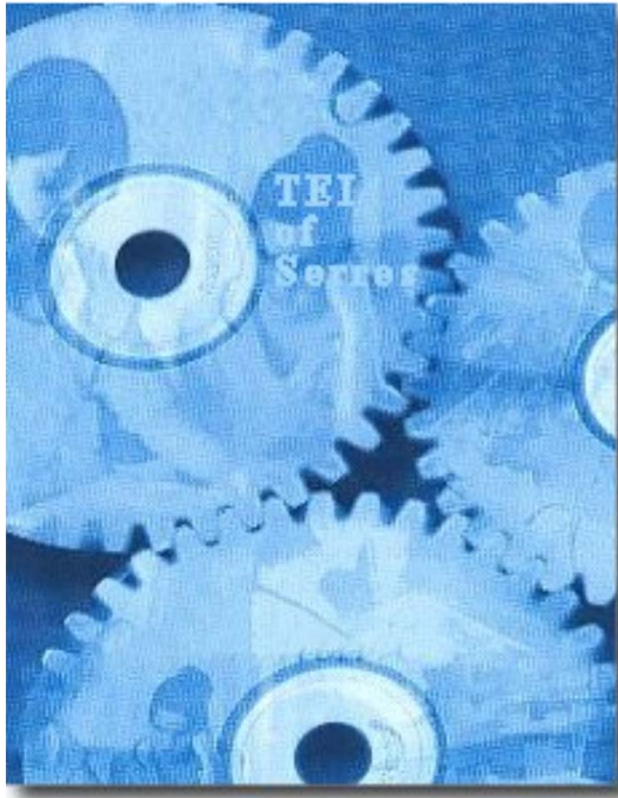


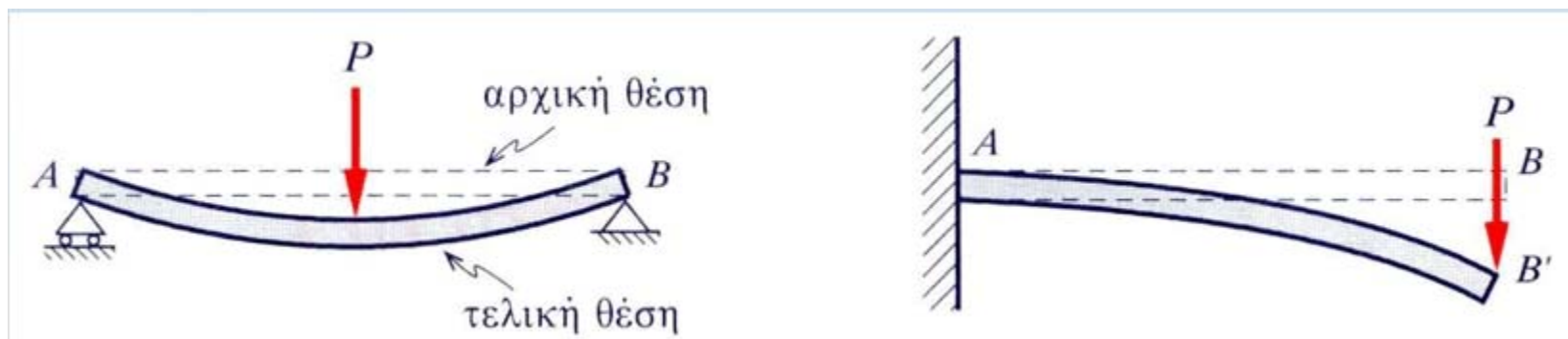
Μάθημα: Πειραματική Αντοχή των Υλικών

Πείραμα Κάμψης



Κατασκευαστικός Τομέας
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Σερρών

Η εντατική κατάσταση στην οποία βρίσκεται μία δοκός, που υποβάλλεται σε εγκάρσια φόρτιση, λέγεται κάμψη.



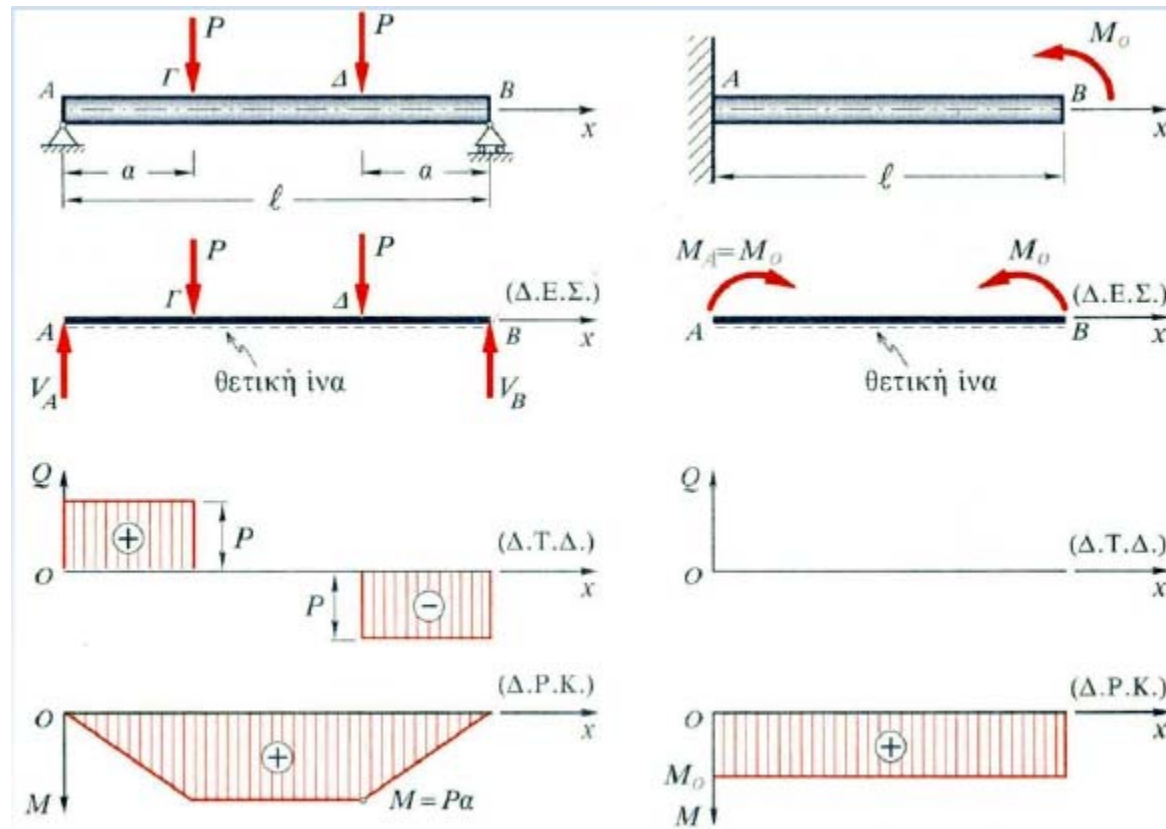
Αμφιέριστη δοκός

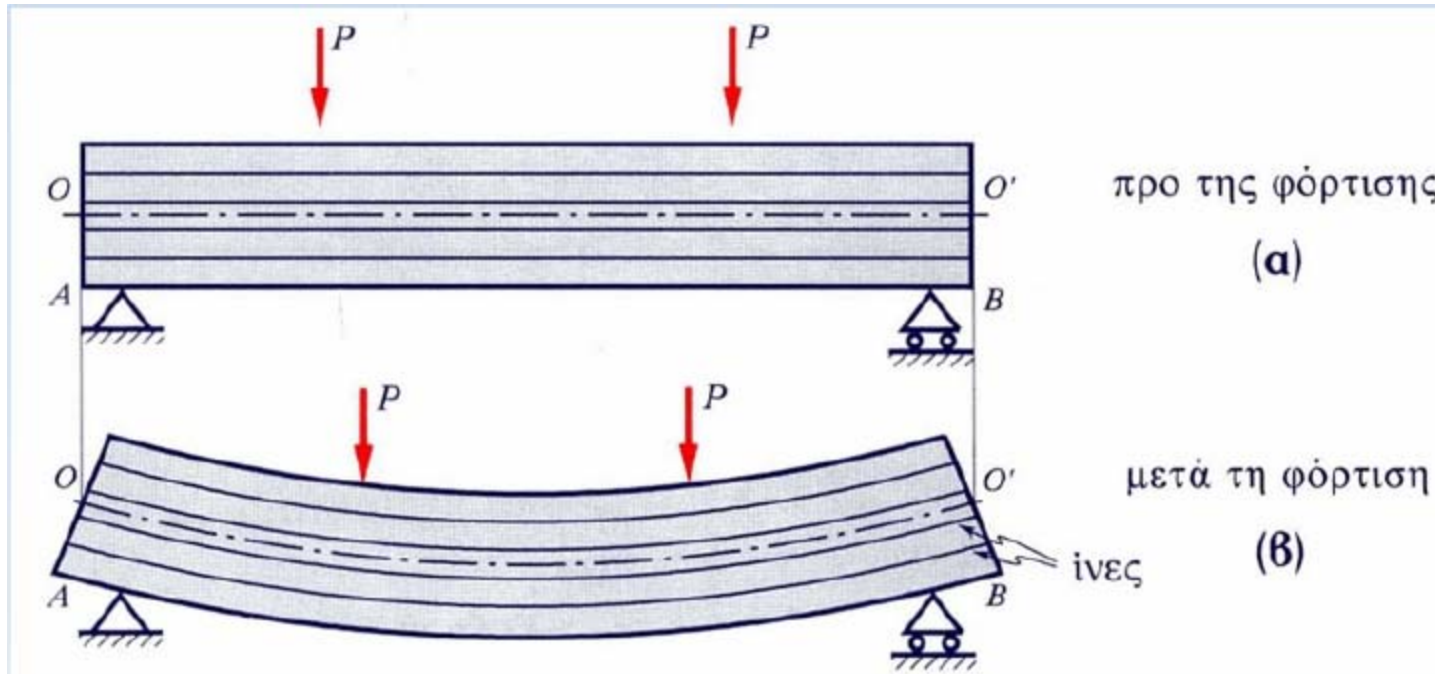
Πρόβολος

Κατά την καταπόνηση σε κάμψη αναπτύσσονται καμπτικές ροπές, οι οποίες προκαλούν αφενός μεν καμπύλωση της δοκού, αφετέρου δε δημιουργία τάσεων εντός του υλικού της. Έτσι λοιπόν, με την έννοια κάμψη εννοούμε τόσο τις αναπτυσσόμενες τάσεις, όσο και τις προκαλούμενες παραμορφώσεις που ονομάζονται συνήθως βέλη κάμψης.

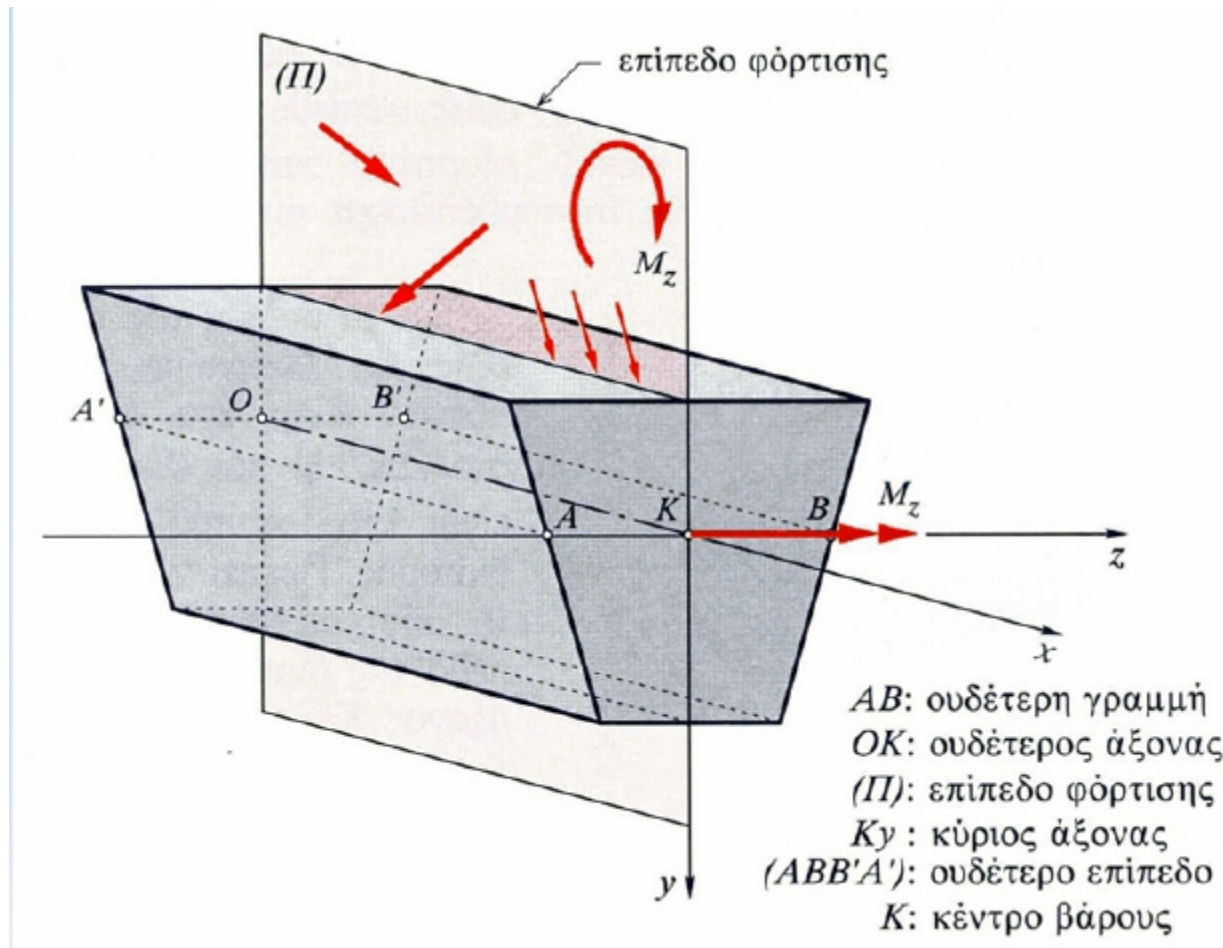
Η καταπόνηση σε κάμψη, διακρίνεται σε δύο είδη:

- Στην καθαρή κάμψη, κατά την οποία στη δοκό ή σε τμήμα της εμφανίζεται μόνον καμπτική ροπή, ($N = Q = M_t = 0, M_b \neq 0$).
- Στη γενική κάμψη, κατά την οποία εμφανίζεται εκτός της καμπτικής ροπής και τέμνουσα δύναμη ($M_b, Q \neq 0$).

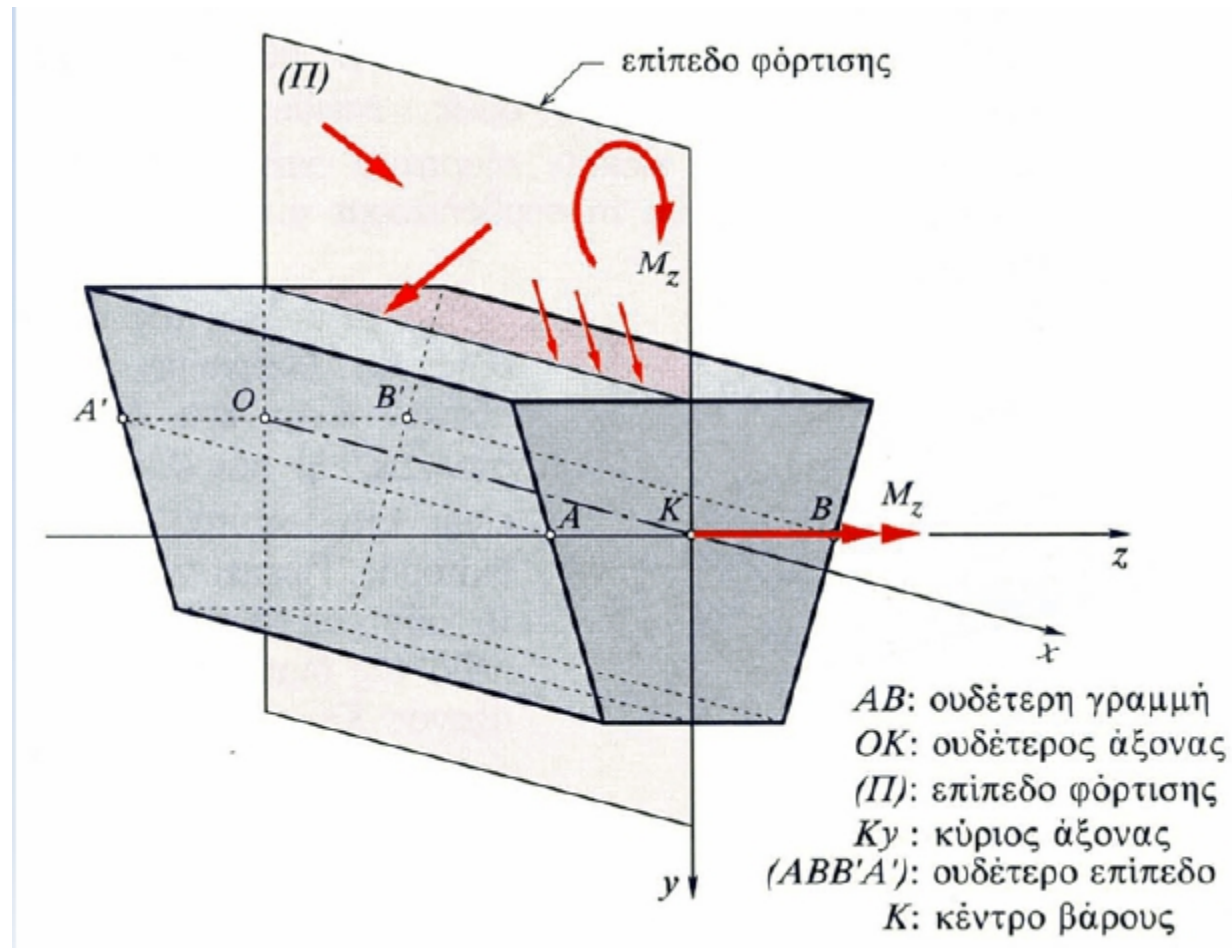




Η κάμψη είναι μια καταπόνηση, η οποία αναλύεται σε εφελκυσμό, θλίψη και διάτμηση.



Οι ίνες που δεν καταπονούνται ούτε σε εφελκυσμό ούτε σε θλίψη, αλλά μόνο σε διάτμηση, ονομάζονται **ουδέτερες ίνες** και το επίπεδο που αποτελούν ονομάζεται **ουδέτερο επίπεδο** ή **ουδέτερη στρώση**. Η τομή OK του ουδέτερου αυτού επιπέδου, με το επίπεδο συμμετρίας XY της δοκού καλείται **ουδέτερος άξονας**, που είναι ο άξονας x . Το ίχνος του ουδέτερου επιπέδου σε μία διατομή της δοκού ονομάζεται **ουδέτερη γραμμή**, όπως είναι η AB .

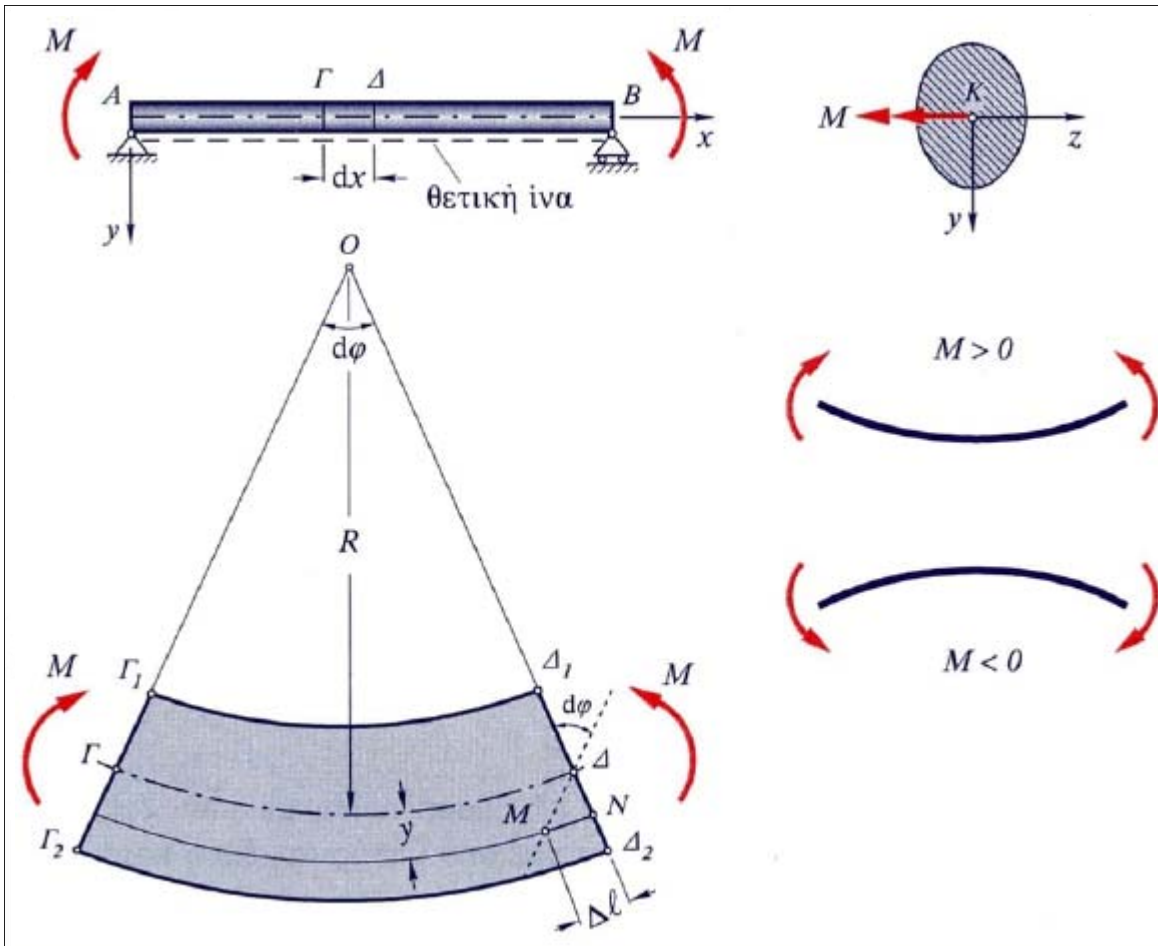


Τα εξωτερικά φορτία που δρουν στη δοκό βρίσκονται στο **επίπεδο φόρτισης (Π)**, το οποίο περιέχει το διαμήκη κεντροβαρικό άξονα Kx της δοκού, καθώς και έναν **κύριο άξονα αδράνειας** της διατομής. Στην προκειμένη περίπτωση, κύριος είναι ο άξονας Y επειδή είναι **άξονας συμμετρίας** της διατομής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, το διάνυσμα της ροπής κάμψης να βρίσκεται επάνω στον άλλον **κεντροβαρικό άξονα αδράνειας** της διατομής και να είναι προφανώς κάθετο στο επίπεδο φόρτισης.

Παραδοχές κάμψης

Προκειμένου να μελετηθεί η καταπόνηση σε κάμψη, γίνονται οι εξής απλοποιητικές παραδοχές:

- Ο διαμήκης άξονας της δοκού είναι ευθύγραμμος.
- Οι γραμμικές διαστάσεις της διατομής είναι μικρές συγκρινόμενες με το μήκος της δοκού.
- Η διατομή της δοκού έχει έναν τουλάχιστον άξονα συμμετρίας, που περιέχεται στο επίπεδο φόρτισης.
- Ισχύει η υπόθεση των Bernoulli-Navier κατά την οποία:
 - Κάθε διατομή επίπεδη και κάθετη στον άξονα της δοκού πριν την παραμόρφωση, παραμένει επίπεδη και κάθετη και μετά από αυτή.**
- Ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή οι αναπτυσσόμενες τάσεις είναι μικρότερες από το όριο αναλογίας του υλικού.
- Όλα τα φορτία ενεργούν κάθετα στον άξονα της δοκού και βρίσκονται μέσα στο επίπεδο φόρτισης. Το επίπεδο φόρτισης, ή περιέχει τον άξονα συμμετρίας της διατομής ή είναι κάθετο σε αυτόν.
- Η ροπή κάμψης θεωρείται θετική, όταν τείνει να εφελκύσει την ίνα αναφοράς που λαμβάνεται η κατώτερη ίνα της δοκού.



Από τα όμοια τρίγωνα ΟΓΔ & ΔΜΝ προκύπτει:

$$\frac{\Delta \ell}{dx} = \frac{y}{R}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\frac{\Delta \ell}{dx} = \varepsilon$$

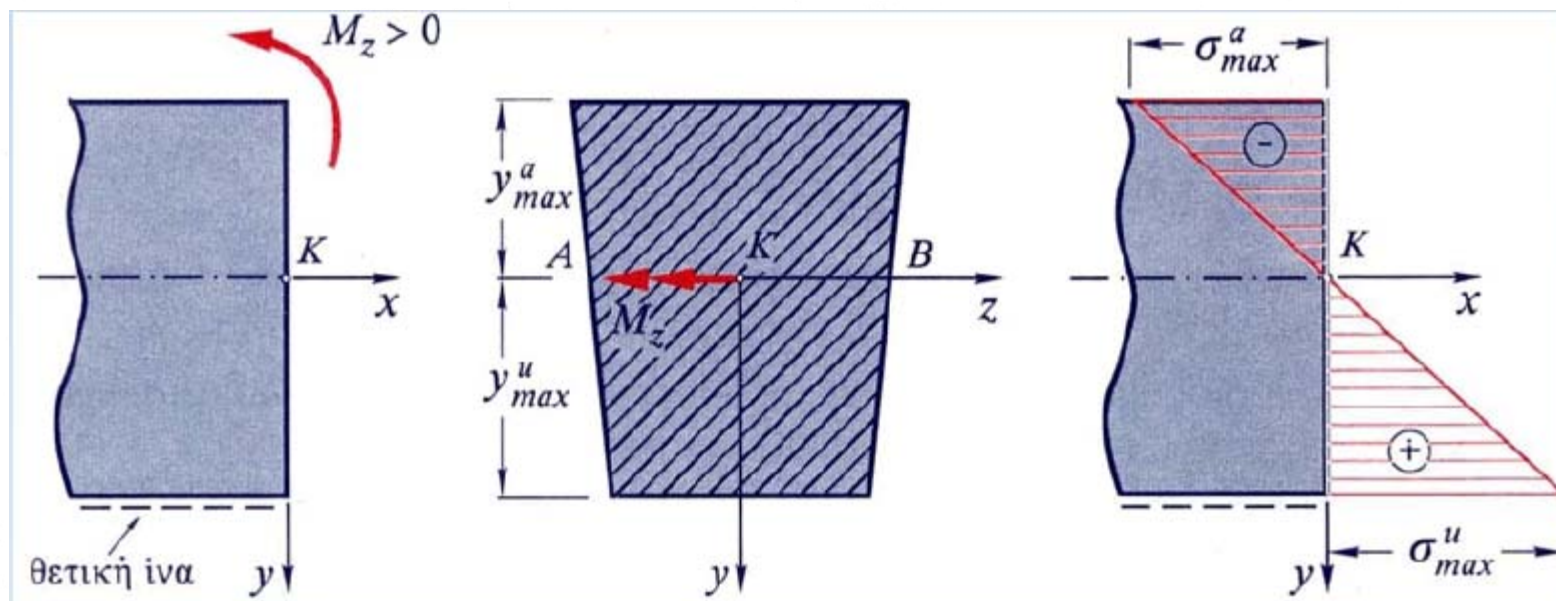
$$\sigma = \varepsilon \cdot E \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\sigma = \frac{E}{R} y$$

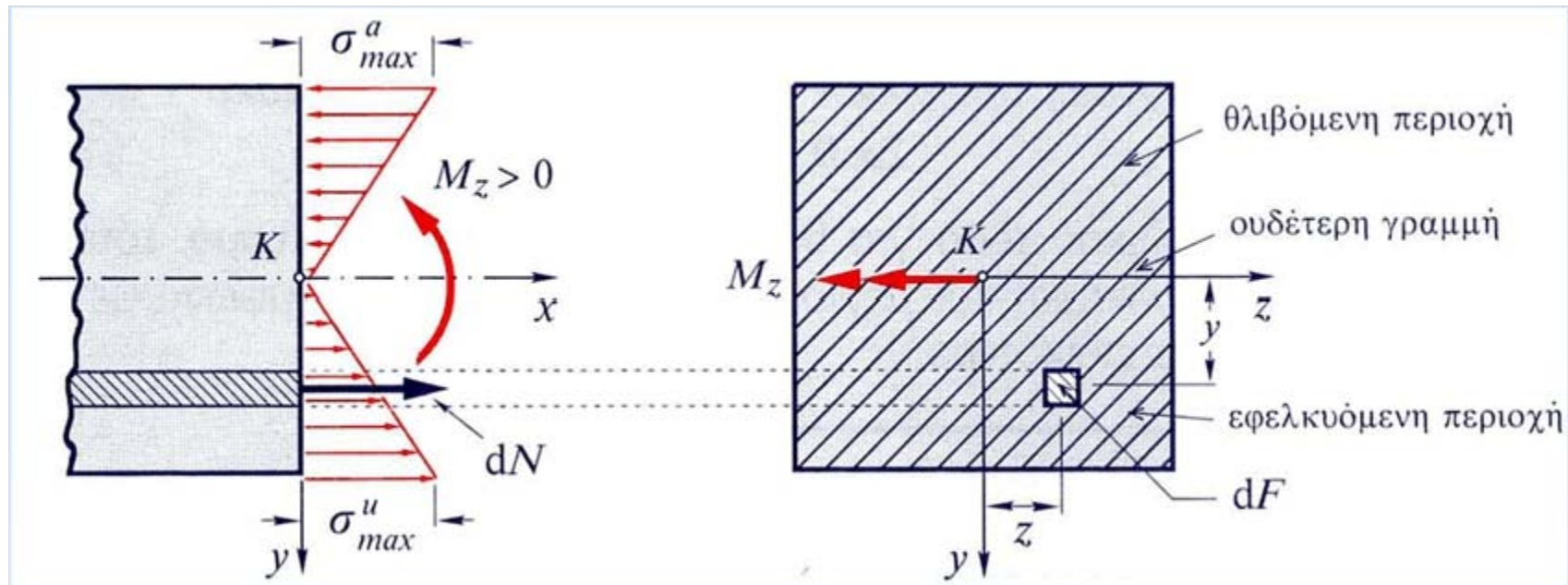
Η προηγούμενη εξίσωση εκφράζει τη **γραμμικότητα μεταβολής των ορθών τάσεων σ** , σε συνάρτηση με την απόσταση y από την ουδέτερη γραμμή και διατυπώνεται με τη φράση:

Η ορθή τάση που αναπτύσσεται σε τυχαίο σημείο της διατομής μιας καμπτόμενης δοκού, είναι ανάλογη της απόστασης του σημείου αυτού από την ουδέτερη γραμμή. Στη δε ουδέτερη γραμμή η ορθή τάση είναι μηδέν.

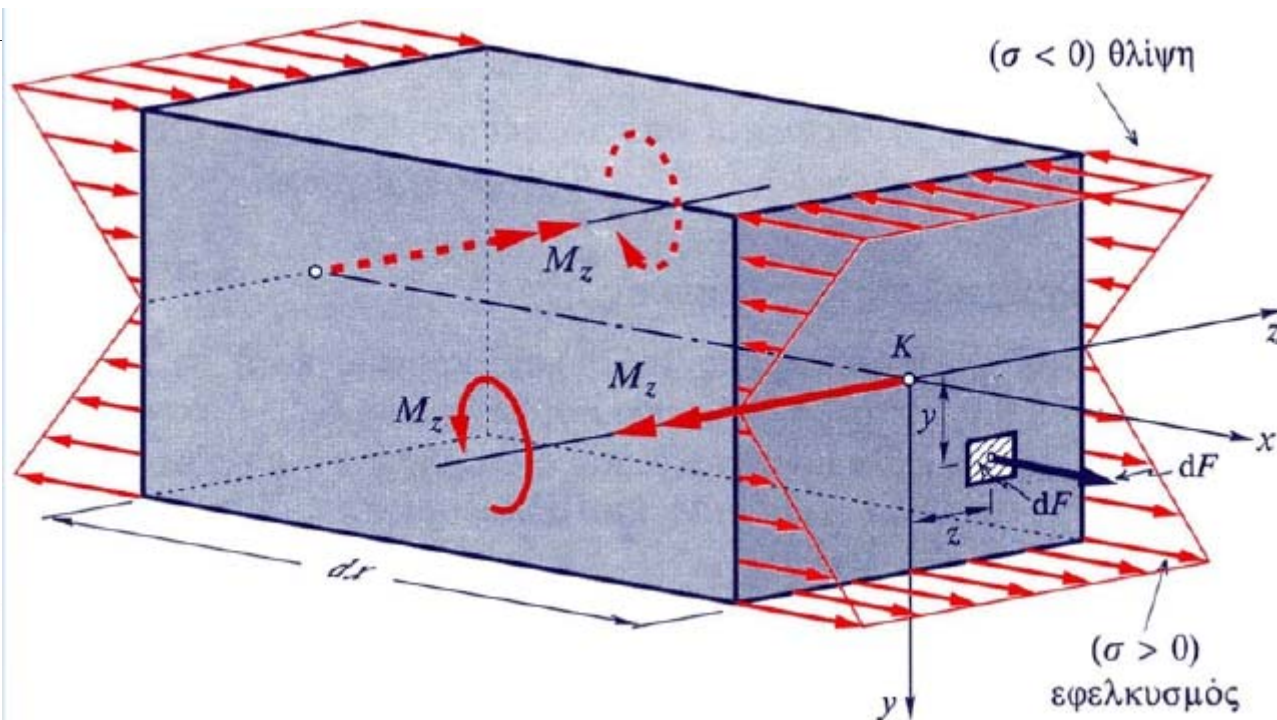


$$\sigma_{max}^a = \frac{E}{R} y_{max}^a, \quad \sigma_{max}^u = \frac{E}{R} y_{max}^u$$

- Για θετική ροπή κάμψης, οι κατώτατες ίνες υφίσταται τις μέγιστες ελκυστικές, ενώ οι ανώτατες τις μέγιστες θλιπτικές τάσεις, διαφορετικά ισχύει το αντίστροφο.
- Θετική ροπή κάμψης δημιουργείται σε μία αμφιέριστη δοκό, όταν καταπονείται από εγκάρσιες δυνάμεις με φορά από επάνω προς τα κάτω, ενώ για τον πρόβολο ισχύουν τα ακριβώς αντίθετα.
- Η κατανομή των ορθών τάσεων στη διατομή μιας καμπτόμενης δοκού είναι τριγωνική.



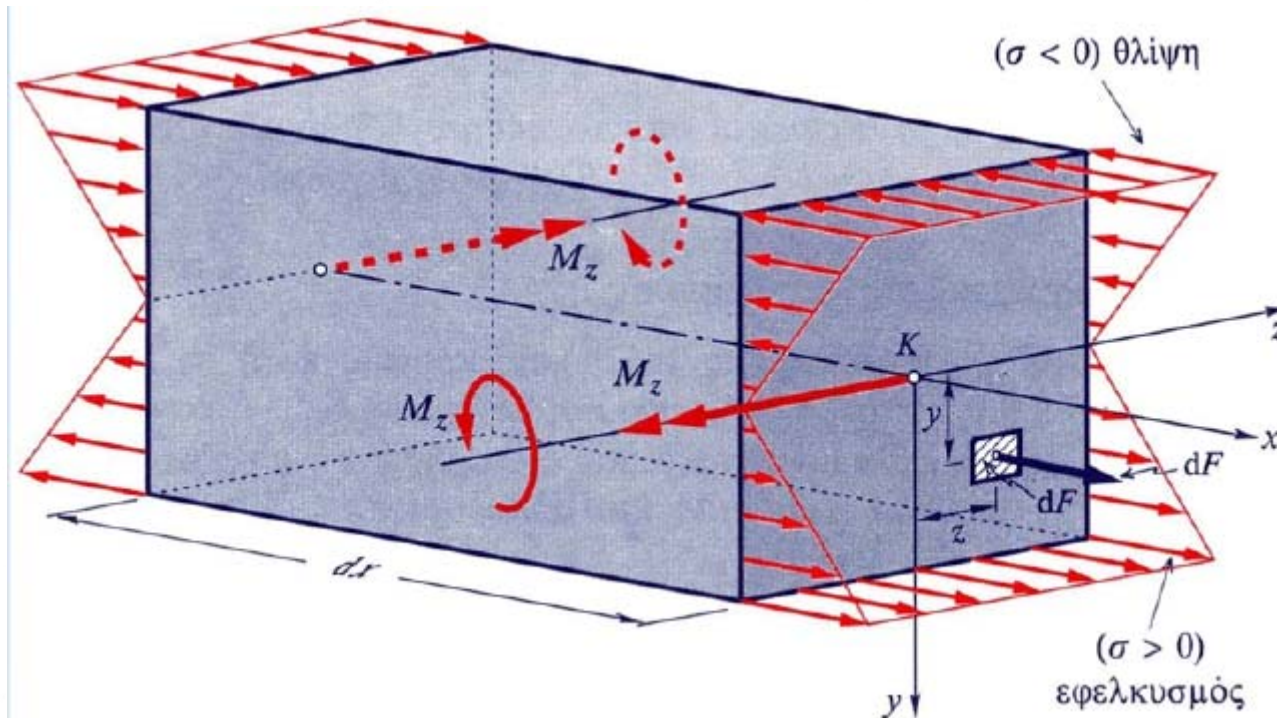
- Λέγοντας ουδέτερη γραμμή εννοούμε τα σημεία εκείνα της διατομής, τα οποία έχουν μηδενικές τάσεις, ή όπως λέγεται είναι ελεύθερα τάσεων.
- Η ουδέτερη γραμμή διέρχεται από το κέντρο βάρους K της διατομής και τη διαχωρίζει σε εφελκυστική και θλιβόμενη περιοχή.



θα πρέπει το άθροισμα των ροπών των στοιχ. δυνάμεων $\sigma \cdot dF$ ως προς τον άξονα Z, να ισούται με την καμπτική ροπή M_z που ενεργεί στη δοκό:

$$M_z = \int_F y \sigma dF \stackrel{\sigma = \frac{E}{R} y}{=} \frac{E}{R} \int_F y^2 dF \stackrel{I_z = \int_F y^2 dF}{=} \frac{E}{R} I_z \stackrel{\frac{E}{R} = \frac{\sigma}{y}}{\Rightarrow} M_z = \frac{\sigma}{y} \cdot I_z \Rightarrow$$

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

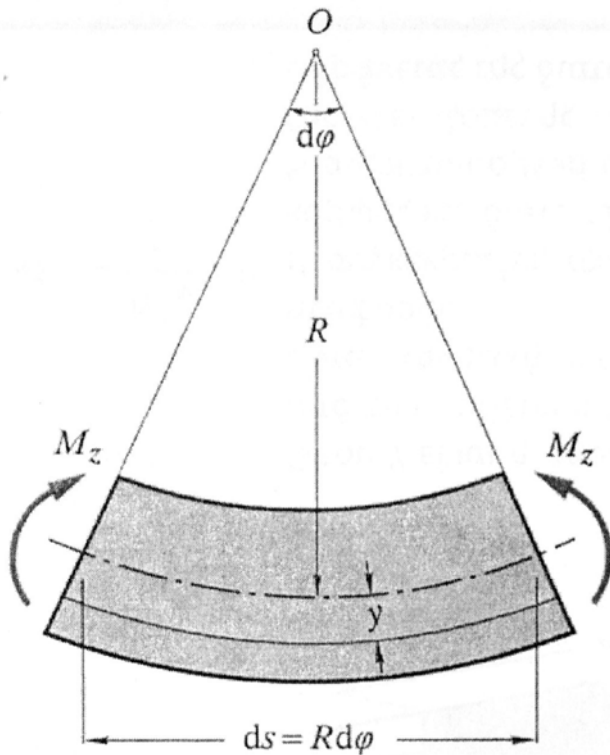


Όπου y είναι η απόσταση του εξεταζόμενου σημείου (ή γενικότερα της εξεταζόμενης ίνας) από την ουδέτερη γραμμή και είναι προφανώς **θετική** για σημεία κάτω από αυτήν, ενώ είναι **αρνητική** για σημεία επάνω από αυτήν, λόγω της επιλογής του συστήματος αναφοράς.

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Η συγκεκριμένη σχέση αποτελεί το νόμο των ορθών τάσεων σε συνάρτηση με τη ροπή κάμψης και διατυπώνεται με τη φράση:

Η αναπτυσσόμενη ορθή τάση είναι ανάλογη της **ροπής κάμψης**, ανάλογη της **απόστασης** της εξεταζόμενης ίνας από την ουδέτερη γραμμή και αντιστρόφως ανάλογη της **ροπής αδράνειας** της διατομής ως προς την ουδέτερη γραμμή.



$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{R} y \\ \sigma &= \frac{M_z}{I_z} \cdot y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{E}{R} y = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη θεμελιώδη σχέση της θεωρίας της ελαστικής παραμόρφωσης της δοκού. Από αυτήν προσδιορίζεται η καμπυλότητα $k = 1 / R$, επομένως και η ακτίνα καμπυλότητας R της ελαστικής γραμμής.

Η σχετική γωνία στροφής $d\phi$ μεταξύ δύο διαδοχικών διατομών της δοκού που απέχουν μεταξύ τους στοιχειώδη απόσταση ds , όπου το στοιχειώδες τόξο είναι $ds = R \cdot d\phi$, είναι:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \Rightarrow d\phi = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \cdot ds$$

Από την οποία με ολοκλήρωση προκύπτει η σχέση:

$$\phi = \frac{M_z}{E \cdot I_z} \cdot \ell$$

με την οποία υπολογίζεται η γωνία στροφής ϕ για ολόκληρο το μήκος της δοκού ℓ .

Στην περίπτωση της καθαρής κάμψης, όπου η M_z παραμένει σταθερή, η μέγιστη ορθή τάση υπολογίζεται από την σχέση:

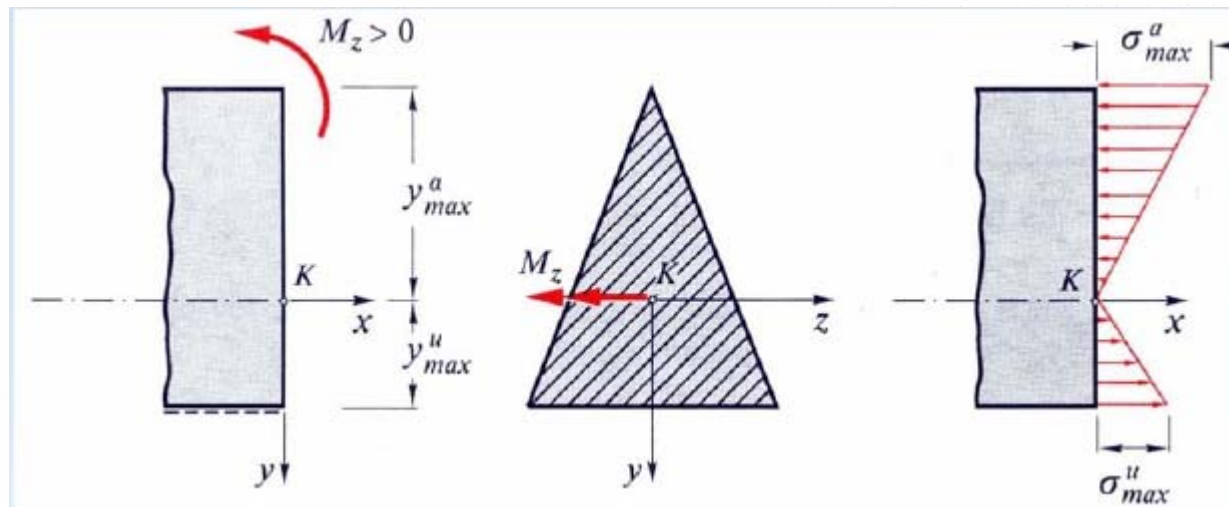
$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\max}$$

Ενώ στην περίπτωση της γενικής κάμψης, όπου η M_z μεταβάλλεται κατά το μήκος της δοκού, η μέγιστη ορθή τάση υπολογίζεται από την σχέση:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\max}$$

Η ποσότητα I_z/y_{\max} είναι σταθερή για δεδομένη γεωμετρία διατομής και ονομάζεται ροπή αντίστασης W .

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$



Στην περίπτωση όπου ο ουδέτερος άξονας της διατομής δεν είναι και ταυτόχρονα άξονας συμμετρίας, τότε θα υπάρχουν 2 αποστάσεις y_{\max} διαφορετικές ως προς την ουδέτερη γραμμή και θα ισχύουν οι σχέσεις:

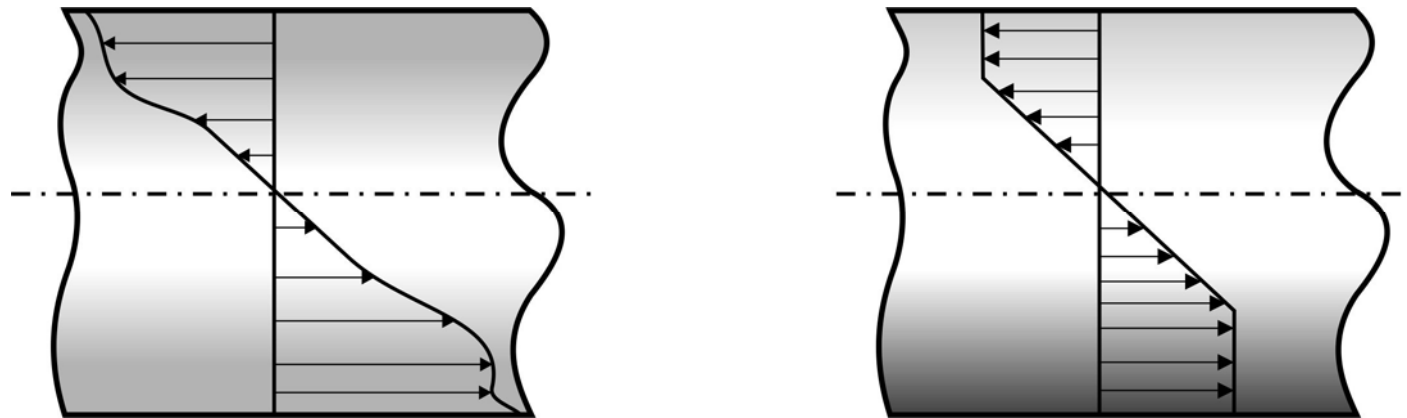
$$W_a = \frac{I_z}{y_{\max}^a}, \quad W_{\kappa} = \frac{I_z}{y_{\max}^{\kappa}}$$

$$\sigma_{\max}^a = \frac{M_{\max}}{W_a}, \quad \sigma_{\max}^{\kappa} = \frac{M_{\max}}{W_{\kappa}}$$

Η παραμόρφωση πέραν του ορίου ελαστικότητας τροποποιεί τη γραμμική κατανομή των τάσεων και τότε υπάρχει μία σχέση για τις τάσεις της μορφής $\sigma_x(Y)=\sigma_x(\epsilon(Y))$

Στην περίπτωση (β) θεωρούμε ότι το υλικό ακολουθεί ένα διάγραμμα τάσεων παραμορφώσεων κατά ένα μέρος όμοιο με τα ελαστικά υλικά και κατά ένα μέρος όμοιο με τα απόλυτα πλαστικά υλικά.

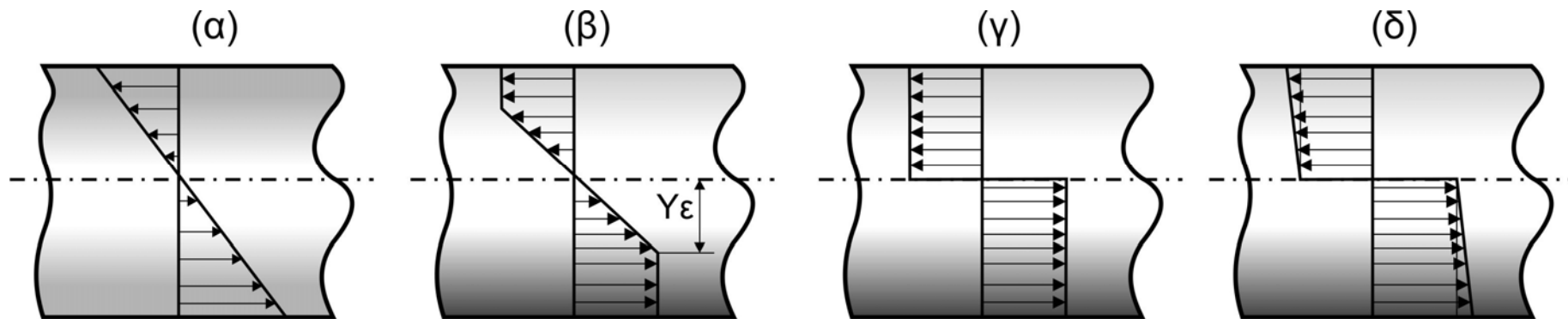
Για την περιγραφή των τάσεων στην πλαστική περιοχή απλοποιείται το διάγραμμα και λαμβάνεται υπόψη η καταπόνηση στην διαρροή η οποία θεωρείται μια ικανοποιητική απλούστευση



Επειδή οι μέγιστες τάσεις εμφανίζονται στις εξωτερικές πλευρές της δοκού, έχουμε στις περιοχές αυτές πλαστική παραμόρφωση, ενώ στην υπόλοιπη περιοχή εξακολουθεί να υπάρχει ελαστική παραμόρφωση.

Χαρακτηριστικό της καταπόνησης κάμψης είναι ότι ο φορέας εισέρχεται διαδοχικά στην πλαστική περιοχή, αρχίζοντας από τα εξωτερικά στρώματα (εφελκυσόμενα ή θλιβόμενα) και προς την ουδέτερη γραμμή.

Αυξάνοντας τη φόρτιση εισέρχονται και νέες περιοχές στην πλαστική περιοχή.



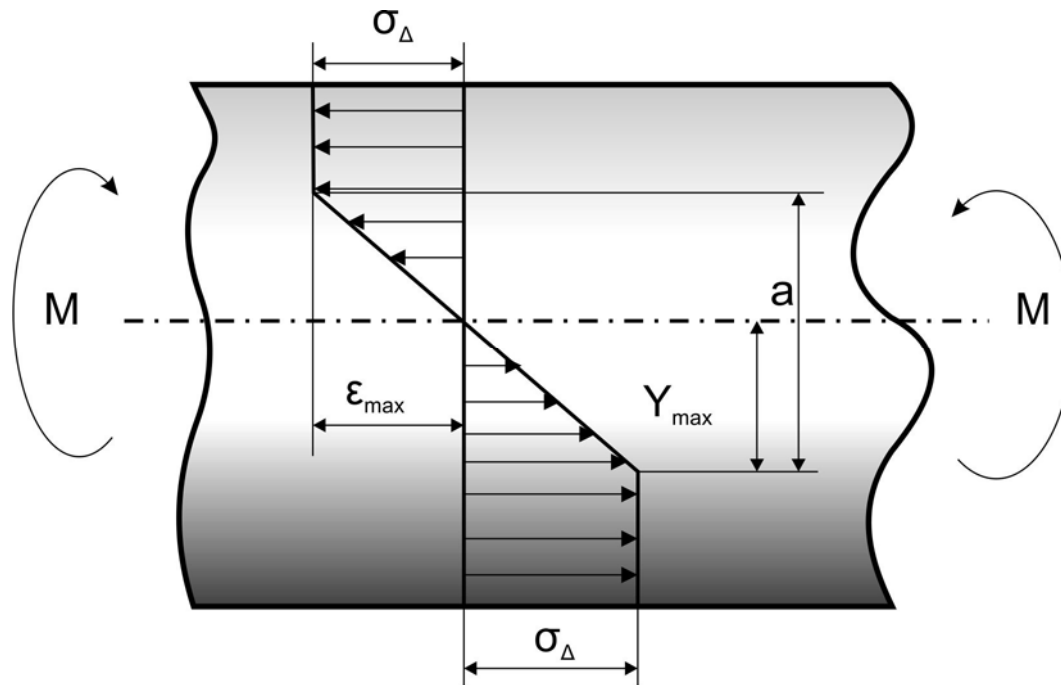
Αφού προχωρήσει η πλαστική παραμόρφωση (β) στις εξωτερικές περιοχές και αυξάνει σε όλη τη διατομή:

- Η δεν μεταβάλλονται οι τάσεις στα απόλυτα πλαστικό υλικό (γ)
- Μεταβάλλονται ελάχιστα σε κρατυνόμενο υλικό (δ)

Το ύψος γ_{ϵ} της ελαστικής ζώνης από τον ουδέτερο άξονα είναι πολύ σε σχέση με το γ_{\max} όταν εισέλθει σχεδόν όλος ο φορέας στην πλαστική περιοχή

Για την εξεύρεση σχέσης μεταξύ της καμπυλότητας του φορέα και της καμπτικής ροπής στην ελαστοπλαστική περιοχή πρέπει να γνωρίζουμε τη μορφή της εγκάρσιας διατομής της δοκού.

Για την ορθογωνική διατομή πλάτους b και ύψους h ισχύει:



a : ύψος ελαστικής ζώνης

σ_{Δ} : τάση διαρροής υλικού

ϵ_{\max} : επιμήκυνση ακραίων ινών

Ισχύει $\epsilon_{\Delta} = \sigma_{\Delta} / E$

Για την (εσωτερική) καμπτική ροπή ισχύει

$$M = b\sigma_{\Delta}(h^2/4 - a^2/12)$$

Ισχύει $a = \frac{2\sigma_{\Delta}}{E y''}$ οπότε $M = \frac{bh^2}{4} \sigma_{\Delta} - \frac{b\sigma_{\Delta}^3}{3E^2(y'')^2}$

Βέλος κάμψης $f = \frac{1}{48} \frac{PL^3}{EI}$

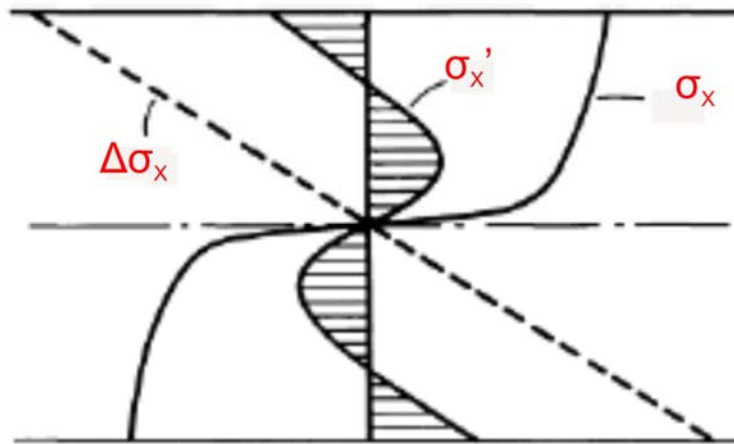
Όταν ένα δοκίμιο παραμορφωθεί σε κάμψη πέραν του ορίου ελαστικότητας και αποφορτιστεί, τότε η καμπτική ροπή γίνεται μηδέν και η ακτίνα καμπυλότητάς του αυξάνεται από R σε R' .

Για μια ίνα που βρίσκεται σε απόσταση y από την ίνα αναφοράς, αυτό δημιουργεί μια διαφορά στην παραμόρφωση : $\Delta\varepsilon_x = y\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$

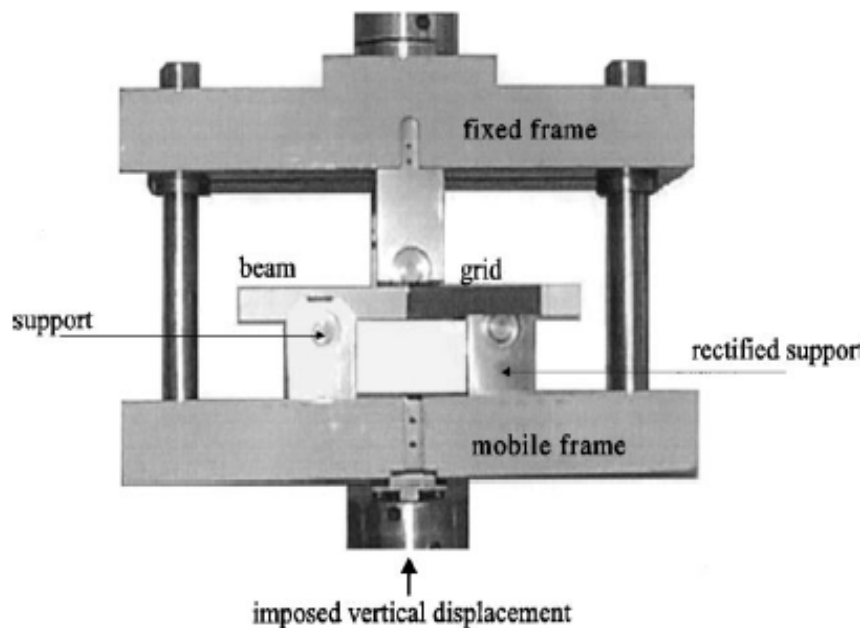
$$\Delta\sigma_x = E^* \Delta\varepsilon_x = Ey\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \Rightarrow \sigma_x' = \sigma_x + Ey\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \quad (1)$$

Το μέγεθος του ελαστικού πυρήνα δίνεται από τον τύπο: $C = 2R\sigma_y/E'$ (2)

Όπου σ_y το όριο διαρροής και $E' = E/(1-\nu^2)$



Με τον παραπάνω τύπο (1) μπορεί να βρεθεί η κατανομή των εναπομενουσών τάσεων στη διατομή του δοκιμίου.



Η πειραματική διάταξη

Η δοκιμή κάμψης είναι ουσιαστικά μέτρηση της ψαθυρότητας των υλικών κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες φόρτισης. Το πείραμα κάμψης διαφέρει γενικά με τα υπόλοιπα πειράματα αντοχής υλικών, στο ότι το αποτέλεσμα είναι τύπου «Περνά – Δεν Περνά», ενώ στο πείραμα π.χ. εφελκυσμού το αποτέλεσμα δίνει ποσοτικά δεδομένα των ιδιοτήτων του υλικού (μέτρο ελαστικότητας, τάση διαρροής, τάση θραύσης)

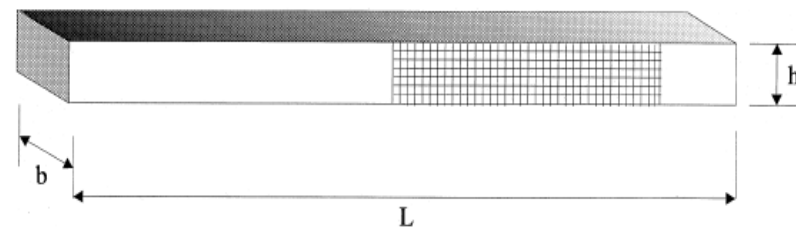


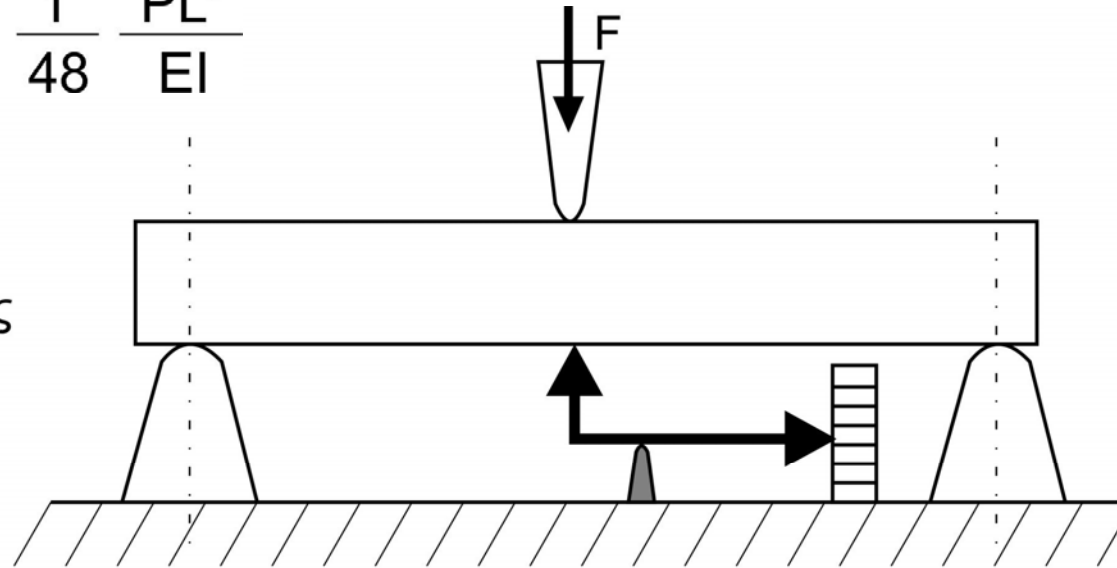
Table 1
Dimensions and mechanical characteristics of the tested specimens

	Carbon/epoxy	Glass/epoxy
Length l (mm)	247	285
Width b (mm)	30.27	30.13
Height h (mm)	20.28	18.25
E_{11} (GPa)	115	25.4
G_{13} (GPa)	3.0	3.7

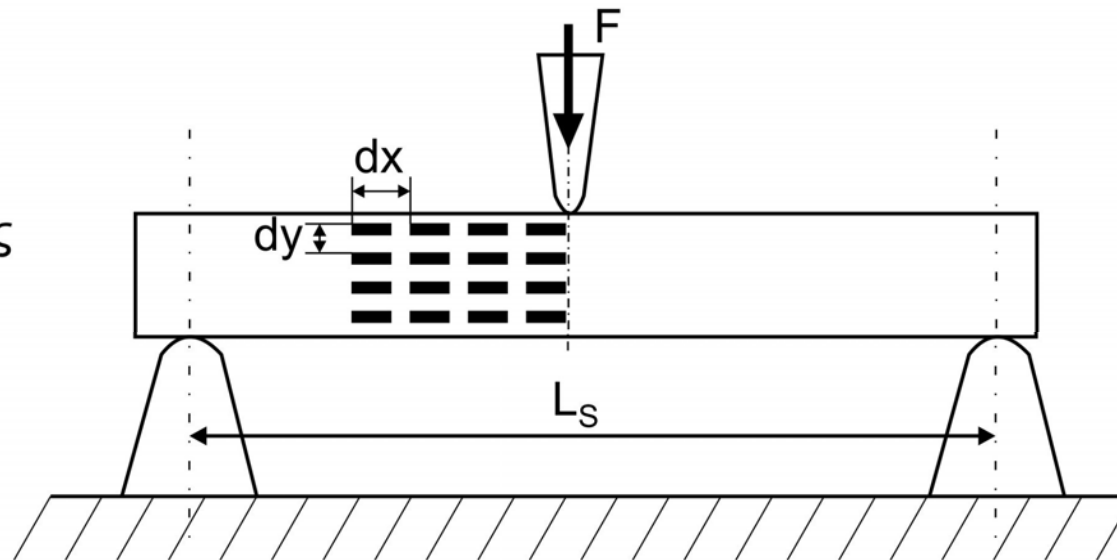
Οι διαστάσεις των δοκιμίων

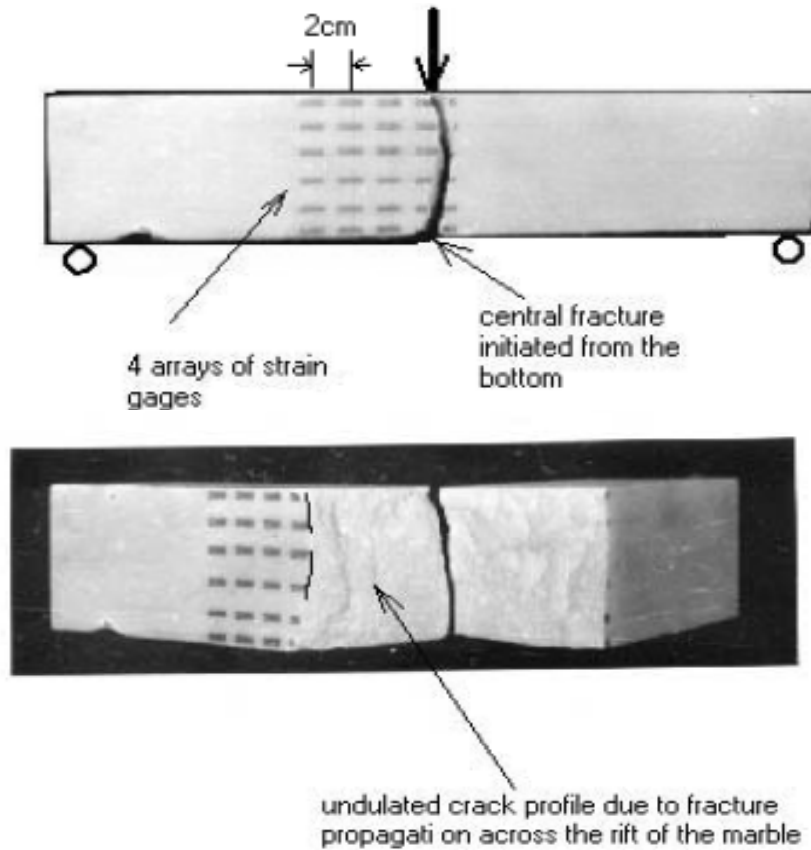
Βέλος κάμψης: $f = \frac{1}{48} \frac{PL^3}{EI}$

Διάταξη μέτρησης
βέλους κάμψης
(όλκιμα υλικά)



Διάταξη μέτρησης
βέλους κάμψης
(ψαθυρά υλικά)





Το μάρμαρο αστοχεί στην κεντρική διατομή με μια ρωγμή που ξεκινάει από την κάτω ίνα και διαδίδεται με έναν ασταθή τρόπο με μια διεύθυνση περισσότερο ή λιγότερο κάθετη στον διαμήκη άξονα του δοκιμίου και προς το σημείο που εφαρμόζεται το φορτίο.