

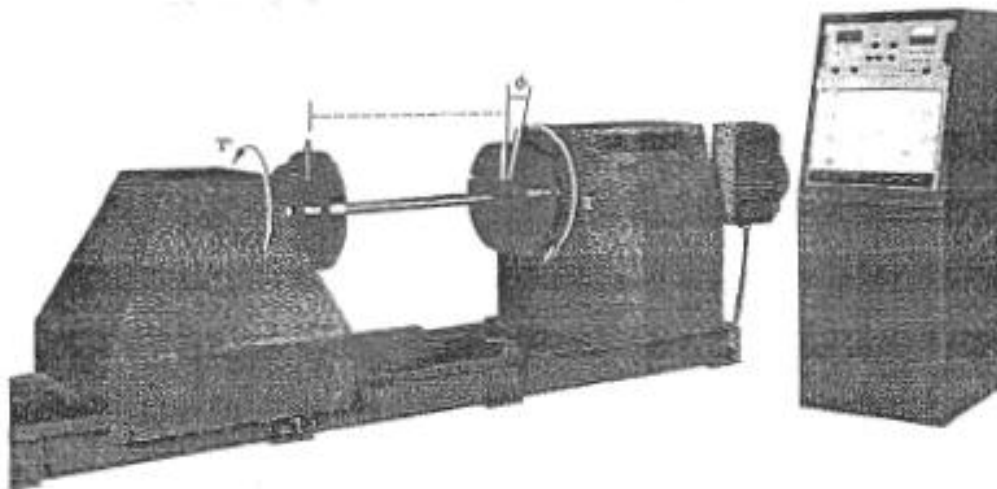
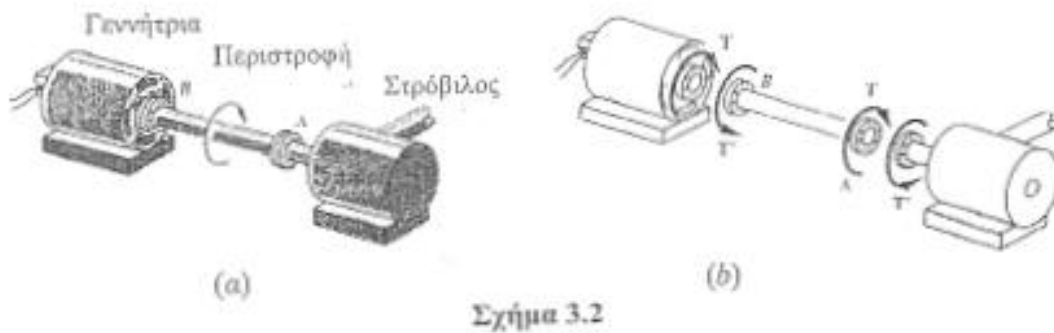
Εργαστήριο Πειραματικής Αντοχής Υλικών

ΠΕΙΡΑΜΑ ΣΤΡΕΨΗΣ

Ελαστο-πλαστική συμπεριφορά και θραύση ατράκτου σε στρέψη σε όλκιμο υλικό

1. Εργαστήριο
2. Θεωρία πλαστικής συμπεριφοράς/θραύσης ατράκτου σε στρέψη
3. Παράδειγμα υπολογισμού ελαστο-πλαστικής ατράκτου φορτιζόμενης σε στρέψη, καθώς και υπολογισμός παραμενουσών τάσεων , αφού αφαιρεθεί η ροπή στρέψης.

1. Εργαστήριο



Σχήμα 1. Μηχανή πειραματικού ελέγχου στρέψης (Courtesy Acco Industries, Inc)

Ας θεωρήσουμε την συγκεκριμένη περίπτωση ενός στοιχείου c ~~Σχ. 3.17~~, με γωνία 45° ως προς τον άξονα της ατράκτου. Για να καθορίσουμε τις τάσεις στις πλευρές αυτού του στοιχείου, θα θεωρήσουμε τα δύο τριγωνικά στοιχεία που παρουσιάζονται στο Σχ. 3.18 και θα σχεδιάσουμε τα διαγράμματα ελευθέρου σώματός τους. Στην περίπτωση του στοιχείου του Σχ. 3.18α, γνωρίζουμε ότι οι τάσεις που ασκούνται στις πλευρές BC και BD είναι οι διατμητικές τάσεις $\tau_{\max} = Tc / J$. Το μέγεθος των αντίστοιχων τεμνουσών δυνάμεων είναι συνεπώς $\tau_{\max} A_0$, όπου A_0 δηλώνει την επιφάνεια της πλευράς. Παρατηρώντας ότι οι συνιστώσες κατά μήκος της DC των δύο τεμνουσών δυνάμεων είναι ίσες και αντίθετες, συμπεραίνουμε ότι η δύναμη F ασκούμενη πάνω στην DC πρέπει να είναι κάθετη σ' αυτή την πλευρά. Η δύναμη αυτή είναι εφεκλυστική, και το μέγεθος της είναι

$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2} \quad (3.12)$$

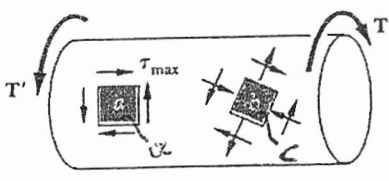
Η αντίστοιχη τάση λαμβάνεται διαιρώντας την δύναμη F με την επιφάνεια A της πλευράς DC . Παρατηρώντας ότι $A = A_0 \sqrt{2}$, γράφουμε

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max} \quad (3.13)$$

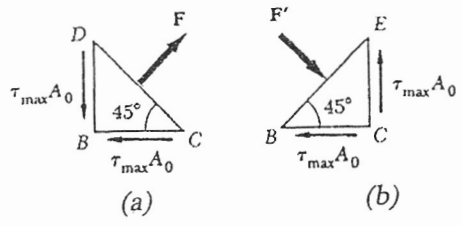
Μία παρόμοια ανάλυση του στοιχείου του Σχ. 3.18β δείχνει ότι η τάση πάνω στην επιφάνεια BE είναι $\sigma = -\tau_{\max}$. Από την Εξ. (3.8), συμπεραίνουμε ότι οι τάσεις που ασκούνται

νται στις πλευρές ενός στοιχείου c με γωνία 45° ως προς τον άξονα της ατράκτου (Σχ. 3.19) είναι ορθές και ίσες προς

$$\sigma_{45^\circ} = \pm \frac{Tc}{J} \quad (3.14)$$

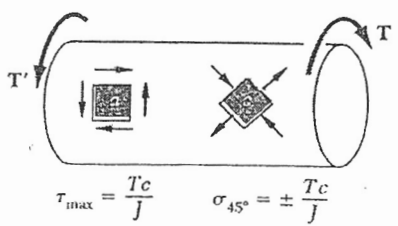


Σχήμα 3.17



Σχήμα 3.18

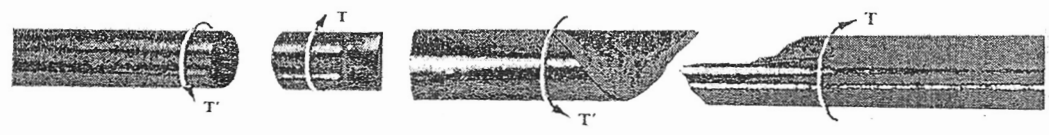
Συνεπώς, ενώ το στοιχείο a στο Σχ. 3.19 βρίσκεται σε καθαρή διάτμηση, το στοιχείο c στο ίδιο σχήμα υποβάλλεται σε εφεκλυστική τάση στις δύο από τις πλευρές του, και σε θλιπτική τάση στις άλλες δύο. Σημειώνουμε επίσης ότι όλες οι τάσεις που εμπλέκονται έχουν το ίδιο μέγεθος, Tc / J .



Σχήμα 3.19

Όπως είδαμε στο Αρθ. 2.3, όλκιμο υλικό γενικά αστοχούν σε διάτμηση. Ως εκ τούτου όταν υποβάλλεται σε στρέψη, ένα δοκίμιο φτιαγμένο από όλκιμο υλικό σπάει κατά μήκος μίας επιφανείας κάθετης στον διαμήκη άξονά του (Σχ. 3.20α). Από την άλλη μεριά, ψαθυρά υλικά είναι περισσότερο αδύναμα σε εφεκλυσμό απ' ότι σε διάτμηση. Συνεπώς, όταν υπόκειται σε στρέψη, ένα δοκίμιο φτιαγμένο από ένα ψαθυρό υλικό έχει την τάση να σπάει κατά μήκος επιφανειών οι οποίες είναι κάθετες προς την κατεύθυνση στην οποία η τάση είναι η μέγιστη, π.χ. κατά μήκος επιφανειών οι οποίες σχηματίζουν γωνία 45° με τον διαμήκη άξονα του δοκιμίου (Σχ. 3.20β).

1/11/11



Σχήμα 3.20
 (a) ΟΛΚΙΜΟ ΥΛΙΚΟ
 ΘΡΑΥΣΗ ΛΟΓΩ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ

(b) ΨΑΘΥΡΟ ΥΛΙΚΟ
 ΘΡΑΥΣΗ ΛΟΓΩ ΕΦΕΚΛΥΣΗΣ

***3.9. ΠΛΑΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΑΤΡΑΚΤΟΥΣ**

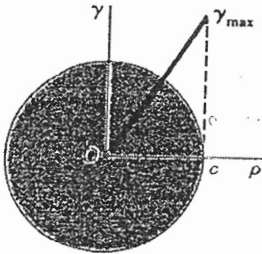
Όταν είχαμε παράγει τις Εξ. (3.9) και (3.16), οι οποίες προσδιόρισαν την κατανομή τάσης και τη γωνία στρέψης για μια κυκλική άτρακτο που υπόκειται σε μια ροπή στρέψης T , υποθέσαμε ότι ο νόμος του Hooke εφαρμόζονταν σ' όλη την άτρακτο. Αν η αντοχή διαρροής ξεπεραστεί σε κάποιο τμήμα της ατράκτου ή αν το χρησιμοποιούμενο υλικό είναι ψαθυρό με ένα μη γραμμικό διάγραμμα διατμητικής τάσης-τροπής, αυτές οι σχέσεις παύουν να ισχύουν. Σκοπός αυτού του άρθρου είναι να αναπτύξουμε μια πιο γενική μέθοδο - η οποία να μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν ο νόμος του Hooke δεν εφαρμόζεται - για να προσδιορίσουμε την κατανομή τάσεων σε μια συμπαγή κυκλική άτρακτο και να υπολογίσουμε τη ροπή στρέψης που απαιτείται για να παράγει μια δεδομένη γωνία στρέψης.

Καταρχή θυμόμαστε ότι δεν υποθέσαμε κάποια ειδική σχέση τάσης - τροπής στο Αρθ. 3.3, όταν αποδείξαμε ότι η διατμητική τροπή γ μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση ρ από τον άξονα της ατράκτου (Σχ. 3.32). Ετσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα στην παρούσα ανάλυση μας και να γράψουμε

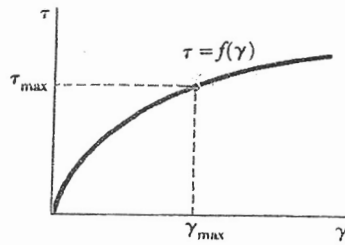
$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{max} \tag{3.4}$$

όπου c είναι η ακτίνα της ατράκτου.

Υποθέτοντας ότι η μέγιστη τιμή τ_{max} της διατμητικής τάσης τ έχει προσδιοριστεί, το διάγραμμα του τ ως προς ρ μπορεί να βρεθεί ως εξής. Καταρχή προσδιορίζουμε από το διάγραμμα διατμητικής τάσης - τροπής την τιμή γ_{max} που αντιστοιχεί στην τ_{max} (Σχ. 3.33) και θέτουμε την τιμή αυτή στην Εξ. (3.4). Τότε, για κάθε τιμή του ρ , προσδιορίζουμε την αντίστοιχη τιμή του γ από την Εξ. (3.4) ή το Σχ. 3.32 και αποκτούμε από το διάγραμμα τάσης - τροπής του Σχ. 3.33 τη διατμητική τάση τ που αντιστοιχεί σ' αυτή την τιμή γ . Σχεδιάζοντας το τ ως προς ρ οδηγούμαστε στην επιθυμητή κατανομή των τάσεων (Σχ. 3.34).



Σχήμα 3.32



Σχήμα 3.33

Θυμόμαστε τώρα ότι, όταν είχαμε παράγει την Εξ. (3.1) στο Αρθ. 3.2 δεν υποθέσαμε ιδιαίτερη σχέση μεταξύ διατμητικής τάσης και τροπής. Μπορούμε ως εκ τούτου να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. (3.1) για να προσδιορίσουμε τη ροπή στρέψης T που αντιστοιχεί στην κατανομή διατμητικής τάσης που πήραμε στο Σχ. 3.34. Θεωρώντας ένα δακτυλιοειδές στοιχείο ακτίνας ρ και πάχους $d\rho$, εκφράζουμε το στοιχειώδες εμβαδόν της Εξ. (3.1) ως $dA = 2\pi\rho d\rho$ και γράφουμε

$$T = \int_0^c \rho\tau(2\pi\rho d\rho)$$

ή

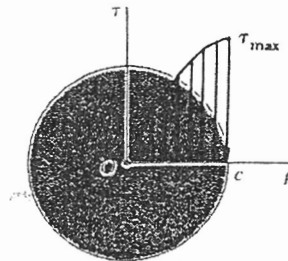
$$T = 2\pi \int_0^c \rho^2\tau d\rho \tag{3.26}$$

όπου τ είναι η συνάρτηση του ρ που σχεδιάζεται στο Σχ. 3.34.

Αν τ είναι μια γνωστή αναλυτική συνάρτηση του ρ , μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφραστεί η τ σαν συνάρτηση του ρ και το ολοκλήρωμα στην (3.26) μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά. Αλλιώς, η ροπή στρέψης T μπορεί να βρεθεί με μια αριθμητική ολοκλήρωση. Αυτός ο υπολογισμός γίνεται πιο σημαντικός αν επισημάνουμε ότι το ολοκλήρωμα στην Εξ. (3.26) παριστάνει τη δεύτερη ροπή ή τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα τον κάθετο στο εμβαδόν του Σχ. 3.34 που βρίσκεται πάνω από την καμπύλη της κατανομής τάσης.

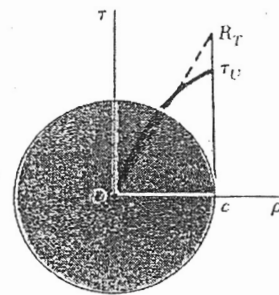
Μια σημαντική τιμή της ροπής στρέψης είναι η οριακή ροπή στρέψης T_U η οποία προκαλεί αστοχία στην άτρακτο. Αυτή η τιμή μπορεί να προσδιοριστεί από την οριακή διατμητική τάση τ_U του υλικού διαλέγοντας $\tau_{max} = \tau_U$ και κάνοντας τους υπολογισμούς που δηλώσαμε προηγουμένως. Εντούτοις, είναι καταλληλότερο στην πράξη να προσδιορίσουμε την T_U εμπειρικά στρεβλώνοντας ένα δικίμιο ενός δεδομένου υλικού ώσπου να σπάσει. Υποθέτοντας μια εικονική γραμμική κατανομή τάσεων, η Εξ. (3.8) χρησιμοποιείται τότε για τον προσδιορισμό της αντίστοιχης μέγιστης διατμητικής τάσης R_T :

$$R_T = \frac{T_U c}{J} \quad (3.27)$$



Σχήμα 3.34

Η εικονική τάση R_T ονομάζεται μέτρο θραύσης σε στρέψη του δεδομένου υλικού. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της οριακής ροπής στρέψης T_U μιας ατράκτου που αποτελείται από το ίδιο υλικό αλλά διαφορετικών διαστάσεων, επιλύοντας την Εξ. (3.27) για το T_U . Εφόσον η πραγματική και η εικονική γραμμική κατανομή τάσης που εικονίζεται στο Σχ. 3.35 πρέπει να δίνουν την ίδια τιμή T_U για την οριακή ροπή στρέψης, το εμβαδόν που ορίζουν πρέπει να έχει την ίδια ροπή αδράνειας ως προς τον κάθετο άξονα. Είναι επομένως φανερό ότι το μέτρο θραύσης R_T θα είναι πάντοτε μεγαλύτερο από την πραγματική οριακή τιμή της διατμητικής τάσης τ_U .



Σχήμα 3.35

Σε μερικές περιπτώσεις θα θέλαμε να προσδιορίσουμε την κατανομή τάσης και τη ροπή στρέψης T που αντιστοιχεί σε μια δεδομένη γωνία στρέψης ϕ . Αυτό μπορεί να γίνει αν χρησιμοποιηθεί η έκφραση που πήραμε στο Αρθ.3.3, για τη διατμητική τροπή γ ως προς τα ϕ, ρ και το μήκος L της ατράκτου:

$$\gamma = \frac{\rho \phi}{L} \quad (3.2)$$

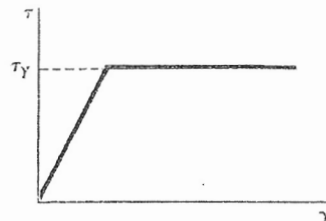
Με δεδομένα τα ϕ και L , μπορούμε να προσδιορίσουμε από την Εξ. (3.2) την τιμή του γ που αντιστοιχεί σε μια δεδομένη τιμή του ρ . Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα τάσης - τροπής του υλικού, μπορούμε να πάρουμε την αντίστοιχη τιμή της διατμητικής τάσης τ και να σχεδιάσουμε το τ ως προς το ρ . Αφού έχουμε βρεί την κατανομή της διατμητικής τάσης, η ροπή στρέψης T μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά ή αριθμητικά όπως εξηγήσαμε προηγουμένως.

***3.10 ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΑΤΡΑΚΤΟΙ ΑΠΟ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ**

Επιπλέον γνώση της πλαστικής συμπεριφοράς μιας ατράκτου σε στρέψη μπορεί να επιτευχθεί θεωρώντας την ιδανική περίπτωση μιας *συμπαγούς κυκλικής ατράκτου από ένα ελαστοπλαστικό υλικό*. Το διάγραμμα διατμητικής τάσης –τροπής ενός τέτοιου υλικού φαίνεται στο Σχ. 3.36. Χρησιμοποιώντας αυτό το διάγραμμα, μπορούμε να συνεχίσουμε όπως αναφέραμε προηγουμένως και να βρούμε την κατανομή τάσης σε μια διατομή της ατράκτου για οποιαδήποτε τιμή της ροπής στρέψης T .

Όσο η διατμητική τάση τ δεν υπερβαίνει την αντοχή διαρροής τ_Y , εφαρμόζουμε τον νόμο του Hooke και η κατανομή τάσης πάνω στην διατομή είναι γραμμική (Σχ. 3.37α), με τ_{max} να δίνεται από την Εξ. (3.8):

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} \quad (3.8)$$



Σχήμα 3.36

Η τιμή που παίρνουμε αναφέρεται σαν η *μέγιστη ελαστική ροπή στρέψης*, εφόσον είναι η μέγιστη ροπή στρέψης για την οποία η παραμόρφωση παραμένει καθαρά

ελαστική. Ενθυμούμενοι ότι για μια συμπαγή κυκλική άτρακτο $J/c = 1/2 \pi c^3$, έχουμε

$$T_Y = \frac{1}{2} \pi c^3 \tau_Y \quad (3.29)$$

Καθώς η ροπή στρέψης αυξάνεται επιπλέον, αναπτύσσεται μια πλαστική περιοχή στην άτρακτο, γύρω από έναν ελαστικό πυρήνα ακτίνας ρ_Y (Σχ. 3.37c). Στην πλαστική περιοχή η τάση είναι ομοιόμορφα ίση με την τ_Y , ενώ στον ελαστικό πυρήνα η τάση μεταβάλλεται γραμμικά με το ρ και μπορεί να εκφραστεί ως

$$\tau = \frac{\tau_Y}{\rho_Y} \rho \quad (3.30)$$

Καθώς η T αυξάνεται, η πλαστική περιοχή επεκτείνεται ως το όριο όπου η παραμόρφωση γίνεται πλήρως πλαστική (Σχ. 3.37 d).

Θα χρησιμοποιήσουμε την Εξ.(3.26) για να προσδιορίσουμε την τιμή της ροπής στρέψης που αντιστοιχεί σε μια δεδομένη ακτίνα ρ_Y του ελαστικού πυρήνα. Ενθυμούμενοι ότι το τ δίνεται από την Εξ. (3.30) για $0 \leq \rho \leq \rho_Y$, και ισούται με τ_Y για $\rho_Y \leq \rho \leq c$, γράφουμε

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int_0^{\rho_Y} \rho^2 \left(\frac{\tau_Y}{\rho_Y} \rho \right) d\rho + 2\pi \int_{\rho_Y}^c \rho^2 \tau_Y d\rho \\ &= \frac{1}{2} \pi \rho_Y^3 \tau_Y + \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_Y - \frac{2}{3} \pi \rho_Y^3 \tau_Y \\ T &= \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_Y \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_Y^3}{c^3} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

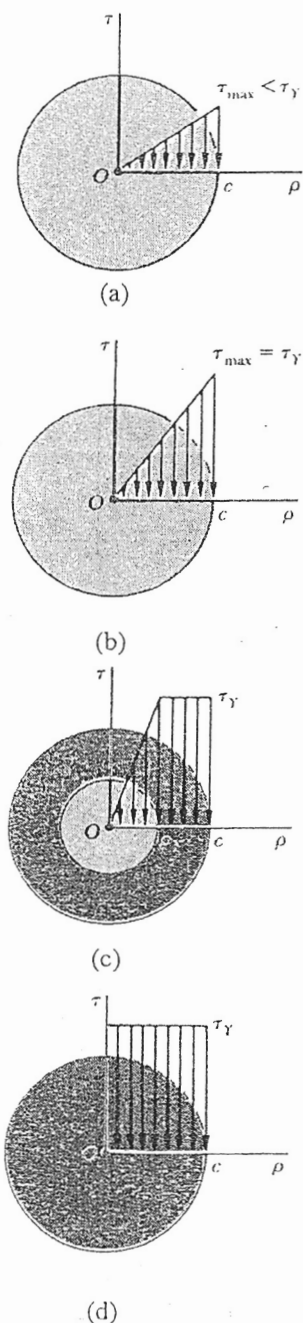
ή από την Εξ. (3.29),

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_Y^3}{c^3} \right) \quad (3.32)$$

όπου T_Y είναι η μέγιστη ελαστική ροπή στρέψης. Σημειώνουμε ότι καθώς η ρ_Y τείνει στο μηδέν, η ροπή στρέψης πλησιάζει την οριακή τιμή

$$T_p = \frac{4}{3} T_Y \quad (3.33)$$

Αυτή η τιμή της ροπής στρέψης, η οποία αντιστοιχεί σε μια πλήρη πλαστική παραμόρφωση (Σχ. 3.37 d), ονομάζεται *πλαστική ροπή στρέψης* της δεδομένης ατράκτου. Σημειώνουμε ότι η Εξ.(3.33) ισχύει μόνο για μια *συμπαγή κυκλική άτρακτο από ένα ελαστοπλαστικό υλικό*.



Σχήμα 3.37

Εφόσον η κατανομή της τροπής στη διατομή παραμένει γραμμική μετά την απαρχή της διαρροής, ισχύει η Εξ. (3.2) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσουμε την ακτίνα ρ_Y του ελαστικού πυρήνα ως προς τη γωνία στρέψης ϕ . Αν η ϕ είναι αρκετά μεγάλη για να προκαλέσει πλαστική παραμόρφωση, η ακτίνα ρ_Y του ελαστικού πυρήνα λαμβάνεται θέτοντας το γ ίσο με την τροπή διαρροής γ_Y στην Εξ.(3.2) και λύνοντας ως προς την αντίστοιχη τιμή ρ_Y της απόστασης ρ . Έχουμε

$$\rho_Y = \frac{L\gamma_Y}{\phi} \tag{3.34}$$

Ας συμβολίσουμε με ϕ_Y τη γωνία στρέψης κατά την απαρχή της διαρροής, δηλ. όταν $\rho_Y = c$. Θέτοντας $\phi = \phi_Y$ και $\rho_Y = c$ στην Εξ. (3.34), έχουμε

$$c = \frac{L\gamma_Y}{\phi_Y} \tag{3.35}$$

Διαιρώντας την (3.34) με την (3.35), κατά μέλη, παίρνουμε την ακόλουθη σχέση⁺:

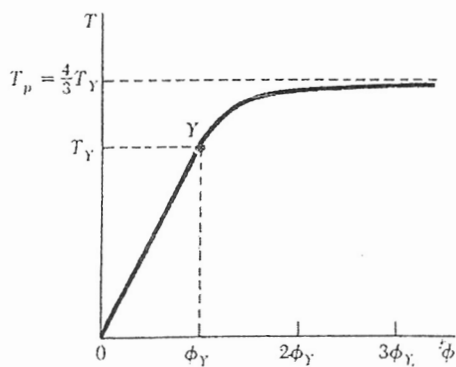
$$\frac{\rho_Y}{c} = \frac{\phi_Y}{\phi} \tag{3.36}$$

Αν μεταφέρουμε στην Εξ. (3.32) την έκφραση που παίρνουμε για τη ροπή στρέψης T σαν συνάρτηση της γωνίας στρέψης ϕ ,

$$T = \frac{4}{3}T_Y \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\phi_Y^3}{\phi^3}\right) \tag{3.37}$$

όπου T_Y και ϕ_Y παριστάνουν, αντίστοιχα, τη ροπή στρέψης και τη γωνία στρέψης κατά την απαρχή της διαρροής. Σημειώνουμε ότι η Εξ. (3.37) μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για τιμές ϕ μεγαλύτερες από τη ϕ_Y . Για $\phi < \phi_Y$, η σχέση ανάμεσα στο T και το ϕ είναι γραμμική και δίνεται από την Εξ. (3.16). Συνδυάζοντας και τις δυο εξισώσεις, παίρνουμε το διάγραμμα της T ως προς το ϕ που παριστάνεται στο Σχ. 3.38. Σημειώνουμε ότι καθώς η ϕ αυξάνεται απεριόριστα η T πλησιάζει την οριακή τιμή $T_p = (4/3)T_Y$ που αντιστοιχεί στην περίπτωση μιας καθαρά πλαστικής ζώνης (Σχ. 3.37d). Ενώ η τιμή T_p δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς, βλέπουμε από την Εξ. (3.37) να προσεγγίζεται γρήγορα καθώς η ϕ αυξάνεται. Για $\phi = 2\phi_Y$ η T είναι περίπου τα 3% της T_p και για $\phi = 3\phi_Y$ περίπου 1%.

Εφόσον το διάγραμμα της T ως προς τη ϕ που πήραμε για ένα ιδανικό ελαστοπλαστικό υλικό (Σχ. 3.38) διαφέρει σημαντικά από το διάγραμμα διατμητικής τάσης - τροπής αυτού του υλικού (Σχ. 3.36), είναι φανερό ότι το διάγραμμα διατμητικής τάσης - τροπής ενός πραγματικού υλικού δεν μπορεί να βρεθεί κατ'ευθείαν από ένα πείραμα στρέψης που γίνε-



Σχήμα 3.38

ται σε μια συμπαγή κυκλική ράβδο από το υλικό αυτό. Εντούτοις, ένα ακριβές διάγραμμα μπορεί να βρεθεί από ένα πείραμα στρέψης αν το δοκίμιο που χρησιμοποιούμε περιέχει ένα τμήμα που αποτελείται από ένα λεπτό κυκλικό σωλήνα.⁺ Πράγματι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διατμητική τάση θα έχει μια σταθερή τιμή τ σ' εκείνο το τμήμα. Η Εξ. (3.1) έτσι ανάγεται στην

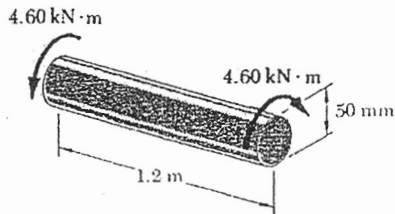
$$T = \rho A \tau$$

όπου ρ συμβολίζει τη μέση ακτίνα του σωλήνα και A το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής. Η διατμητική τάση είναι ανάλογη με τη ροπή στρέψης και οι διαδοχικές τιμές της τ μπορούν να υπολογιστούν εύκολα από τις αντίστοιχες τιμές της T . Από την άλλη οι τιμές της διατμητικής τροπής γ μπορούν να βρεθούν από την Εξ.(3.2) και από τις τιμές των ϕ και L που μετρούνται στο σωληνοειδές τμήμα του δοκιμίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Μια συμπαγής κυκλική άτρακτος από ελαστοπλαστικό υλικό ($G=80\text{GPa}$, $\tau_Y=150\text{MPa}$) μήκους 50 mm , υπόκειται σε μια ροπή στρέψης $4.60\text{ kN}\cdot\text{m}$ σε κάθε άκρο της (Σχ.1). Προσδιορίστε (α) την ακτίνα του ελαστικού πυρήνα, (β) τη γωνία στρέψης της άτρακτου.

(α) **Ακτίνα Ελαστικού Πυρήνα.** Αρχικά προσδιορίζουμε τη ροπή στρέψης T_Y κατά την απαρχή της διαρροής. Χρησιμοποιώντας την Εξ.(3.28) με $\tau_Y=150\text{ MPa}$, $c=25\text{ mm}$ και



Σχήμα. ↓

$$J = \frac{1}{2}\pi c^4 = \frac{1}{2}\pi(25 \times 10^{-3}\text{ m})^4 = 614 \times 10^{-9}\text{ m}^4$$

γράφουμε

$$T_Y = \frac{J\tau_Y}{c} = \frac{(614 \times 10^{-9}\text{ m}^4)(150 \times 10^6\text{ Pa})}{25 \times 10^{-3}\text{ m}} = 3.68\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Λύνοντας την Εξ. (3.32) για $(\rho_Y/c)^3$ και αντικαθιστώντας τις τιμές του T και T_Y , έχουμε

$$\left(\frac{\rho_Y}{c}\right)^3 = 4 - \frac{3T}{T_Y} = 4 - \frac{3(4.60\text{ kN}\cdot\text{m})}{3.68\text{ kN}\cdot\text{m}} = 0.250$$

$$\frac{\rho_Y}{c} = 0.630 \quad \rho_Y = 0.630(25\text{ mm}) = 15.8\text{ mm}$$

(β) **Γωνία στρέψης.** Αρχικά προσδιορίζουμε τη γωνία στρέψης ϕ_Y κατά την εισροή της διαρροής από την Εξ. (3.16):

$$\phi_Y = \frac{T_Y L}{JG} = \frac{(3.68 \times 10^3\text{ N}\cdot\text{m})(1.2\text{ m})}{(614 \times 10^{-9}\text{ m}^4)(80 \times 10^9\text{ Pa})} = 89.9 \times 10^{-3}\text{ rad}$$

Λύνοντας την Εξ. (3.36) για ϕ και αντικαθιστώντας τις τιμές που βρήκαμε για τα ϕ_Y και ρ_Y/c , γράφουμε

$$\phi = \frac{\phi_Y}{\rho_Y/c} = \frac{89.9 \times 10^{-3}\text{ rad}}{0.630} = 142.7 \times 10^{-3}\text{ rad}$$

$$\phi = (142.7 \times 10^{-3}\text{ rad}) \left(\frac{360^\circ}{2\pi\text{ rad}}\right) = 8.18^\circ$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Για την άτρακτο του Παραδείγματος 1 προσδιορίστε (α) την μόνιμη στρέψη, (β) την κατανομή των παραμενουσών τάσεων, αφού αφαιρεθεί η 4.60-kN.m ροπή στρέψης.

(α) **Μόνιμη στρέψη.** Θυμίζουμε από το Παράδειγμα 1 ότι η γωνία στρέψης που αντιστοιχεί στη δεδομένη ροπή στρέψης είναι $\phi = 8.18^\circ$. Η γωνία ϕ' κατά την οποία επαναφέρεται η άτρακτος καθώς αφαιρείται η ροπή παίρνεται από την Εξ.(3.16). Αντικαθιστώντας τα δεδομένα,

$$T = 4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \quad L = 1.2 \text{ m} \quad G = 80 \times 10^9 \text{ Pa}$$

και την τιμή $J = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ που βρήκαμε κατά τη λύση του Παραδείγματος 1 έχουμε

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1.2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(80 \times 10^9 \text{ Pa})} = 112.4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\phi' = (112.4 \times 10^{-3} \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 6.44^\circ$$

Η μόνιμη στρέψη είναι τότε

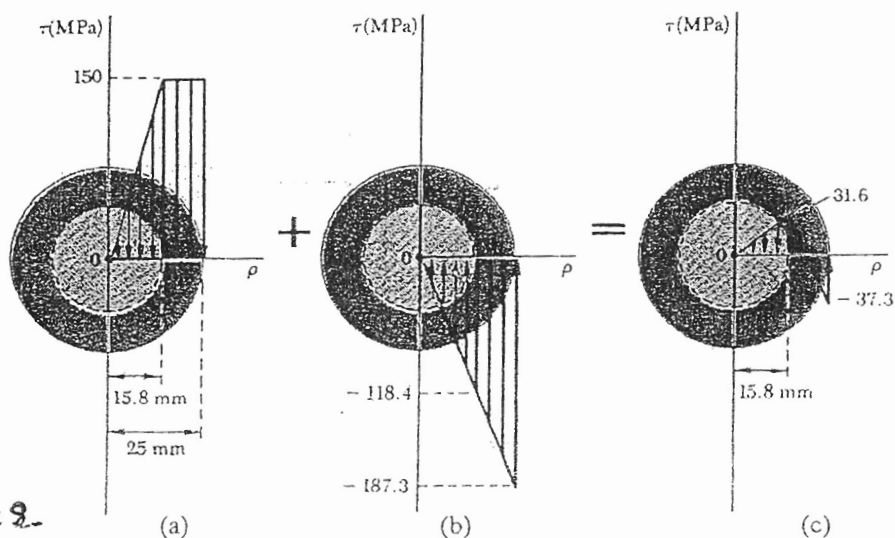
$$\phi_p = \phi - \phi' = 8.18^\circ - 6.44^\circ = 1.74^\circ$$

(β) **Παραμένουσες τάσεις.** Θυμίζουμε από το Παράδειγμα 3.08 ότι η αντοχή διαρροής είναι $\tau_y = 150 \text{ MPa}$ και ότι η ακτίνα του ελαστικού πυρήνα που αντιστοιχεί στη δεδομένη ροπή στρέψης είναι $\rho_y = 15.8 \text{ mm}$. Η κατανομή των τάσεων στη φορτισμένη άτρακτο είναι επομένως όπως εικονίζεται στο Σχ. 2.

Η κατανομή των τάσεων που οφείλεται στην αντίθετη ροπή στρέψης 4.60 kN m που απαιτείται για την αποφόρτιση της άτρακτου είναι γραμμική και όπως φαίνεται στο Σχ. 3.43b. Η μέγιστη τάση στην κατανομή των αντίθετων τάσεων παίρνεται από την Εξ. (3.8):

$$\tau'_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 187.3 \text{ MPa}$$

Με την επαλληλία των δυο κατανομών των τάσεων, παίρνουμε τις παραμένουσες τάσεις που εικονίζονται στο Σχ. 2. Ελέγχουμε ότι, κι αν ακόμη οι αντίθετες τάσεις υπερβούν την αντοχή διαρροής τ_y η υπόθεση της γραμμικής κατανομής αυτών των τάσεων ισχύει, εφόσον αυτές δεν υπερβαίνουν το $2\tau_y$.



Σχήμα 2.