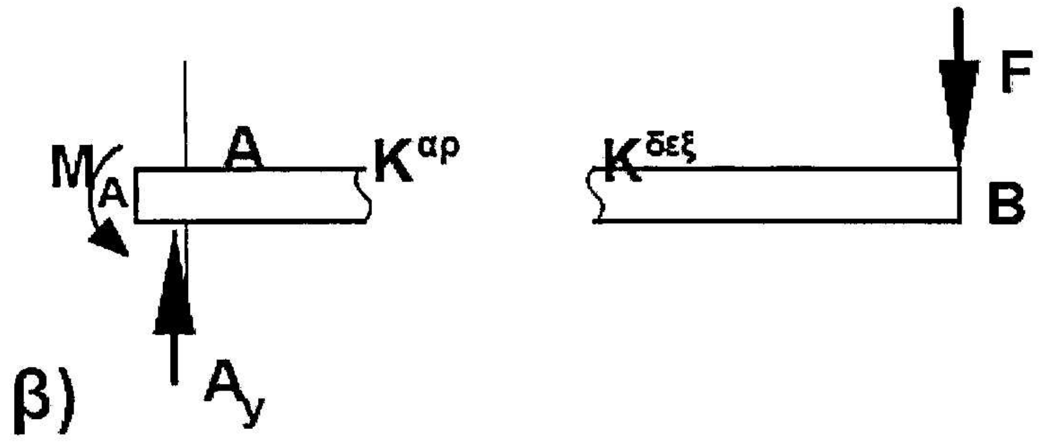

γ) Όταν η δοκός έχει δύο στηρίξεις, τότε η συνολική δύναμη F χωρίζεται σε δύο μέρη, από τα οποία το ένα μεταβιβάζε-ται στην αριστερή στήριξη και το άλλο στη δεξιά.

Αν τα φορτία διατομής ξεπεράσουν τα όρια αντοχής του σώματος, τότε το σώμα παθαίνει μηχανική βλάβη (π.χ. πλαστική παραμόρφωση ή θραύση). Επομένως ο υπολογισμός των φορτίων διατομής είναι το απαραίτητο πρώτο βήμα σε κάθε υπολογισμό αντοχής.

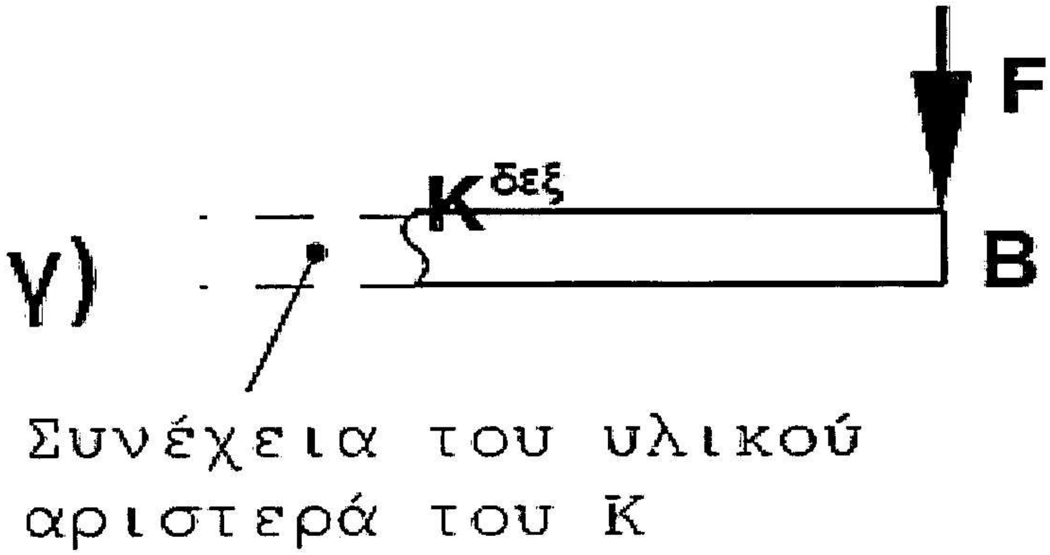
Για να υπολογίσουμε τα φορτία που υπάρχουν στο εσωτερικό του σώματος, σε κάποιο σημείο K που μας ενδιαφέρει, φανταζόμαστε ότι κόβουμε το σώμα σ'εκείνο το σημείο (στο K) και το χωρίζουμε σε δύο τμήματα.




α) Η αρχική δοκός




β) Χωρισμός της δοκού σε τμήματα




γ) Στην πραγματικότητα, το υλικό της δοκού συνεχίζεται και αριστερά από το Κ. Η συνέχεια του υλικού αποτελεί μια στήριξη για το ΚΒ, και συγκεκριμένα μία πάκτωση.

α) **Ισορροπία συνόλου και κάθε τμήματος ξεχωριστά.**

Όπως ισορροπεί ολόκληρη η δοκός κάτω από την επίδραση της εξωτερικής δύναμης F και των φορτίων της πάκτωσης, όμοια πρέπει να ισορροπούν:

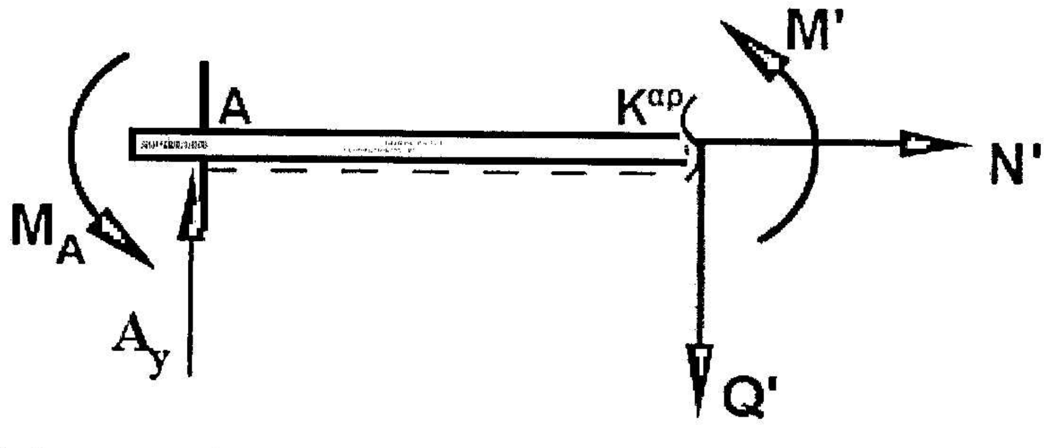
- το δεξιό τμήμα του σώματος (τμήμα ΚΒ) κάτω από την επίδραση της F και των δυνάμεων που ενεργούν στο εσωτερικό της τομής, στο σημείο $K^{δεξ}$

Όπως ισορροπεί ολόκληρη η δοκός κάτω από την επίδραση της εξωτερικής δύναμης F και των φορτίων της πάκτωσης, όμοια πρέπει να ισορροπούν:

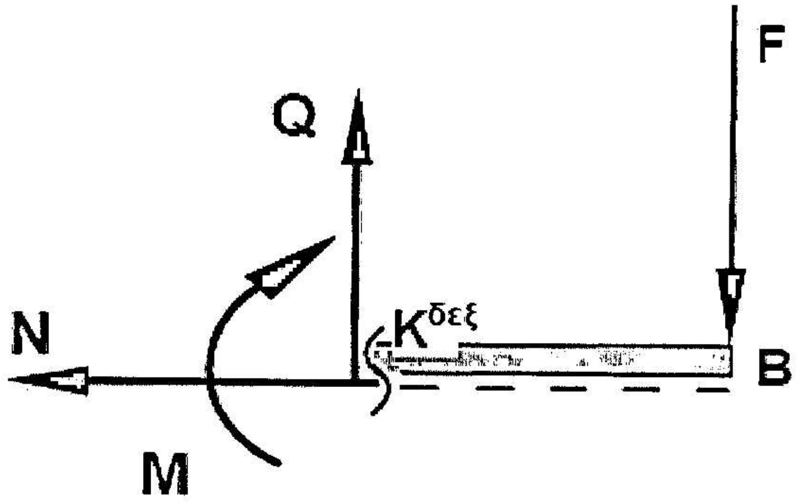
- το αριστερό τμήμα του σώματος (τμήμα ΑΚ) κάτω από την επίδραση των Ay, $M_A$ και των δυνάμεων που ενεργούν στο εσωτερικό της τομής, στο σημείο $K^{αρ}$

## β) Ισοδυναμία της τομής με πάκτωση

Στο σημείο $K^{δεξ}$ ενεργούν εκείνα τα φορτία που θα προέκυπταν αν το τμήμα ΚΒ στηριζόταν στο Κ με πάκτωση. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι στις **δύο όχθες της τομής $K^{δεξ}$, $K^{αρ}$** ενεργούν τα φορτία που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (ίδια με τα φορτία της πάκτωσης – τους έχουμε δώσει όμως τα ονόματα N, Q, M και N', Q', M' αντίστοιχα).




Τμήματα της δοκού και τα φορτία στις δύο όχθες της τομής.



Τμήματα της δοκού και τα φορτία στις δύο όχθες της τομής.

γ) **Αλληλεπίδραση των δύο τμημάτων του σώματος:** Τα φορτία N, Q, M δεν ενεργούν αυτόνομα στο εσωτερικό του σώματος, αλλά εκφράζουν την αλληλεπίδραση ανάμεσα στα δύο τμήματα του σώματος: Το αριστερό τμήμα ΑΚ ασκεί στο δεξιό τμήμα ΚΒ τα φορτία N, Q, M, ενώ το δεξιό στο αριστερό τα N', Q', M'.

δ) **Αξίωμα δράσης – αντίδρασης:**

Πρέπει να επαληθεύεται το αξίωμα δράσης – αντίδρασης, άρα πρέπει οι N, N' να έχουν ίσα μεγέθη και αντίθετες φορές, ομοίως οι Q, Q' και οι M, M'. (Για το λόγο αυτό, στη θέση των N', Q', M' χρησιμοποιούμε τα σύμβολα N, Q, M, ώστε να εξασφαλίζεται αυτόματα η ισότητα των αριθμητικών τιμών).

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τα φορτία διατομής της δοκού, ακολουθούμε μια διαδικασία που αρχίζει με τα εξής βήματα:

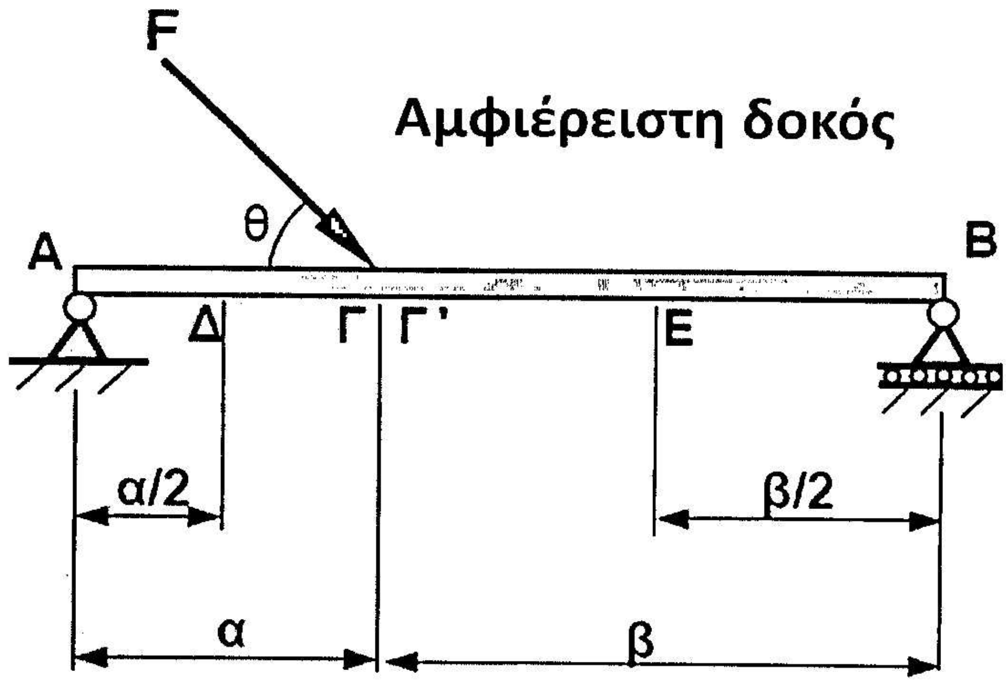
1. Επιλέγουμε αυθαίρετα μία από τις δύο πλευρές της δοκού (συνήθως την κάτω πλευρά) ως πλευρά αναφοράς (ή στην επίσημη γλώσσα **"ίνα αναφοράς"). Τοποθετούμε μία διακεκομμένη γραμμή για να θυμόμαστε ποια είναι η ίνα** αναφοράς.
2. Κόβουμε το δοκάρι και ξανασχεδιάζουμε το ένα μόνο από τα δύο τμήματά του. Τοποθετούμε στην τομή τα **φορτία διατομής ως εξής:** μία δύναμη παράλληλη με το μήκος του δοκαριού, που την ονομάζουμε N, και την τοποθετούμε έτσι ώστε να κατευθύνεται **προς τα έξω, να είναι δηλαδή εφελκυστική για το δοκάρι.**
3. Μία δύναμη κάθετη στο μήκος της δοκού, που την ονομάζουμε **διατμητική δύναμη, την συμβολίζουμε με Q, και η κατεύθυνσή της προκύπτει αν στρέψουμε την N κατά $90^o$ κατά τη φορά του ωρολογιού.**

4.- μία ροπή M που ονομάζεται **καμπτική ροπή, και και την τοποθετούμε στην** κατεύθυνση που εφελκύει την ίνα αναφοράς.

Οι παραπάνω κανόνες για τις κατευθύνσεις των N, Q, M ονομάζονται **συμβάσεις θετικής φοράς.** Δεν επιβάλλονται από τους νόμους της φυσικής, αντίθετα καθιερώνονται με μία αυθαίρετη συμφωνία που έκαναν μεταξύ τους οι μηχανικοί για να τυποποιήσουν την εργασία τους.

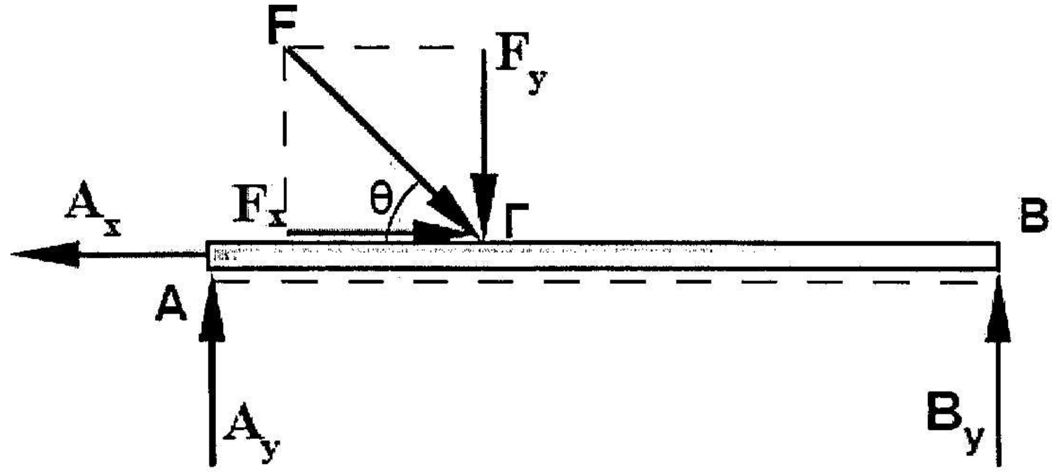
Όταν η πραγματική κατεύθυνση του N, του Q ή του M είναι αντίθετη από αυτή που προκύπτει από τις συμβάσεις θετικής φοράς, η αριθμητική τιμή του φορτίου θα προκύψει αρνητική.

**Παράδειγμα 1:** Στη δοκό του σχήματος της επόμενης διαφάνειας, να βρεθούν τα φορτία διατομής στα παρακάτω σημεία: α) στα Γ, Γ' (λίγο αριστερά και λίγο δεξιά του σημείου εφαρμογής της F), β) στα Δ,Ε και γ) στα άκρα A, B. (Δίδονται: F = 1.414 N, 0 = 45°, α = 0,3 m και β = 0,7 m).




**Λύση:**

Σχεδιάζουμε το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος της Δοκού:




Αναλύουμε τη δύναμη F σε δύο κάθετες συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις X και Y:

Fx = F * cosθ = 1.414 N * cos45 => **Fx = 1000 N.**

Fy = F * sinθ = 1.414 N * sin45° => **Fy = 1000 N.**

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη δικό και υπολογίζουμε τα φορτία των στηρίξεων:

ΣFx = 0 => Fx - Ax = 0 =>Ax = Fx => **Ax = 1000 N.**

$\Sigma M_A$ = 0 =>By*(α + β) - Fy * α = 0 =>

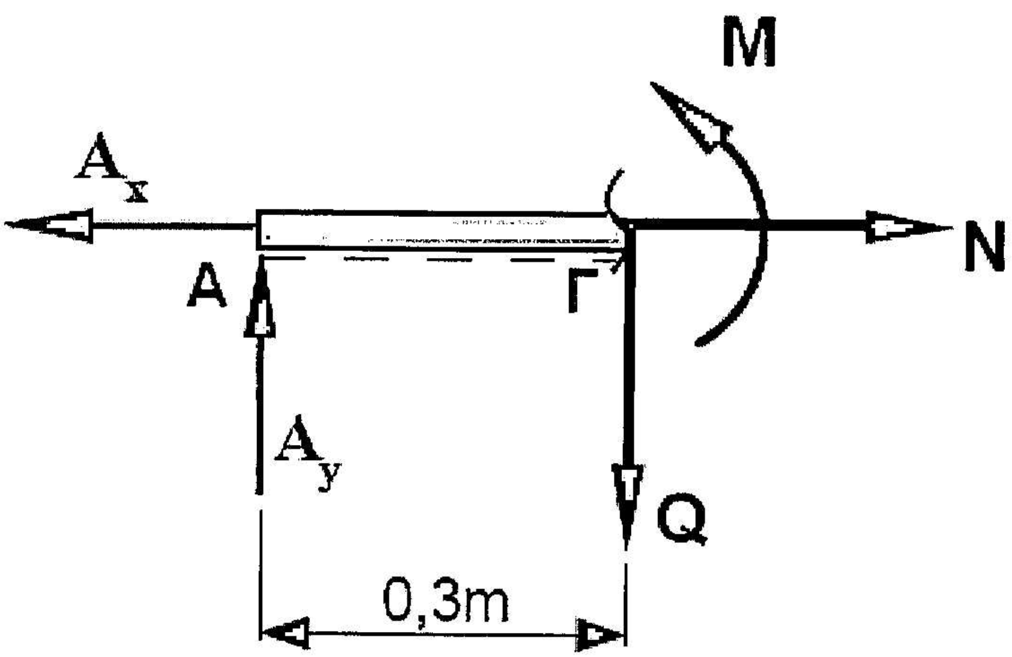
⇒ By = Fy * α / (α + β) => **By = 300 N.**

ΣFy = 0 => Ay - Fy + By = 0 =>

=> Ay = Fy – By =1000-300=> **Ay = 700** N.

Επιλέγουμε τη θέση της ίνας αναφοράς από κάτω από τη δοκό.

Για να βρούμε τα φορτία διατομής N, Q, M στο σημείο Γ, φανταζόμαστε τη δοκό κομμένη στο Γ και ξανασχεδιάζουμε μόνο ένα από τα δύο τμήματά της (έστω το αριστερό τμήμα ΑΓ).




Παρατηρούμε ότι στο σχήμα υπάρχουν τρία άγνωστα φορτία, τα N, Q, M, που μπορούν να υπολογισθούν από τις εξισώσεις ισορροπίας.

ΣFx = 0 => N - Ax = 0 => N - Ax = 0 => N = Ax =>

⇒ **N = 1000 N.**

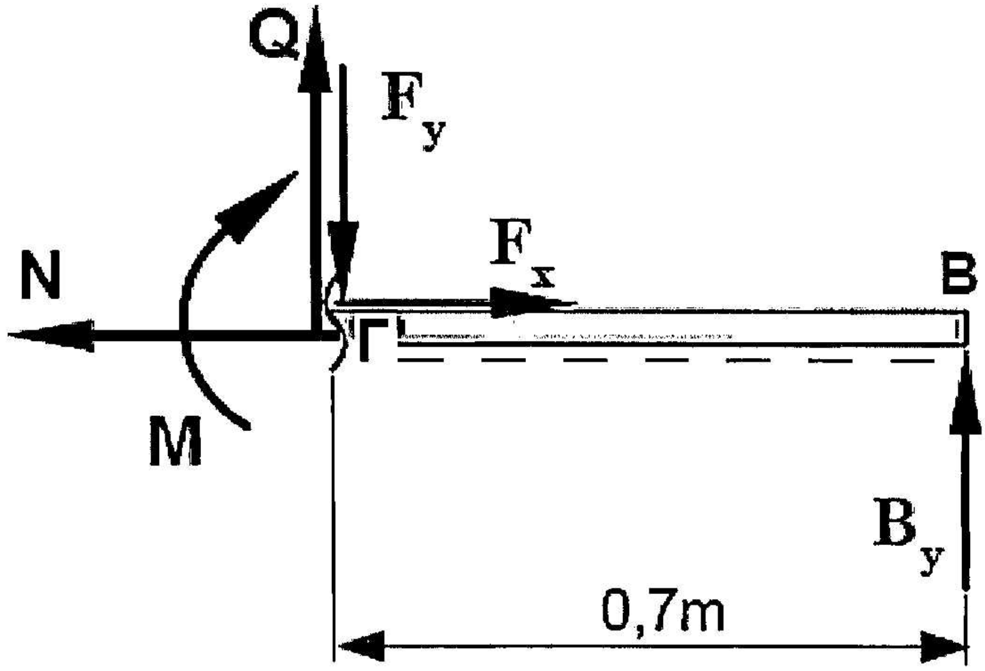
ΣFy = 0 => Ay - Q = 0 => Q = Ay => **Q = 700 N.**

Επιλέγουμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση ισορροπίας των ροπών για το σημείο της τομής (εδώ το Γ) διότι δεν εμφανίζονται στην εξίσωση των ροπών οι άλλοι άγνωστοι N και Q.

$\Sigma M_{\Gamma} = 0 \Rightarrow M - A_y{}^{*}0{,}3\ m = 0 \Rightarrow M = A_y{}^{*}0{,}3\ m \Rightarrow$

⇒ M = 700N * 0,3m => M = **210 Nm** => **M = 210 Nm.**

Αν εξετάζαμε το τμήμα δεξιά της τομής (δηλ. το Γ'Β), θα εμφανίζονταν στο σχήμα και οι δυνάμεις Fx και Fy (που στο αριστερό τμήμα ΑΓ δεν εμφανίστηκαν).




Σε αυτήν την περίπτωση τα αποτελέσματα θα προέκυπταν ως εξής:

$\Sigma Fx = 0 \Rightarrow Fx - N = 0 \Rightarrow N = Fx \Rightarrow$ **N = 1.000 N.**

$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow Q - Fy + By = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{Q = Fy - B_y}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q = 1000 - 300\ N \Rightarrow$ **Q = 700 N.**

$\Sigma M_{\Gamma'} = 0 \Rightarrow -M + By * 0{,}7\ m = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = By * 0{,}7\ m \Rightarrow M = 300\ N * 0{,}7\ m \Rightarrow$ **M = 210 Nm.**

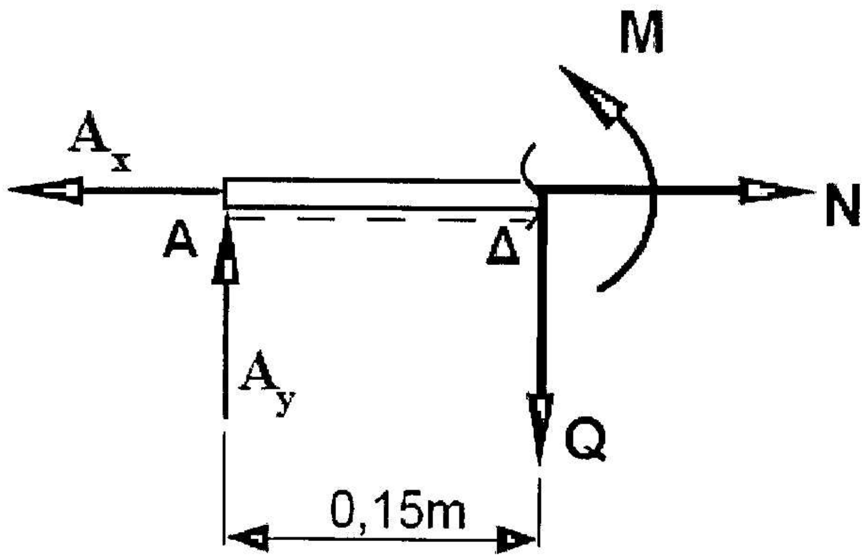
Η Fy δεν εμφανίσθηκε στην εξίσωση των ροπών επειδή η απόστασή της από το κέντρο των ροπών Γ είναι απειροστή, πρακτικά ίση με το μηδέν.

Οι αριθμητικές τιμές, προκύπτουν ίδιες (M = 210 Nm) και στις δύο περιπτώσεις.

Ισχύει ο κανόνας: Όταν τα φορτία στήριξης της δοκού (εδώ τα Ax, Ay, By) έχουν υπολογισθεί σωστά, τότε τα φορτία διατομής

N, Q, M προκύπτουν ίδια είτε υπολογισθούν από την ισορροπία του αριστερού τμήματος της δοκού είτε του δεξιού.

Για τα φορτία διατομής στο Δ, το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος είναι το εξής:




Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις ισορροπίας της δοκού παίρνουν τη μορφή:

ΣFx = 0 => N - Ax = 0 => N = Ax => N = **1000 N.**

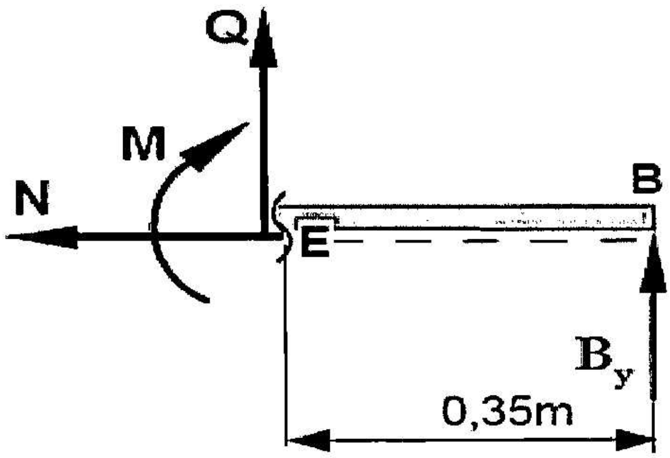
ΣFy = 0 => Ay - Q = 0 => Ay = Q => **Q = 700 N.**

$\Sigma M_\Delta$ = 0 => - Ay * 0,15m + M = 0=> M = A y * 0,15 m =>

$\Rightarrow$ M = 700N * 0,15 m => **M = 105 Nm.**

Για να βρούμε τα φορτία διατομής στο Ε θα εξετάσουμε το τμήμα της δοκού <u>δεξιά του Ε, επειδή δέχεται λιγότερες δυνάμεις από ότι το αριστερό τμήμα ΑΓΕ.</u>

Για τα φορτία διατομής στο Ε, το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος της δοκού είναι το εξής:




$\Sigma Fx = 0 \Rightarrow \mathbf{N = 0}$

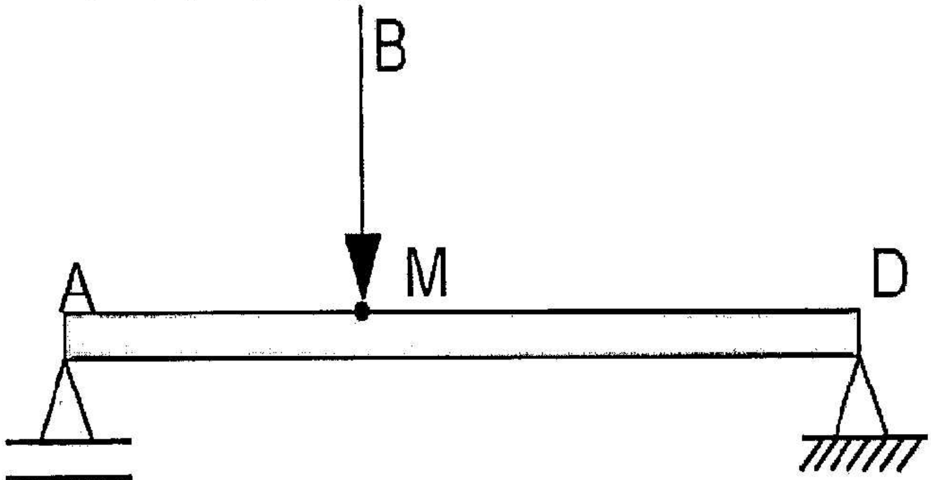
$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow Q + By = 0 \Rightarrow Q = -By \Rightarrow \mathbf{Q = -300\ N}.$

$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow -M + By * 0{,}35m = 0 \Rightarrow -M + By = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = By \Rightarrow M = 300\ N * 0{,}35\ m \Rightarrow \mathbf{M = 105\ Nm}.$

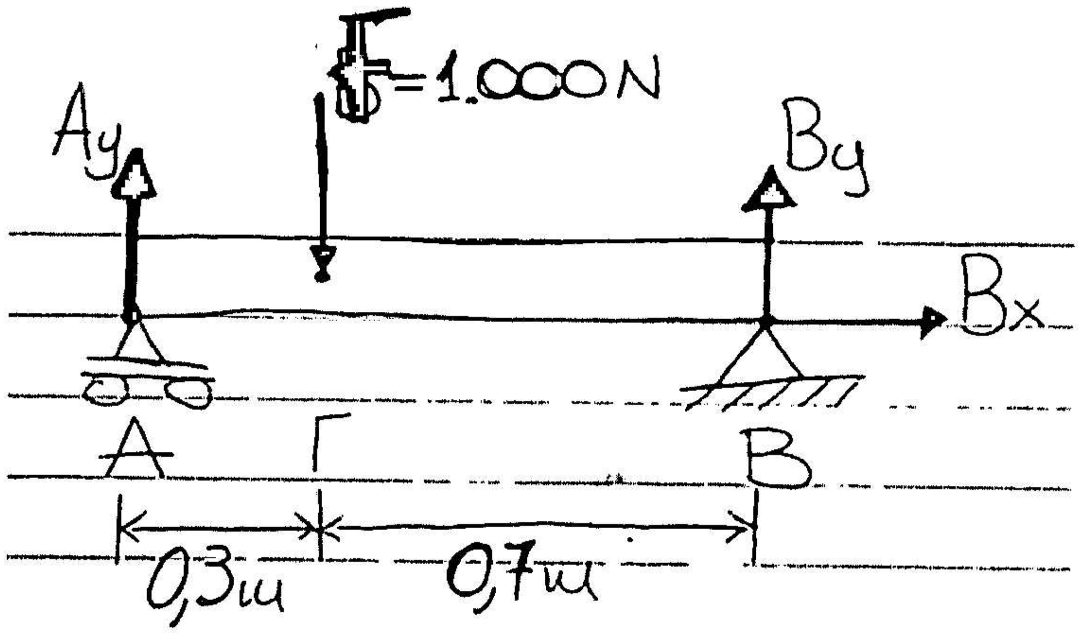
Παρατηρούμε ότι σε διάφορες θέσεις κατά μήκος του δοκαριού προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματά για τα φορτία διατομής (λέμε ότι τα φορτία διατομής N,Q, M μεταβάλλονται κατά μήκος της δοκού).

**Παράδειγμα 2:** Να εκπονήσετε τα διαγράμματα φορτίων διατομής N,Q, και M για τη δοκό του παρακάτω σχήματος, η οποία φορτίζεται κατακόρυφα από τη δύναμη F = 1.000 N, της οποίας ο φορέας απέχει 0,3 m από το A και 0,7 m από το B.



**Λύση:**

Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. της δοκού μας.




Κατόπιν εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη δοκό και υπολογίζουμε τα φορτία των στηρίξεων:

$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow \boxed{B_x = 0}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_y - F + B_y = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_y + B_y = F \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_y + B_y = +1000 \quad (1)$$

$$\Sigma M_B = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -A_y \cdot 1 + F \cdot 0{,}7 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_y = 0{,}7 \cdot 1000 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_y = 700N} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$700 + B_y = 1000 \Longrightarrow$$

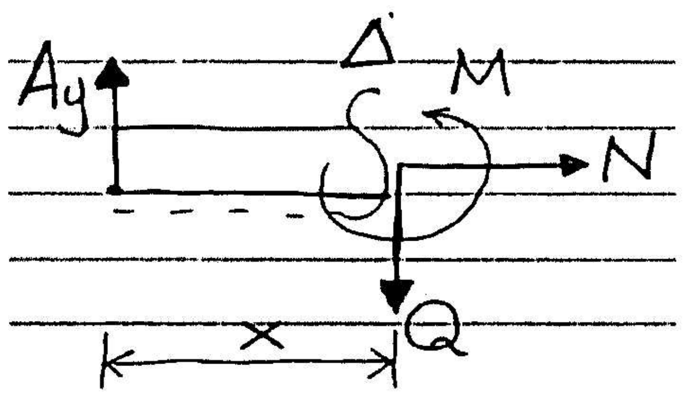
$$\Longrightarrow \boxed{B_y = 300N}$$

Χωρίζουμε τη δοκό σε δύο μέρη το ΑΓ και το ΓΒ.

Αρχικά υπολογίζουμε τα διαγράμματα N, Q, M για το τμήμα ΑΓ.

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ του τμήματος ΑΓ της δοκού. Το σημείο αυτό απέχει έστω x από το σημείο Α, με το x να κυμαίνεται μεταξύ του 0 και 0,3 m.

Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. του τμήματος ΑΔ της δοκού.



Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για το τμήμα ΑΔ της δοκού και έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow \boxed{N = 0}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_y - Q = 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} 700 - Q = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q = 700N}$$

$$\Sigma M_{\Delta} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow M - Q \cdot x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow M = Q \cdot x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{M = 700 \cdot x}$$

Άρα η συνάρτηση των καμπικών ροπών Μ για το τμήμα ΑΓ της δοκού είναι μια πρωτοβάθμια συνάρτηση, συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι μία ευθεία.

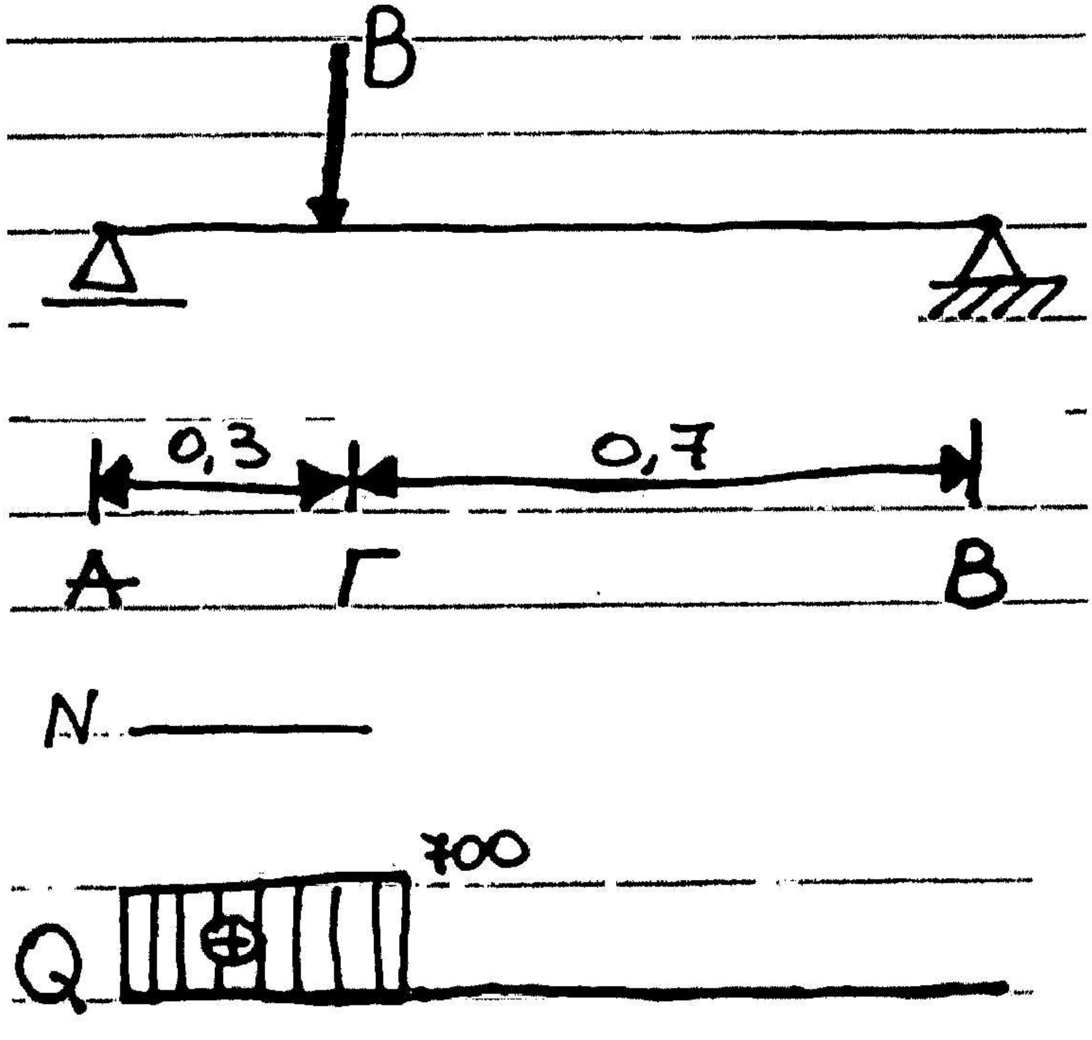
Προκειμένου να σχεδιάσουμε μια ευθεία αρκεί να γνωρίζουμε δύο σημεία αυτής. Επιλέγουμε να προσδιορίσουμε τα δύο ακραία σημεία για x=0 δηλαδή για την περίπτωση όπου το Γ τείνει να συμπέσει με το Α και δεύτερον για x=0,3 όπου το Γ τείνει να ταυτιστεί με το Β.

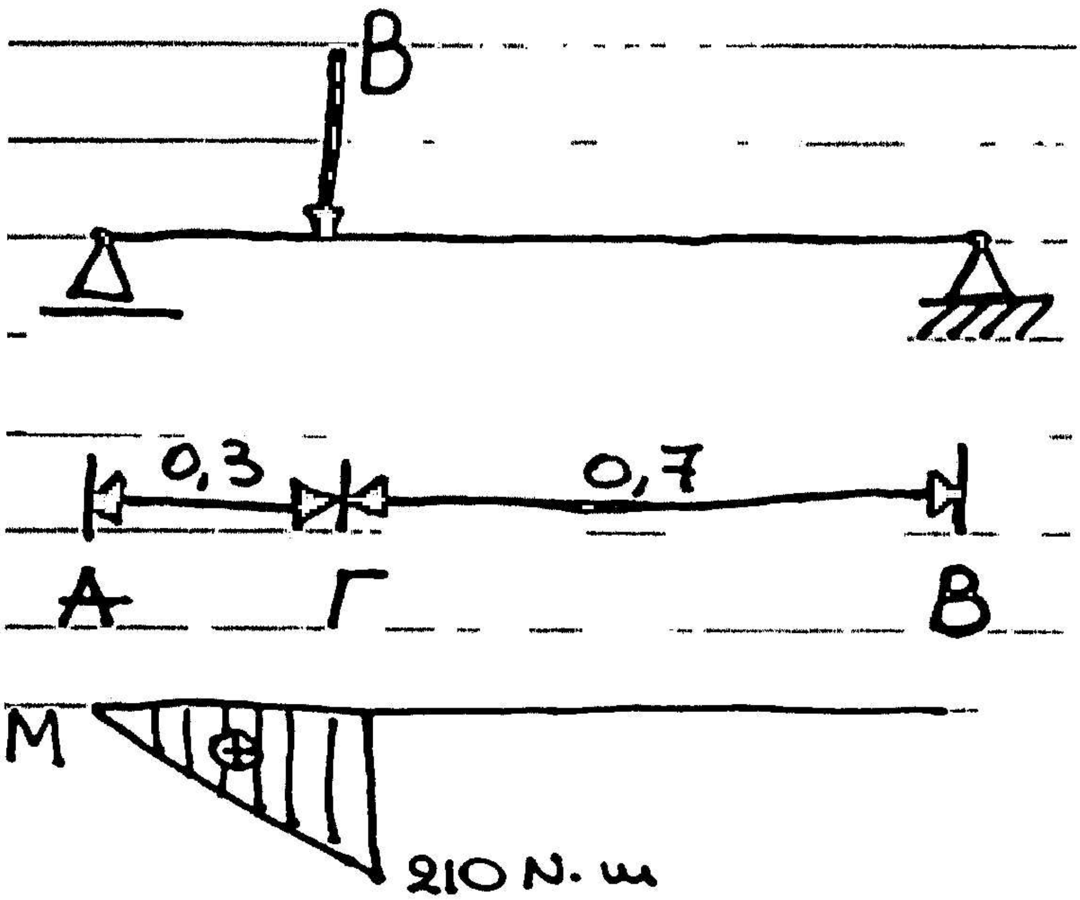
Οπότε έχουμε:

- Για x = 0 από $(3) \Longrightarrow \boxed{M = 0N \cdot m}$
- Για x = 0,3 από $(3) \Longrightarrow M = 700 \cdot 0{,}3 \Rightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{M = 210N \cdot m}$$

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα N, Q και M για το τμήμα ΑΓ της δοκού.

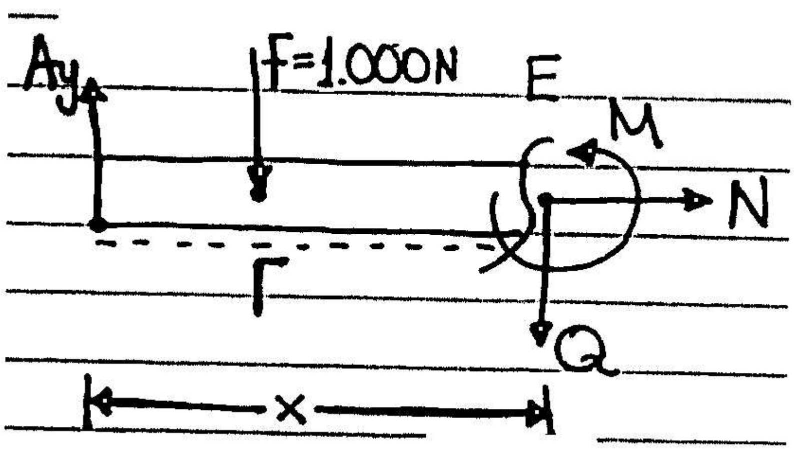





Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα διαγράμματα Ν, Q και Μ για το τμήμα ΓΒ της Δοκού.

Θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΓΒ της δοκού. Το σημείο αυτό απέχει έστω απόσταση x από το σημείο Α, με το x να κυμαίνεται μεταξύ του 0,3 και 1m.

Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. του τμήματος ΑΕ της δοκού:



Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για το τμήμα ΑΕ της δοκού και έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y - F - Q = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 700 - 1000 - Q = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = -300N}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -F \cdot 0{,}3 - Q \cdot x + M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1000 \cdot 0{,}3 - (-300) \cdot x + M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -300 + 300 \cdot x + M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 300 - 300 \cdot x}$$

Άρα η συνάρτηση καμπτικών ροπών Μ και για το τμήμα ΓΒ της δοκού είναι μια πρωτοβάθμια συνάρτηση, συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι μία ευθεία. Οπότε για να τη σχεδιάσουμε απαιτείται να προσδιορίσουμε δύο οποιοδήποτε σημεία της.

Έστω ότι επιλέγουμε να προσδιορίσουμε τα δύο ακραία σημεία της που αντιστοιχούν στα σημεία Γ και Β της δοκού, δηλαδή σε x=0,3 και x=1m, αντιστοίχως.

Από (4) για x=0,3 δηλαδή για το σημείο Γ της δοκού έχουμε:

$$M = 300 - 300 \cdot 0{,}3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 300 - 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 210N \cdot m}$$

Όπως διαπιστώνουμε επιβεβαιώνεται η ορθότητα του αποτελέσματος που προέκυψε από τη μελέτη του τμήματος ΑΓ της δοκού.

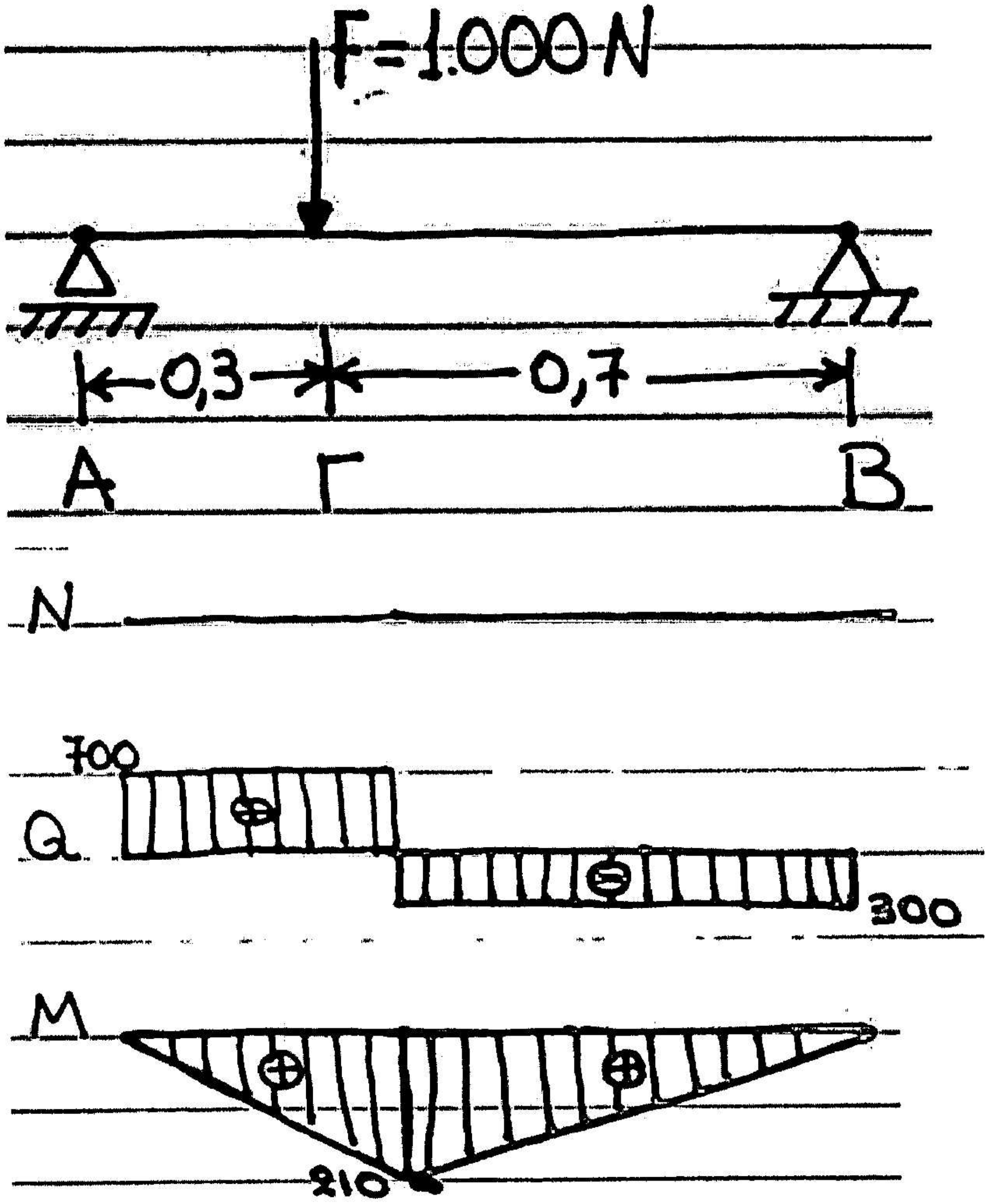
Από την (4) για x=1m δηλαδή για το σημείο Β της δοκού έχουμε:

$$M = 300 - 300 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 300 - 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 0N \cdot m}$$

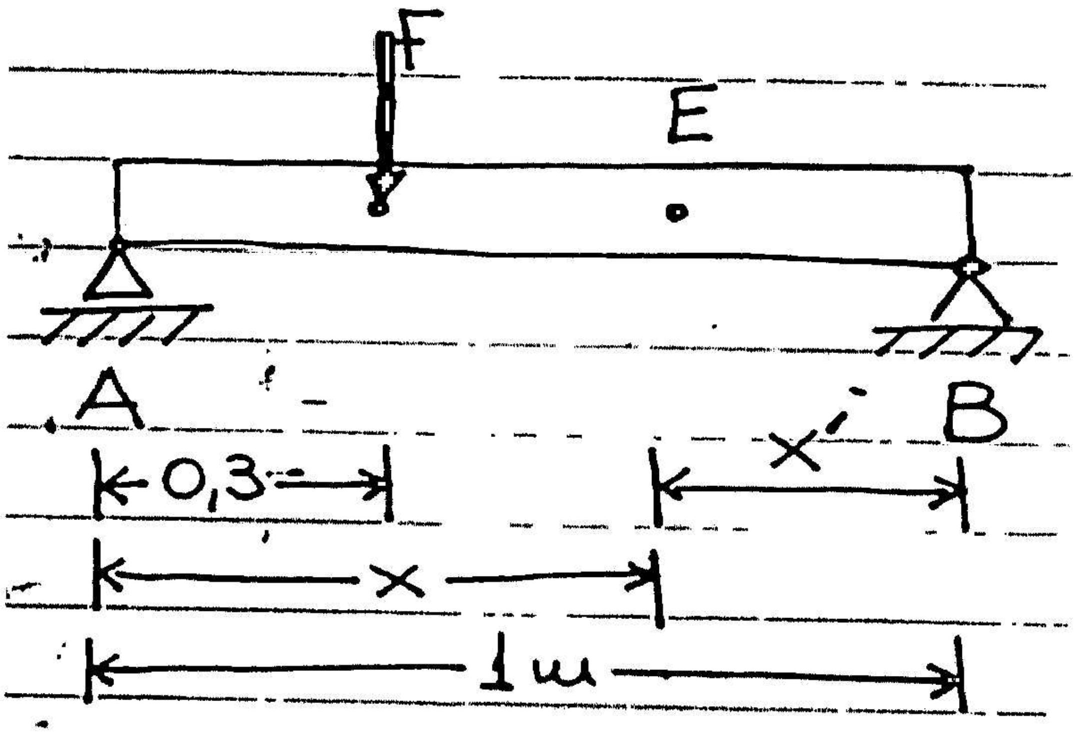
Αφού προσδιορίσαμε ότι η συνάρτηση καμπτικών ροπών για το τμήμα ΓΒ της δοκού είναι μία πρωτοβάθμια εξίσωση ως προς x και αφού προσδιορίσαμε τα δύο (2) οριακά σημεία αυτής για x=0,3 και για x=1m, μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε το διάγραμμα M για το τμήμα ΓΒ της δοκού.




Ένας άλλος τρόπος επίλυσης της άσκησης, όσον αναφορά το δεύτερο τμήμα ΓΒ της δοκού είναι ο εξής:

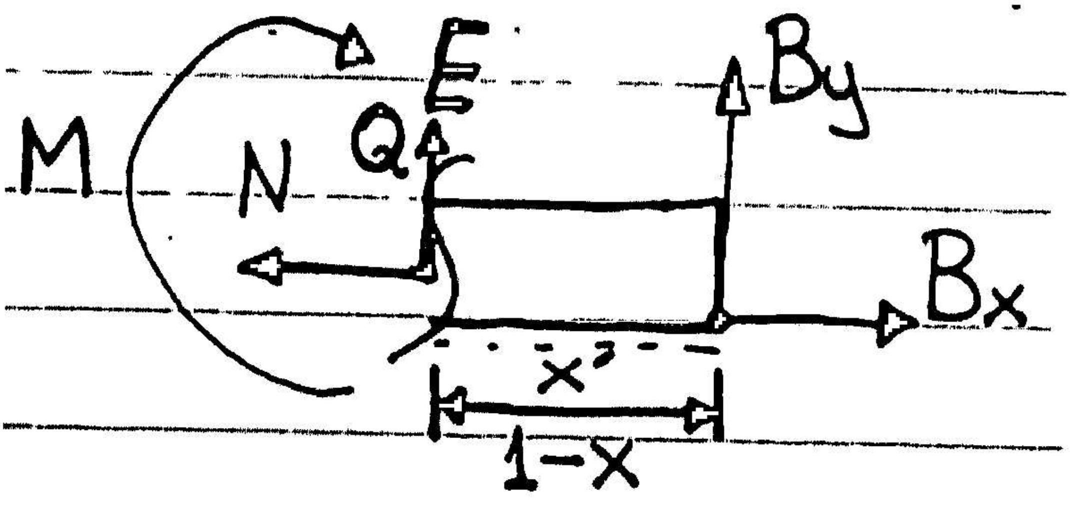
Έστω τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΓΒ της Δοκού.

Το σημείο Ε έστω ότι απέχει από το άκρο Β της Δοκού απόσταση x′.




Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα η απόσταση x′ του Ε από το Β είναι ίση με (1-x), όπου x η απόσταση του Ε από το Α.

Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. του τμήματος ΕΒ της Δοκού.



Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για το τμήμα ΓΒ της δοκού και έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B_x - N = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 - N = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{N = 0\,N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q + B_y = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Q = -B_y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q = -300N}$$

$$\Sigma M_B = 0 \Longrightarrow$$

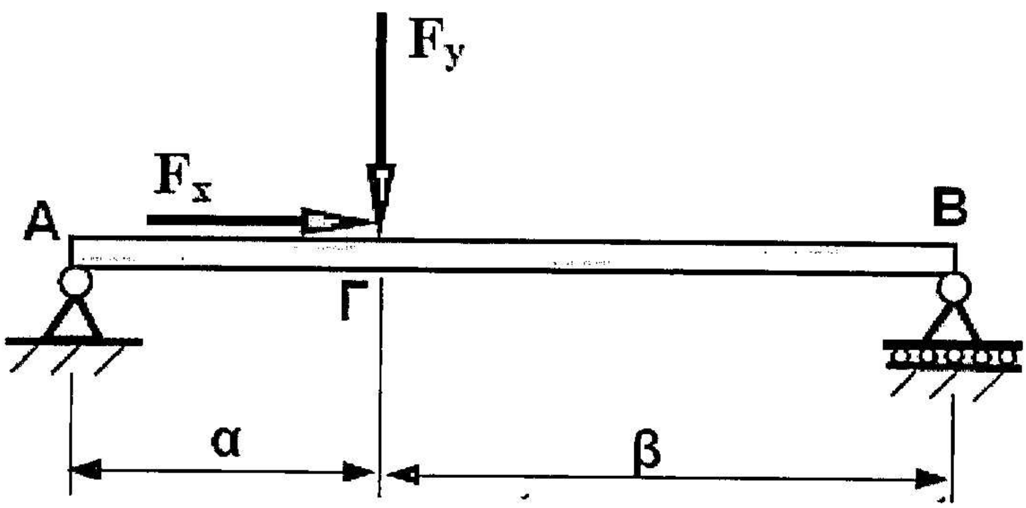
$$\Longrightarrow -M - Q \cdot (1 - x) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow M = -Q \cdot (1 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 300 \cdot (1 - x)}$$

Δηλαδή καταλήξαμε στις ίδιες τιμές N και Q και στην ίδια συνάρτηση καμπτικών ροπών με την προηγούμενη μέθοδο, γεγονός που αποδεικνύει την ορθότητα των υπολογισμών μας.

<u>**Παράδειγμα 3:**</u> Για το δοκάρι του σχήματος της επόμενης διαφάνειας, να βρεθούν τα διαγράμματα φορτίων διατομής σε ολόκληρο το μήκος του.




**Δίδονται: Fx = 1000 N, Fy = 1000 N,**

**A = 0,3 m και β = 0,7 m.**

<u>**Λύση:**</u>

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη δικό και υπολογίζουμε τα φορτία των στηρίξεων:

ΣFx = 0 => Fx - Ax = 0 => Ax = Fx => **Ax = 1000 N.**

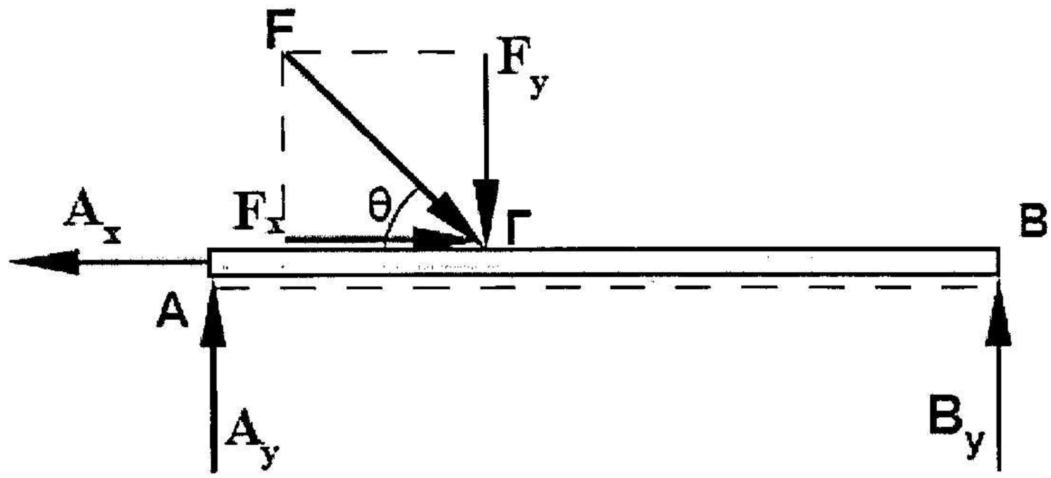
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow By*(\alpha + \beta) - Fy * \alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow By = Fy * \alpha / (\alpha + \beta) \Rightarrow$ **By = 300 N.**

$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow Ay - Fy + By = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Ay = Fy - By = 1000-300 \Rightarrow$ **Ay = 700** N.

Επιλέγουμε τη θέση της ίνας αναφοράς από κάτω από τη δοκό.



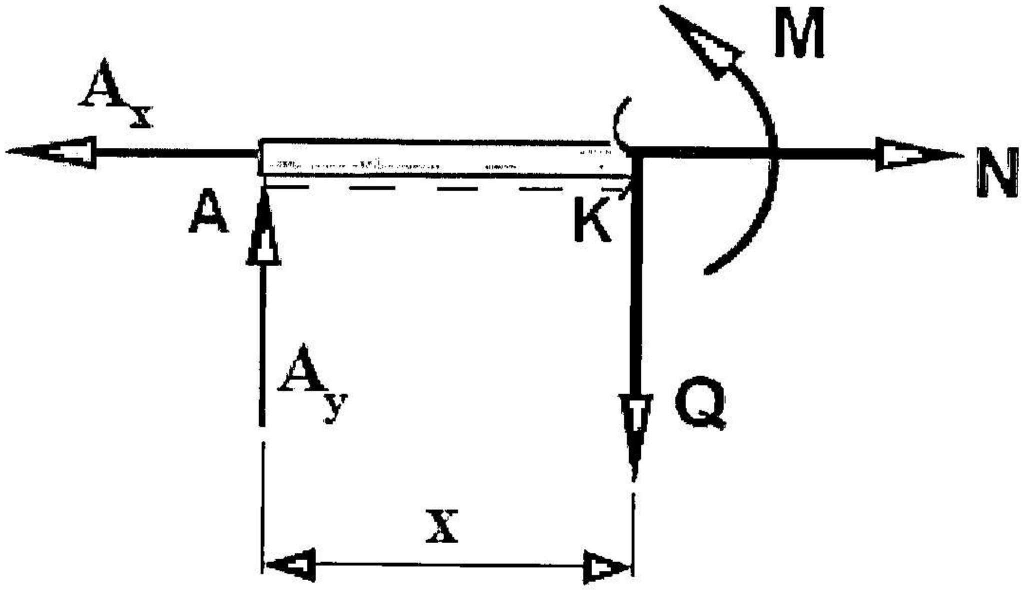

Θα εξετάσουμε αρχικά μία τομή του δοκαριού σε **τυχόν σημείο Κ που βρίσκεται ανάμεσα στα Α και Γ.** Η έκφραση "τυχόν σημείο" σημαίνει "μεταβλητό σημείο" δηλαδή ότι μπορούμε να αλλάξουμε την θέση του μετακινώντας το προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά .

Ονομάζουμε x την απόσταση του Κ από κάποιο σταθερό σημείο, εδώ από το Α.

**Το x δεν είναι άγνωστος κάποιας εξίσωσης αλλά μεταβλητή.**

Οι τιμές του x προσδιορίζονται ως εξής: Στην αριστερή ακραία θέση του Κ (όταν Κ → Α) θα ισχύει x = 0, ενώ όταν Κ → Γ θα ισχύει x = 0,3 m κ.ο.τ.κ..

Εξετάζουμε το αριστερό τμήμα ΑΚ της δοκού. Το Δ.Ε.Σ. του παρουσιάζεται παρακάτω:




$\Sigma Fx = 0 \Rightarrow N = Ax = 1000N$

$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow Q = Ay = 700N$

$\Sigma M_K = 0 \Rightarrow - Ay * x + M = 0 \Rightarrow M = Ay * x \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 700N * x.$

Παρατηρούμε ότι το N είναι σταθερό και ίσο με 1000N ανεξάρτητα από τη θέση τουΚ κατά μήκος του ΑΓ, και όμοια το Q σταθερό και ίσο με 700N.

Η ροπή M, αντίθετα εξαρτάται από τη θέση του K κατά μήκος του ΑΓ. Το αποτέλεσμα για τη ροπή M εκφράζεται όχι με τη μορφή αριθμού, αλλά με τον τύπο: M = 700 * x.

Τα αποτελέσματα λοιπόν γράφονται σωστότερα με την μορφή:

**N = 1000N (σταθερή τιμή) για $0 < x < 0{,}3m$,**

**Q = 700N (σταθερή τιμή) για $0 < x < 0{,}3m$ και**

**M = Ay x => M = 700 * x (Nm) για $0 < x < 0{,}3m$.**

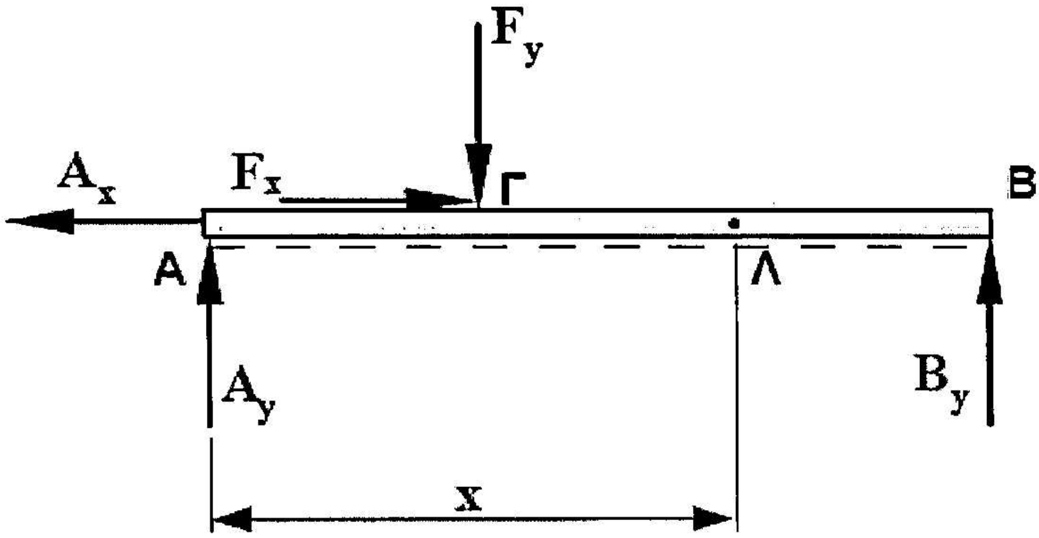
Οι ακραίες τιμές της M για το διάστημα Α έως Γ θα είναι:

- **Στο σημείο Α ισχύει x=0, άρα M = 0**

- **Στο σημείο Γ ισχύει x=0,3m άρα: M=700N * 0,3m = 10 Nm**

Για να υπολογίσουμε τα φορτία διατομήςN, Q, M που ισχύουν στην περιοχή ΓΒ της δοκού, φανταζόμαστε τη δοκό κομμένη σε ένα άλλο τυχόν σημείο Λ το οποίο βρίσκεται μεταξύ Γ και Β.

Αν διαλέξουμε να ονομάσουμε x την απόσταση ΑΛ, και αν εξετάσουμε το αριστερό τμήμα του δοκαριού ΑΓΛ, προκύπτει το παρακάτω σχήμα.

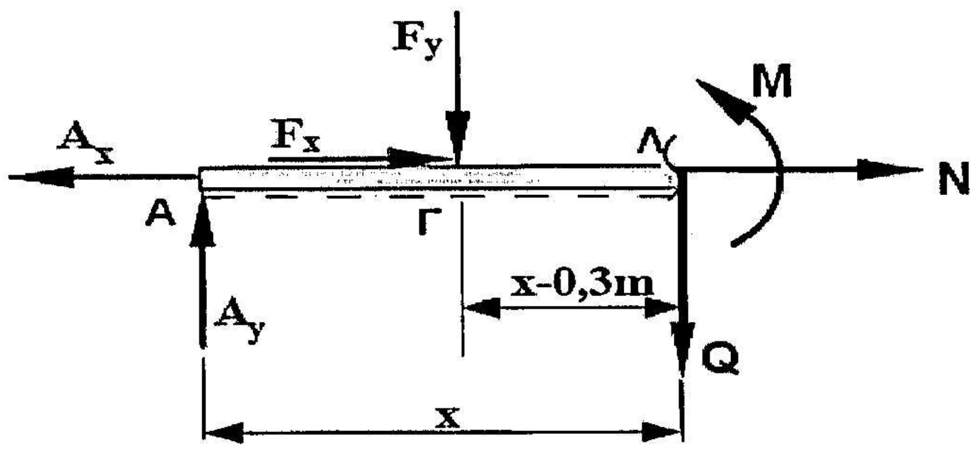



Ακραίες τιμές του x:

για Λ → Γ προκύπτει x = 0,3m, ενώ

για Λ → Β προκύπτει x = 1m.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις τιμές των N, Q και M σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ της δοκού.



Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη δοκό της προηγούμενης διαφάνειας:

$\Sigma Fx = 0 \Rightarrow N + Fx - Ax = 0 \Rightarrow N = Ax - Fx = 0 \Rightarrow \mathbf{N = 0}$.

$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow Ay - Fy - Q = 0 \Rightarrow Q = Ay - Fy \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = 700N - 1000N \Rightarrow \mathbf{Q = -300\ N}$.

$\Sigma M_\Lambda = 0 \Rightarrow Ay * x - Fy * (x - 0{,}3) - M = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = Ay * x - Fy * (x-0{,}3) \Rightarrow M = 700 * x - 1000 * (x - 0{,}3) \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 700 * x - 1000 * x + 300 \Rightarrow \mathbf{M = -300 * x + 300}$.

Τα αποτελέσματα γράφονται και στη μορφή:

**N = 0** (σταθερή τιμή) για $0{,}3m < x < 1m$,

**Q = – 300** N (σταθερή τιμή) για $0{,}3m < x < 1m$

και **M = - 300 * x + 300** για $0{,}3m < x < 1m$.

Οι ακραίες τιμές της M θα είναι:

**Στο σημείο Γ ισχύει x = 0,3 m,**

άρα **M = - 300 * x + 300** => M = - 300 * 0,3 + 300 =>

$\Rightarrow M = -90 + 300 \Rightarrow \mathbf{M = 210\ Nm}$.

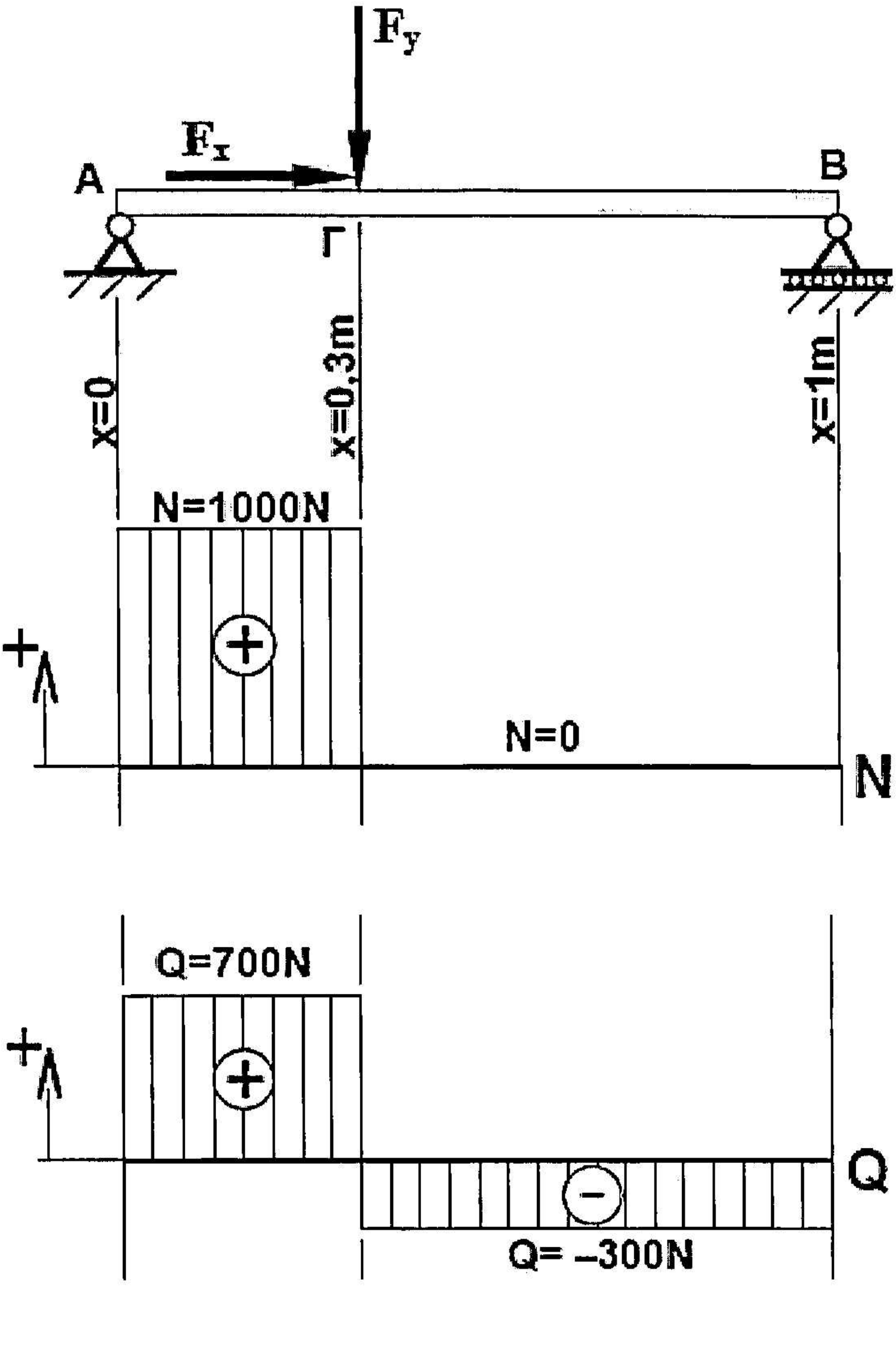
Στο **σημείο B ισχύει x = 1m,** άρα **M = - 300 * x + 300 =>**

$\Rightarrow M = -300 * 1 + 300 \Rightarrow M = -300 + 300 \Rightarrow \mathbf{M = 0\ Nm}$.

Εάν συνοψίσουμε τα αποτελέσματα και τις σχέσεις που βρήκαμε σε γραφική μορφή, παίρνουμε τα διαγράμματα φορτίων διατομής που παρουσιάζονται στις παρακάτω διαφάνειες.

Γνωρίζουμε από τα μαθηματικά ότι η γραφική παράσταση οποιασδήποτε σταθερής συνάρτησης (σταθερή τιμή) είναι μια οριζόντια ευθεία.

Για το λόγο αυτό, οι γραφικές παραστάσεις των N και Q είναι οριζόντιες ευθείες .



Fy
Fx
A
B
Γ
X=0
X=0,3m
X=1m
N=1000N
N=0
N
Q=700N
Q= –300N
Q

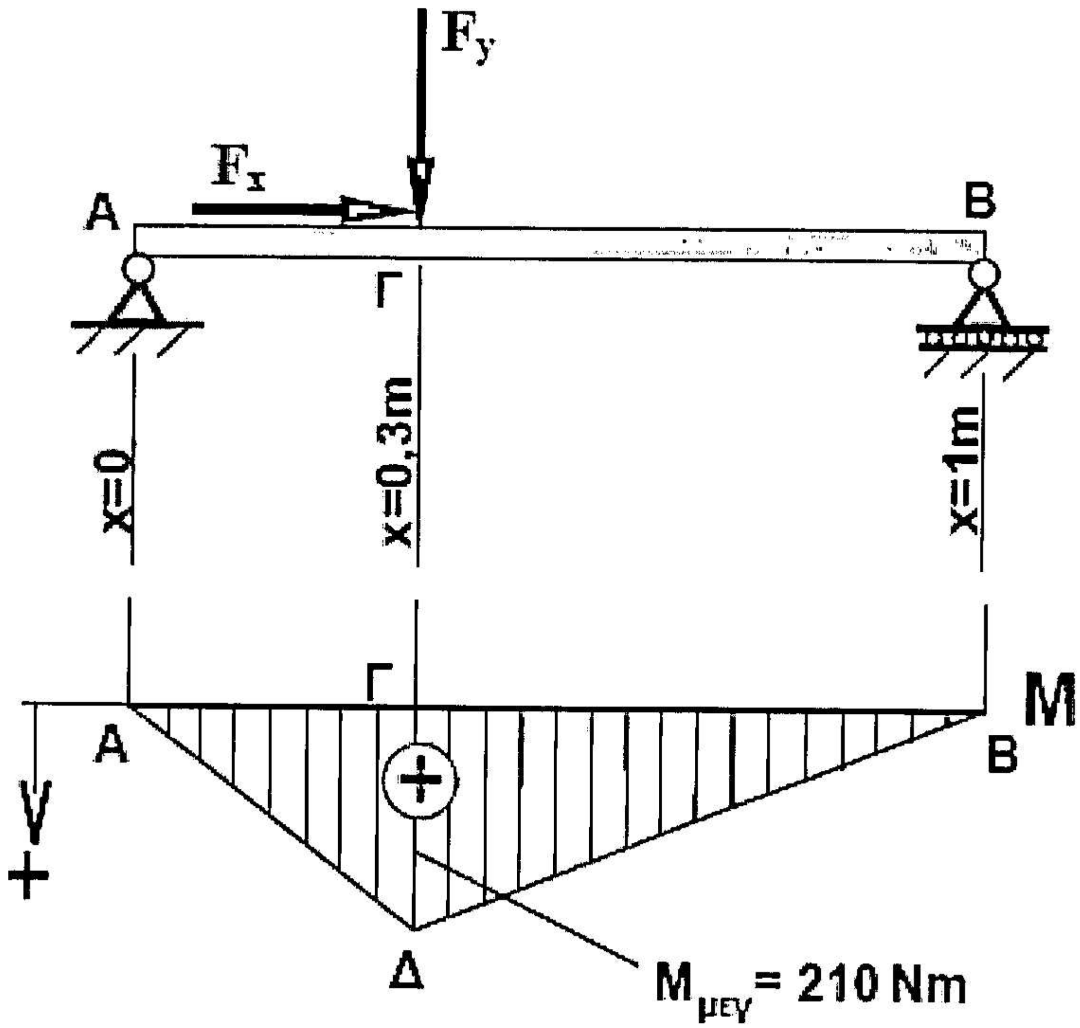
Η ροπή Μ εκφράζεται με δύο διαφορετικά μεταξύ τους πολυώνυμα πρώτου βαθμού, με ανεξάρτητη μεταβλητή την απόσταση x.

Οι γραφικές τους παραστάσεις είναι ευθείες.

Γνωρίζουμε ήδη δύο σημεία της κάθε ευθείας, αφού έχουμε υπολογίσει τις ακραίες τιμές της ροπής:

Δύο σημεία της ευθείας Μ=Ay * x είναι τα (x,M)=(0, 0) και(x,M)=(0,3m,210Nm)

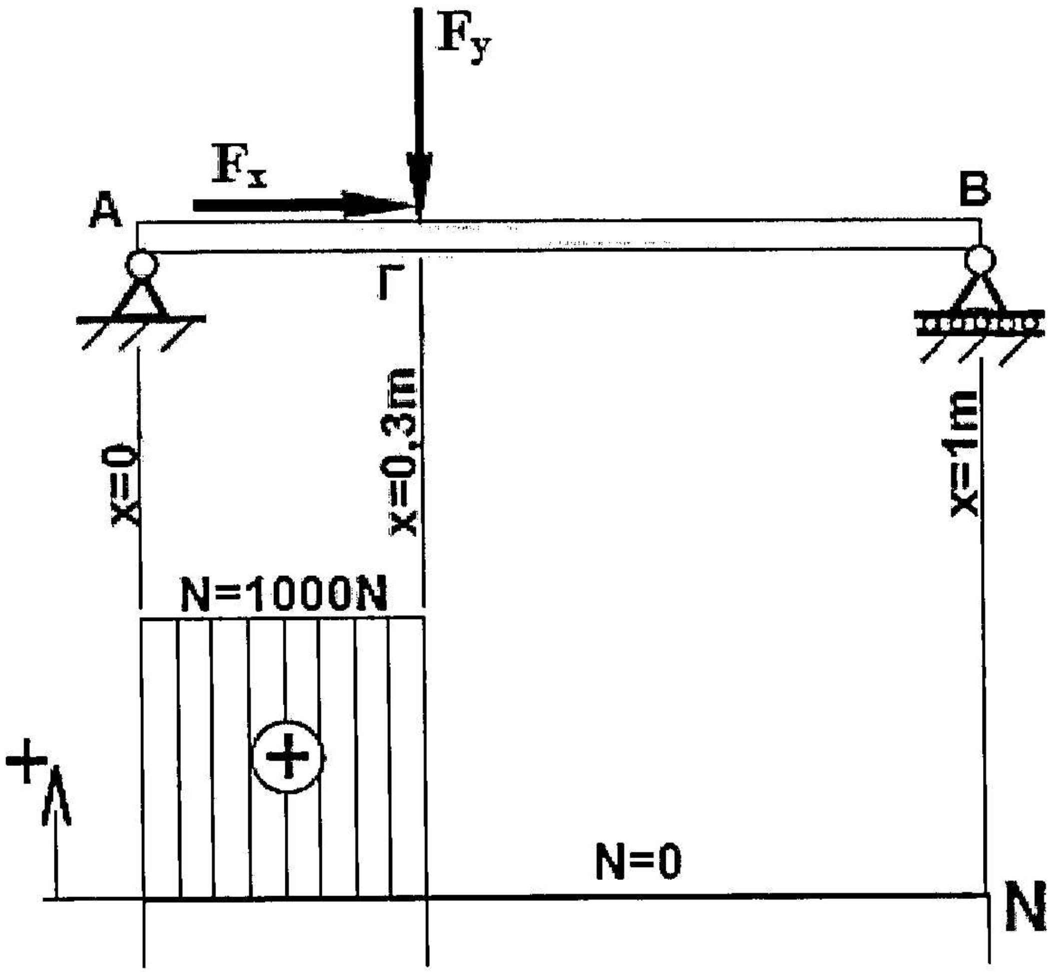
και Μμεγ = 210 Nm. Τοποθετούμε τα σημεία στο διάγραμμα και χαράζουμε την ευθεία που τα ενώνει (ευθεία ΑΔ είναι γραφική παράσταση της Μ=Ay x).



Όμοια, δύο σημεία της ευθείας M = Ay * x – F * (x – 0,3) είναι τα (x, M) = (0,3m, 210Nm) και (x, M) = (1m, 0) και η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία ΔΒ.

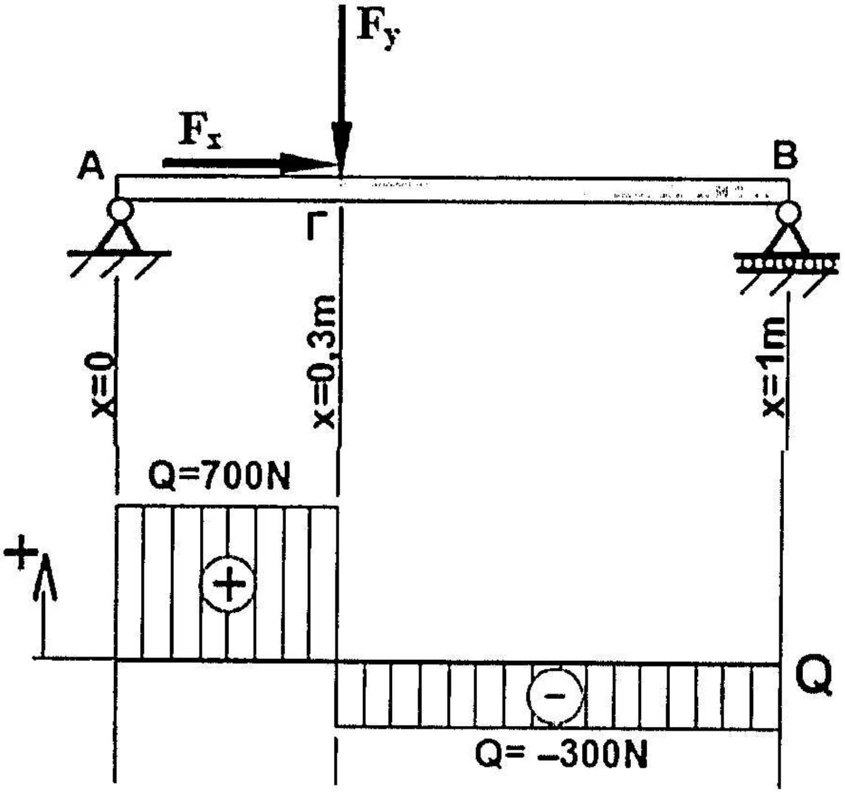
Στη γραφική παράσταση της καμπτικής ροπής εφαρμόστηκε ένα ζευγάρι συμβάσεων : <u>α)Η ίνα αναφοράς τέθηκε από κάτω και β) τα θετικά της καμπτικής ροπής τέθηκαν επίσης προς τα κάτω. Με τον τρόπο αυτό, το διάγραμμα καμπτικών ροπών μοιάζει με το σχήμα που θα πάρει η δοκός όταν παραμορφωθεί ελαστικά υπό την επίδραση των δυνάμεων που την φορτίζουν.</u>

Η Ν έχει άλμα από 1000Ν σε 0 στο σημείο Γ. Το άλμα είναι ίσο με την εξωτερική αξονική δύναμη $F_x$.

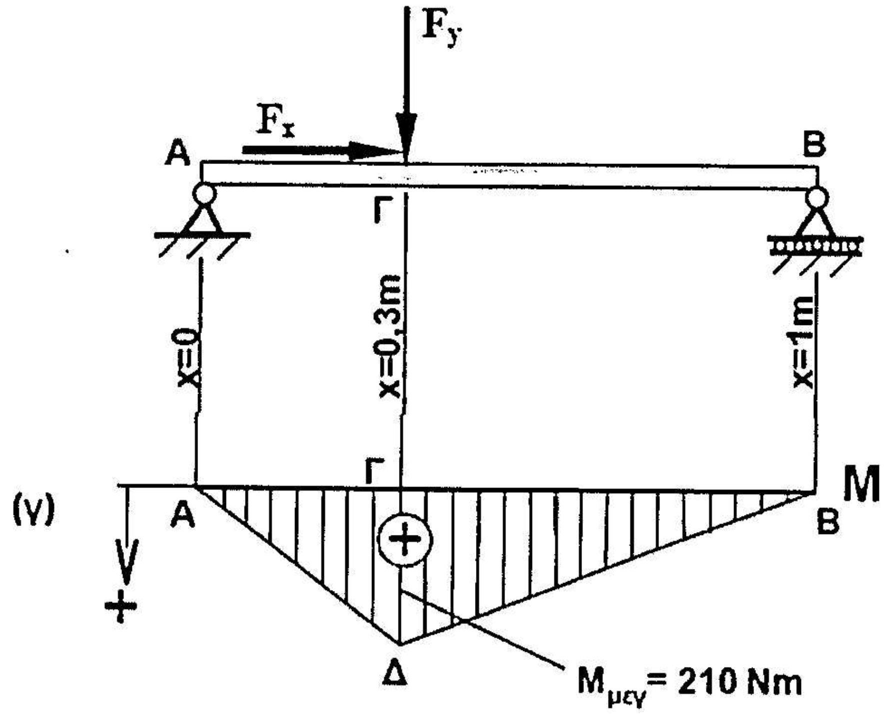



Στο σημείο Γ η διατμητική δύναμη Q αλλάζει απότομα από +700Ν σε – 300Ν. Αυτή η μεταβολή λέγεται <u>άλμα της διατμητικής δύναμης και είναι</u>

ίση με την εξωτερική δύναμη F που ενεργεί πάνω στο δοκάρι, κάθετα προς το μήκος του, στο σημείο του άλματος.

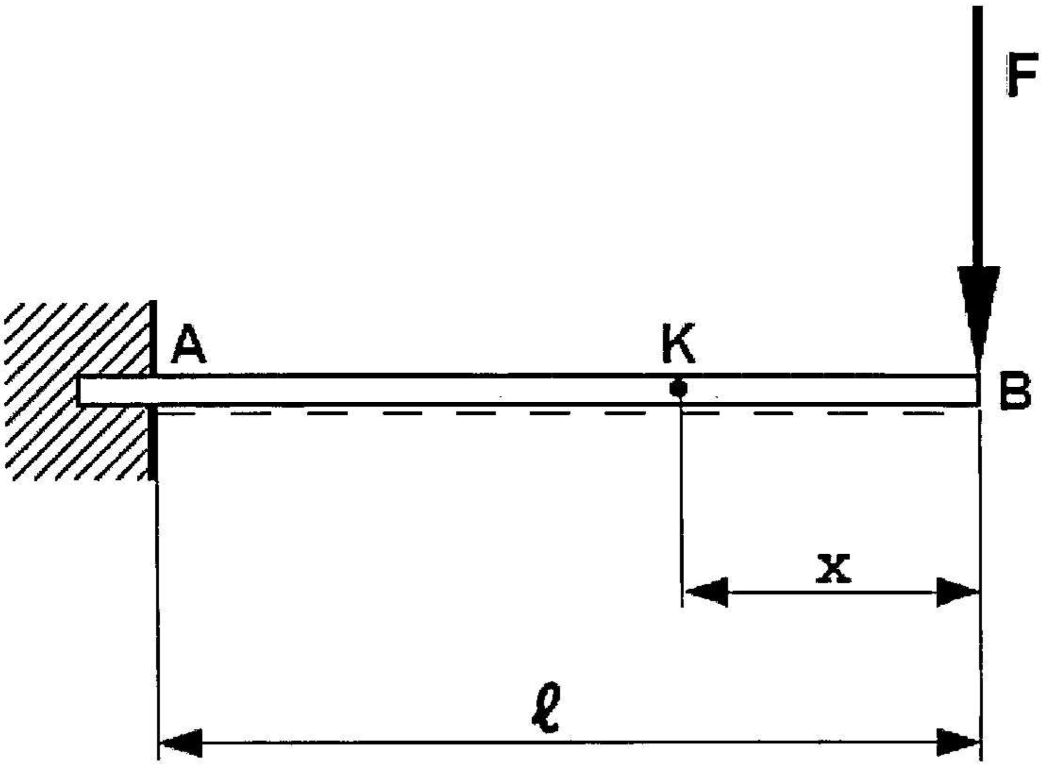



Στο σημείο του άλματος της Q, υπάρχει απότομη αλλαγή στην κλίση της καμπτικής ροπής M (βλ. σημείο Δ).



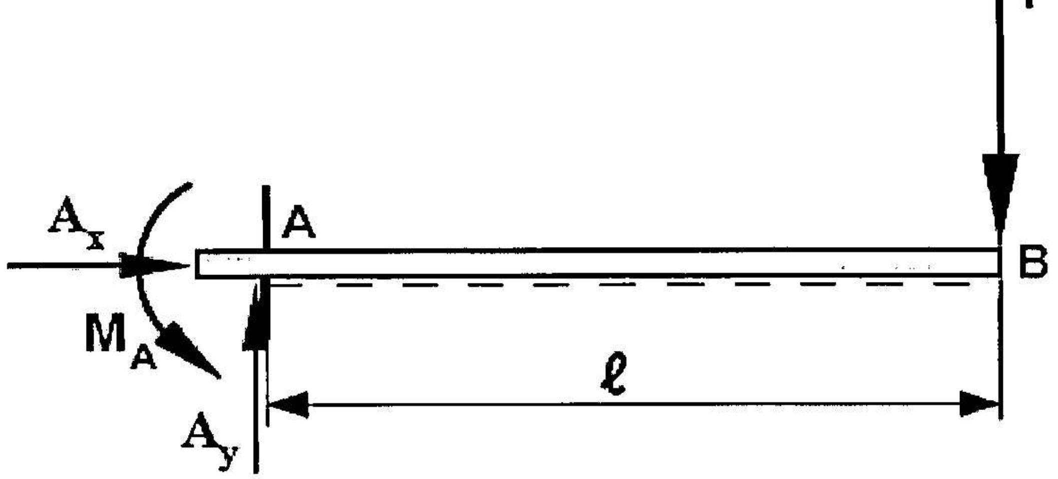
**<u>Παράδειγμα 4:</u>** Για τον πρόβολο του σχήματος, να βρεθούν τα διαγράμματα φορτίων διατομής σε ολόκληρο το μήκος του.

**Δίδονται: F=1000N, ℓ=0,7m**

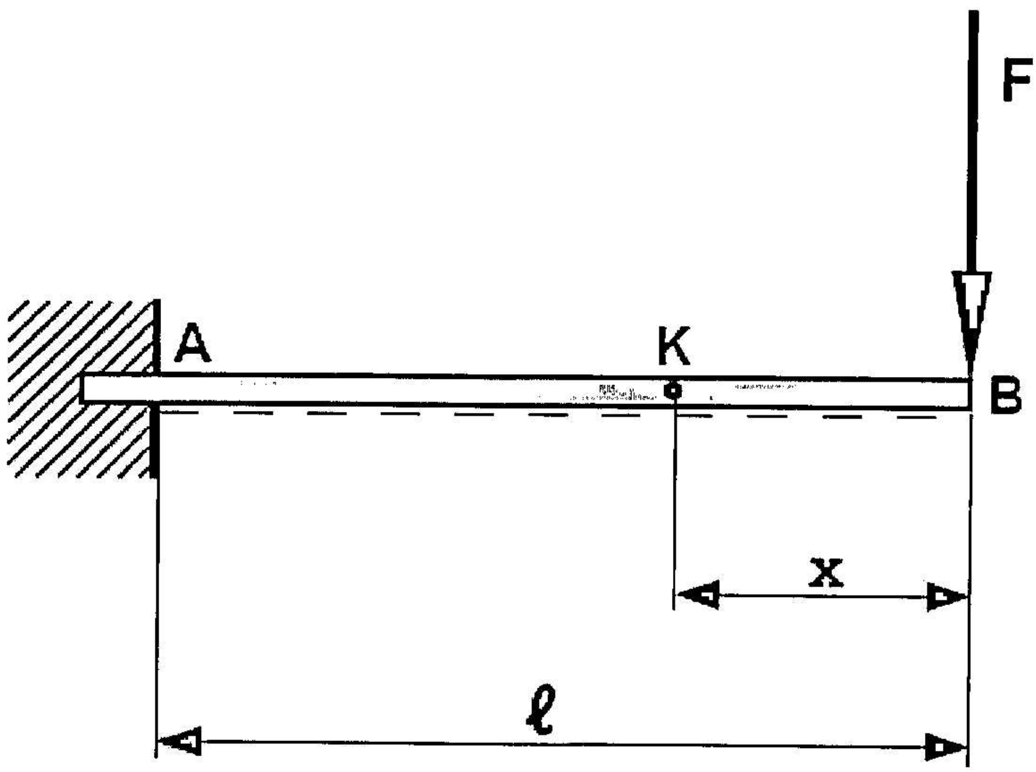



**<u>Λύση:</u>**

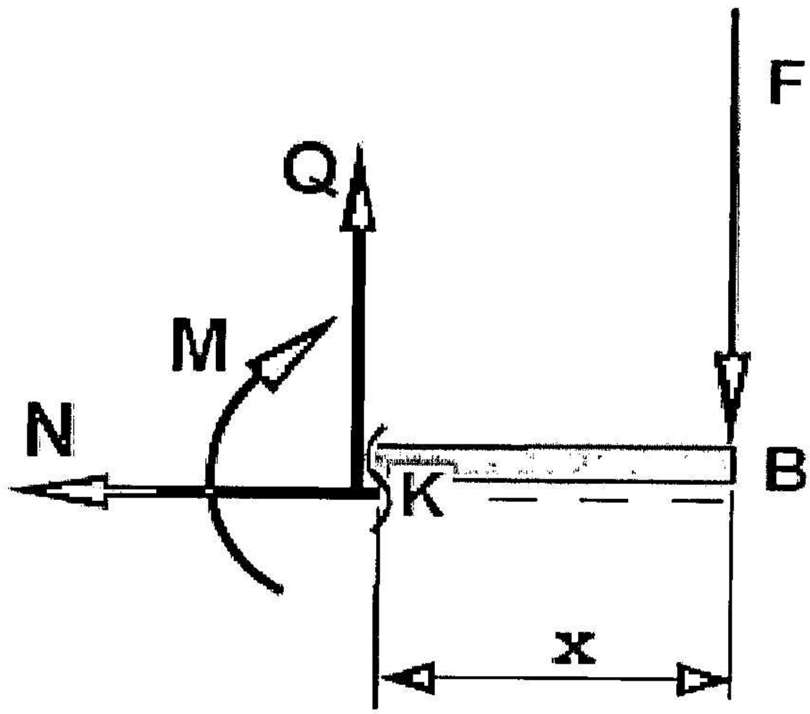
Τοποθετούμε την ίνα αναφοράς από κάτω.



Κόβουμε στο Κ, παίρνουμε το τμήμα ΚΒ που δεν περιέχει την πάκτωση.




Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. του τμήματος ΚΒ του προβόλου:



Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για το τμήμα ΚΒ του προβόλου.

Οπότε έχουμε:

- ΣFx = 0 => **N = 0**
- ΣFy = 0 => Q = F => **Q = 1.000 N**
- $\Sigma M_K$ = 0 => - M - F * x = 0 => - M = F * x => **M = - F * x**

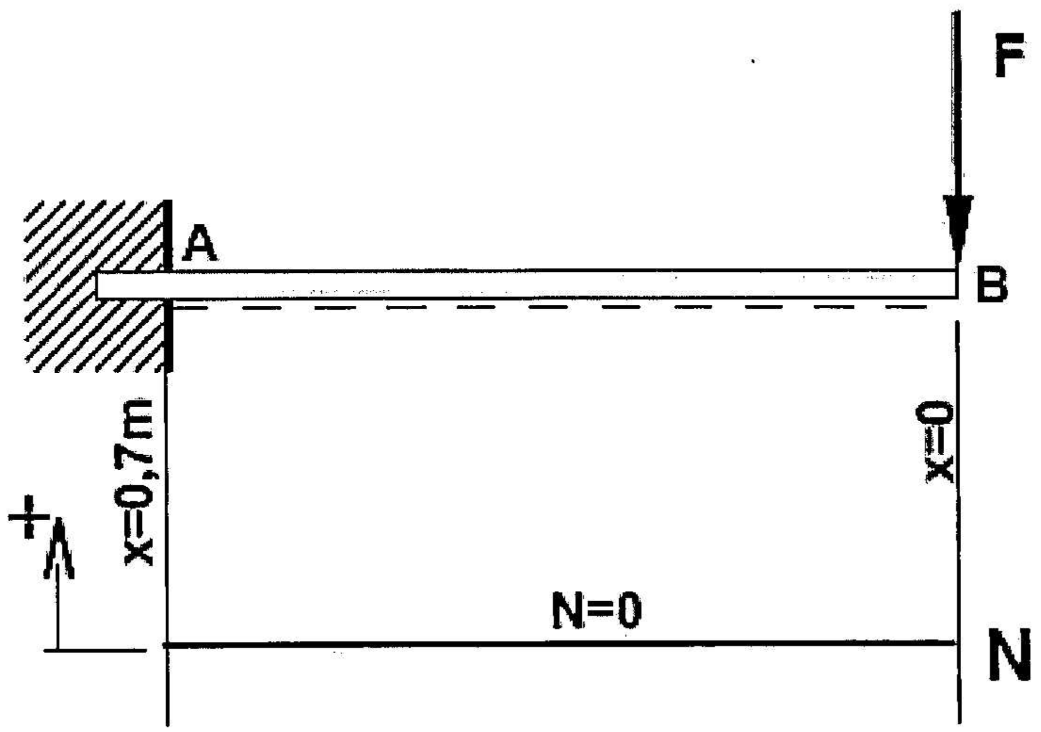
Οι ακραίες τιμές της Μ θα είναι:

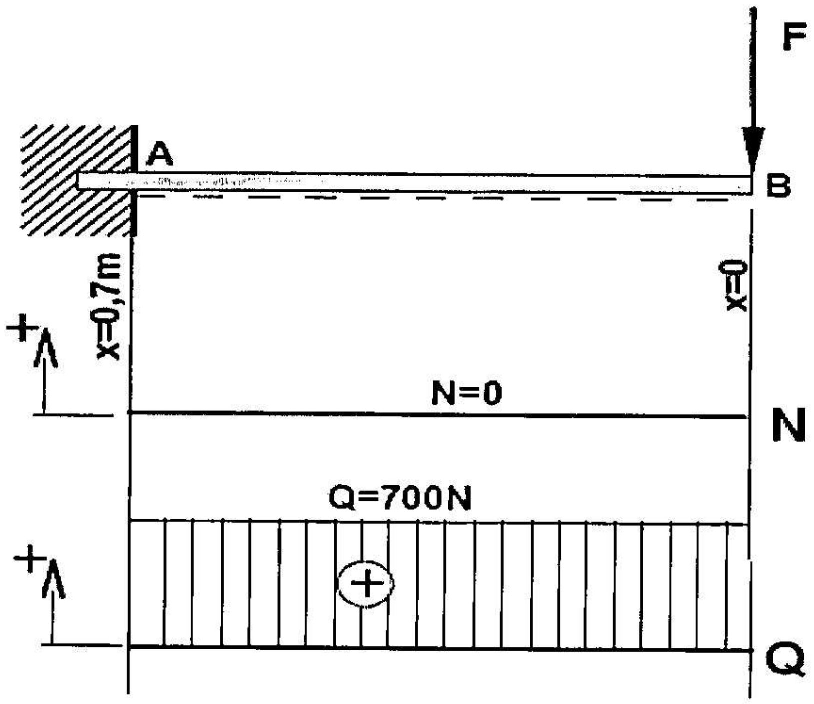
- Στο **σημείο Β ισχύει x=0, άρα M = 0**
- Στο **σημείο Γ ισχύει x=0,7m άρα**

**M = – F * ℓ = – 1000 N * 0,7 m = –700 Nm**

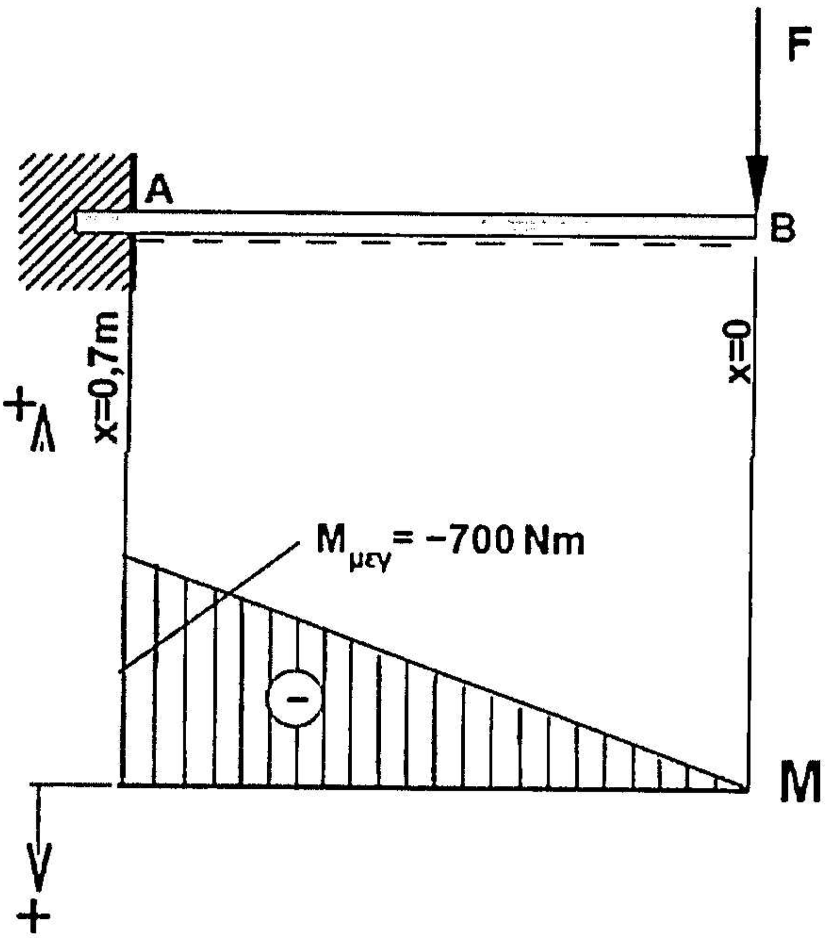
Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω βρέθηκαν χωρίς να χρειαστεί <u>να υπολογίσουμε τα φορτία στήριξης στην πάκτωση.</u>

Τα διαγράμματα των φορτίων διατομής δίνονται στις παρακάτω διαφάνειες:





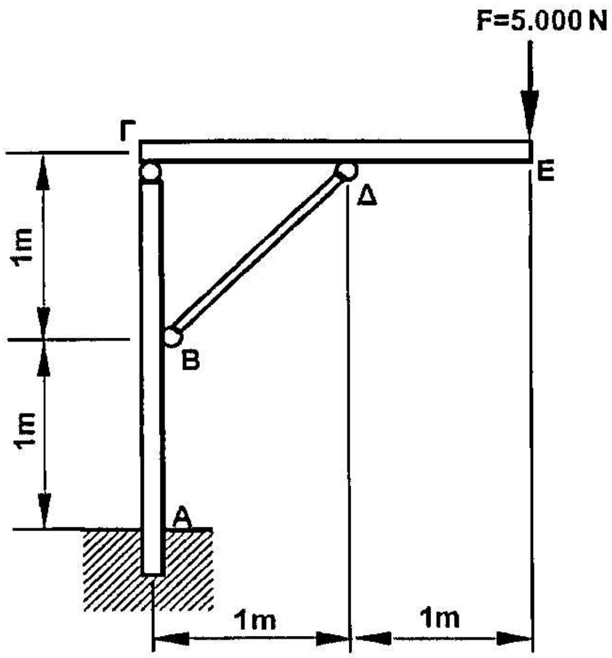
F
A
B
x=0,7m
x=0
N=0
N
Q=700N
Q

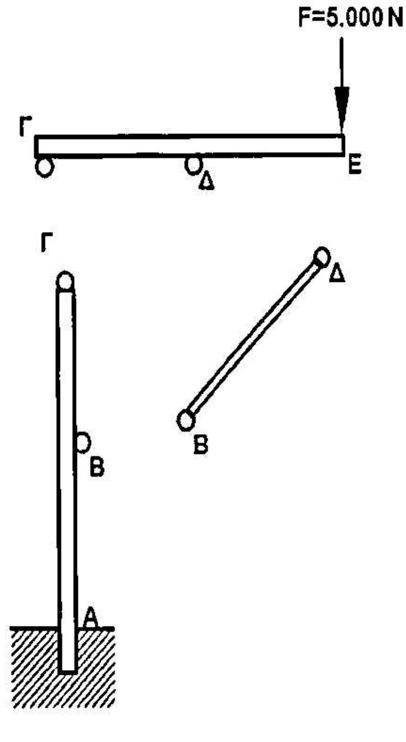
F
A
B
x=0,7m
x=0
M_μεγ = −700 Nm
M

# ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

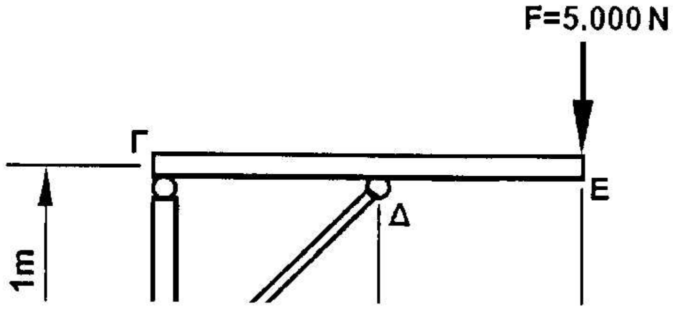
Σύνθετος φορέας λέγεται μία κατασκευή που αποτελείται από πολλά στερεά σώματα συνδεδεμένα μεταξύ τους.



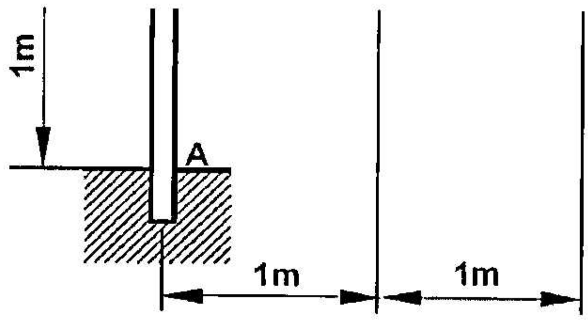

Μέλη του φορέα θα λέγονται τα στερεά σώματα που συναρμολογούνται για να δημιουργήσουν τη συνολική κατασκευή.

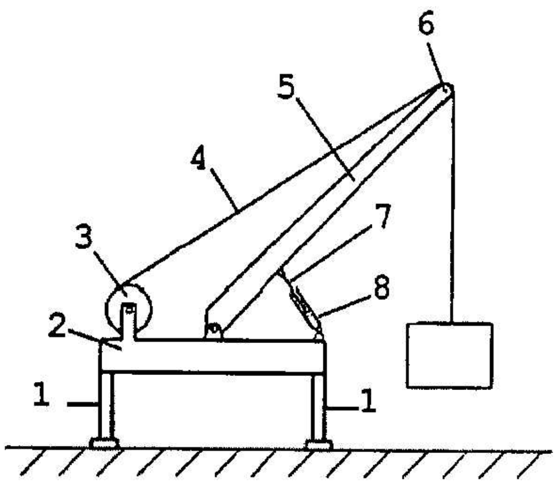


Εξωτερικές δυνάμεις θα λέγονται οι δυνάμεις που ασκούνται στον σύνθετο φορέα από άλλα σώματα, εκτός των μελών του φορέα και εκτός των στηρίξεων του. (Στο παράδειγμα μας υπάρχει μόνο μία εξωτερική δύναμη, η F).

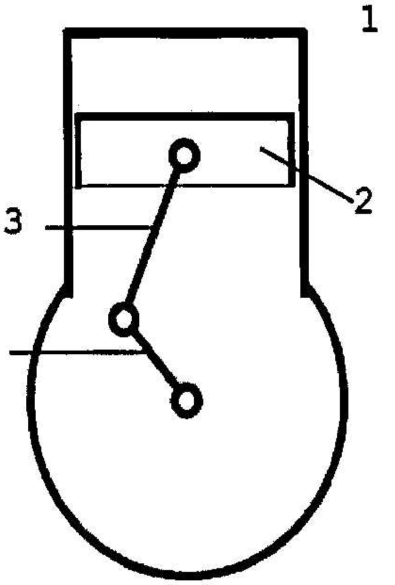



Οι δυνάμεις που ασκούνται από την πάκτωση Α στην κατασκευή θα ονομάζονται όχι εξωτερικές αλλά **φορτία στήριξης**.

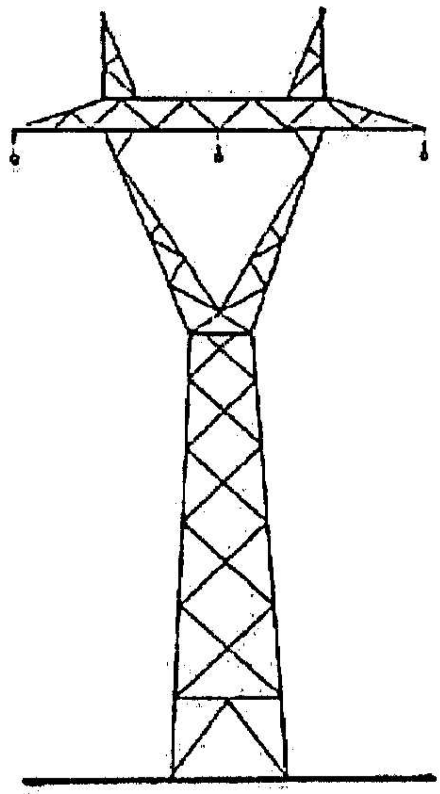



α) Γερανός
1-Πόδια βάσης 2-Βάση
3-Βαρούλκο 4-Συρματόσχοινο
5-Βραχίονας 6-Τροχαλία
7-Έμβολο 8-Κύλινδρος




β) Μηχανισμός διωστήρα-στροφάλου
1-Κύλινδρος, κέλυφος
2-Έμβολο, 3-Διωστήρας
4-Στροφαλοφόρος άξονας



γ) Πυλώνας υψηλής τάσης

Τα φορτία μπορεί να είναι διαφόρων ειδών: Δύναμη, Ροπή, Κατανεμημένο φορτίο (δηλαδή δύναμη κατανεμημένη κατά το μήκος γραμ-μής), Πίεση (δηλαδή δύναμη κατανεμημένη σε επιφάνεια)

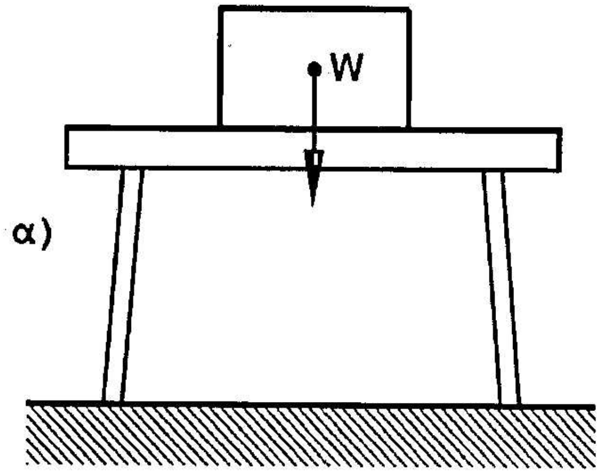
| **Είδος φορτίου** | Μονάδες |
|---|---|
| Δύναμη | N, kN, kp |
| Ροπή | Nm, Nmm, kNm κτλ |
| Κατανεμημένο φορτίο | N/m, kN/m, kp/m κτλ |
| Πίεση | $N/m^2$, $N/mm^2$, $kp/m^2$, $kp/cm^2$, $kp/mm^2$ κτλ |

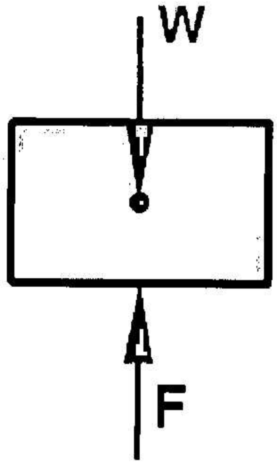
**Εξωτερικές στηρίξεις** θα ονομάζουμε τις στηρίξεις του φορέα στο έδαφος, ενώ **εσωτερικές στηρίξεις** ή εσωτερικές συνδέσεις θα λέγονται οι συνδέσεις των μελών μεταξύ τους.

Φορτία εξωτερικών στηρίξεων είναι αυτά που μεταβιβάζονται από τον φορέα στο έδαφος και αντίστροφα, ενώ τα φορτία των εσωτερικών συνδέσεων είναι αυτά που μεταβιβάζονται, μέσω των συνδέσεων, από το ένα μέλος του φορέα σε άλλο γειτονικό του.

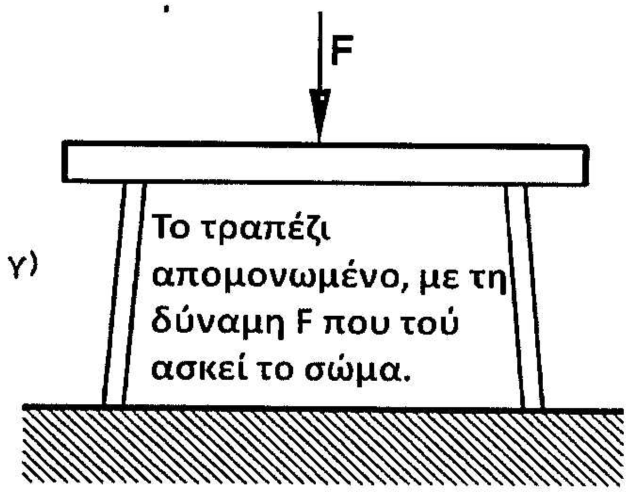
Για να καταγράψουμε σωστά τα φορτία των εσωτερικών συνδέσεων πρέπει να εφαρμόσουμε το **Αξίωμα της Δράσης και της Αντίδρασης:** Όταν ένα σώμα Α ασκεί σε ένα σώμα Β μία δύναμη F, τότε και το σώμα Β θα ασκεί στο σώμα Α μία άλλη, ίση και αντίθετη δύναμη F.

**Αξίωμα της Δράσης και της Αντίδρασης**



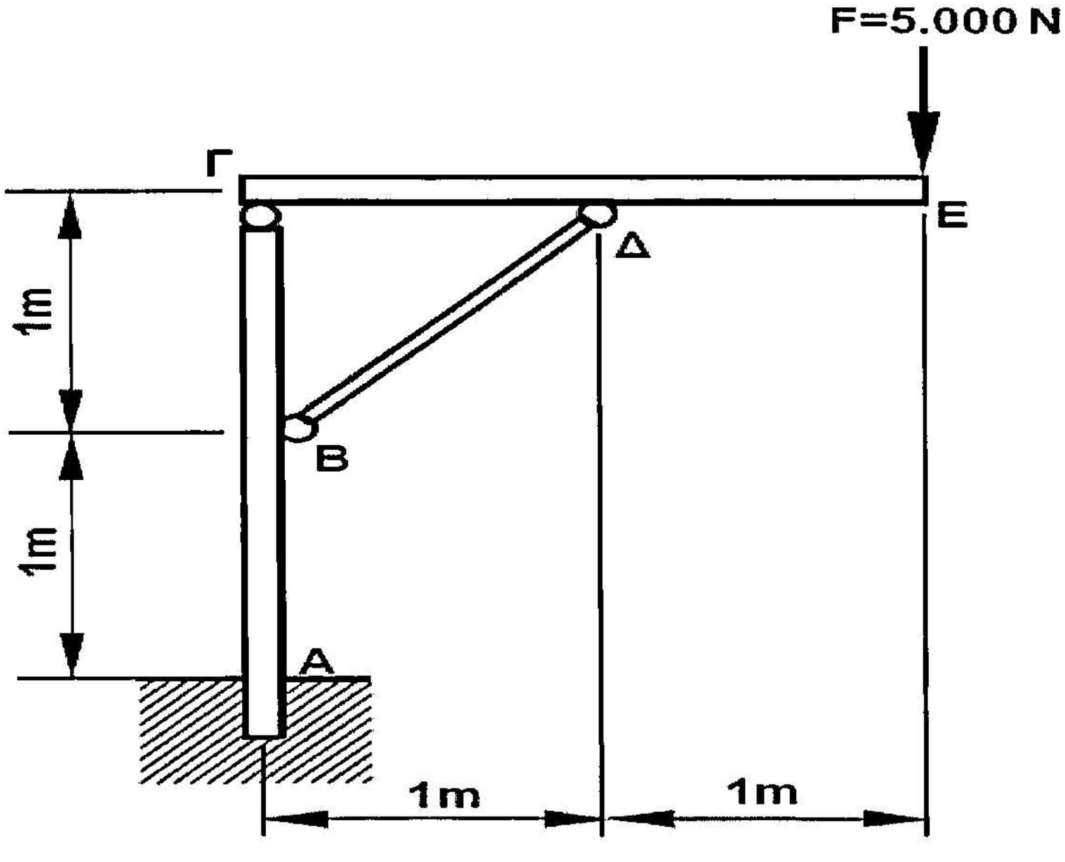

Το σώμα απομονωμένο, με τη δύναμη στήριξης F που του ασκεί το τραπέζι (W=βάρος σώματος).



Οι σύνθετοι φορείς αποτελούνται ως επί το πλείστων από ράβδους.

**Ράβδος ονομάζεται ένα στερεό σώμα το οποίο** δέχεται μόνο δυνάμεις στα άκρα του (όχι ροπές στα άκρα του, ούτε δυνάμεις ή ροπές σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο).

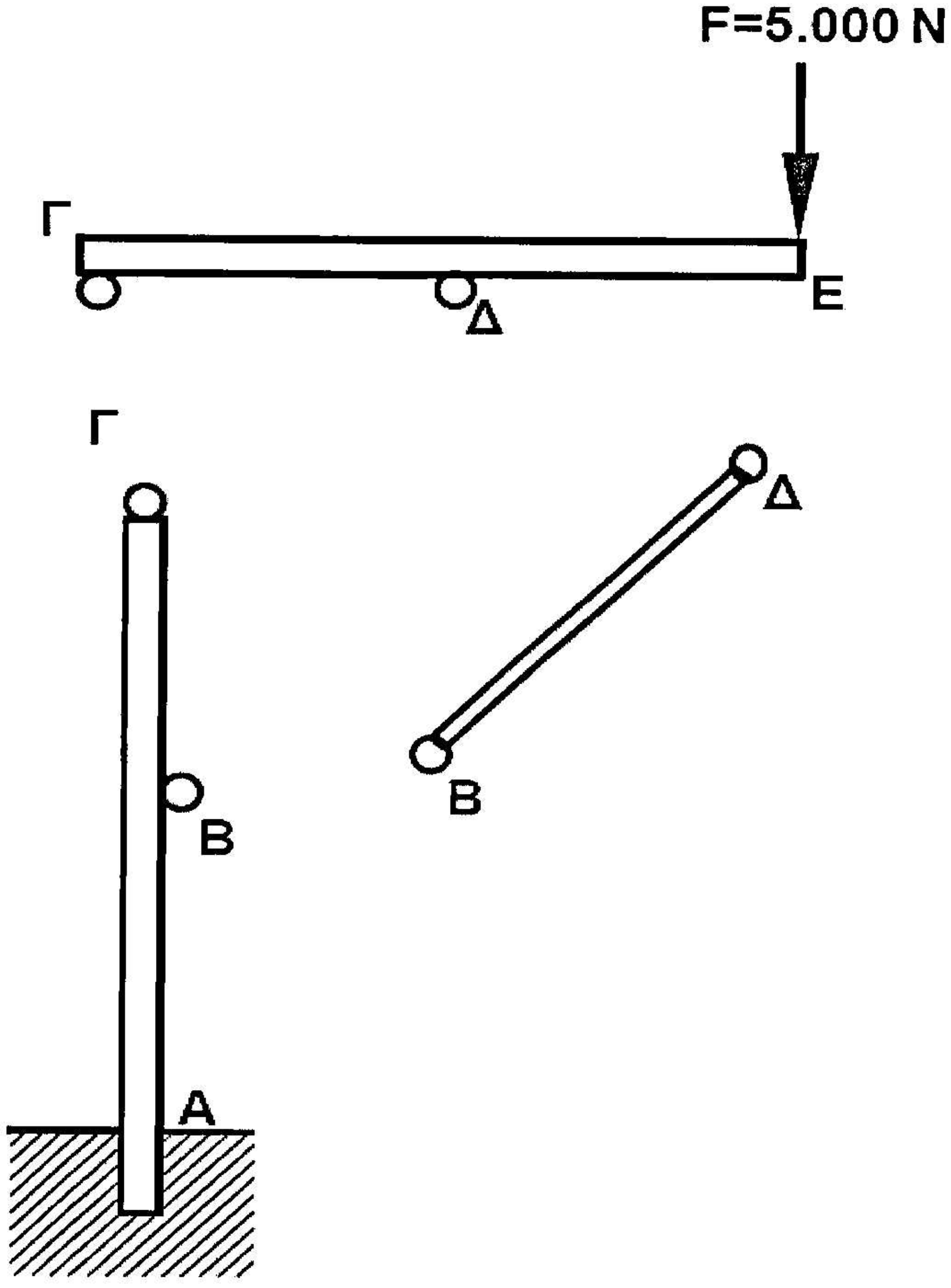
**Παράδειγμα 1:** Να υπολογίσετε τα φορτία εσωτερικά και εξωτερικά του παρακάτω σύνθετου φορέα:



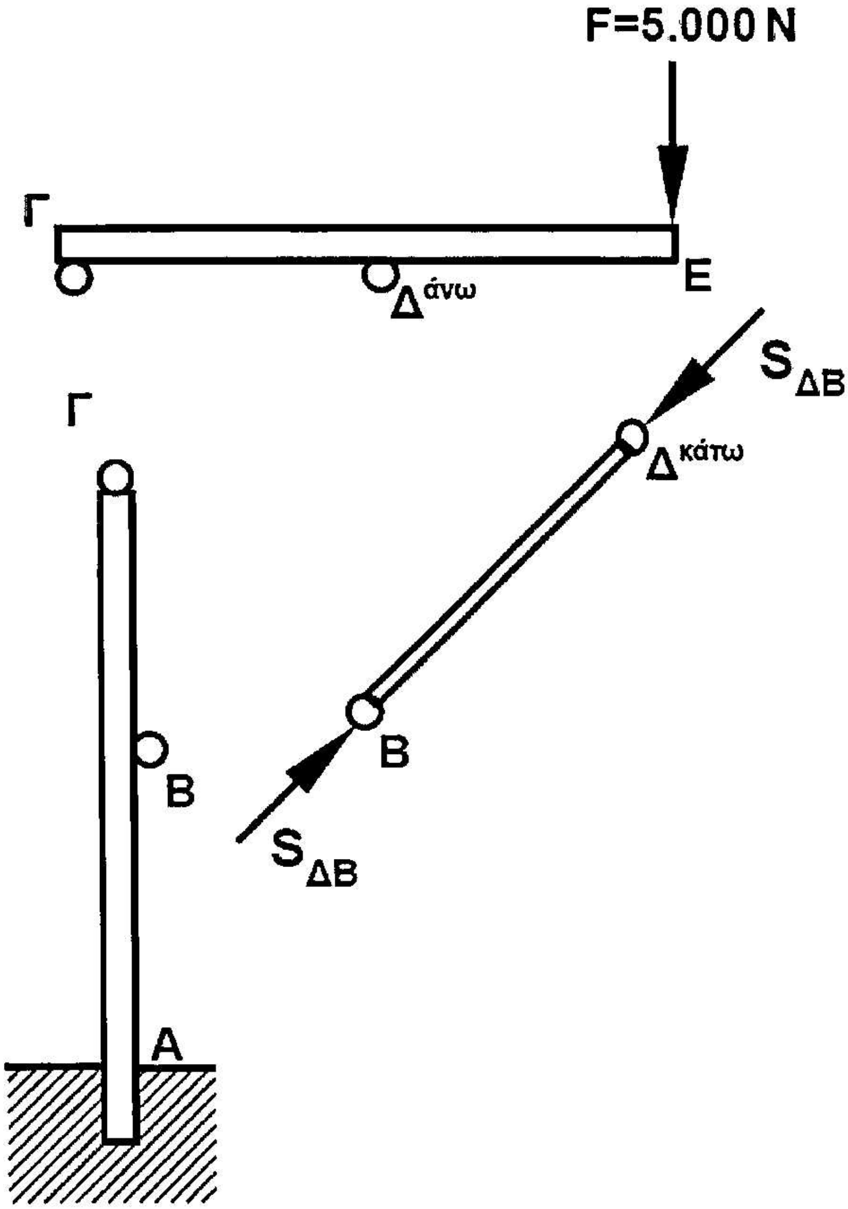

**Λύση:**

Εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία:

1. Σχεδιάζουμε τα μέλη του φορέα, κάθε ένα ξεχωριστά τοποθετώντας επάνω τους και τα εξωτερικά φορτία:




3. Βλέπουμε ποια μέλη είναι ράβδοι. Στα άκρα κάθε ράβδου τοποθετούμε δυνάμεις στην κατεύθυνσή της, έτσι ώστε αυτή να ισορροπεί. (Στο παράδειγμά μας, ράβδος είναι μόνο το ΒΔ. Τοποθετούμε δυνάμεις όπως στο σχήμα της επόμενης Εικόνας θλιπτικές για το ΒΔ).



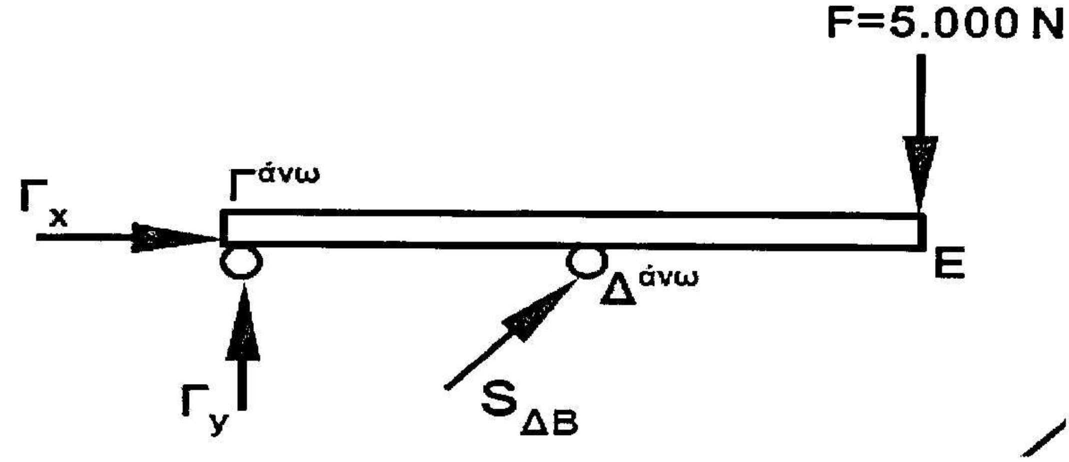

3. Σχεδιάζουμε το **Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος Δ.Ε.Σ. για μία δοκό του φορέα:**

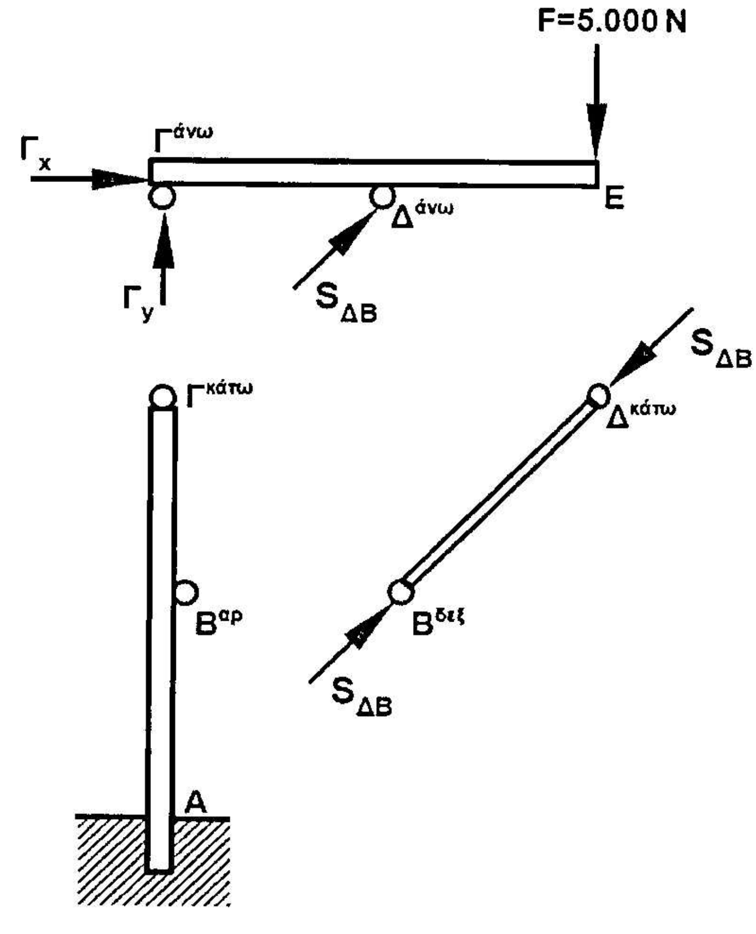
Βλέπουμε σε ποιες από τις συνδέσεις της βρίσκεται σε επαφή με άλλα μέλη, στα οποία ήδη τοποθετήθηκαν δυνάμεις. Σ' αυτές τοποθετούμε δυνάμεις σύμφωνα με το αξίωμα της δράσης και της αντίδρασης.

<u>Στις υπόλοιπες συνδέσεις και στηρίξεις της δοκού τοποθετούμε τις δυνάμεις και ροπές που ασκούνται.</u>

Στο παράδειγμα μας, ας εξετάσουμε τη δοκό ΓΔΕ. Στο σημείο Δανω βρίσκεται σε επαφή με τη ράβδο ΒΔ στην οποία ήδη τοποθετήθηκε η $S_{\Delta B}$. Τοποθετούμε την αντίδραση της $S_{\Delta B}$ στο σημείο $\Delta_{\alpha\nu\omega}$ της δοκού ΓΔΕ.

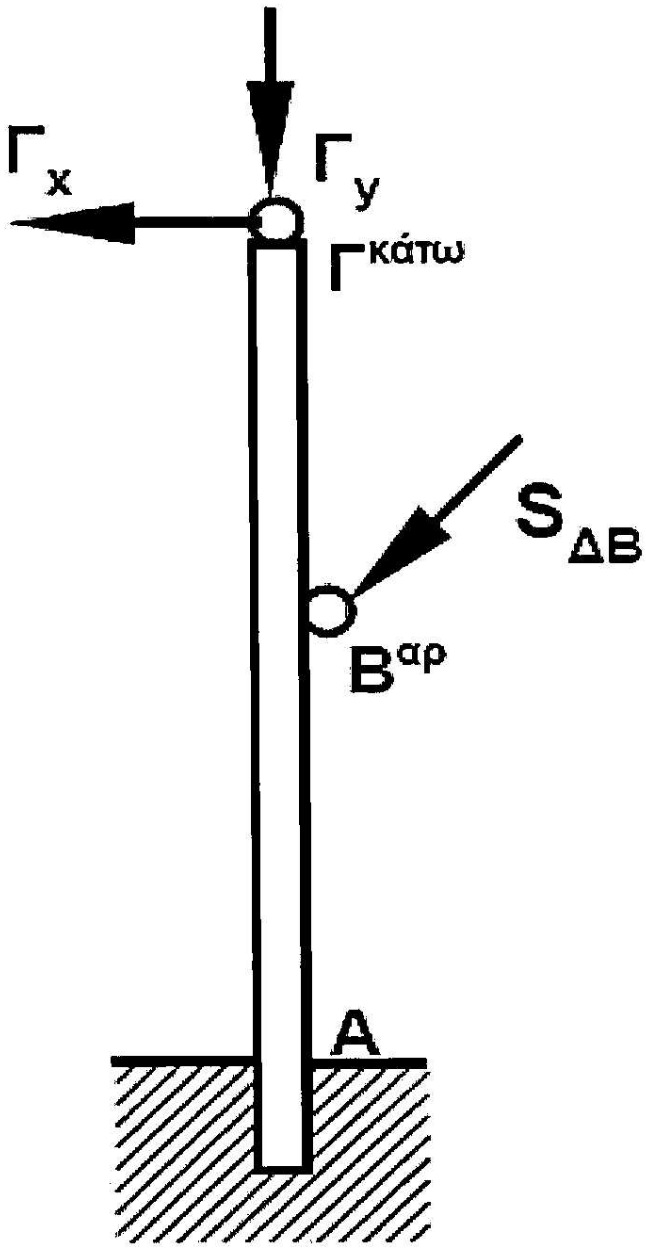
Κατόπιν τοποθετούμε στην άρθρωση $\Gamma_{\alpha\nu\omega}$ τις δυνάμεις που μπορεί να ασκήσει η άρθρωση, και το συνολικό σχήμα παίρνει την παρακάτω μορφή.



4. Επαναλαμβάνουμε το Βήμα 3 και για τα υπόλοιπα μέλη του φορέα, όσες φορές χρειαστεί μέχρι να εξαντληθούν όλα τα μέλη του φορέα.

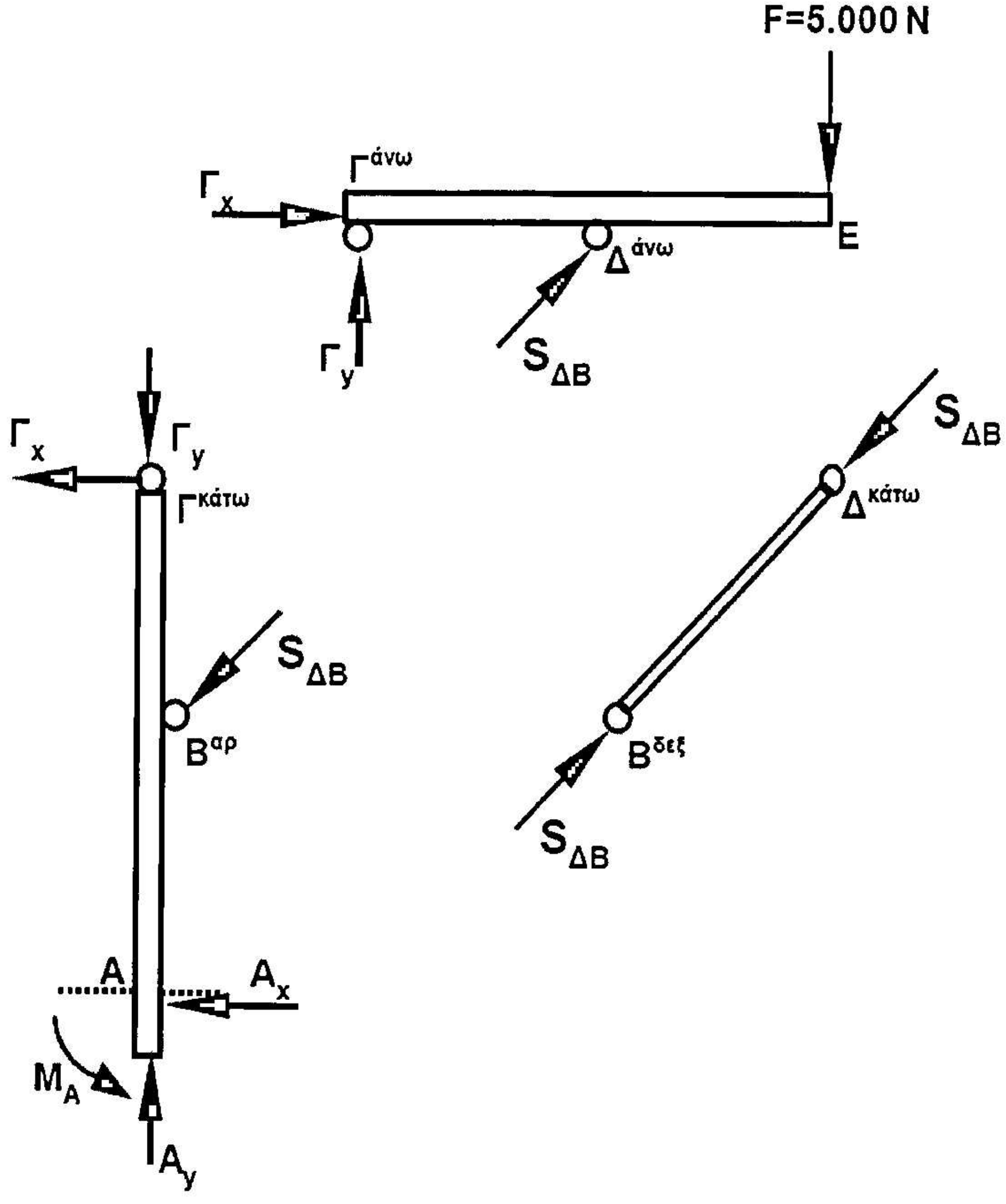
Στο παράδειγμα μας απέμεινε να τοποθετήσουμε δυνάμεις στον πρόβολο ΑΒΓ. Παρατηρούμε ότι στο σημείο $\Gamma_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega}$ πρέπει να τοποθετήσουμε τις αντιδράσεις των Γx και Γy που ήδη υπήρχαν στο $\Gamma_{\alpha\nu\omega}$.




Όμοια στο $B_{\alpha\rho}$ πρέπει να τοποθετήσουμε την αντίδραση της $S_{\Delta B}$ που ήδη υπήρχε στο $B_{\delta\varepsilon\xi}$.

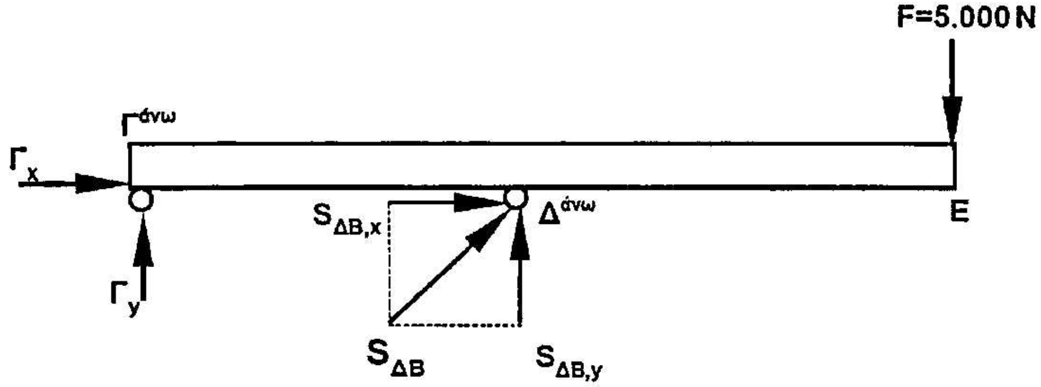
Τοποθετούμε στο Α τις δυνάμεις και τη ροπή της πάκτωσης και το συνολικό σχήμα παίρνει τη μορφή:

**Διαγράμματα Ελευθέρου Σώματος όλων των μελών του σύνθετου φορέα:**




5. Σε κάποια δοκό εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για να βρούμε τις άγνωστες καταπονήσεις που ενεργούν επάνω της. Αρχίζουμε από μία δοκό που έχει μόνο τρεις άγνωστες δυνάμεις (αν υπάρχει τέτοια στον φορέα μας).

Στο παράδειγμα μας, μπορούμε να αρχί-σουμε από τη δοκό ΓΔΕ, που έχει μόνο τρεις άγνωστες δυνάμεις, τις $Γ_x$, $Γ_y$ και $S_{ΔB}$˙




Ισχύει:

$S_{BΔ,x} = S_{BΔ} * \cos 45°$,

$S_{BΔ,y} = S_{BΔ} * \sin 45°$,

Έχουμε:

$ΣM_Γ = 0 \Rightarrow (S_{ΔB}*\sin 45°)*(ΓΔ) - F*(ΓE) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{ΔB} * \sin 45° = F \frac{(ΓE)}{(ΓΔ)} = 5.000N \frac{2\ m}{1\ m} = 10.000N$$

$$\Rightarrow S_{ΔB} = \frac{10.000N}{\sin 45°} = 14.140N$$

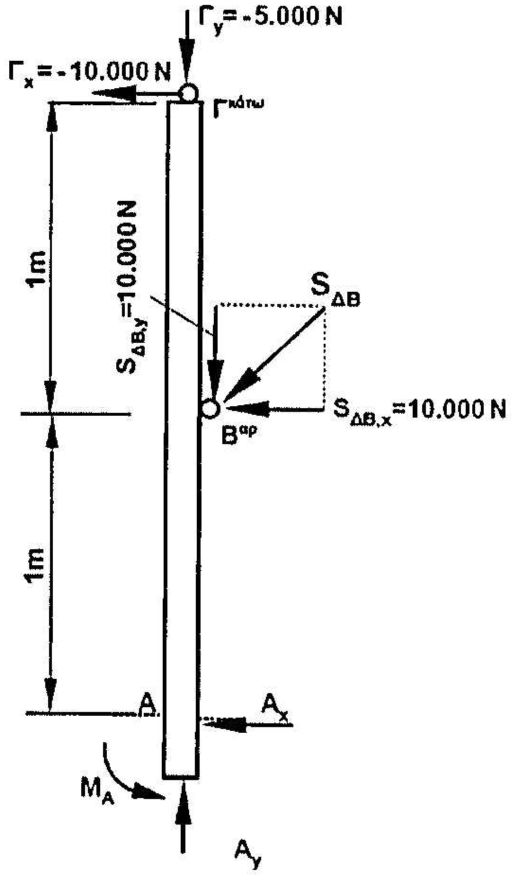
$$\Rightarrow S_{ΔB} = 14.140\ N.$$

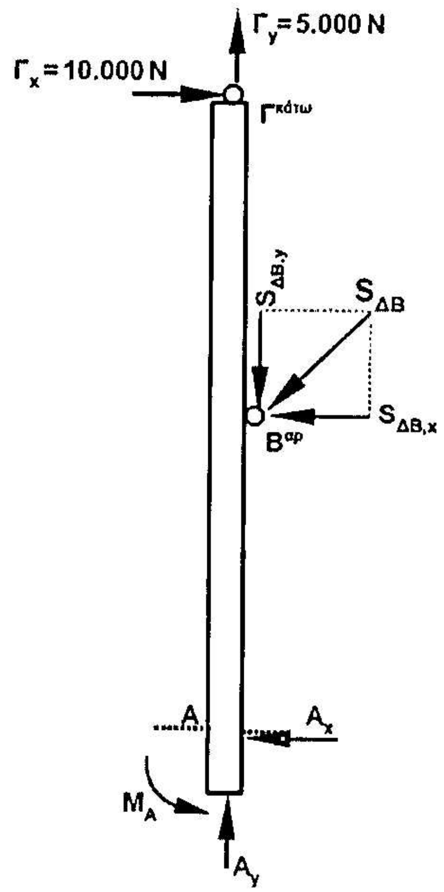
$ΣF_X = 0 \Rightarrow Γ_X = - S_{ΔB} * \cos 45° \Rightarrow \mathbf{Γ_X = - 10.000N}$,

$ΣF_Y = 0 \Rightarrow \mathbf{Γ_Y} = F - S_{ΔB} * \sin 45° =$

$= 5.000N - 10.000N = \mathbf{-5.000N}$

Τα αρνητικά πρόσημα των Γx και Γy σημαίνουν ότι οι δυνάμεις Γx και Γy έχουν στην πραγματικότητα αντίθετη φορά απ' αυτήν που αρχικά θεωρήθηκε.




Συνεχίζουμε με την εφαρμογή των εξισώσεων ισορροπίας στην άλλη δοκό του σύνθετου φορέα, την ΑΒΓ. Οι δυνάμεις Γx, Γy και SΔΒ είναι πλέον γνωστές από τους προηγούμενους υπολογισμούς.

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις ισορροπίας στο Δ.Ε.Σ. της προηγούμενης διαφάνειας και υπολογίζουμε τα Ax, Ay, $M_A$:

**ΣFx = 0 =>** $\Gamma_X - S_{\Delta B} * \cos 45° - A_X = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_X = \Gamma_X - S_{\Delta B} * \cos 45° \Rightarrow A_X = \Gamma_X - S_{\Delta B} * \cos 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow A_X = 10.000N - 10.000N \Rightarrow \mathbf{A_X = 0}$.

$\mathbf{\Sigma Fy = 0} \Rightarrow A_Y - S_{\Delta B}*\sin45° + \Gamma_Y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_Y = S_{\Delta B}*\sin45° - \Gamma_Y \Rightarrow$

$\Rightarrow A_Y = 10.000N - 5.000N = 5.000N \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{A_Y = 5.000N.}$

$\mathbf{\Sigma M_A = 0} \Rightarrow$

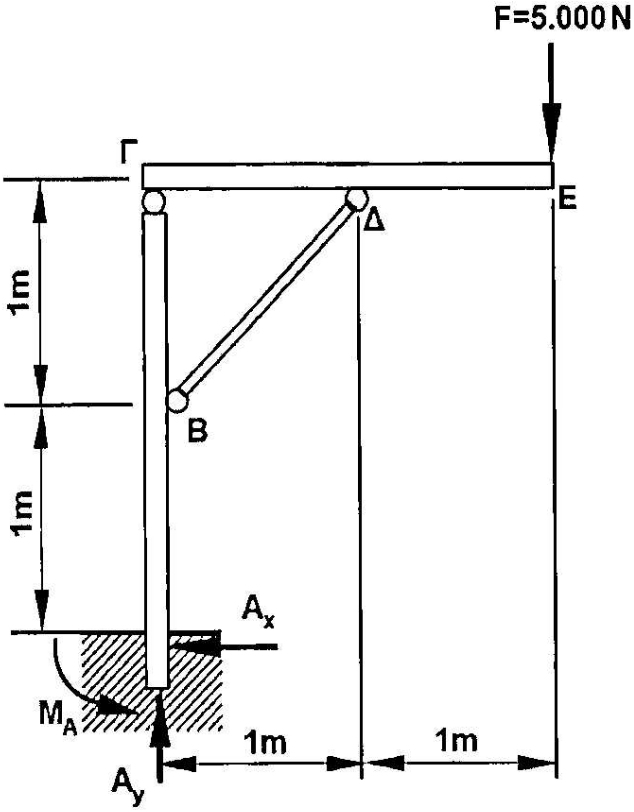
$\Rightarrow M_A + (S_{\Delta B} *\cos45°) * (AB) - \Gamma_X * (A\Gamma) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_A = -(S_{\Delta B}*\cos45°)*(AB) + \Gamma_X * (A\Gamma) \Rightarrow$

$\Rightarrow M_A = -10.000N * 1m + 10.000N * 2m \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{M_A = = 10.000\ Nm.}$

Οι δυνάμεις και η ροπή στην πάκτωση μπορούν επίσης να υπολογισθούν με βάση το αρχικό σχήμα, δηλαδή με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας για ολόκληρο τον φορέα.



Εφαρμόζουμε λοιπόν τις εξισώσεις ισορροπίας για ολόκληρο τον φορέα και έχουμε:

$\mathbf{\Sigma F_X = 0 \Rightarrow A_X = 0}$

$\mathbf{\Sigma F_Y = 0} \Rightarrow A_Y - F = 0 \Rightarrow A_Y = F_Y = 5.000N \Rightarrow \mathbf{A_Y = 5.000\ N}.$

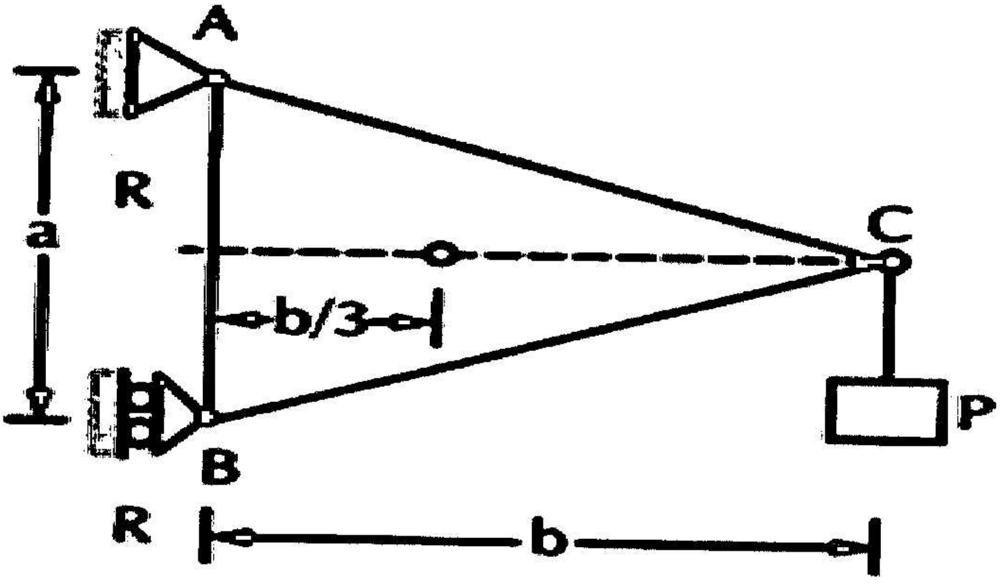
$\mathbf{\Sigma M_A = 0} \Rightarrow M_A - F * (\Gamma E) = 0 \Rightarrow M_A = F * (\Gamma E) \Rightarrow$

$\Rightarrow M_A = 5.000\ N * 2m \Rightarrow \mathbf{M_A = 10.000\ Nm}.$

Αυτός ο υπολογισμός παρακάμπτει την ανάλυση του φορέα σε τμήματα και τον υπολογισμό των Γx, Γy, $S_{\Delta B}$. Είναι λοιπόν πολύ συντομότερος και ασφαλέστερος (αποφεύγει τον κίνδυνο κάποιου λάθους). Είναι επομένως προτιμότερος, εφόσον ζητούνται μόνο οι δυνάμεις και οι ροπές στις εξωτερικές στηρίξεις.

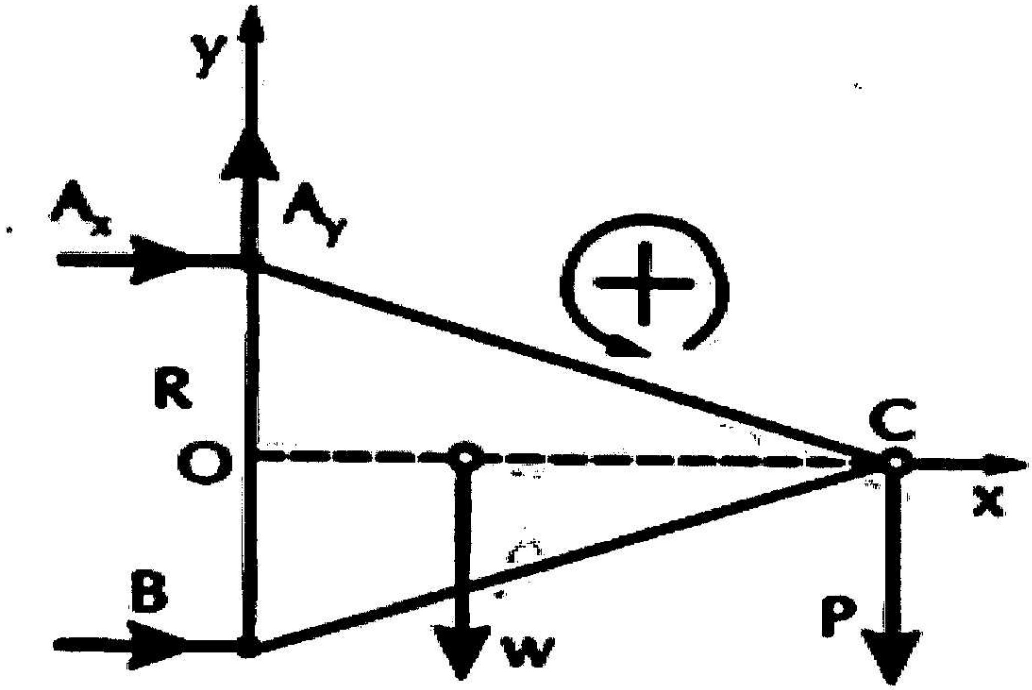
**<u>Παράδειγμα 2:</u>**

Ζητείται να υπολογιστούν οι αντιδράσεις A και B στον τριγωνικό φορέα του σχήματος, όπου δίνονται το φορτίο P=140kN, το ίδιο βάρος του φορέα W=30kN και οι διαστάσεις a=4m και b=12m.



Λύση :

Κατασκευάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος του φορέα όπως στο σχήμα. Στο σημείο Α (άρθρωση) η αντίδραση Α έχει δύο συνιστώσες Ax και Ay, ενώ στο σημείο B (κύλιση) η αντίδραση είναι κάθετη πάνω στο τοίχωμα.




Για να προσδιορίσουμε τις αντιδράσεις αυτές, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις ισορροπίας του σώματος.

- Εξίσωση ροπής:

Παίρνουμε τις ροπές των δυνάμεων ως προς το σημείο Α θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής που παρουσιάστηκε στο σχήμα. Η συνθήκη ισορροπίας είναι:

$$\Sigma M_A = 0 =>$$

$$=> B \cdot \alpha - \frac{b}{3}W - Ph = 0 =>$$

$$=> B = \left(P + \frac{1}{3}W\right)\frac{b}{a} =>$$

$$-> B - \left(140 + \frac{1}{3,30}\right)\frac{12}{4} -> B = 450kN$$

Έτσι η αντίδραση στο Β έχει τη διεύθυνση και φορά που προϋποθέσαμε και είναι ίση προς 450kN.

Η εξίσωση ισορροπίας κατά τη διεύθυνση x είναι:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + B = 0 \Rightarrow A_x = -B \Rightarrow \mathbf{A_x = -450kN}$

Άρα η συνιστώσα Ax της αντίδρασης στο Α έχει το ίδιο μέγεθος με τη Β, αλλά αντίθετη φορά από αυτήν και επίσης αντίθετη φορά από τη φορά που υποθέσαμε αρχικά.

Ισορροπία ως προς y: Η εξίσωση ισορ-ροπίας κατά τη διεύθυνση y είναι :

$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow Ay - W - P = 0 \Rightarrow Ay = W + P \Rightarrow \mathbf{Ay = 170\ KN}$.

Άρα η συνιστώσα Ay της αντίδρασης στο Α έχει τη διεύθυνση και φορά που προϋποθέσαμε και είναι ίση με 170 kN.

Άρα η αντίδραση στο σημείο Α είναι ίση με:

$$A = \left(A_x^2 + A_y^2\right)^{1/2} =>$$

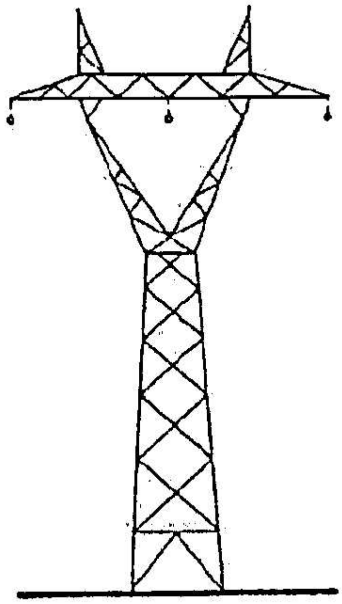
$$=> A = \left(450^2 + 170^2\right)^{1/2} =>$$

$$=> A = 481kN$$

Η διεύθυνση της αντίδραση στο σημείο Α σχηματίζει γωνία 20,69° με την αρνητική διεύθυνση του άξονα των y.

# ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ

**Δικτύωμα λέγεται ένας σύνθετος φορέας που όλα τα μέλη του είναι ράβδοι.**



Είναι ένα σύνολο ράβδων, οι οποίες ενώνονται μεταξύ τους με αρθρώσεις και όλα τα εξωτερικά φορτία του, ασκούνται πάνω στους κόμβους.

Πλεονέκτημα των δικτυωμάτων είναι ότι με αυτά μπορούμε να υλοποιήσουμε μία κατασκευή μεγάλων διαστάσεων αλλά μικρού βάρους.

Κόμβος λέγεται το τμήμα της κατασκευής που περιλαμβάνει τη σύνδεση δύο ή περισσότερων ράβδων του δικτυώματος. (Περιλαμβάνει μία μικρή περιοχή από κάθε συνδεόμενη ράβδο, κοντά στο άκρο της ράβδου.

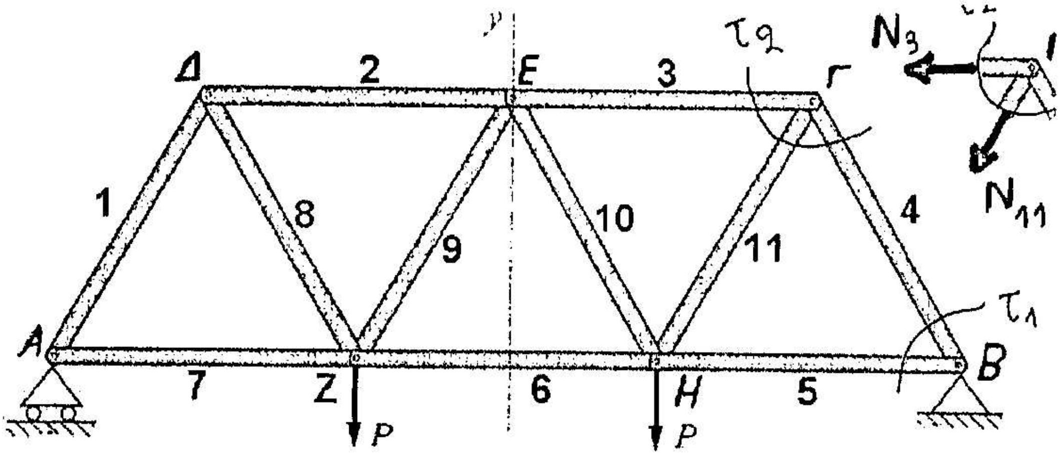
Για να μπορεί να ονομασθεί δικτύωμα μια κατασκευή πρέπει να δέχεται δυνάμεις μόνο στους κόμβους της. Στην περίπτωση αυτή, τα μέλη της κατασκευής θα δέχονται μόνο εφελκυσμό/θλίψη, και είναι ράβδοι.

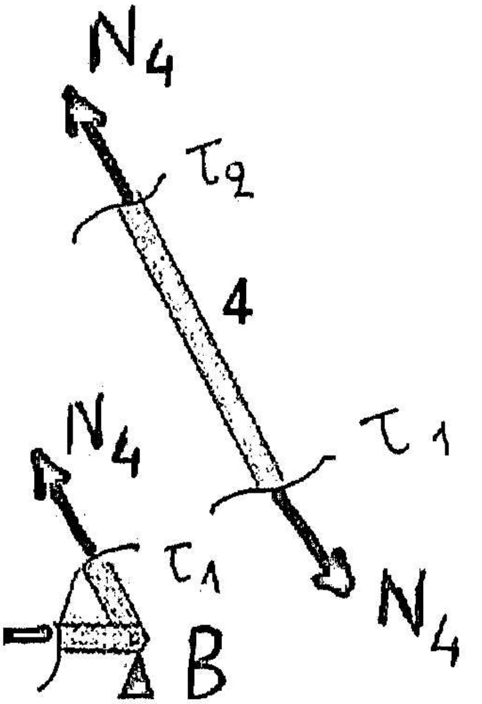
Στην περίπτωση αυτή, τα μέλη της κατασκευής θα δέχονται μόνο εφελκυσμό/θλίψη, και είναι ράβδοι.

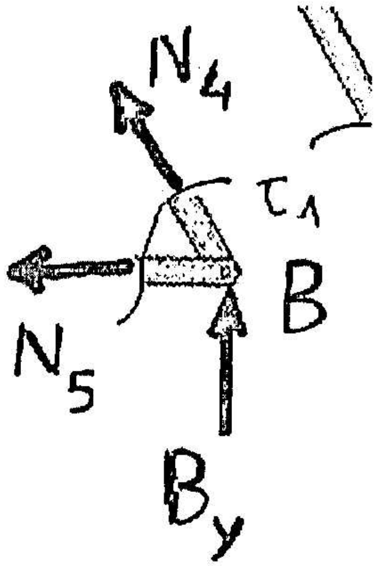
Όταν έχουμε δυνάμεις που τείνουν να τραβήξουν μια ράβδοτις ονομάζουμε <u>Εφελκυστικές</u>

Όταν έχουμε δυνάμεις που πιέζουν μια ράβδο ή ένα στοιχείο τις ονομάζουμε <u>Θλιπτικές.</u>


Όταν αντίθετα σε μερικά μέλη της κατασκευής ασκούνται δυνάμεις σε ενδιάμεσα σημεία, κάθετες ή πλάγιες ως προς το μήκος του μέλους, τότε αυτά τα μέλη θα δέχονται εφελκυσμό και διάτμηση και κάμψη, και θα είναι δοκοί (και όχι ράβδοι), και η όλη κατασκευή θα ονομάζεται "σύνθετος φορέας με δοκούς και ράβδους" (και όχι δικτύωμα).

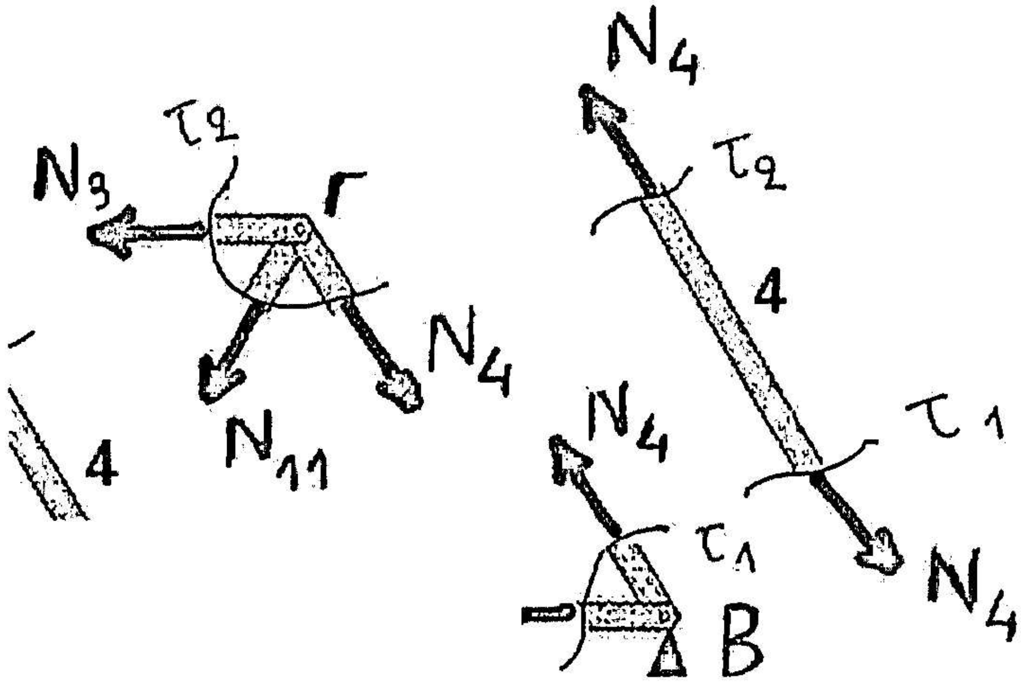


Παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις N4 στην επάνω και κάτω όχθη της τομής τ1 είναι η μία αντίδραση της άλλης.

Το ίδιο ισχύει και για την τομή τ2.




Άγνωστες ράβδοι λέγονται οι ράβδοι για τις οποίες είναι ακόμη άγνωστη η τάση τους.

Ακραίος κόμβος λέγεται ένας κόμβος στον οποίο συναντι-ούνται δύο μόνο άγνωστες ράβδοι.

**Διαδικασία υπολογισμού δικτυώματος με τη μέθοδο των κόμβων:**

1. Ονομάζουμε όλες τις ράβδους του δικτυώματος με αριθμούς. Με βάση αυτούς θα δώσουμε ονόματα στις τάσεις των ράβδων.

2. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις στήριξης, θεωρώντας (μόνο γι' αυτό το βήμα) ότι το δικτύωμα είναι ένα συμπαγές σώμα.
3. Βρίσκουμε έναν ακραίο κόμβο, δηλαδή **έναν κόμβο στον οποίο συναντιούνται δύο μόνο άγνωστες ράβδοι, δηλαδή δύο μόνο ράβδοι των οποίων δεν γνωρίζουμε τις δυνάμεις που τις καταπονούν.**
4. Υπολογίζουμε τις γωνίες που σχηματίζουν οι ράβδοι του ακραίου κόμβου με την οριζόντια κατεύθυνση.
5. Απομονώνουμε τον ακραίο κόμβο και τον επανασχεδιάζουμε μαζί με τις εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται και τις τάσεις που καταπονούν τις ράβδους του.

Για τυποποίηση της εργασίας μας, τις τάσεις των ράβδων τις σχεδιάζουμε **πάντοτε εφελκυστικές.**

Το σχήμα που προκύπτει είναι το **Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (ΔΕΣ) του κόμβου.**

6. Δίνουμε ονόματα στις τάσεις των ράβδων, με βάση τον αριθμό της κάθε ράβδου και όχι με βάση το γράμμα του κόμβου.

7. Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες κατά τους άξονες x και y. Βασιζόμαστε στις γωνίες που υπολογίσαμε προηγουμένως στο βήμα 4.

8. Γράφουμε αναλυτικά τις εξισώσεις ΣFx=0 και ΣFy=0, που περιέχουν ως αγνώστους τις τάσεις των ράβδων. Λύνουμε τις εξισώσεις και βρίσκουμε τις τάσεις των ράβδων.

**Σημαντική Σημείωση:**

Τυχόν αρνητικό αποτέλεσμα θα σημαίνει ότι η δύναμη που καταπονεί τη ράβδο στην πραγματικότητα είναι θλιπτική.

Για συντόμευση της εργασίας μας :

(α) δεν αλλάζουμε τα Δ.Ε.Σ.,

(β) αντιμετωπίζουμε τα βελάκια των δυνάμεων και τα γράμματα που τις συμβολίζουν ως εάν να δείχνουν την πραγματική φορά (δηλ. ως εάν οι τάσεις των ράβδων να είναι εφελκυστικές) και

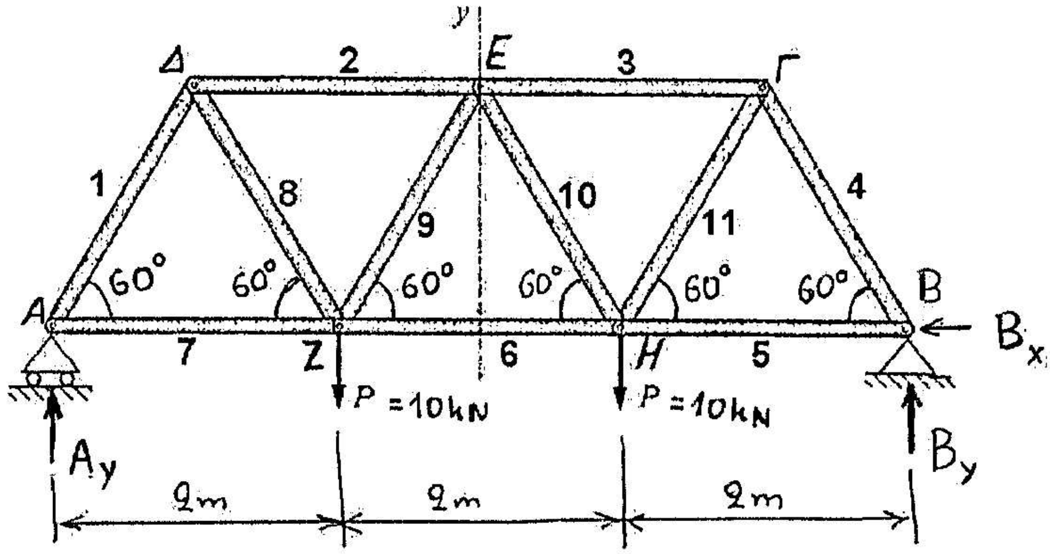
(γ) προσέχουμε μόνο στις αριθμητικές αντικαταστάσεις να βάλουμε την αρνητική τιμή της δύναμης, όπου έχει προκύψει αρνητική).

9. Μόλις βρούμε τις τάσεις των ράβδων του επιλεγέντος κόμβου, απλουστεύουμε το δικτύωμα:

- Αφαιρούμε από το δικτύωμα τις ράβδους που μόλις υπολογίσθηκαν. Προκύπτει ένα μικρότερο δικτύωμα.
- Τοποθετούμε όμως τις τάσεις τους στους απέναντι κόμβους (για να μην αλλοιωθεί η φόρτιση του δικτυώματος).
- Αυτές τις τάσεις τις θέτουμε εφελκυστικές για τους απέναντι κόμβους (δηλαδή με αντίθετη φορά από αυτήν που είχαν στο προηγούμενο βήμα).
- **Έτσι επαληθεύεται αυτομάτως το αξίωμα της δράσης - αντίδρασης.**
- Διατηρούμε τα τυχόν αρνητικά πρόσημα που προέκυψαν στα προηγούμενα βήματα.
- **Επαναλαμβάνουμε την όλη διαδικασία και για τις υπόλοιπες ράβδους του δικτυώματος μέχρι και την τελευταία και κατά αυτόν τον τρόπο προσδιορίζουμε όλες τις φορτίσεις των ράβδων του δικτυώματος.**

Παράδειγμα 1: Παράδειγμα υπολογισμού δικτυώματος με τη μέθοδο των κόμβων

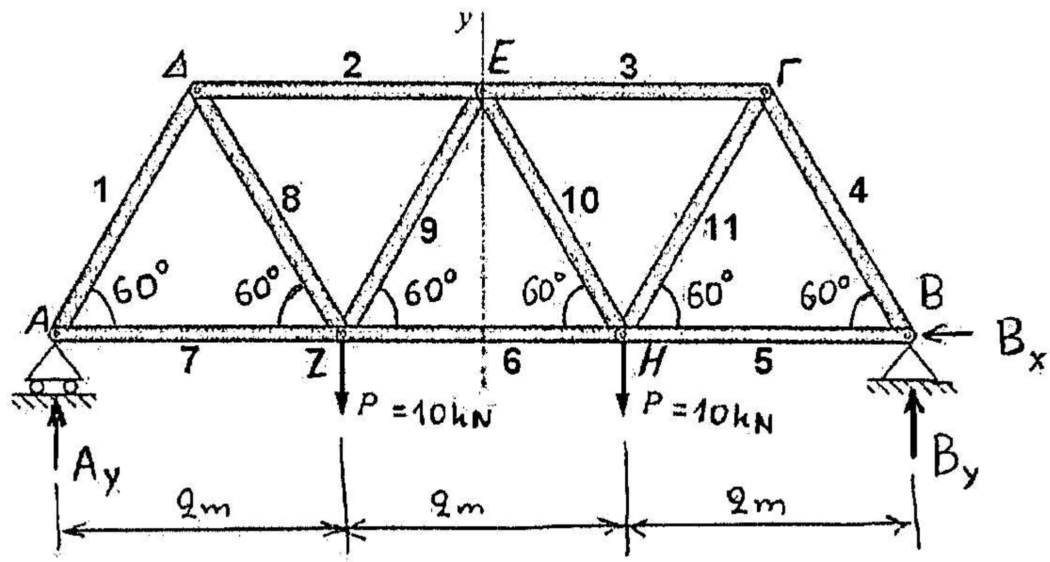
Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος της επόμενης Εικόνας, δηλαδή να προσδιοριστούνε οι αντιδράσεις στήριξης του δικτυώματος και οι εσωτερικές φορτίσεις των ράβδων που το συγκροτούνε.




Λύση:

**Βήμα 1°:** Ονομάζουμε τις στηρίξεις του δικτυώματος με γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Την άρθρωση την ονομάζουμε Β και την κύλιση Α.

Στη συνέχεια ονοματίζουμε και τους υπόλοιπους κόμβους του δικτυώματος με διαδοχικά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου.




Στη συνέχεια αριθμούνται οι ράβδοι του δικτυώματος με διαδοχικούς αριθμούς.

**Βήμα 2°:**

Υπολογίζουμε τις αντιδράσεις στήριξης του δικτυώματος, θεωρώντας το δικτύωμα σαν συμπαγές σώμα.

$\Sigma F_x = 0$ => **Bx = 0**

$\Sigma M_A = 0$ => By * 6 – P * 4 – P * 2 = 0 => => By * 6 = 6 * P => By = P => **By = 10 Kn**

$\Sigma F_y = 0$ => Ay = P + P – By => **Ay = 10 kN**

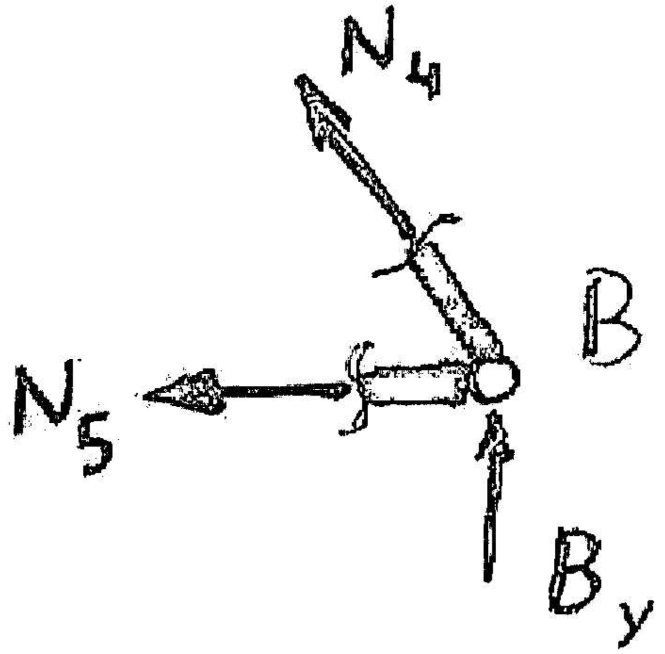
**Βήμα 3°: Επιλέγουμε έναν ακραίο κόμβο (δηλ. έναν κόμβο με δύο μόνο ράβδους). Έστω ότι επιλέγουμε τον κόμβο Β, ο οποίος συνδέεται μόνο με τις ράβδους 4 και 5.**

**Βήμα 4°:** Υπολογίζουμε τις γωνίες που σχηματίζουν οι ράβδοι του ακραίου κόμβου Β με την οριζόντια κατεύθυνση. Από την εκφώνηση γνωρίζουμε τις τιμές των γωνιών Β και Η, οι οποίες είναι ίσες με 60°. Η γωνία Γ προκύπτει και αυτή ίση με 60° ως τρίτη γωνία του τριγώνου ΗΒΓ.

**Βήμα 5°:** Απομονώνουμε τον επιλεγέντα ακραίο κόμβο Β και τον επανασχεδιάζουμε μαζί με τις εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται και τις τάσεις που καταπονούν τις ράβδους του.

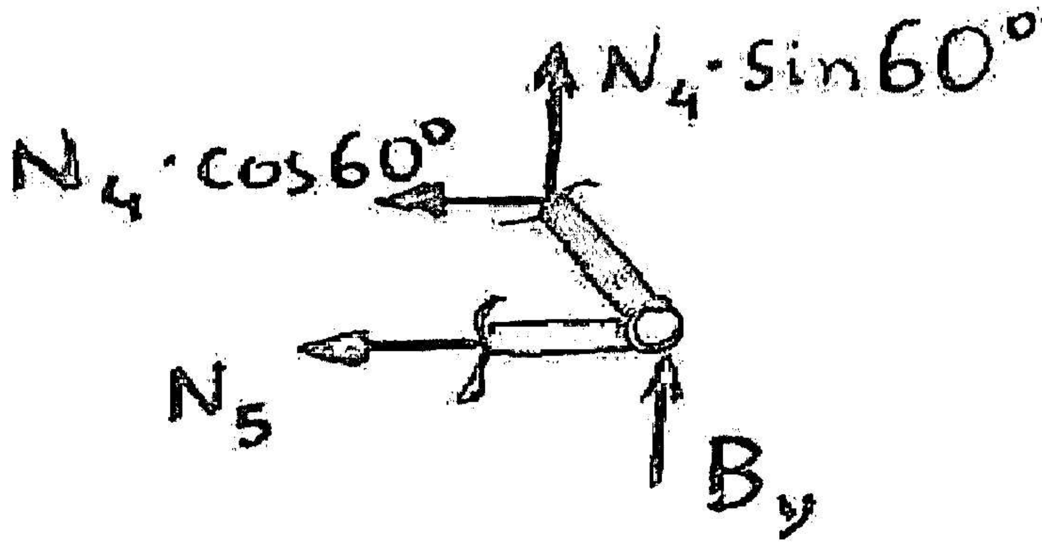
Για τυποποίηση της εργασίας μας, τις τάσεις των ράβδων τις σχεδιάζουμε **πάντοτε εφελκυστικές.**

Το σχήμα που προκύπτει είναι το **Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (ΔΕΣ) του κόμβου Β.**




**Βήμα 6°:** Δίνουμε ονόματα στις τάσεις των ράβδων, με βάση τον αριθμό της κάθε ράβδου και όχι με βάση το γράμμα του κόμβου.

**Βήμα 7°:** Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες κατά τους άξονες x και y. Προκύπτει το σχήμα της επόμενης Εικόνας.



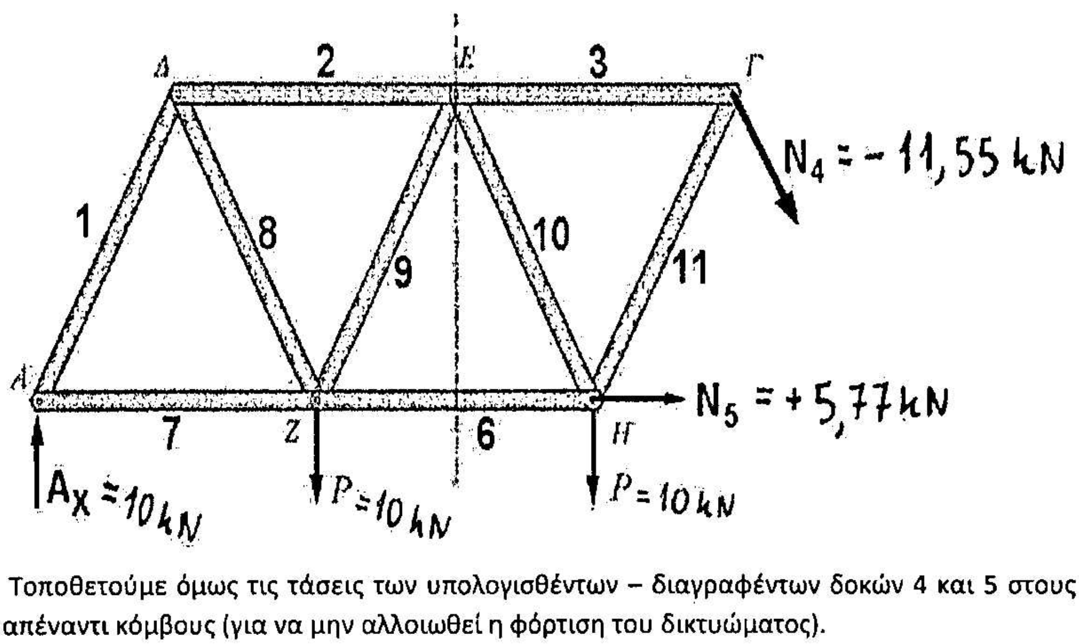

**Βήμα 8°**: Γράφουμε αναλυτικά τις εξισώσεις ΣFx=0 και ΣFy=0, που περιέχουν ως αγνώστους τις τάσεις των ράβδων του κόμβου Β. Λύνουμε τις εξισώσεις και βρίσκουμε τις τάσεις των ράβδων.

ΣFy = 0 => By + N4 * sin60° = 0 => N4 = **– 11,55 kN**

ΣFx = 0 => $N_5$ + $N_4$ * cos60° = 0 => $N_5$ = – $N_4$ * cos60° => $N_5$ = – (–11,55 kN)*0,5 =>

$\Rightarrow$ **$N_5$ = + 5,77 kN**

**Αφαιρούμε τις δύο (γνωστές πια) ράβδους 4 και 5 και το δικτύωμα παίρνει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα της επόμενης διαφάνειας.**

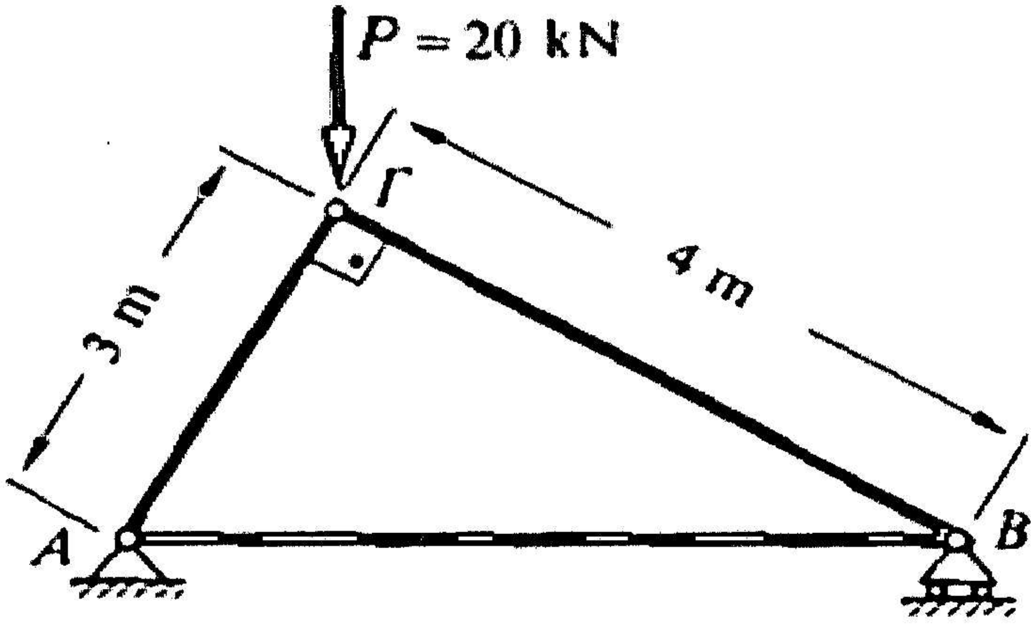



Τοποθετούμε όμως τις τάσεις των υπολογισθέντων – διαγραφέντων δοκών 4 και 5 στους απέναντι κόμβους (για να μην αλλοιωθεί η φόρτιση του δικτυώματος).

Αυτές τις τάσεις τις θέτουμε στους απέναντι κόμβους με αντίθετη φορά από αυτήν που είχαν στο προηγούμενο βήμα, σύμφωνα με την αρχή της δράσης - αντίδρασης.

**<u>Παράδειγμα 2 υπολογισμού δικτυώματος με τη μέθοδο των κόμβων:</u>**

Ορθογώνιο τριγωνικό δικτύωμα ΑΒΓΑ φέρει κατακόρυφο φορτίο P=20kN στον κόμβο Γ (βλ. Σχήμα). Στηρίζεται δε με άρθρωση στο Α και με κύλιση στο Β.

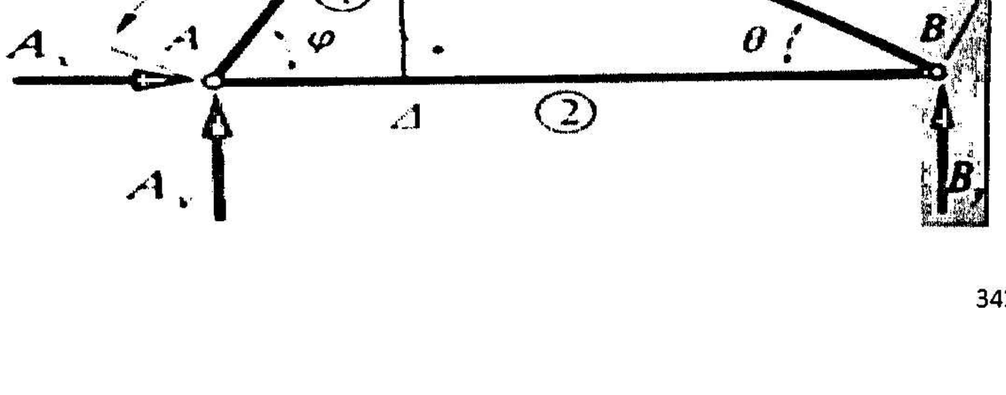



Δίνονται: (ΑΓ)=3m και (ΓΒ)=4m.

Ζητούνται:

- α') Οι αντιδράσεις στα σημεία στήριξης.
- β') Οι αξονικές δυνάμεις όλων των ράβδων του δικτυώματος

**Λύση:** Αντικαθιστούμε τις στηρίξεις στα Α και Β και στις θέσεις τους τοποθετούμε τις αντιδράσεις $A_x$, $A_y$ για την άρθρωση Α και $B_y$ για την κύλιση Β. Κατόπιν σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. του συνολικού δικτυώματος.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

$$(AB) = \sqrt{3^2 + 4^2} =>$$
$$=> (AB) = \sqrt{25} \Rightarrow (AB) = 5m$$

Επίσης, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

$$\tan\varphi = 4/3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi = 53{,}1^0$$

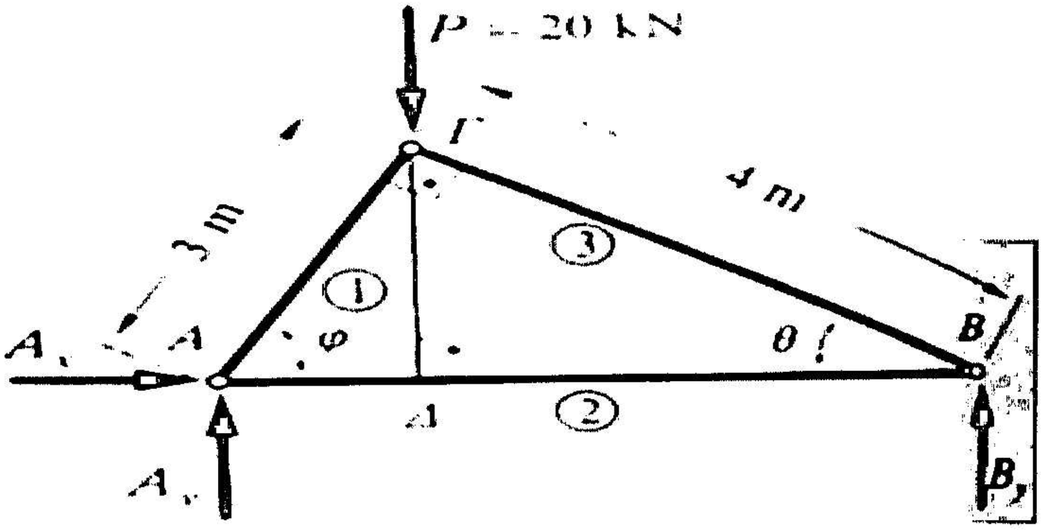
Άρα: $\sin\varphi = 0{,}8$ και $\cos\varphi = 0{,}6$.

Θεωρούμε το δικτύωμα σαν ενιαίο σώμα, όπου ασκούνται η εξωτερική δύναμη P και οι άγνωστες $A_x$, $A_y$, $B_y$ που μπορούν να υπολογιστούν από τις 3 εξισώσεις ισορροπίας του.

Παίρνοντας ροπές ως προς το Α (οπότε μηδενίζεται η ροπή των $A_x$, $A_y$). Οπότε έχουμε:

$$\sum M_A = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow - P \cdot (A\Delta) + B_y \cdot 5 = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow - 20 \cdot [(A\Gamma)\cos\varphi] + 5 \cdot B_y = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathbf{B_y = 7{,}2\ kN}$$
$$\sum M_B = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow - A_y \cdot 5 + P \cdot (\Delta B) = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow - 5 \cdot A_y + 20 \cdot [(AB) - (A\Delta)] = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow - 5 \cdot A_y + 20 \cdot (5 - 3 \cdot 0{,}6) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathbf{A_y = 12{,}8kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{A_x = 0}$$



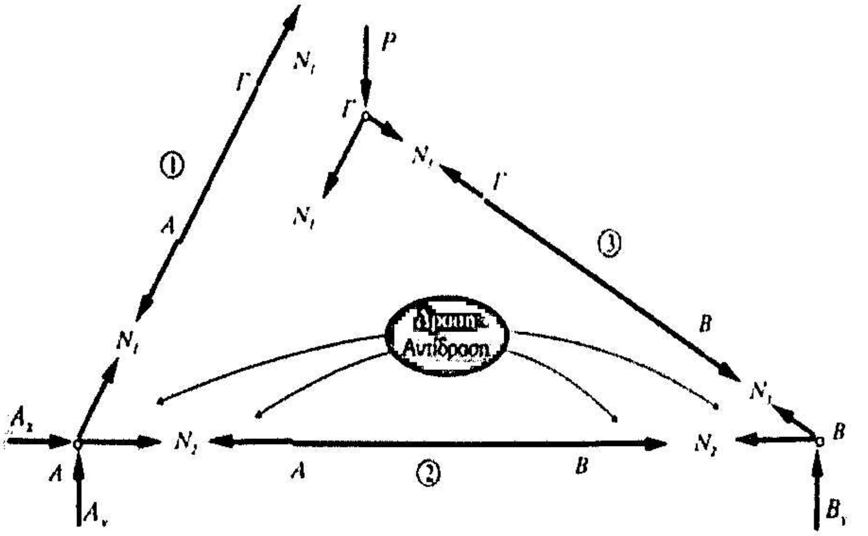

**Υπολογισμός αξονικών δυνάμεων των ράβδων:**

- Απαριθμούμε με (1), (2), (3) τις ράβδους του δικτυώματος.
- Συμβολίζουμε με $N_i$ τις αξονικές δυνάμεις των ράβδων, δηλ. $N_1$, $N_2$, $N_3$.

Αρχικά θεωρούμε ότι όλες οι $N_i$ είναι εφελκυστικές για τις ράβδους και αν κάποια προκύψει αρνητική, σημαίνει ότι είναι θλιπτική για τη συγκεκριμένη ράβδο.

Η ράβδος (2) για παράδειγμα, εφελκύεται από δύναμη $N_2$ στο κάθε άκρο της. Στον κόμβο Α **λόγω δράσης - αντίδρασης** ασκείται δύναμη μέτρου $N_2$ αλλά αντίθετης φοράς από αυτήν που ασκείται στο αριστερό άκρο της ράβδου (2). Με αντίστοιχη σκέψη, στον κόμβο Β ασκείται η αντίδραση της δεξιάς $N_2$. Ανάλογα ισχύουν και για τις υπόλοιπες ράβδους.

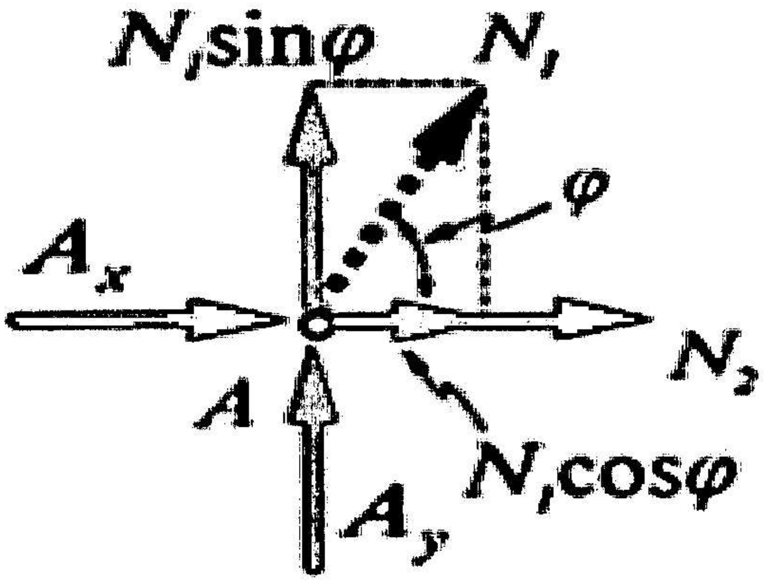
Σχεδιάζουμε τα Δ.Ε.Σ. για κάθε μία ράβδο και κάθε έναν κόμβο του δικτυώματός μας.



Επιλύουμε το Δικτύωμα εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας στους κόμβους του. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζονται οι εσωτερικές δυνάμεις που καταπονούν τις ράβδους του δικτυώματος.

**Ξεκινάμε με τον Κόμβο Α:**

Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. του κόμβου Α, τοποθετώντας επάνω του την αντίδραση στήριξης Αy (η Αx υπολογίστηκε μηδενική), καθώς και τις εσωτερικές δυνάμεις του δικτυώματος $N_1$ και $N_2$.




Παρατηρούμε ότι σε αυτόν δρα η Αy, και συντρέχουν 2 ράβδοι οι (1) και (2), με αξονικές δυνάμεις $N_1$ και $N_2$. Αυτές μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις ισορροπίας του κόμβου Α, από τις οποίες έχουμε:

$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_y + N_1 \sin\varphi = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 12{,}8 + N_1 * 0{,}8 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{N_1 = -16\mathrm{kN}}$$

Άρα η εσωτερική δύναμη $N_1$ του δικτυώματος είναι θλιπτική για τη ράβδο 1 και όχι εφελκυστική όπως αρχικά θεωρήσαμε.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

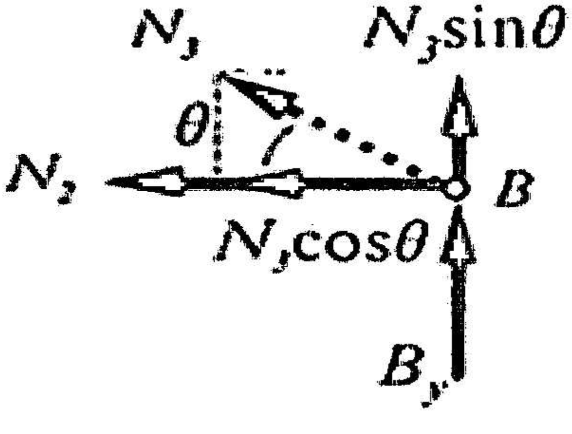
$$\Rightarrow A_x + N_1 \cos\varphi + N_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1 \cos\varphi + N_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_2 = 9{,}6\,\mathrm{kN}}$$ ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΗ

**Συνεχίζουμε με τον Κόμβο Β:**

Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. του κόμβου Β, τοποθετώντας επάνω του την αντίδραση στήριξης Βy, καθώς και τις εσωτερικές δυνάμεις του δικτυώματος $N_3$ και $N_2$.




Παρατηρούμε ότι σε αυτόν δρα η Βy, και συντρέχουν 2 ράβδοι οι (2) και (3), με αξονικές δυνάμεις $N_2$ και $N_3$. Αυτές μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις ισορροπίας του κόμβου Β, από τις οποίες έχουμε:

Η $N_2$ υπολογίστηκε προηγουμένως κατά τον υπολογισμό των δυνάμεων που καταπονούνε τον κόμβο Α και βρέθηκε ίση με 9,6 kN.

Επίσης έχουμε:

$$\varphi + \theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - \varphi$$

Συνεπώς, οι θ και φ είναι συμπληρωματικές και άρα το ημίτονο της θ είναι ίσο με το συνημίτονο της φ και το αντίστροφο. Οπότε έχουμε: cosθ = 0,8 και sinθ = 0,6.

Από τις εξισώσεις ισορροπίας του κόμβου Β, έχουμε:

$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow$$

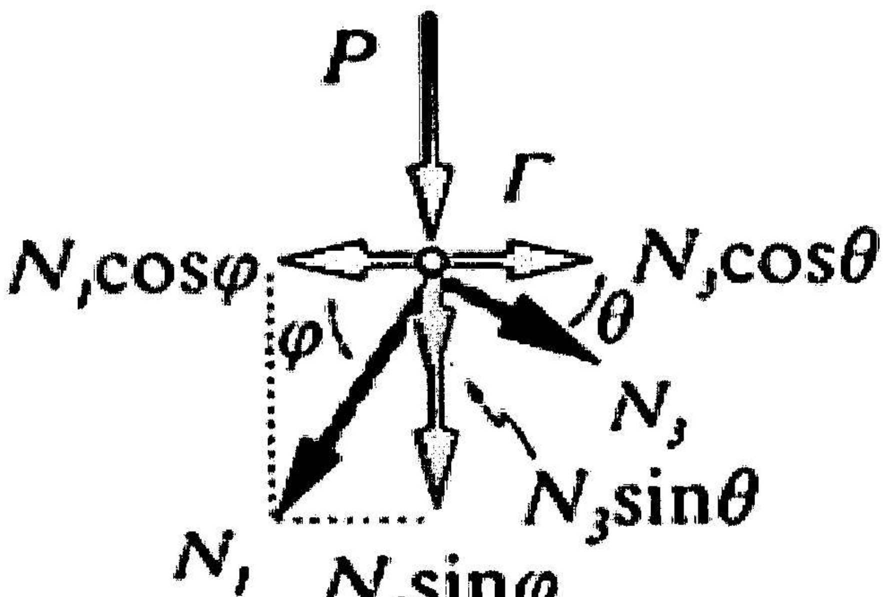
$$\Longrightarrow -N_2 - N_3 \cos\theta = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N_3 = -12\ \mathrm{kN}$$

Άρα η εσωτερική δύναμη $N_3$ του δικτυώματος είναι θλιπτική για τη ράβδο 3 και όχι εφελκυστική όπως αρχικά θεωρήσαμε.

**Συνεχίζουμε με τον Κόμβο Γ:**

Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. του κόμβου Γ, τοποθετώντας επάνω του την εξωτερική δύναμη P, καθώς και τις εσωτερικές δυνάμεις του δικτυώματος $N_1$ και $N_3$.



Παρατηρούμε ότι σε αυτόν δρα η P και συντρέχουν 2 ράβδοι οι (1) και (3), με αξονικές δυνάμεις $N_1$ και $N_3$. Αυτές έχουνε υπολογιστεί από τις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων A και B.

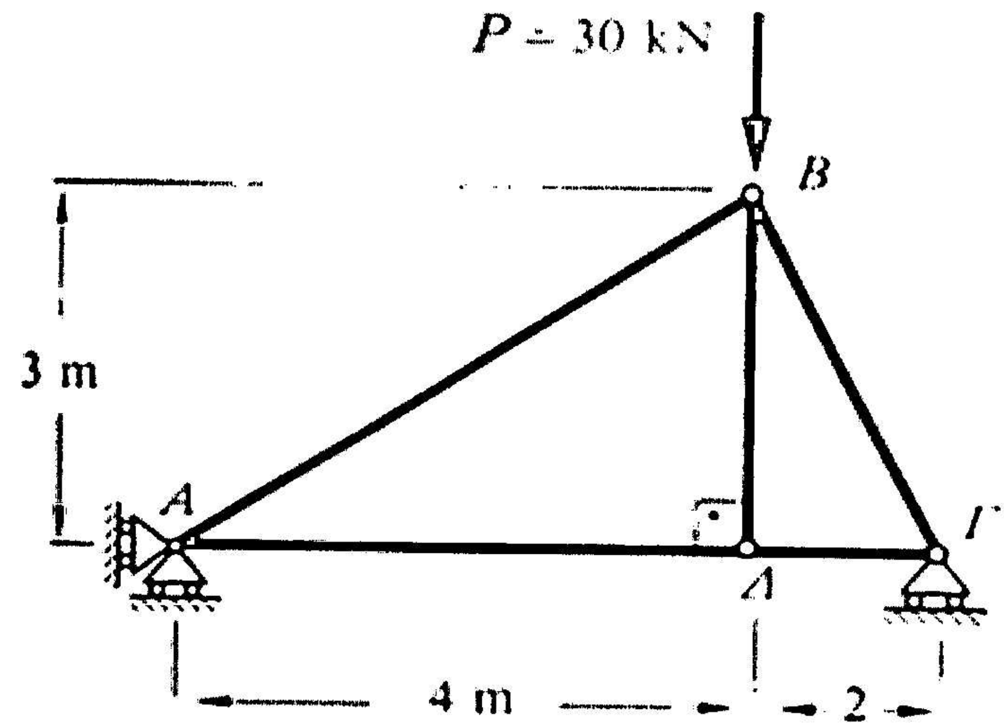
Μπορούμε, εάν το επιθυμούμε να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε στα προηγούμενα βήματα της λύσης, μέσω της επίλυσης των εξισώσεων ισορροπίας του κόμβου Γ.

**<u>Σημαντική Παρατήρηση:</u>**

Σημειώνουμε ότι οι εξισώσεις στατικής ισορροπίας του κάθε κόμβου είναι μόνον δύο, οι: $\sum F_x = 0$ και $\sum F_y = 0$ αφού η $\sum M_A = 0$ ικανοποιείται αυτόματα και δεν δίνει καμία πληροφορία.

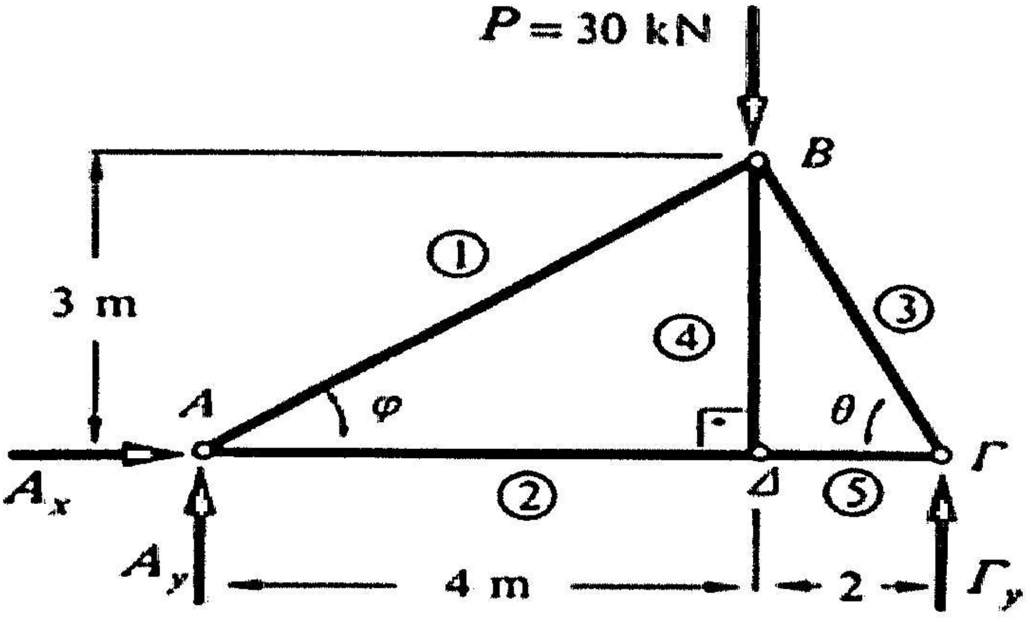
**<u>Παράδειγμα 3: υπολογισμού δικτυώματος με τη μέθοδο των κόμβων</u>**

Δικτύωμα ΑΒΓΔΑ στηρίζεται με δύο κυλίσεις στο σημείο Α και κύλιση στο Γ. Φέρει δε φορτίο P = 30 kN στο B. Δίνονται: (ΑΔ)=4m, (ΔΓ)=2m, (ΒΔ)=3m. Ζητούνται οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων του δικτυώματος.




**Λύση:**

Αντικαθιστούμε τις στηρίξεις και στη θέση τους τοποθετούμε τις αντιδράσεις στήριξης $A_x$, $A_y$ για τις δύο κυλίσεις στο Α και $Γ_y$ για την κύλιση στο Γ. Έτσι προκύπτει το Δ.Ε.Σ. του δικτυώματος, που φαίνεται στην επόμενη διαφάνεια.




**Υπολογισμός αντιδράσεων στηρίξεων:**

Εφαρμόζοντας τις 3 εξισώσεις στατικής ισορροπίας στο Δ.Ε.Σ. του δικτυώματος, όπου ασκούνται οι εξωτερικές δυνάμεις P, $A_x$, $A_y$, $Γ_y$, έχουμε:

$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow \mathbf{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P * 4 - Γ_y * 6 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 6 * Γ_y - 30 * 4 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{Γ_y = 20\,kN}$$

$$\sum M_Γ = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_y * 6 - P * 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow 6 * A_y - 30 * 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y = 10\ \text{kN}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, οι αντιδράσεις στήριξης είναι:

$$A_x = 0,\ A_y = 10\ \text{kN},$$

$$\Gamma_y = 20\ \text{kN}.$$

<u>**Υπολογισμός αξονικών δυνάμεων των ράβδων:**</u>

Απαριθμούμε από (1) έως (5) τις ράβδους του δικτυώματος.

Συμβολίζουμε με $N_i$ τις αξονικές δυνάμεις των ράβδων. Αρχικά τις θεωρούμε όλες εφελκυστικές και αν κάποια προκύψει αρνητική, αυτό σημαίνει ότι είναι θλιπτική για τη συγκεκριμένη ράβδο.

Επειδή θεωρούμε ότι οι ράβδοι εφελκύονται, οι δυνάμεις που ασκούνται στους κόμβους (λόγω της αρχής δράσης-αντίδρασης), έχουν τέτοια φορά ώστε να απομακρύνονται από αυτούς, αφού πρέπει να έχουν ίσα μέτρα αλλά αντίθετη φορά με αυτές που ασκούνται στις ράβδους.

**Κόμβος Α:**

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ, είναι:

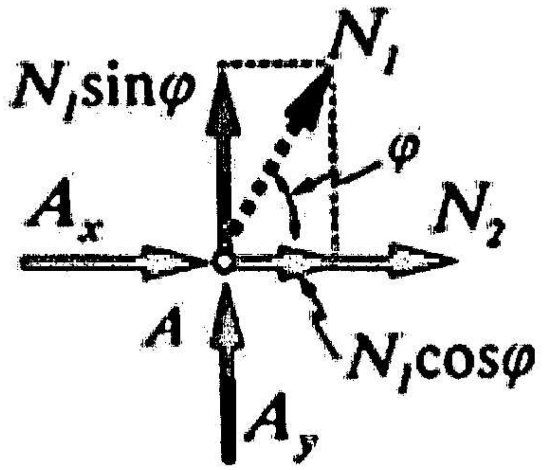
$$\tan\varphi = 3/4 \Rightarrow \varphi = 36{,}8^0$$

Οπότε έχουμε:

$\underline{\sin\varphi = 0{,}6}$ και $\underline{\cos\varphi = 0{,}8}$

Στον κόμβο Α, δρα η αντίδραση στήριξης $A_y$ (η Ax ευρέθη ίση με μηδέν) και συντρέχουν μόνον 2 ράβδοι οι (1), (2), που ασκούν δυνάμεις $N_1$, $N_2$ αντίστοιχα.

Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. του κόμβου Α:




$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y + N_1 \sin\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 + 0{,}6 N_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_1 = -16{,}66 \text{ kN}}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_x + N_1 \cos\varphi + N_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - 16{,}66 * 0{,}8 + N_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_2 = 13{,}33 \text{ kN}}$$

**Κόμβος Β:**

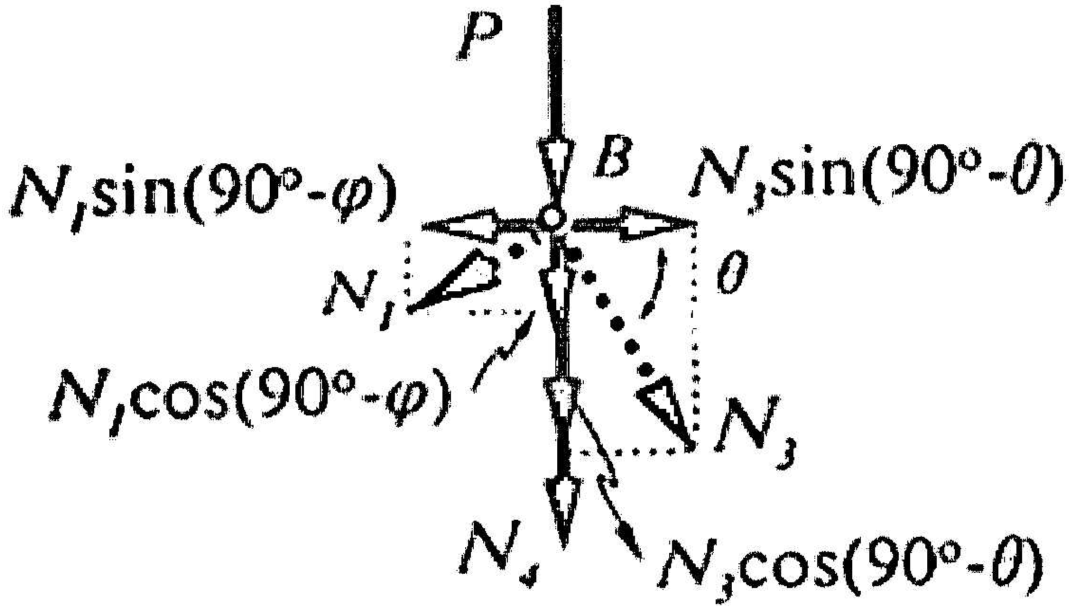
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΒ, έχουμε:

$$\tan\theta = 3/2 \Rightarrow \theta = 56{,}3^{o}$$

Οπότε έχουμε:

$\underline{\sin\theta = 0{,}83}$ και $\underline{\cos\theta = 0{,}55}$

**Σχεδιάζουμε το Δ.Ε.Σ. του κόμβου Β.**




Στον κόμβο Β συντρέχουν 3 ράβδοι, οι (1), (3), (4), οι οποίες ασκούν δυνάμεις $N_1$, $N_3$, $N_4$ αντίστοιχα και η Ρ (Σχ.). Η $N_1$ υπολογίστηκε προηγουμένως, οπότε από τις 2 εξισώσεις ισορροπίας του υπολογίζονται οι $N_3$, $N_4$:

$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow -N_1\sin(90^o - \varphi) + N_3\sin(90^o - \theta) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N_3\cos\theta = N_1\cos\varphi \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow N_3 * 0{,}55 = -16{,}66 * 0{,}8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{N_3 = -\ 24{,}23\ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -P - N_3 \cos(90° - \theta) - N_1 \cos(90° - \varphi) - N_4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -P - N_3 \sin\varphi - N_1 \sin\theta - N_4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -30 - (-16{,}66) * 0{,}6 - (-24{,}23) * 0{,}83 - N_4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_4 \approx 0}$$

<u>Κόμβος Γ</u>

Σε αυτόν συντρέχουν 2 ράβδοι, οι (3), (5), οι οποίες ασκούν δυνάμεις $N_3$, $N_5$ αντίστοιχα και η αντίδραση στήριξης $\Gamma_y$ . Η $N_3$ έχει ήδη υπολογιστεί, οπότε από τις 2 εξισώσεις ισορροπίας του κόμβου Γ θα υπολογίσουμε την $N_5$, έχουμε:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

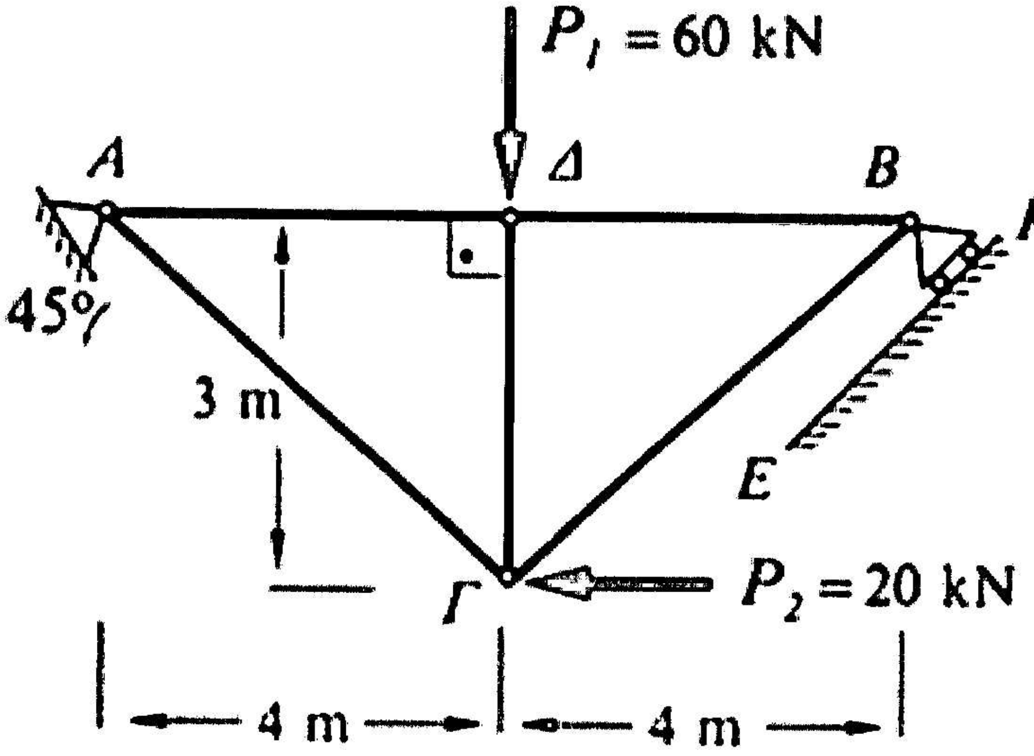
$$\Rightarrow -N_5 - N_3 \cos\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -N_5 - 24{,}23 * 0{,}55 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_5 = 13{,}32\ kN}$$

Παράδειγμα 4: υπολογισμού δικτυώματος με τη μέθοδο των κόμβων

Το συμμετρικό δικτύωμα ΑΒΓΔΑ έχει τις διαστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



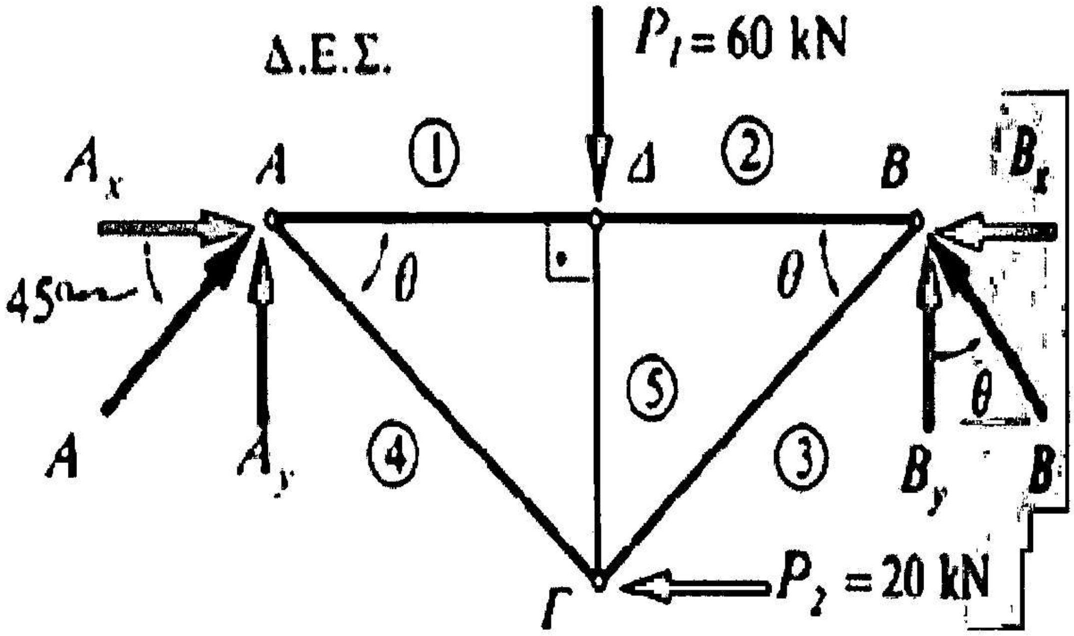

Στηρίζεται δε με άρθρωση στο σημείο Α (η οποία σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια) και με κύλιση στο Β (που λειτουργεί χωρίς τριβές), με επιφάνεια κύλισης ΕΚ, όπου η ΕΚ είναι παράλληλη με τη ράβδο ΒΓ. Το παραπάνω δικτύωμα φέρει τα φορτία $P_1$= 60 kN και $P_2$= 20 kN. Ζητούνται οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων του δικτυώματος.

Λύση:

Ως γνωστόν η άρθρωση αντικαθίσταται από μία άγνωστη δύναμη μέτρου Λ και άγνωστης γωνίας φ. Η δύναμη αυτή προσδιορίζεται μονοσήμαντα αν υπολογιστεί ένα οποιοδήποτε ζεύγος κάθετων συνιστωσών της, από τα άπειρα που υπάρχουν. Έστω $A_x$, $A_y$ ένα τέτοιο ζεύγος. Το πρόβλημα επομένως υπολογισμού της αντίδρασης Α ανάγεται στην εύρεση των ($A_x$, $A_y$).

Την κύλιση Β τώρα, την αντικαθιστούμε με μία δύναμη Β κάθετη στην επιφάνεια κύλισης ΕΚ, αφού δίνεται ότι δεν υπάρχουν τριβές. Την αναλύουμε σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες μία οριζόντια $B_x$ και μία κατακόρυφη $B_y$.

Επειδή όμως δόθηκε ότι η επιφάνεια κύλισης είναι παράλληλη με τη ράβδο ΓΒ, η γωνία που σχηματίζει η Β με τη $B_y$ είναι ίση με την γωνία ΓΒΔ, αφού έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα κάθετες.




Από το ορθογώνιο δε τρίγωνο ΔΓΒ, έχουμε:

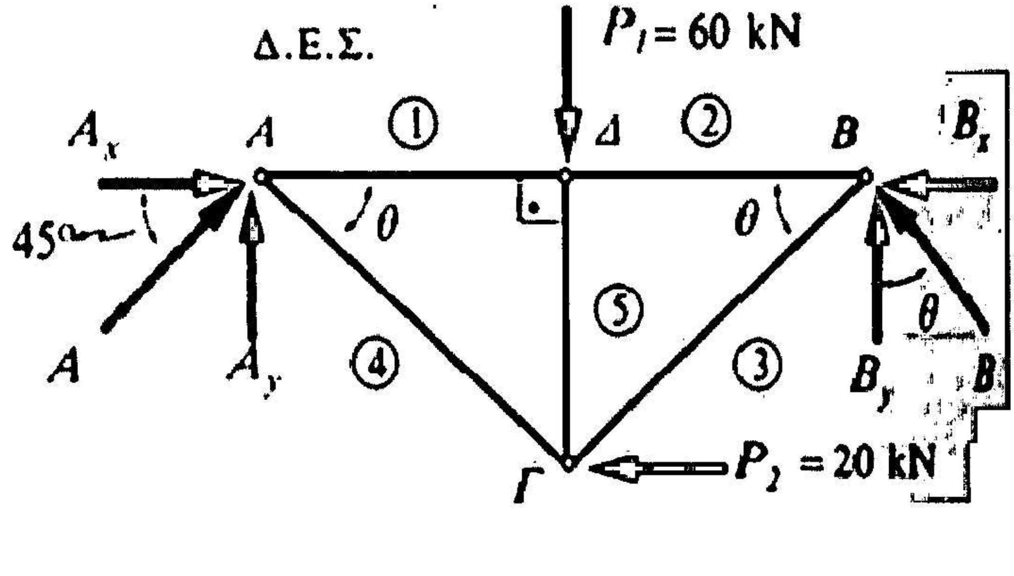
$$\tan\theta = 3/4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\theta = 0{,}75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 36{,}86^{o}$$

Οπότε: $\underline{\sin\theta = 0{,}6}$ και $\cos\theta = 0{,}8$.

Το Δ.Ε.Σ. του δικτυώματος είναι το εξής:



Υπολογισμός αντιδράσεων:

Από τις εξισώσεις ισορροπίας του δικτυώματος, όπου ασκούνται οι $P_1$, $P_2$ καθώς και οι άγνωστες $A_x$, $A_y$, $B_x$, $B_y$, έχουμε:

$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -P_2 - B_x + A_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{A_x - B_x = 20} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow B_y + A_y - P_1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_y + B_y = 60} \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -B_y \cdot 8 + P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 4 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{B_y = 37{,}5 \text{ kN}} \quad (3)$$

Φαινομενικά υπάρχουν 3 εξισώσεις οι (1), (2), (3) με 4 αγνώστους $A_x$, $A_y$, $B_x$, $B_y$.

Όμως ισχύει:

$B_x = B*\sin\theta$ και $B_y = B\cos\theta$, όπου το $\theta = 36{,}86°$ και άρα:

$\sin\theta = 0{,}6$ και $\cos\theta = 0{,}8$. Συνεπώς,

**$B_x$ = B*0,6** και **$B_y$ = B*0,8**. Αντικαθιστούμε τα $B_x$ και $B_y$ με βάση τις παραπάνω σχέσεις ως προς B και καταλήγουμε σε ένα σύστημα τριών εξισώσεων των (1), (2), (3), με τρεις αγνώστους τους $A_x$, $A_y$ και B.

Επιλύουμε αυτό το σύστημα εξισώσεων και υπολογίζουμε τους αγνώστους μας:

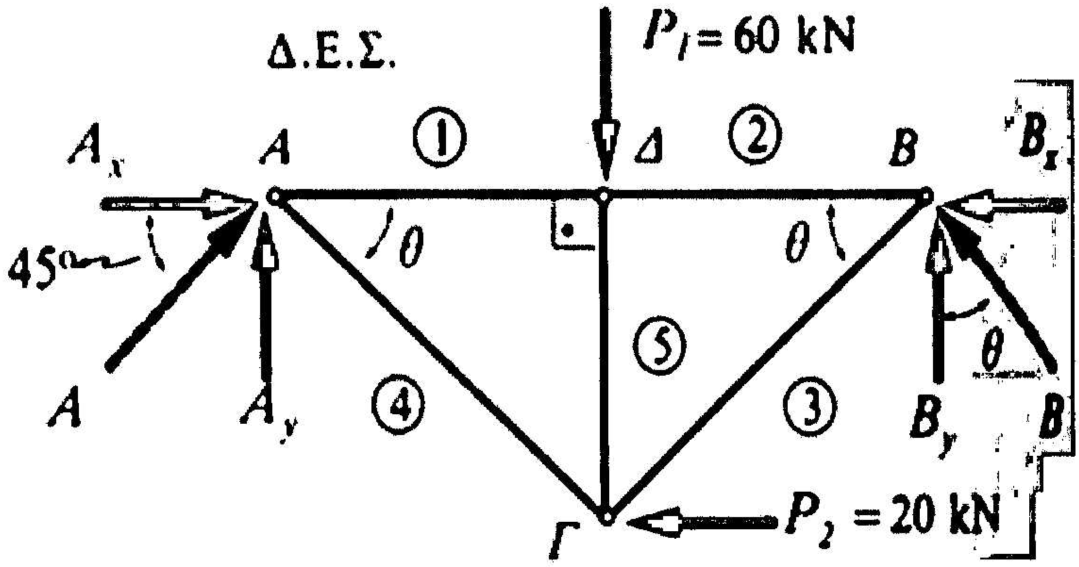
$$A_x = 48,1\ kN$$

$$A_y = 22,5\ kN$$

$$B_x = 28,1\ kN$$

$$B_y = 37,5\ kN$$

Απαριθμούμε με (1) έως (5) τις ράβδους του δικτυώματος. Συμβολίζουμε με $N_i$ τις δυνάμεις των ράβδων, δηλ. $N_1$ έως $N_5$.




**Υπολογισμός αξονικών δυνάμεων των ράβδων:**

**Κόμβος Α:**

Στον κόμβο Α συντρέχουν 2 ράβδοι οι (1), (4) με δυνάμεις Ν1, Ν4 αντίστοιχα, που μπορούν να υπολογιστούν από τις 2 εξισώσεις ισορροπίας του οπότε:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y - N_4 \sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22,5 - N_4 \cdot 0,6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_4 = 37,5\ kN}$$

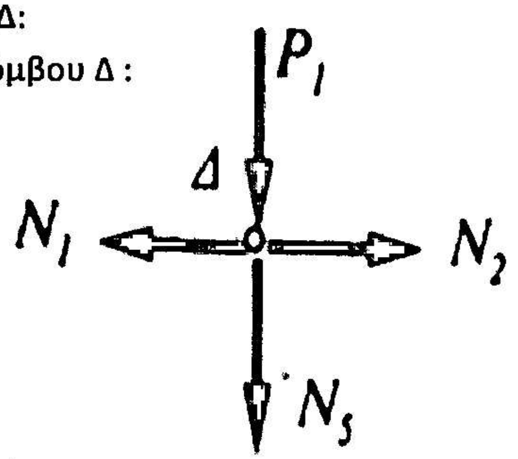
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_4 \cos\theta + N_1 + A_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -N_5 - 60 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_1 = -78{,}1\ \text{kN}}$$

**Κόμβος Δ:**

**Δ.Ε.Σ. Κόμβου Δ :**




Στον κόμβο Δ συντρέχουν 3 ράβδοι οι (1), (2), (5) με δυνάμεις $N_1$, $N_2$, $N_5$ αντίστοιχα. Η $N_1$ υπολογίστηκε παραπάνω, ενώ οι $N_2$, $N_5$ μπορούν να υπολογιστούν από τις 2 εξισώσεις ισορροπίας του κόμβου Δ, οπότε έχουμε:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 - N_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2 - (-78{,}1) = 0 \Rightarrow$$

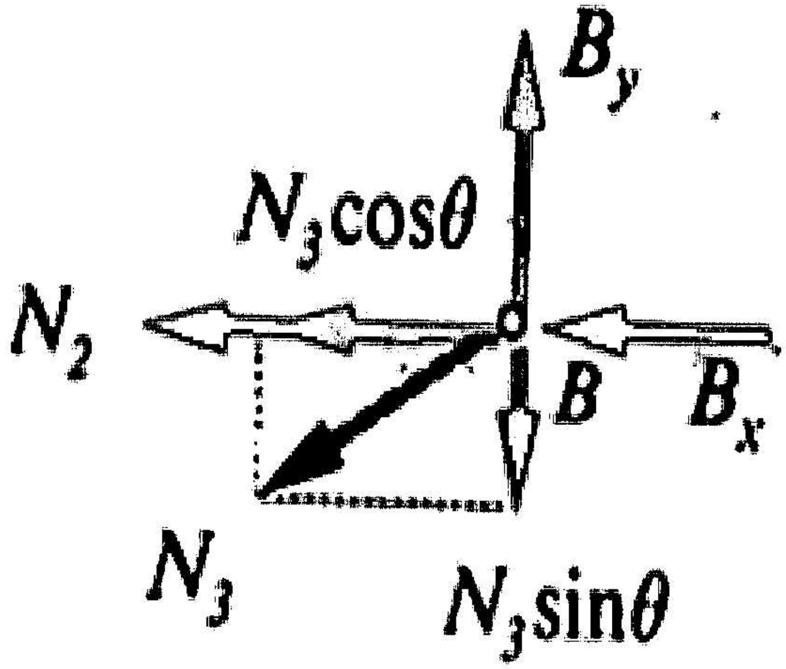
$$\Rightarrow \underline{N_2 = -78{,}1\ \text{kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_5 - P_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_5 = -60\ \text{kN}}$$

**<u>Κόμβος Β:</u>**

**<u>Δ.Ε.Σ. Κόμβου Β:</u>**




Στον κόμβο Β συντρέχουν 2 ράβδοι οι (2), (3), με δυνάμεις, $N_2$, $N_3$ αντίστοιχα. Η $N_2$ υπολογίστηκε παραπάνω, ενώ η $N_3$ μπορεί να υπολογιστεί από τις 2 εξισώσεις ισορροπίας του κόμβου Β. Έτσι έχουμε:

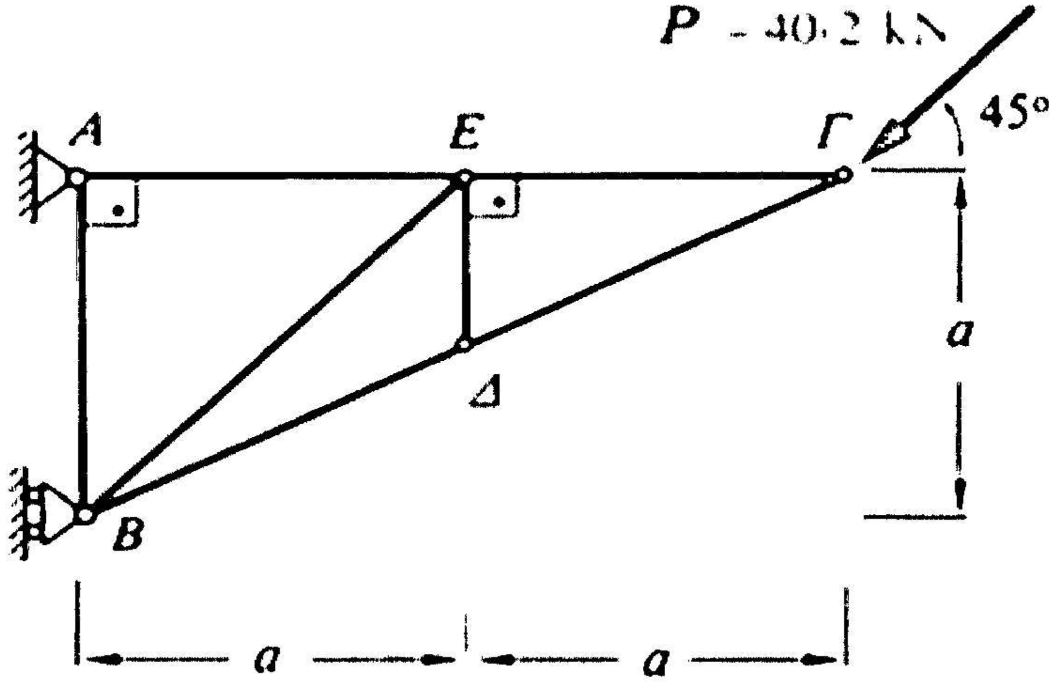
$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -N_2 - N_3 \cos\theta - B_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{N_3 = -\ 62{,}5\ \mathrm{kN}}$$

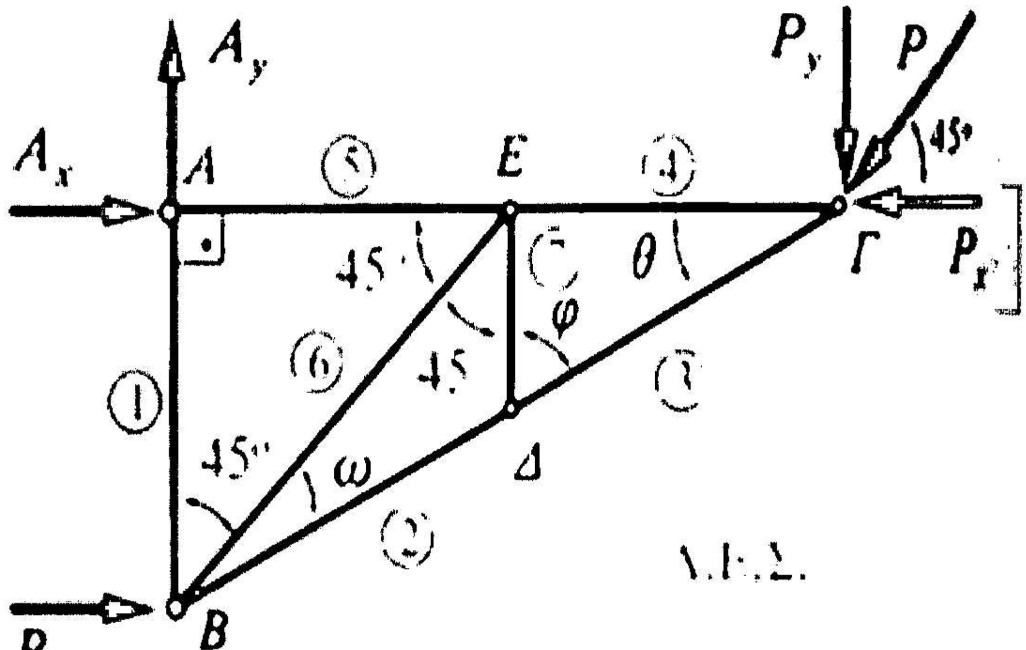
**Παράδειγμα 5: υπολογισμού δικτυώματος με τη μέθοδο των κόμβων**

Το δικτύωμα του σχήματος της επόμενης διαφάνειας φέρει φορτίο P = 40 √2 kN στο σημείο Γ υπό κλίση 45°. Να βρεθούν οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων του δικτυώματος.




**ΛΥΣΗ:**

Έστω θ, φ, ω οι βοηθητικές γωνίες.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ έχουμε:

$$\tan\theta = \alpha/2\alpha = 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 26{,}56^{o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\sin\theta = 0{,}477}, \underline{\cos\theta = 0{,}89}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΔΓ, έχουμε:

$$\varphi + \theta = 90^{o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = 63{,}44^{o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = 0{,}89, \underline{\cos\varphi = 0{,}447}$$

Στο ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ, η γωνία φ είναι εξωτερική της ΒΔΕ, οπότε είναι:

$$\varphi = \omega + 45^{o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = 18{,}44^{o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\sin\omega = 0{,}31}, \underline{\cos\omega = 0{,}94}$$

Υπολογισμός αξονικών δυνάμεων των ράβδων:

- Αντικαθιστούμε τις στηρίξεις με τις αντιδράσεις (Ax, Ay), By.
- Αναλύουμε τη P σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα:

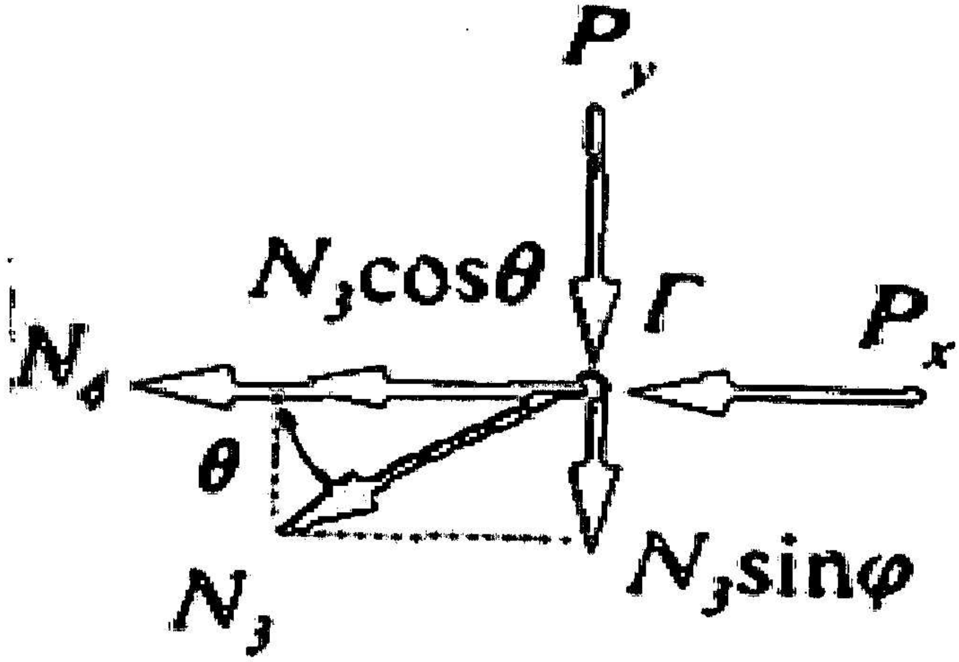
$P_x = P\cos45° = 40$ kN,

$P_y = P\sin45° = 40$ kN.

Δηλαδή: $P_x = P_y = 40$ kN.

**<u>Κόμβος Γ:</u>**

**<u>Δ.Ε.Σ. Κόμβου Γ:</u>**




Παρατηρούμε ότι στον κόμβο Γ είναι γνωστές οι εξωτερικές $P_x$, $P_y$ συντρέχουν 2 μόνο ράβδοι οι (3), (4) που ασκούν δυνάμεις $N_3$, $N_4$ αντίστοιχα.

Αυτές μπορούν να υπολογιστούν από τις 2 εξισώσεις ισορροπίας του. Οπότε έχουμε:

$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -P_y - N_3 \sin\theta = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{N_3 = -89{,}48\ \mathrm{kN}}$$

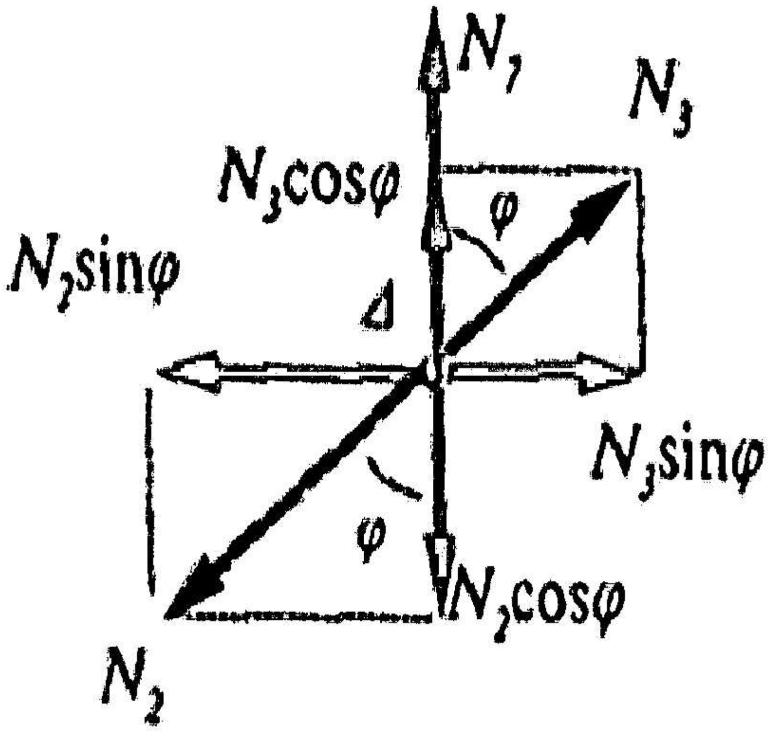
$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -P_x - N_3 \cos\theta - N_4 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{N_4 = 39{,}63\ \mathrm{kN}}$$

**Κόμβος Δ:**

**Δ.Ε.Σ. Κόμβου Δ:**




Σε αυτόν τον κόμβο συντρέχουν οι 3 ράβδοι (2), (3), (7) που ασκούν δυνάμεις $N_2$, $N_3$, $N_7$ αντίστοιχα. Η $N_3$ υπολογίστηκε παραπάνω και επομένως οι υπόλοιπες 2 $N_2$, $N_7$ μπορούν να υπολογιστούν από τις 2 εξισώσεις ισορροπίας του:

$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N_3 \sin\varphi - N_2 \sin\varphi = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N_2 = N_3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{N_2 = -89{,}48\,\mathrm{kN}}$$

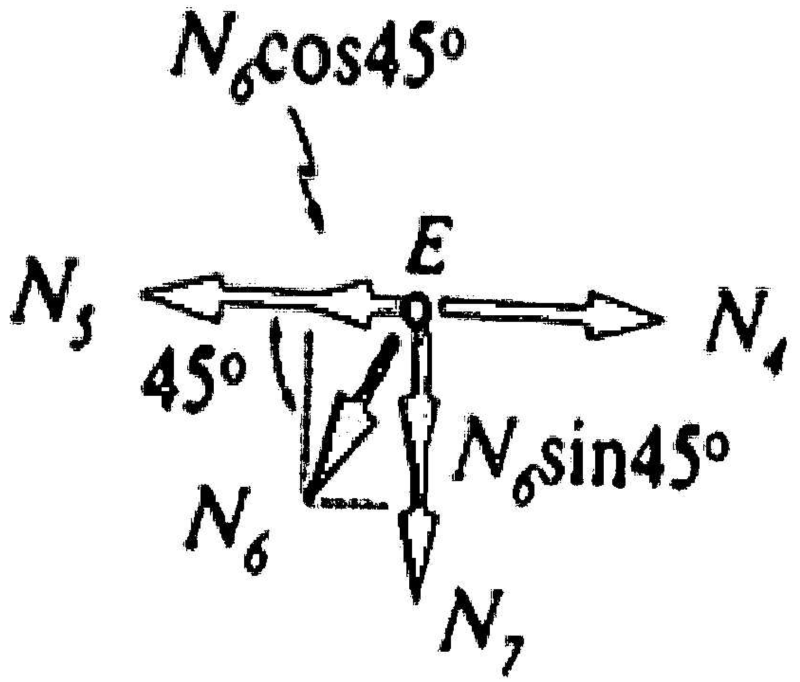
$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow N_7 + N_3 \cos\varphi - N_2 \sin\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_7 - 89{,}48 \cdot 0{,}447 + 89{,}48 \cdot 0{,}447 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_7 = 0}$$

**<u>Δ.Ε.Σ. Κόμβου Ε:</u>**




Σε αυτόν συντρέχουν 4 ράβδοι, οι (4), (5), (6), (7) που ασκούν δυνάμεις $N_4$, $N_5$, $N_6$, $N_7$ αντίστοιχα. Οι $N_4$, $N_7$ υπολογίστηκαν παραπάνω, ενώ οι $N_5$, $N_6$ υπολογίζονται από τις 2 εξισώσεις ισορροπίας του:

$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow -N_6 \sin 45^\circ - N_7 = 0 \Rightarrow$$

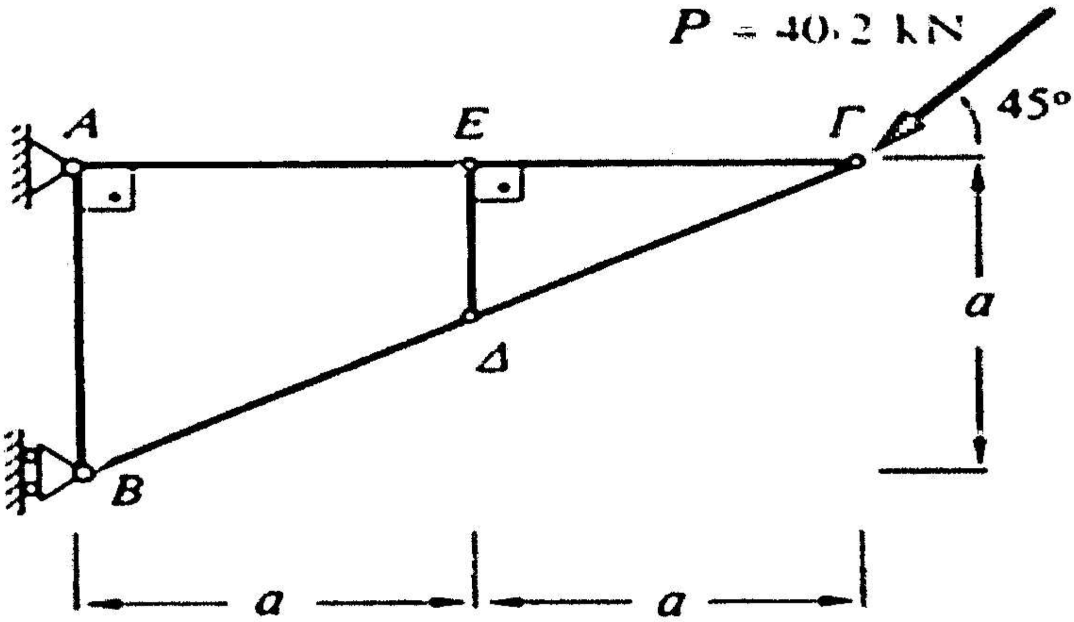
$$\Rightarrow \underline{N_6 = 0}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

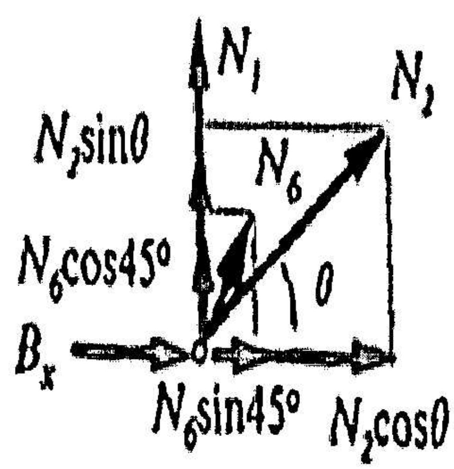
$$\Rightarrow N_4 - N_5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_5 = 39{,}63\ kN}$$

Επειδή βρέθηκε $N_6$=0, η ράβδος (6) μπορεί να αφαιρεθεί από τα δικτύωμα. Οπότε το Δ.Ε.Σ. του δικτυώματος γίνεται:




**Δ.Ε.Σ. Κόμβου Β:**



Στον κόμβο B συντρέχουν 3 ράβδοι, οι (1), (2), (6) με δυνάμεις $N_1$, $N_2$, $N_6$ αντίστοιχα. Επιπλέον υπάρχει **η άγνωστη αντίδραση στήριξης $B_x$**. Οι $N_6$, $N_2$ υπολογίστηκαν παραπάνω, οπότε οι $B_x$, $N_1$ υπολογίζονται από τις 2 εξισώσεις ισορροπίας του:

$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B_x + N_2 \cos\theta + N_6 \sin 45^o = 0 \Longrightarrow$$

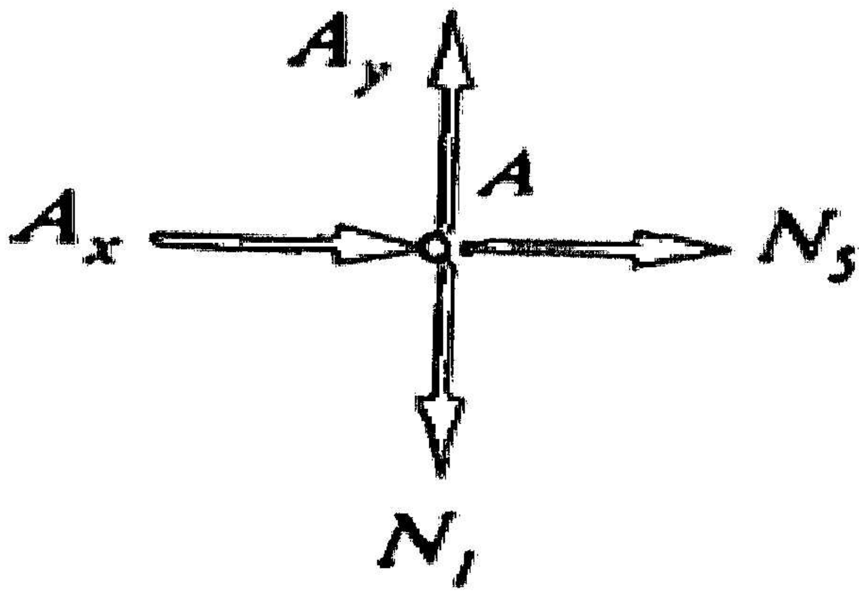
$$\Longrightarrow \underline{B_x = 79{,}63\ \mathrm{kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N_1 + N_6 \cos 45^o + N_2 \sin\theta = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{N_1 = 39{,}99\ \mathrm{kN}}$$

<u>Δ.Ε.Σ. Κόμβου Α:</u>



Στον κόμβο Α συντρέχουν 2 ράβδοι, οι (1), (5) με δυνάμεις $N_1$, $N_5$ αντίστοιχα, οι οποίες και υπολογίστηκαν παραπάνω. Οι επιπλέον δυνάμεις (αντιδράσεις) $A_x$, $A_y$ υπολογίζονται από τις δύο εξισώσεις ισορροπίας του:

$$\sum F_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N_5 + A_x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{A_x = -39{,}63\ \mathrm{kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow A_y - N_1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underline{A_y = 39{,}99\ \mathrm{kN}}$$

Γενική επαλήθευση: Αυτή είναι δυνατόν να γίνει από την ικανοποίηση ή μη των εξισώσεων στατικής ισορροπίας ολόκληρου του δικτυώματος.

# Υπολογισμός τάσεων ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ με τη μέθοδο Ritter:

Όταν υπολογίζουμε δικτύωμα με τη μέθοδο των κόμβων, συναντούμε δύο δυσκολίες:

1) Πρέπει να αρχίσουμε από "ακραίο κόμβο" (δηλ. με δύο μόνο άγνωστες ράβδους), και αυτοί οι κόμβοι είναι λίγοι.
2) Για υπολογισμό στον δεύτερο, τρίτο κτλ κόμβο βασιζόμαστε στα αποτελέσματα των προηγούμενων κόμβων. Αν ο υπολογισμός ενός κόμβου είναι λάθος, το σφάλμα μεταδίδεται σε όλους τους επόμενους κόμβους.

Αυτές οι δυσκολίες αποφεύγονται αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο της τομής Ritter.

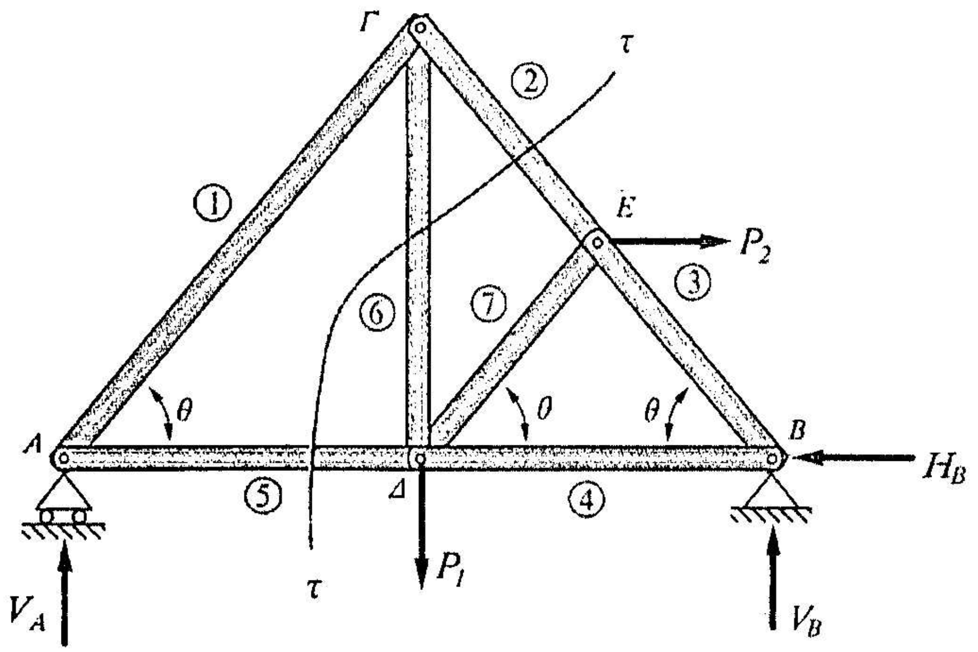
Τα χαρακτηριστικά μιας τέτοιας τομής είναι:

1) Κόβει το δικτύωμα σε δύο μέρη που το καθένα μπορεί να περιέχει πολλούς κόμβους.
2) Κάθε νέα τομή Ritter εκτελείται στο αρχικό σχήμα. Έτσι, τα αποτελέσματα κάθε τομής Ritter δεν εμπλέκονται με τα αποτελέσματα προηγούμενων ή επόμενων υπολογισμών.
3) Η τομή Ritter πρέπει να κόβει τρείς ράβδους που **δεν συντρέχουν και οι τρείς στο ίδιο** σημείο. Προκύπτουν τρεις εξισώσεις με έναν άγνωστο η κάθε μία (και όχι σύστημα εξισώσεων), και έτσι διευκολύνεται η επίλυση.

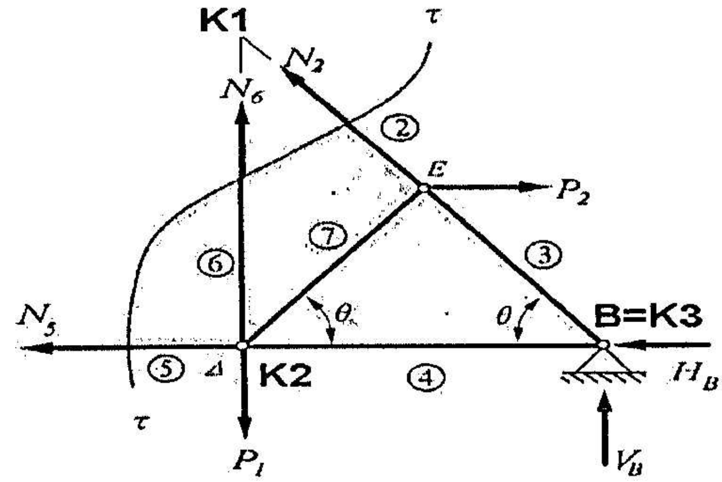
Η **διαδικασία για εύρεση τάσεων σε ράβδους δικτυώματος με τη μέθοδο της τομής** Ritter είναι η εξής:

1. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις στήριξης.

2. Σημειώνουμε μία τομή που κόβει το δικτύωμα σε δύο μέρη, περνώντας από τρείς ράβδους που δεν συντρέχουν και οι τρείς στο ίδιο σημείο (τομή Ritter).



3. Σχεδιάζουμε το ένα από τα δύο τμήματα του δικτυώματος, τοποθετούμε επάνω του τις δυνάμεις που δέχεται, και επίσης σημειώνουμε και τις (ακόμη άγνωστες) τάσεις των ράβδων που κόπηκαν από την τομή Ritter.

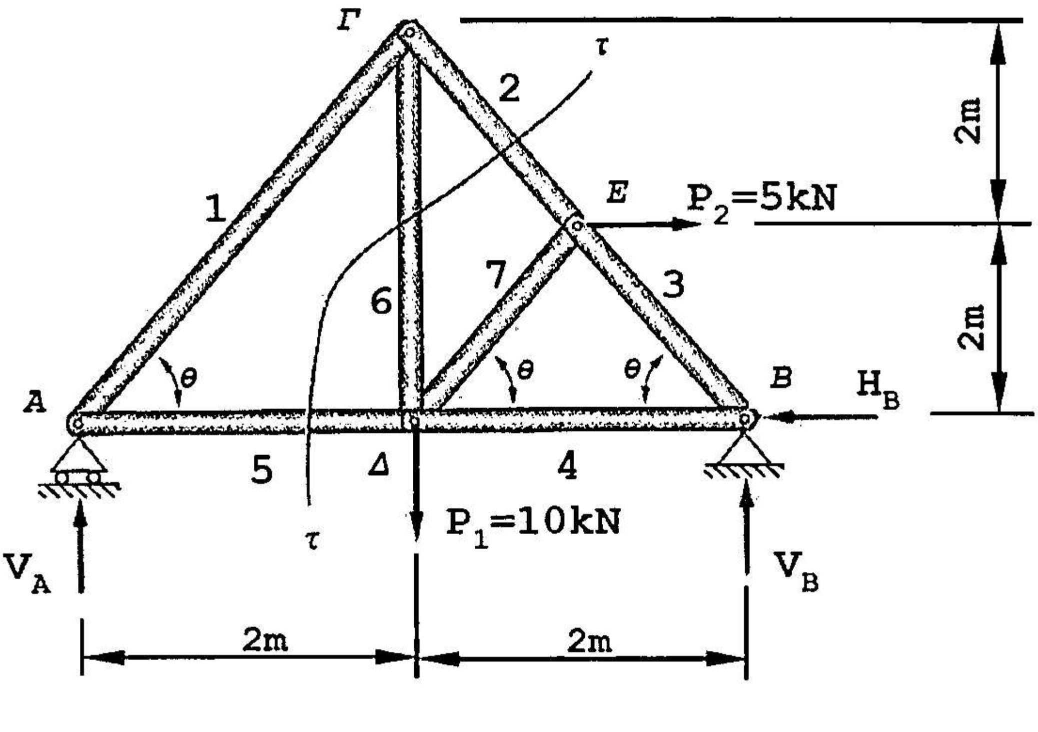



5. Γράφουμε αναλυτικά τις εξισώσεις $\Sigma M_{K1} = 0$, $\Sigma M_{K2} = 0$ και $\Sigma M_{K3} = 0$, που περιέχουν ως αγνώστους τις τάσεις των ράβδων.

Σημείωση: Αν δύο ράβδοι είναι παράλληλες, άρα δεν έχουν σημείο τομής, δοκιμάζουμε εξίσωση της μορφής $\Sigma F_x = 0$ ή $\Sigma F_y = 0$.

**<u>Παράδειγμα 1:</u> υπολογισμού δικτυώματος με τη μέθοδο της τομής Ritter**

Στο δικτύωμα της επόμενης διαφάνειας να βρεθούν οι τάσεις των ράβδων 2, 5, 6 με τη μέθοδο της τομής Ritter.



**Βήμα 1:** Οι δυνάμεις στήριξης υπολογίζονται ως εξής:

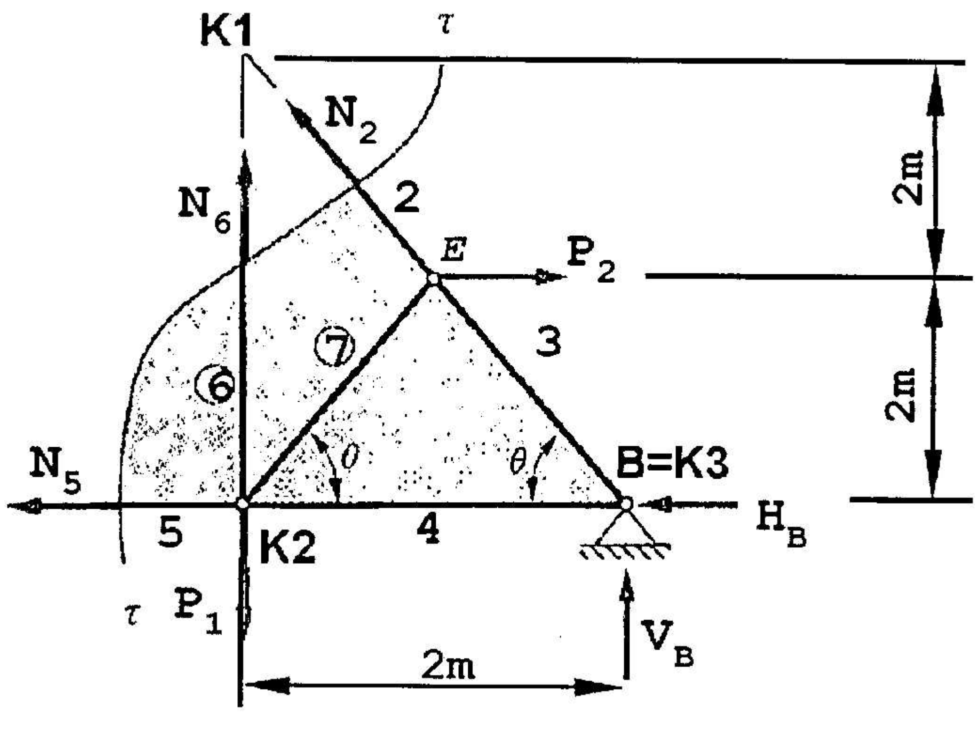
$\Sigma Fx = 0 \Rightarrow H_B = P_2 \Rightarrow \mathbf{H_B = 5\ Kn}$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow P_1*2m + P_2*2m - V_B*4m = 0 \Rightarrow \mathbf{V_B = 7{,}5\ kN}$

$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow V_A - P_1 + V_B = 0 \Rightarrow V_A = P_1 - V_B \Rightarrow \mathbf{V_A = 2{,}5\ kN}$

**Βήμα 2:** Σημειώνουμε την τομή τ-τ, η οποία κόβει τις τρείς ράβδους που θέλουμε να υπολογίσουμε.

Σχεδιάζουμε το ένα από τα δύο τμήματα του δικτυώματος και παίρνουμε το παρακάτω σχήμα.




Παρατηρούμε ότι είναι πράγματι τομή Ritter (1ον, χωρίζει το δικτύωμα σε δύο μέρη· 2ον, κόβει τρεις ράβδους που δεν συναντι-ούνται και οι τρεις στο ίδιο σημείο).

Αν πάρουμε την εξίσωση μηδενισμού των ροπών ως προς $K_1$, θα βρούμε τη δύναμη $N_5$:

$\Sigma M_{K1} = 0 \Rightarrow N_5 * 4m + H_B * 4m - V_B*2m - P_2*2m = 0 \Rightarrow N_5 * 4m = -H_B*4m + V_B*2m + P_2*2m \Rightarrow$

$\Rightarrow N_5*4m = -5{,}0kN * 4m + 7{,}5kN * 2m + 5{,}0kN * 2m \Rightarrow N_5*4m = 5{,}0\ kN\ m \Rightarrow$

$$\Rightarrow N_5 = \frac{5{,}0\ kN\ m}{4m} = 1{,}25\ kN$$

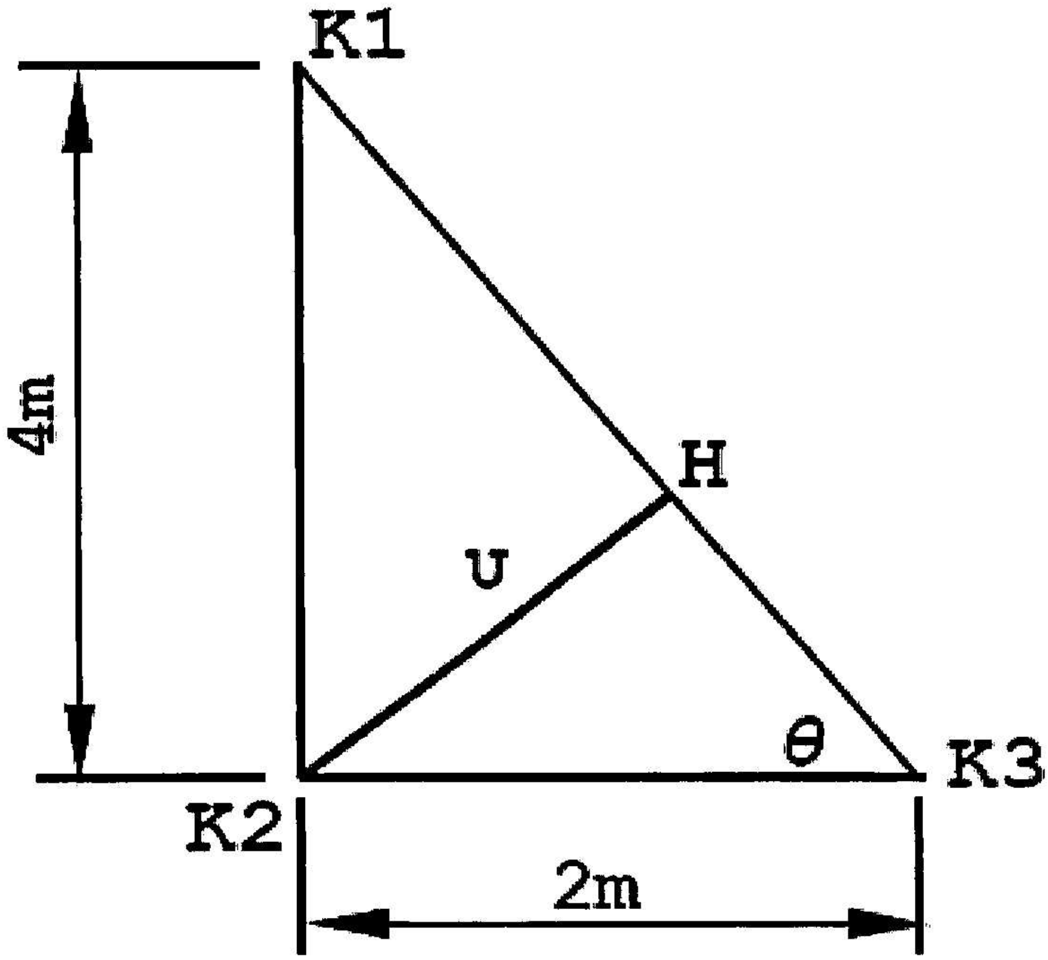
Αν πάρουμε την εξίσωση μηδενισμού των ροπών ως προς $K_3$, θα βρούμε τη δύναμη $N_6$:

$\Sigma M_{K3} = 0 \Rightarrow N_6*2m - P_1*2m + P_2*2m = 0 \Rightarrow N_6*2m = P_1*2m - P_2*2m \Rightarrow$

$\Rightarrow N_6*2m = 10{,}0kN*2m - 5{,}0kN*2m \Rightarrow N_6*2m = 10{,}0\ kNm \Rightarrow$

$$\Rightarrow N_6 = \frac{10{,}0\ kN\ m}{2m} = 5{,}0\ kN$$

Και τέλος, αν πάρουμε την εξίσωση μηδενισμού των ροπών ως προς $K_2$, θα βρούμε τη δύναμη $N_2$. Για να διαμορφώσουμε όμως την εξίσωση χρειαζόμαστε πρώτα την κάθετη απόσταση από το $K_2$ στην ευθεία $K_1$ - $K_3$. Αν συμβολίσουμε αυτή την απόσταση με "υ" προκύπτει το ορθογώνιο τρίγωνο $K_2$-$K_3$-H.



$$=> \theta = 63{,}44^{o}$$

$$\tan\theta = \frac{4m}{2m} = 2{,}0 \ =>$$

υ = 2m * sin63,44° => υ = 1,79 m.

Η εξίσωση μηδενισμού των ροπών ως προς $K_2$ είναι η εξής:

$\Sigma M_{K2} = 0 => N_2 * \upsilon + V_B * 2m - P_2 * 2m = 0 => N_2 * \upsilon = -V_B * 2m + P_2 * 2m =>$

$=> N_2 * \upsilon = -7{,}5kN * 2m + 5{,}0kN * 2m => N_2 * \upsilon = -5{,}0\ kN\ m =>$

$$=> N = \frac{-5{,}0\ kN\ m}{\upsilon} =$$

$$=> N_{\varnothing} = \frac{-5{,}0\ kN\ m}{1{,}79m} = -2{,}79\ kN$$

# ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Γνωρίζουμε ότι η μάζα ενός σώματος δείχνει πόσο καθυστερεί να μεταβληθεί η ταχύτητά του σε ευθύγραμμη κίνηση (**αδράνεια του σώματος**).

Όμοια υπάρχει ένα μέγεθος που δείχνει πόσο καθυστερεί να μεταβληθεί **η ταχύτητα περιστροφής του σώματος** όταν επιβάλλεται σ' αυτό μία ροπή. Το μέγεθος αυτό λέγεται **ροπή αδράνειας**.

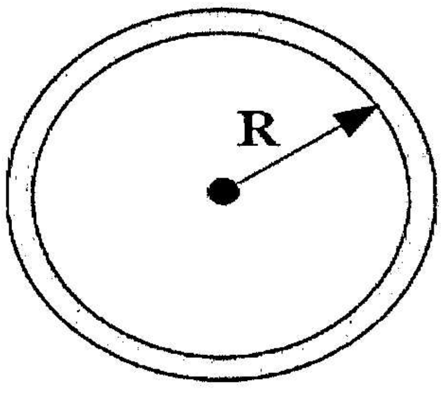
Ισχύουν οι τύποι:

α) Γενικός τύπος της **αδράνειας σε περιστροφική κίνηση**:

$M = Jm * \omega$,

όπου M = η ροπή που ασκείται στο σώμα, Jm = η μαζική ροπή αδράνειας και ω = η γωνιακή επιτάχυνση σε $rad/s^2$

β) Ροπή αδράνειας λεπτού δακτυλίου με μάζα m και ακτίνα R: $J_m = m * R^2$.



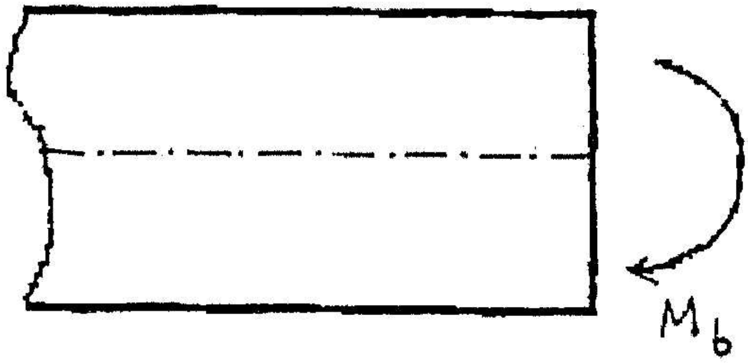

γ) Ροπή αδράνειας για σώματα με άλλα σχήματα: χωρίζουμε το

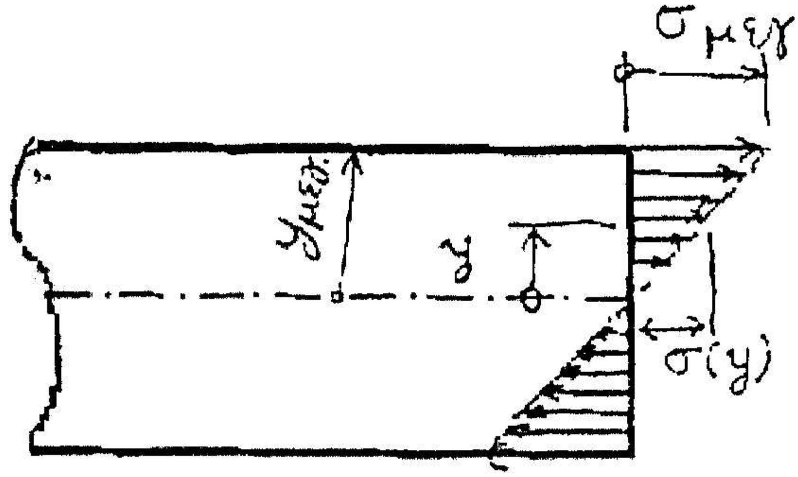
σώμα σε λεπτούς δακτυλίους, υπολογίζουμε τις ροπές αδράνειας των δακτυλίων και τις προσθέτουμε όλες μαζί. Δημιουργείται μία παράσταση της μορφής:

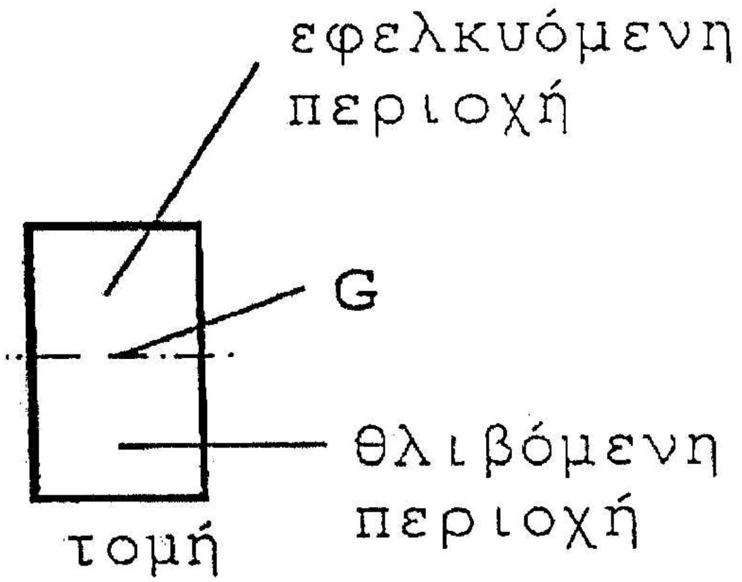
$J_m = \Sigma\, m_i R_i^2$.

Στα προβλήματα της μηχανικής δημιουργείται πολλές φορές η ανάγκη να υπολογίσουμε τη **γεωμετρική ροπή αδράνειας**, η οποία ομοιάζει με την ροπή αδράνειας που είδαμε παραπάνω.

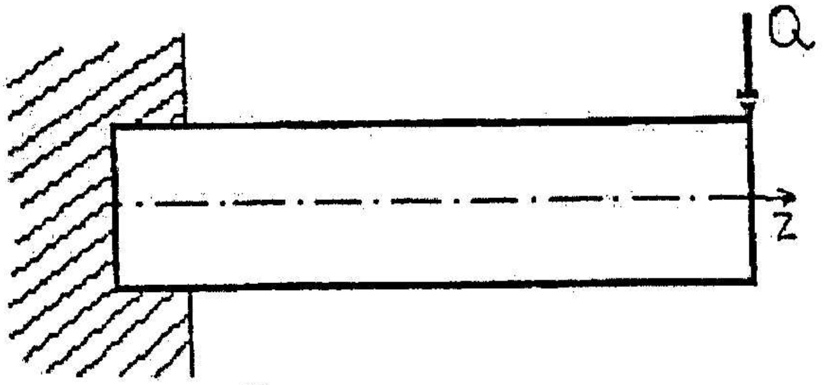
Στο πρόβλημα της κάμψης μιας δοκού, εάν στο δοκάρι ασκείται μία καμπτική ροπή $M_b$ που τείνει να το περιστρέψει γύρω από τον άξονα συμμετρίας του x, πρέπει για την κάθετη τομή του δοκαριού να υπολογισθεί η γεωμετρική ροπή αδράνειας.

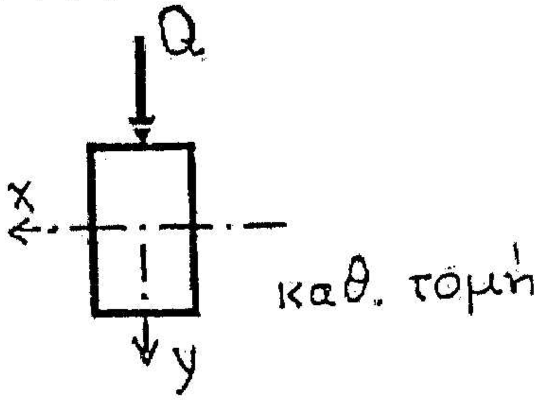


Στο πρόβλημα της κάμψης ενός δοκού, εάν στο δοκάρι ασκείται μία διατμητική δύναμη Q, που τείνει να το κάμψει γύρω από τον άξονα συμμετρίας του x, πρέπει για την κάθετη τομή του δοκαριού να υπολογισθεί η γεωμετρική ροπή αδράνειας.




Η γεωμετρική ροπή αδράνειας της κάθετης τομής γύρω από τον άξονα x (συγγενική προς τη μαζική ροπή αδράνειας που θα εμφάνιζε μία λεπτή ομογενής πλάκα με το ίδιο σχήμα αν περιστρεφόταν γύρω από τον άξονα x) δίδεται από τον εξής τύπο:

$$I_{xx} = \Sigma A_i y_i^2$$

Αντίστοιχα ορίζεται η γεωμετρική ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα y:

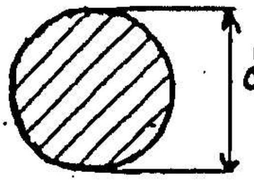
$$I_{yy} = \Sigma A_i x_i^2$$

Όπου: $y_i$ και $x_i$ οι αποστάσεις από τους άξονες περιστροφής X και Y, αντίστοιχα.

Στους τύπους των ροπών αδρανείας που παρουσιάζονται στις επόμενες διαφάνειες το $I_x$ σημαίνει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής X. Δηλαδή το σώμα τείνει να καμφθεί γύρω από τον άξονα X.

Στους τύπους των ροπών αδρανείας που παρουσιάζονται στις επόμενες διαφάνειες το $I_y$ σημαίνει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής Υ. Δηλαδή το σώμα τείνει να καμφθεί γύρω από τον άξονα Υ.

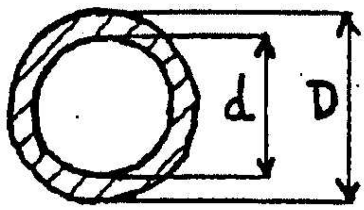
**Ροπές αδράνειας και άλλα γεωμετρικά στοιχεία**
**Α=εμβαδό διατομής, $I_x$=ροπή αδράνειας,**




1)
$A=(\pi/4)*d^2 \approx 0,785\ d^2$,

$$I_x=(\pi/64)*d^4 \approx 0,05\ d^4$$

$$i_{min}=d/4$$

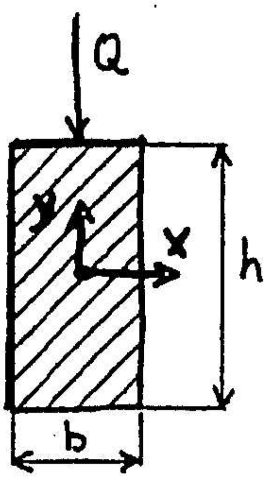



2)
$A \approx 0,785(D^2-d^2)$,

$$I_x \approx 0,05(D^4-d^4)$$

$$i_{min}=\sqrt{D^2+d^2}/4$$

<u>Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο:</u>

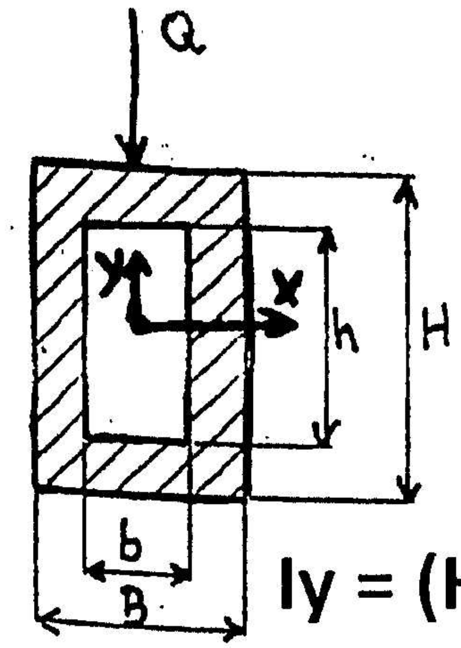



3)
$A=b\ h$,

$$I_x=b\ h^3/12$$

$$I_y = h * b^3 / 12$$

Διάτρητο Ορθογωνικής Διατομής:



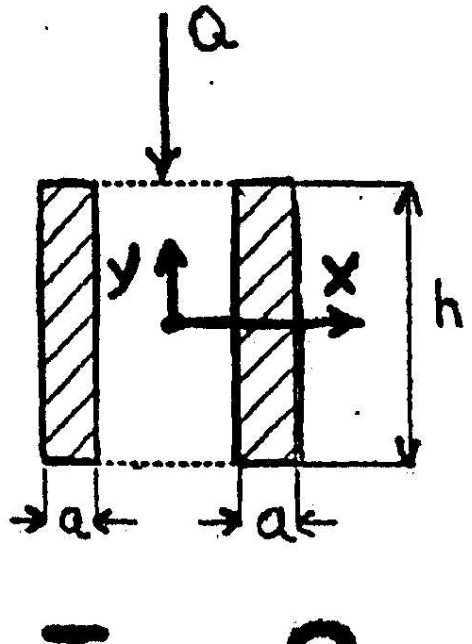

6)

$A=BH-bh$,

$Iy = (H*B^3 - h*b^3) / 12$

$$I_x=(BH^3-bh^3)/12$$

Διάτρητο Κατακόρυφο:

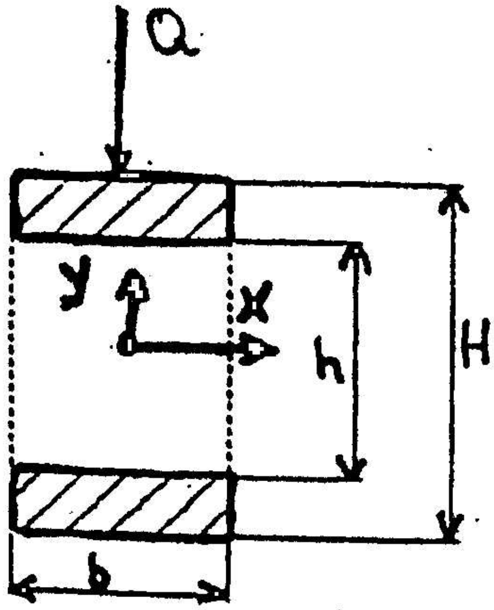



4)

$A=2\ \alpha\ h$,

$$I_x=2\ \alpha\ h^3/12$$

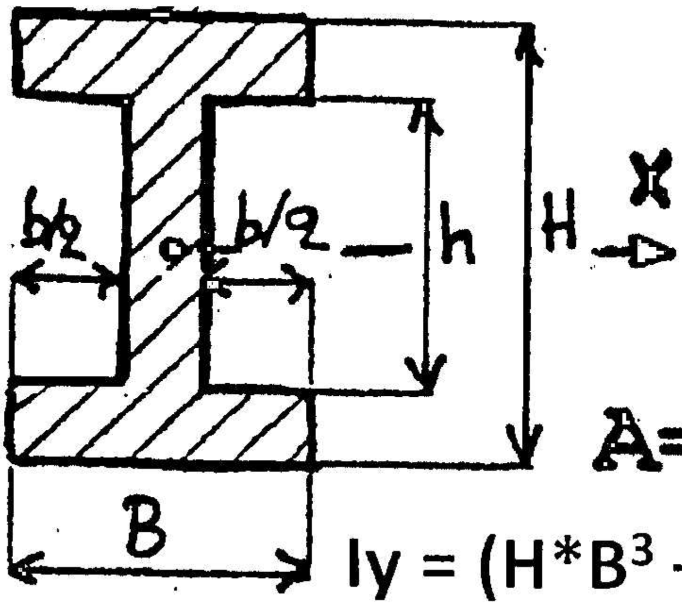
Διάτρητο Οριζόντιο:




5)

$$A=b(H-h)$$

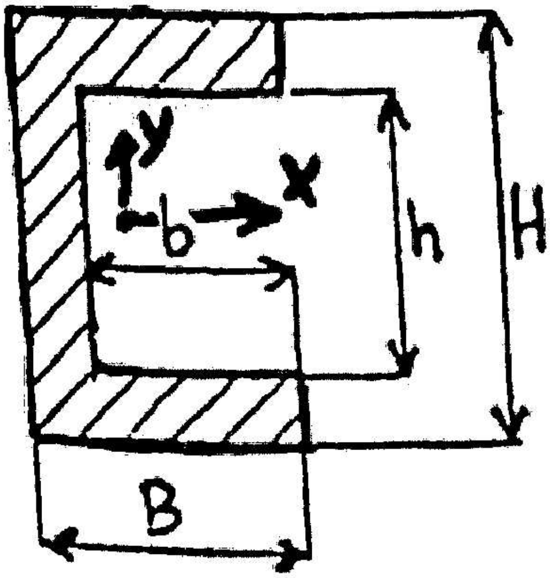
$$I_x=b(H^3-h^3)/12$$




$$A=BH-bh$$

$$Iy = (H*B^3 - h*b^3) / 12$$

$$I_x=(BH^3-bh^3)/12$$

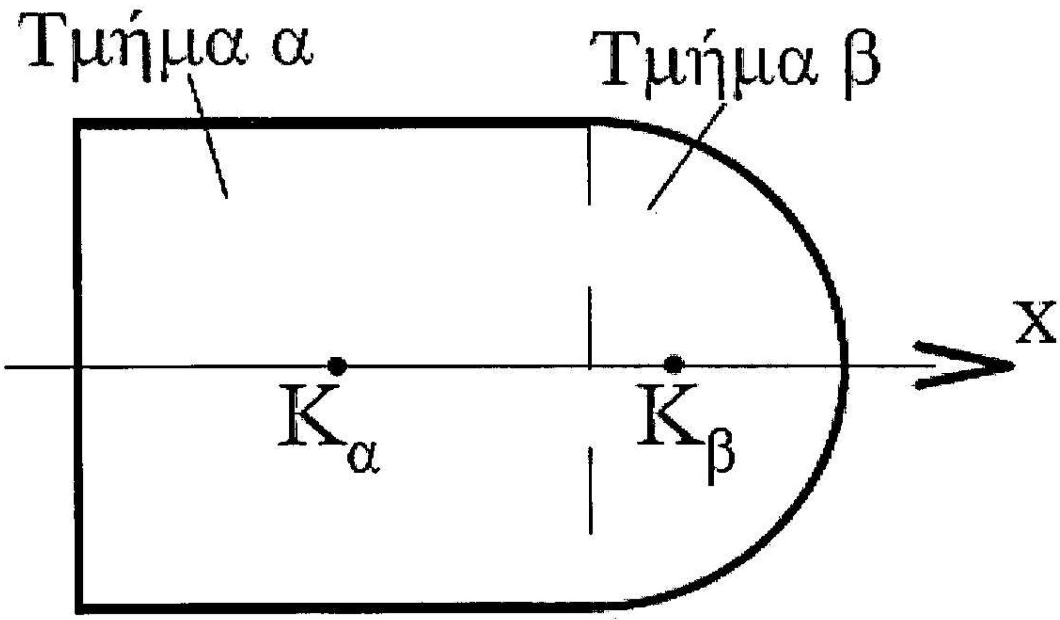



$$A = BH - bh$$

$$I_x = (BH^3 - bh^3)/12$$

Αν τα κέντρα βάρους $K_\alpha$ και $K_\beta$ των μερών ενός σύνθετου σχήματος βρίσκονται στο ίδιο ύψος, τότε και μόνο τότε η ροπή αδράνειας του συνόλου ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας των μερών: $I_{ολ} = I_\alpha + I_\beta$.

Η έκφραση "βρίσκονται στο ίδιο ύψος" σημαίνει ότι τα κέντρα βάρους των μερών βρίσκονται και τα δύο πάνω στον άξονα ως προς τον οποίο θα υπολογίσουμε τελικά την ροπή αδράνειας.



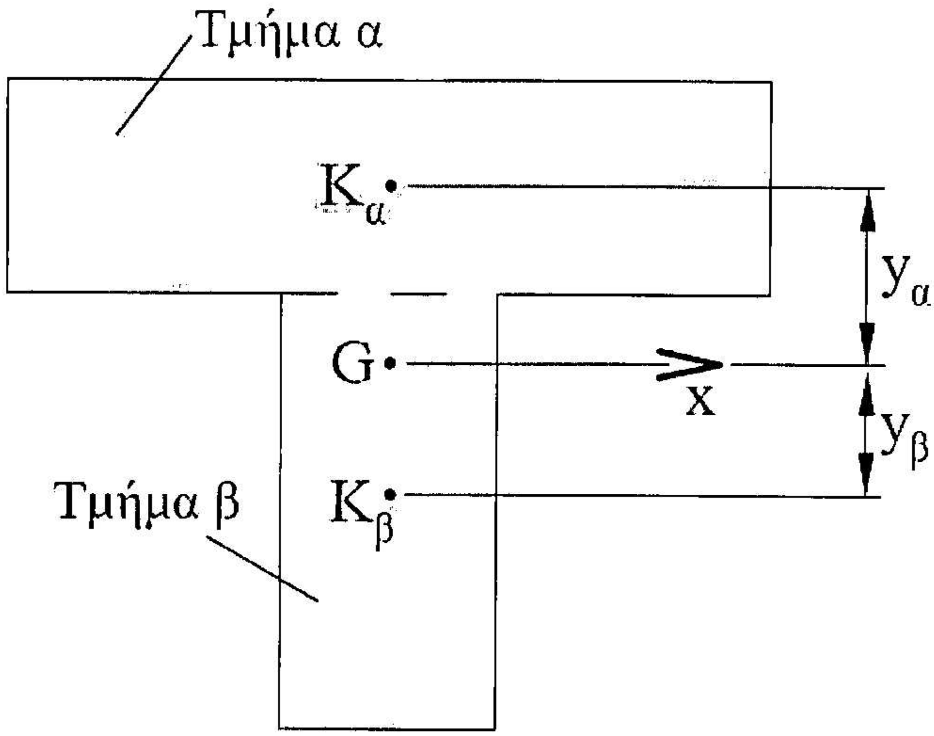

Όταν τα κέντρα των τμημάτων α, β "βρίσκονται στο ίδιο ύψος", τότε $I_{xx,ολ} = I_\alpha + I_\beta$

**Θεώρημα του Steiner:**

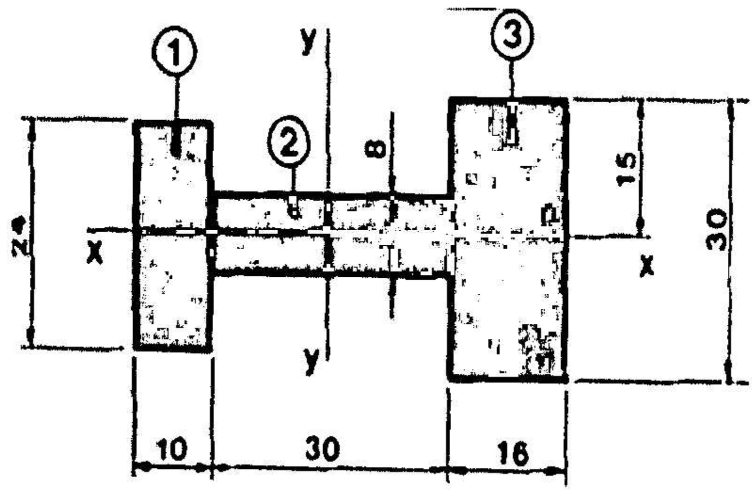
Αν τα κέντρα βάρους των μερών της διατομής βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος και με διαφορές ύψους $y_\alpha$, $y_\beta$ αντίστοιχα από το γενικό κέντρο βάρους G, τότε: η ροπή αδράνειας του συνόλου ισούται με:

$$I_{xx,o\lambda} = I_\alpha + y_\alpha^{\,2} A_\alpha + I_\beta + y_\beta^{\,2} A_\beta$$

όπου $I_\alpha$, $I_\beta$ οι ροπές αδράνειας των μερών ως προς άξονες που περνούν από τα δικά τους κέντρα βάρους και $A_\alpha$, $A_\beta$ τα εμβαδά των μερών.




**Παράδειγμα 1:** Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της διατομής του παρακάτω σχήματος ως προς τον κεντροβαρικό άξονα xx.



**Λύση:**

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα xx ισούται με το άθροισμα όλων των ροπών αδράνειας:

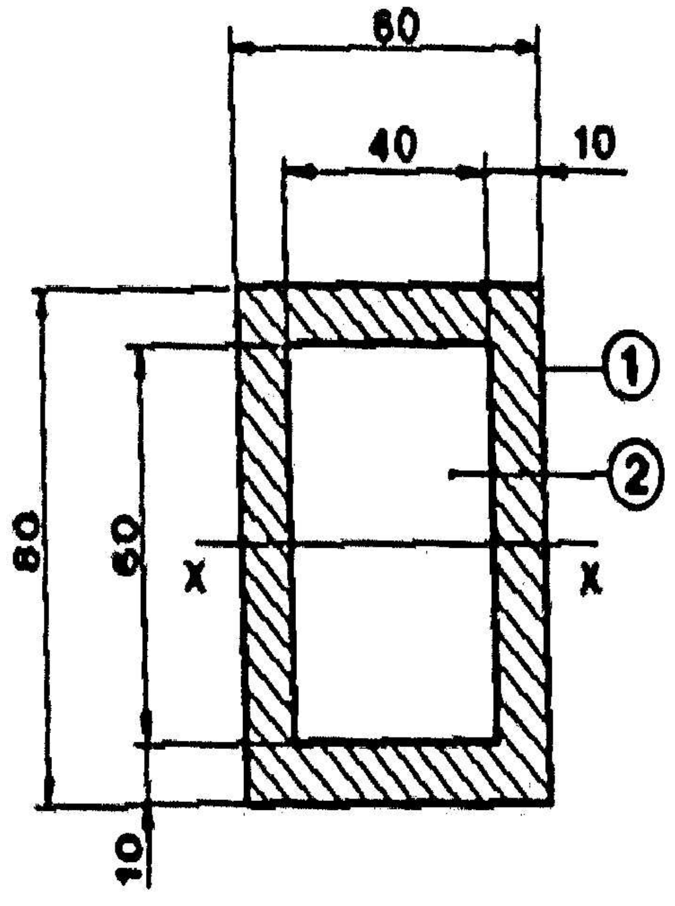
$I_{xx} = I_1 + I_2 + I_3$

$$I_{xx} = \frac{10x24^3}{12} + \frac{30x8^3}{12} + \frac{16x30^3}{12} =>$$

$$=> I_{xx} = 11520 + 1280 + 3600 =>$$

$$=> I_{xx} = 48800mm^4$$

__Παράδειγμα 2:__ Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της διατομής του παρακάτω σχήματος ως προς τον κεντροβαρικό άξονα xx.



**Λύση:**

Η ροπή αδράνειας της διατομής ισούται με τη διαφορά των ροπών αδράνειας των δυο ορθογωνίων. Δηλαδή:

$I_{xx} = I_1 - I_2$

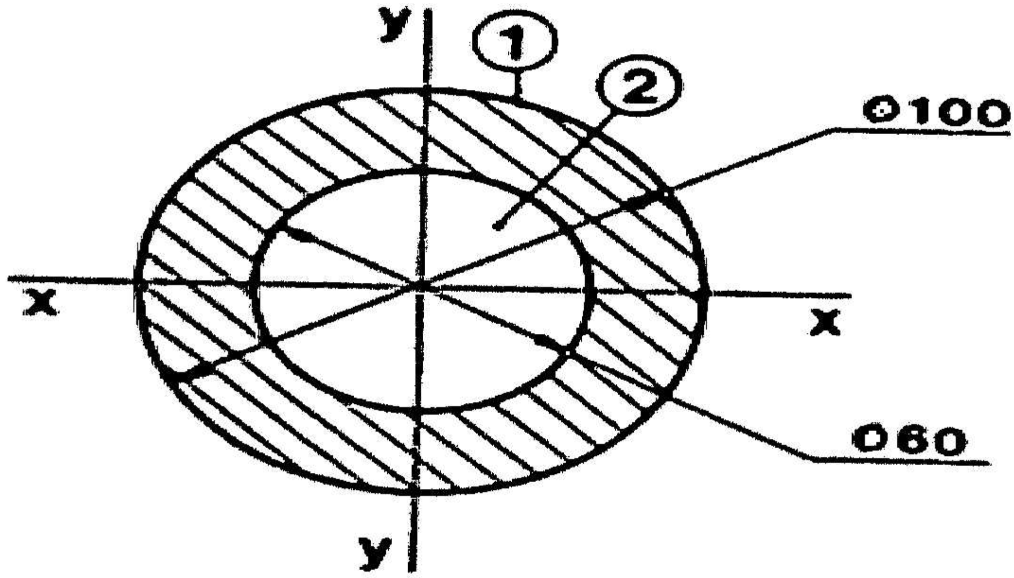
$$I_{xx} = \frac{60x80^3}{12} - \frac{40x60^3}{12} =>$$

$$=> I_{xx} = 25{,}6x10^5 - 7{,}2x10^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{xx} = 18{,}4x10^5\ mm^4$$

**Παράδειγμα 3:**

Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας κοίλου άξονα ως προς τον κεντροβαρικό άξονα xx.




**Λύση:**

Η ροπή αδράνειας της διατομής του σχήματος της προηγούμενης διαφάνειας ισούται με τη διαφορά των ροπών αδράνειας του κενού από ολόκληρο τον άξονα.

$I_{xx} = I_1 - I_2$

Η ροπή αδράνειας ενός κυκλικού δίσκου δίδεται από τον παρακάτω τύπο:

$$I = \frac{\pi * D^4}{64}$$

$$I_{xx} = \frac{3{,}14x100^4}{64} - \frac{3{,}14x60^4}{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{xx} = \frac{3{,}14}{64}(100^4 - 60^4) \Rightarrow$$

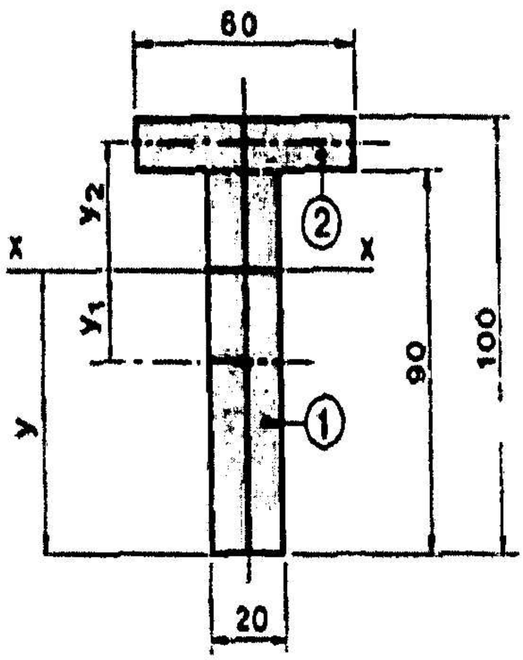
$$\Rightarrow I_{xx} = 0{,}049*(10x10^7 - 1{,}296x10^7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{xx} = 0{,}049x8{,}704x10^7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{xx} = 4{,}26x10^6 \ mm^4$$

__Παράδειγμα 4:__

Να βρείτε τη ροπή αδράνειας του ταυ, ως προς τον κεντροβαρικό άξονα xx.



Λύση

(α) Χωρίζουμε το ταυ σε δυο ορθογώνια παραλληλόγραμμα και βρίσκουμε το εμβαδό του καθενός από αυτά.

- $A_1 = 20 \times 90 = 1800\ mm^2$
- $A_2 = 60 \times 10 = 600\ mm^2$

$A_{ολ} = A_1 + A_2 = 2400\ mm^2$

(β) Υπολογίζουμε το κέντρο επιφάνειας του σχήματος, ως προς άξονα yy, ο οποίος διέρχεται από το κατώτατο σημείο του σχήματος, σύμφωνα με τον τύπο:

$$y_k = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

$A_{ολ} \cdot y = A_1 \cdot 45 + A_2 \cdot 95 \Rightarrow$

$$y = \frac{1800x45 + 600x95}{2400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{81000 + 57000}{2400} = \frac{138000}{2400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 57{,}5\ mm$$

(γ) Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα xx.

Αν τα κέντρα βάρους των μερών της διατομής βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος και με διαφορές ύψους $y_α$, $y_β$ αντίστοιχα από το γενικό κέντρο βάρους G, τότε: η ροπή αδράνειας του συνόλου ισούται με

$$I_{xx,ολ} = I_α + y_α^2 A_α + I_β + y_β^2 A_β$$

όπου $I_α$, $I_β$ οι ροπές αδράνειας των μερών ως προς άξονες που περνούν από τα δικά τους κέντρα βάρους και $A_α$, $A_β$ τα εμβαδά των μερών.

$I_{xx} = I_1 + A_1 \cdot y_1^2 + I_2 + A_2 \cdot y_2^2$

$y_1$=12,5mm

$y_2$=37,5mm

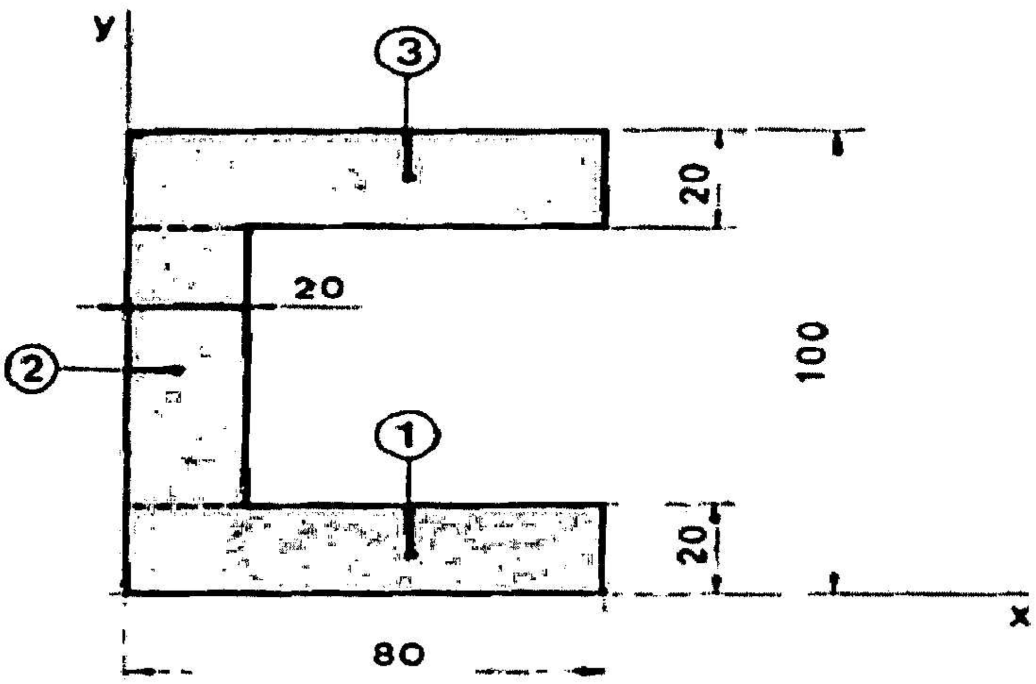
$$I_{xx} = \frac{20x90^3}{12} + 1800x12{,}5^2 + \frac{60x10^2}{12} + 600x37{,}5^2 =>$$

$$=> I_{xx} = 121{,}5x10^4 + 28{,}1x10^4 + 0{,}5x10^4 + 84{,}38x10^4 =>$$

$$=> I_{xx} = 234{,}48 \text{ x } 10^4 \text{ mm}^4$$

**Παράδειγμα 6:**

Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της επιφάνειας του σχήματος της επόμενης διαφάνειας ως προς τους κεντροβαρικούς άξονες xx και yy.




**Λύση:**

Χωρίζουμε το σχήμα σε τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα και βρίσκουμε το εμβαδό του καθενός από αυτά:

$A_1 = 80 \times 20 = 1600\ mm^2$

$A_2 = 20 \times 60 = 1200\ mm^2$

$A_3 = 80 \times 20 = 1600\ mm^2$

$A_{ολ} = A_1 + A_2 + A_3 = 4400\ mm^2$

(α) Προσδιορίζουμε το κέντρο επιφάνειας ως προς τον άξονα x.

$A_{ολ} \cdot y = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{ολ} \cdot y = A_1 \cdot 10 + A_2 \cdot 50 + A_3 \cdot 90$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $A_{ολ}$, $A_1$, $A_2$ και $A_3$ έχουμε:

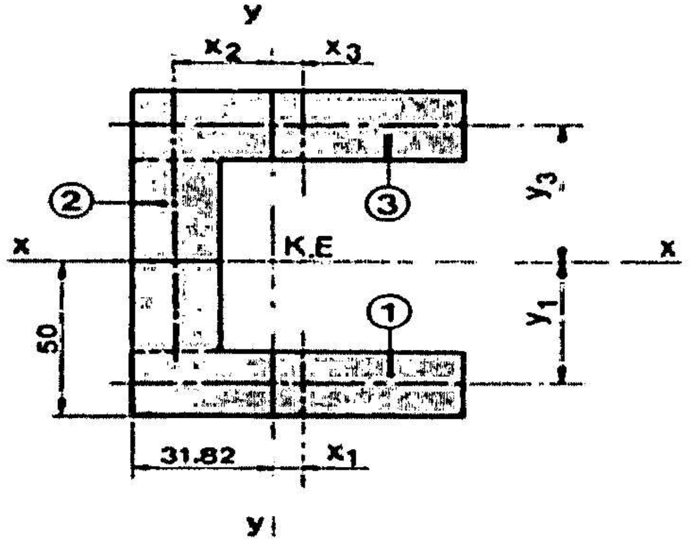
$$y = \frac{1600x10 + 1200x50 + 1600x90}{4400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{16000 + 6000 + 144000}{4400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{220000}{4400} \Rightarrow y = 50\ mm$$

Βλέπουμε ότι y = 50 mm, δηλαδή στο μέσο του συνολικού ύψους γιατί τα τεμάχια 1, 2 και 3 είναι ίσα και συμμετρικά τοποθετημένα ως προς το ύψος του σχήματος.

Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα xx:



$y_1$=40mm

$y_2$=0 mm

$y_3$=40mm

$I_{xx} = I_1 + A_1 \cdot y_1^2 + I_2 + A_2 \cdot y_2^2 + I_3 + A_3 \cdot y_3^2$

Επειδή οι διαστάσεις των τεμαχίων 1 και 3 είναι ίσες θα έχουμε:

$$I_1 = I_3 \Rightarrow A_1 \cdot y_1^2 = A_3 \cdot y_3^2$$

Οπότε έχουμε:

$$I_{xx} = 2*I_1 + 2*A_1 \cdot y_1^2 + I_2 + A_2 \cdot y_2^2 =>$$

$$=> I_{xx} = 2\frac{80x20^3}{12} + 2x1600x40^2 + \frac{20x60^3}{12} + 1200x0 =>$$

$$=> I_{xx} = 10,67 \ x\ 10^4 + 512\ x\ 10^4 + 36\ x\ 10^4 =>$$

$$=> I_{xx} = 558,67\ x\ 10^4\ mm^4$$

(β) Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα yy.

$A_{ολ} \cdot x = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3$

$$A_{ολ} \cdot x = A_1 \cdot 40 + A_2 \cdot 10 + A_3 \cdot 40 =>$$

$$=> x = \frac{1600x40 + 1200x10 + 1600x40}{4400} =>$$

$$=> x = \frac{6400 + 12000 + 64000}{4400} =>$$

$$=> x = \frac{140000}{4400} =>$$

$=> x = 31,82$ mm

Άρα το κέντρο επιφάνειας απέχει από τον άξονα yy κατά 31,82 mm.

$x = 31,82$ mm

$x_1 = 40-31,82 = 8,18$ mm

$x_2 = 31,82-10 = 21,82$ mm

$x_3 = 40-31,82 = 8,18$ mm

$I_{yy} = I_1 + A_1 \cdot x_1^2 + I_2 + A_2 \cdot x_2^2 + I_3 + A_3 \cdot x_3^2$ Επειδή πάλι οι διαστάσεις των τεμαχίων 1 και 3 είναι ίσες, θα έχουμε:

$$I_1 = I_3 \quad \Longrightarrow \quad A_1 \cdot x_1^2 = A_3 \cdot x_3^2$$

Άρα: $I_{yy} = 2 \cdot I_1 + 2 \cdot A_1 \cdot x_1^2 + I_2 + A_2 \cdot x_2^2$

$$I_{yy} = 2 \cdot \frac{20 \cdot 80^3}{12} + 2 \cdot 1600 \cdot 8{,}18^2 + \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 1200 \cdot 21{,}82 =>$$

$$=> I_{yy} = 170{,}67 \cdot 10^4 + 21{,}41 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^4 + 57{,}13 \cdot 10^4 =>$$

$$=> I_{yy} = 257{,}21 x 10^4 \, mm^4$$


**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Τεχνική Μηχανική, Π. Βουθούνης, Εκδόσεις: του Ιδίου.
2. Τεχνική Μηχανική, Σ. Παϊπέτης, Εκδόσεις: Ίων.
3. Σημειώσεις Καθ. Ν. Μοσχίδη.