Εργαστήριο Πειραματικής Αντοχής Υλικών

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ στο ΠΕΙΡΑΜΑ ΚΑΜΨΗΣ

ΕΡΩΤΗΜΑ Α

Ένα μέλος ομοιόμορφης ορθογωνικής εγκάρσιας διατομής 50x120mm υπόκειται σε μία καμπτική ροπή M=36.8kN.m. Υποθέτοντας ότι το μέλος αποτελείται από ένα ελαστοπλαστικό υλικό με αντοχή διαρροής σ_Δ=240 MPa και μέτρο ελαστικότητας E=200 GPa, προσδιορίστε (α) το πάχος του ελαστικού πυρήνα, (b) την ακτίνα καμπυλότητας της ουδέτερης επιφάνειας.

(α) Πάχος του ελαστικού πυρήνα.

Καταρχήν προσδιορίζουμε τη μέγιστη ελαστική ροπή M_Y από τη σχέση

$$M_Y = \frac{I}{c} \cdot \sigma_Y \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας τα γεωμετρικά δεδομένα στην εξίσωση $I = \frac{bh^3}{12}$ έχουμε

$$\frac{I}{c} = \frac{2}{3} bc^2 = \frac{2}{3}(50 \times 10^{-3} \text{ m})(60 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 120 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Μεταφέροντας αυτή την τιμή, καθώς επίσης και τη σ_Y=240MPa στην εξίσωση (1)

$$M_Y = \frac{I}{c} \cdot \sigma_Y \Rightarrow$$

$$M_Y = \frac{I}{c}\sigma_Y = (120 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(240 \text{ MPa}) = 28.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές M και M_Y στην εξίσωση:

$$M = \frac{3}{2} \cdot M_Y \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right) \qquad \text{έχουμε}$$

$$36.8 \text{ kN} \cdot \text{m} = \frac{3}{2}(28.8 \text{ kN} \cdot \text{m})\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right)$$

$$\left(\frac{y_Y}{c}\right)^2 = 0.444 \qquad \frac{y_Y}{c} = 0.666$$

και εφόσον c=60mm

y_Y = 0.666 (60mm) = 40mm

Επομένως το πάχος $2y_Y$ του ελαστικού πυρήνα είναι 80mm.

b) Ακτίνα καμπυλότητας.

Σημειώνουμε ότι η αντοχή διαρροής είναι

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{240 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1.2 \times 10^{-3}$$

Λύνοντας την εξίσωση

$$y_Y = \varepsilon_Y \cdot \rho$$

για ρ και αντικαθιστώντας τις τιμές που βρήκαμε για τα y_Y και ε_Y, γράφουμε

$$\rho = \frac{y_Y}{\epsilon_Y} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}}{1.2 \times 10^{-3}} = 33.3 \text{ m}$$

ΕΡΩΤΗΜΑ Β

Προσδιορίστε (α) την κατανομή των παραμενουσών τάσεων, (b) την ακτίνα καμπυλότητας, αφού η καμπτική ροπή έχει ελαττωθεί από τη μέγιστη τιμή της 36.8kNm ως το μηδέν.

(α) Κατανομή παραμενουσών τάσεων

Θυμόμαστε ότι η αντοχή διαρροής είναι σ_Y=240MPa και ότι το πάχος του ελαστικού πυρήνα είναι $2y_Y$= 80mm. Η κατανομή των τάσεων στο φορτισμένο μέλος είναι όπως φαίνεται στο **Σχ. 2α**.
Η κατανομή των αντίθετων τάσεων που οφείλονται στην αντίθετη 36.8kNm καμπτική ροπή που απαιτείται για να αποφορτιστεί το μέλος είναι γραμμική και εικονίζεται στο **Σχ. 2b**. Η μέγιστη τάση σ_m' αυτή την κατανομή επιτυγχάνεται από την $\sigma_m' = \frac{M \cdot c}{I}$. Θυμόμαστε από το ερώτημα (α) ότι

$$\frac{I}{c} = \frac{2}{3}bc^2 = \frac{2}{3}(50 \times 10^{-3}\ \text{m})(60 \times 10^{-3}\ \text{m})^2 = 120 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

και γράφουμε

$$\sigma_m' = \frac{Mc}{I} = \frac{36.8\ \text{kN} \cdot \text{m}}{120 \times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 306.7\ \text{MPa}$$

Από την επαλληλία των δύο κατανομών των τάσεων, παίρνουμε τις παραμένουσες τάσεις που φαίνονται στο **Σχ. 2c**. Ελέγχουμε ότι, κι αν ακόμη οι αντίθετες τάσεις υπερβούν την αντοχή διαρροής σ_Y, η υπόθεση μιας γραμμικής κατανομής, των αντίθετων τάσεων ισχύει, εφόσον αυτές δεν υπερβούν το $2\sigma_Y$.

(b) Ακτίνα καμπυλότητας μετά την αποφόρτιση.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Hooke σε κάθε σημείο του πυρήνα |y|<40mm, εφόσον δεν έχει συμβεί πλαστική παραμόρφωση σε αυτό το τμήμα του μέλους. Έτσι η παραμένουσα τροπή σε απόσταση y=40mm είναι

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{-35.5 \times 10^6\ \text{Pa}}{200 \times 10^9\ \text{Pa}} = -177.5 \times 10^{-6}$$

Λύνοντας την $\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$

για ρ και αντικαθιστώντας τις κατάλληλες τιμές για τα y και ε_χ, γράφουμε

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = \frac{40 \times 10^{-3}\ \text{m}}{177.5 \times 10^{-6}} = 225\ \text{m}$$