ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΤΕ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΗΧΑΝΩΝ Ι

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

κ. ΜΟΣΧΙΔΗΣ

ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

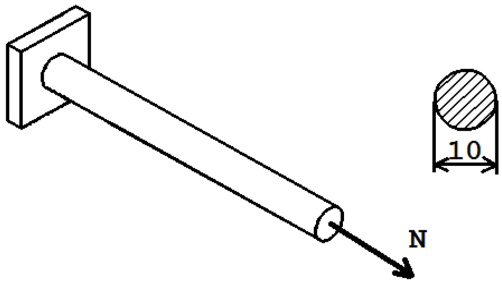
Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Λυμένες ασκήσεις του κεφαλαίου 3: Είδη φορτίσεων

Πρόβλημα 3.1 Να ελεγχθεί αν αντέχουν σε εφελκυσμό οι ράβδοι στα παρακάτω σχήματα. (Έχουν όλες την ίδια εφελκυστική δύναμη N=5000N αλλά διαφορετικές διατομές. Η επιτρεπόμενη τάση σε όλες τις περιπτώσεις είναι $\sigma_{\varepsilon\pi}$=160 N/mm²). Σε ποιό σημείο της διατομής πρέπει να ασκείται κάθε φορά η δύναμη N;



Λύση:

α) Η ράβδος (α) έχει κυκλική διατομή, με εμβαδό

$A = (\pi/4)\ d^2 = (\pi/4) \times 10^2 mm^2 = 78{,}5 mm^2$

Η εφελκυστική τάση που αναπτύσσεται στη ράβδο είναι

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{5000N}{78{,}5mm^2} = 63{,}7\ N/mm^2$$

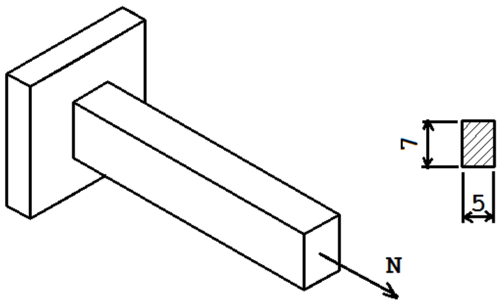
Ισχύει $\sigma_z < \sigma_{\varepsilon\pi}$, άρα η ράβδος αντέχει.

Η εφελκυστική δύναμη N πρέπει να ασκείται στο γεωμετρικό κέντρο της κυκλικής διατομής, γιατί αυτό είναι το κέντρο βάρους της.

β) Η ράβδος (β) έχει ορθογώνια διατομή, για την οποία ισχύει

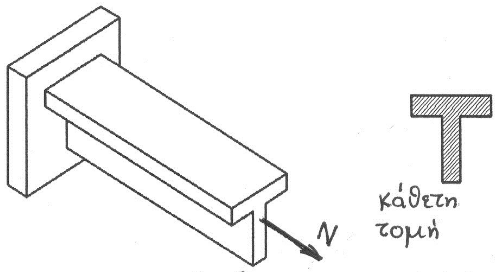
$A = 5mm \times 7mm = 35mm^2$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{5000N}{35mm^2} = 142{,}9\ N/mm^2$$



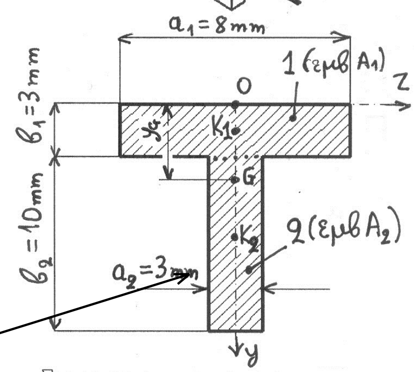
Ισχύει $\sigma_z < \sigma_{\varepsilon\pi}$, άρα η ράβδος αντέχει.

Η εφελκυστική δύναμη πρέπει να ασκείται στο γεωμετρικό κέντρο της ορθογώνιας διατομής.



γ) Η ράβδος (γ) έχει σύνθετη διατομή σχήματος T. Χωρίζουμε τη διατομή σε δύο μέρη (1) και (2), με διαστάσεις α_1, β_1 και α_2, β_2 αντίστοιχα, και εμβαδά A_1 και A_2. Τα κέντρα των δύο μερών συμβολίζονται στο σχήμα με K_1 και K_2, αλλά αυτός ο συμβολισμός δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του γενικού κέντρου βάρους G. Πρέπει πρώτα να διαλέξουμε ένα βολικό σύστημα αξόνων (εδώ το x-y) και να βρούμε τις συντεταγμένες των K_1, K_2 (βλ. σχήμα).

Τα εμβαδά των μερών είναι:



Κάθετη τομή σε μεγέθυνση

$A_1 = \alpha_1\ \beta_1 = 8mm \times 3mm = 24mm^2$

$A_2 = \alpha_2\ \beta_2 = 3mm \times 10mm = 30mm^2$

Το ολικό εμβαδό είναι

$A=A_1+A_2 = 24mm^2+30mm^2 = 54mm^2$

Συντεταγμένη του K1:
$y_1=OK_1=\beta_1/2=1,5mm$
Συντεταγμένη του K2:
$y_2=OK_2=\beta_1+(\beta_2/2)=...=8mm$

Η εφελκυστική τάση είναι:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{5000N}{54mm^2} = 92,6\ N/mm^2$$

Ισχύει $\sigma_z < \sigma_{\varepsilon\pi}$, άρα η ράβδος αντέχει.

Η εφελκυστική δύναμη πρέπει να εφαρμόζεται πάνω στο κέντρο βάρους G.
Η θεωρία διδάσκει ότι <u>οι συντεταγμένες του G δίνονται απ' τους τύπους</u>

$$z_G = \frac{z_1A_1+z_2A_2}{A_1+A_2} \qquad y_G = \frac{y_1A_1+y_2A_2}{A_1+A_2} \qquad (3\text{-}2)$$

Στην περίπτωσή μας ισχύει $z_1 = z_2 = 0$ άρα $z_G = 0$
Για τη συντεταγμένη y_G ισχύει

$$y_G = \frac{y_1A_1+y_2A_2}{A_1+A_2} = \frac{1,5mm \times 24mm^2 + 8mm \times 30mm^2}{54mm^2} = 5,11mm$$

Επομένως η αξονική δύναμη N πρέπει να ασκείται στο KB, που απέχει 5,11mm από το σημείο 0.

<u>Πρόβλημα 3.2</u> Να βρεθεί η διατμητική τάση για τις διατομές του σχήματος. Η διατμητική δύναμη σε όλες τις περιπτώσεις, είναι Q = 5000N. Στις περιπτώσεις α, β, η διατομή είναι του δοκαριού, ενώ στην γ η διατομή είναι αυτή της συγκόλλησης Σ. Επίσης να βρεθεί από ποιό σημείο πρέπει να περνά η δύναμη Q έτσι ώστε να μην αναπτύσσεται στρέψη στη διατομή.

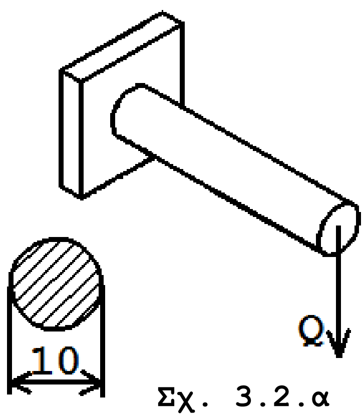
Λύση:
α) Για την κυκλική διατομή της περίπτωσης α, το εμβαδό διάτμησης είναι

$A = (\pi/4)\ d^2 = (\pi/4) \times 10^2mm^2 = 78,5mm^2$

άρα η μέση διατμητική τάση είναι

$$\tau_\delta = \frac{Q}{A'} = \frac{5000N}{78,5mm^2} = 63,7\ N/mm^2$$

Το κέντρο διάτμησης απ' όπου πρέπει να περνάει η Q είναι το κέντρο του κύκλου της διατομής



Σχ. 3.2.α

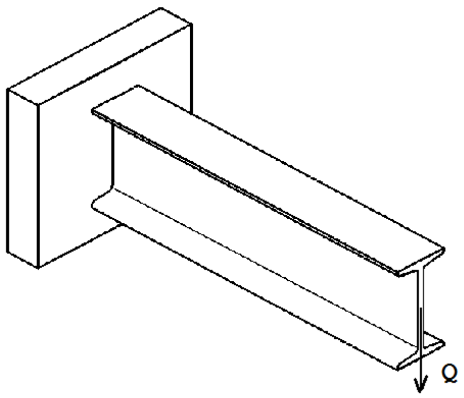
β) Για τη διατομή σχήματος Ι του παρακάτω σχήματος, το εμβαδό διάτμησης είναι το εμβαδό του κατακόρυφου κορμού ΕΖ:

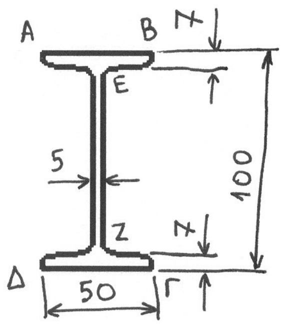
$A' = 5mm \times 100mm = 500mm^2$

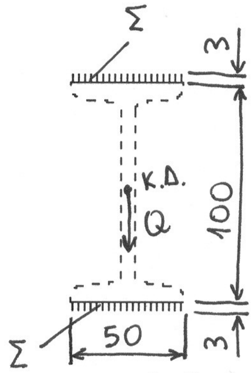
άρα η μέση διατμητική τάση είναι

$$\tau_\delta = \frac{Q}{A'} = \frac{5000N}{500mm^2} = 10N/mm^2$$

Το κέντρο διάτμησης απ'όπου πρέπει να περνάει η Q είναι το γεωμετρικό κέντρο του I.







Σχ. 3.2.β

Σχ. 3.2.γ

γ) Το σύστημα των δύο συγκολλήσεων Σ που στερεώνουν το δοκάρι I αποτελεί ειδική περίπτωση, γιατί ταυτίζεται μεν με τη διατομή με λεπτά τοιχώματα, αλλά κανένα από τα τοιχώματα δεν είναι παράλληλο προς τη διατμητική δύναμη Q. Σ'αυτή την περίπτωση η θεωρία δίνει για το εμβαδό διάτμησης τον τύπο

$A' = 0,67\ A$

όπου A = το πραγματικό εμβαδό των τοιχωμάτων.

Άρα ισχύει $A' = 0,67\ (2 \times 3mm \times 50mm) = 200mm^2$

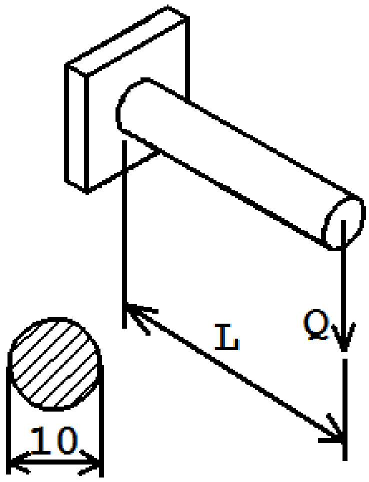
και η διατμητική τάση είναι

$$\tau_\delta = \frac{Q}{A'} = \frac{5000N}{200mm^2} = 25N/mm^2$$

Το κέντρο διάτμησης απ' όπου πρέπει να περνάει η Q είναι το γεωμετρικό κέντρο του συστήματος των δύο συγκολλήσεων.

<u>Πρόβλημα 3.3</u> Να βρεθούν τα μεγέθη M_b, I, $y_{μεγ}$, W, $\sigma_{bμεγ}$ για τα δοκάρια στα παρακάτω σχήματα (έχουν όλα την ίδια κάθετη δύναμη Q=500N και το ίδιο μήκος L=200mm, αλλά διαφορετικές διατομές). Οι υπολογισμοί να γίνουν για μιά διατομή κοντά στην πάκτωση A.

Λύση:



α) Στο σημείο A η καμπτική ροπή ισούται με

$M_b = Q\ L = 500N \times 200mm = 100.000\ Nmm$

Με τον τύπο της ροπής αδράνειας για κυκλική διατομή (πίν. 3.1) έχουμε

$$I_x = \frac{\pi}{64} d^4 \approx 0{,}05 \times 10^4 mm^4 = 500mm^4$$

Παρατηρώντας το σχήμα καταλαβαίνουμε ότι το μέγιστο ύψος είναι

$y_{μεγ} = d/2 = 10mm / 2 = 5mm$

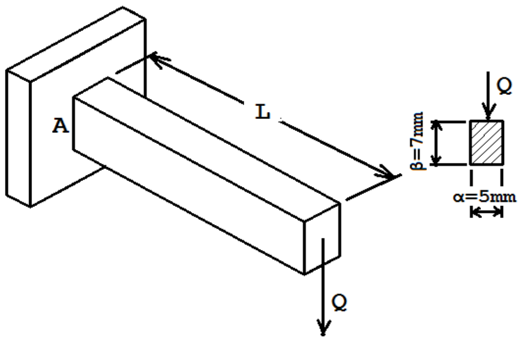
Είτε από τον πίνακα 3.1 είτε από τον ορισμό $W_x = I_x / y_{μεγ}$ παίρνουμε για τη ροπή αντίστασης

$$W_x = \frac{\pi}{32} d^3 \sim 0{,}1 \times 10^3 mm^3 = 100mm^3$$

Η καμπτική τάση είναι

$$\sigma_{bμεγ} = \frac{M_b}{W_x} = \frac{100.000\ N\ mm}{100mm^3} = 1000\ N/mm^2$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η τάση είναι πάρα πολύ μεγάλη (οι επιτρεπόμενες τάσεις κυμαίνονται στην περιοχή 60..200N/mm² δηλαδή η διάμετρος Φ10 είναι πολύ μικρή για τη δύναμη Q = 500N που φορτίζει τη δοκό).



β) Για το δοκάρι του σχήματος 3.3.β, με ορθογώνια διατομή, ισχύει η ίδια τιμή της καμπτικής ροπής:

$M_b = Q\ L = \ldots = 100.000\ Nmm$

Στον υπολογισμό των I_x, $y_{μεγ}$, W_x, όμως, αυτό το πρόβλημα είναι λίγο δυσκολότερο από εκείνο της κάμψης κυλινδρικής δοκού. Ο πίνακας 3.1 δίνει βέβαια τους τύπους $I = bh^3/12$, $W = bh^2/6$, αλλά δημιουργείται το πρόβλημα: «Ποιά από τις διαστάσεις α=5mm και β=7mm θα βάλουμε να παίξει το ρόλο του h; Το $y_{μεγ}$ θα είναι το μισό του α ή το μισό του β;»

Το σχηματάκι του πίνακα 3.1 είναι εφοδιασμένο με μια δύναμη Q που δημιουργεί την κάμψη, και έτσι καταλαβαίνουμε ότι ισχύουν οι κανόνες:

<u>Η διάσταση που εμφανίζεται στους τύπους των I_x, W_x να είναι υψωμένη στο τετράγωνο ή στον κύβο, πρέπει να είναι παράλληλη στην εγκάρσια δύναμη Q που προκαλεί την κάμψη.</u>

<u>Το μέγιστο ύψος $y_{μεγ}$ ξεκινάει από το κέντρο βάρους της διατομής, καταλήγει στο πιο απομακρυσμένο σημείο της, και είναι παράλληλο στην εγκάρσια δύναμη Q που προκαλεί την κάμψη.</u>

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το ρόλο του h θα τον παίξει το β, και το ρόλο του $y_{μεγ}$ θα τον παίξει το β/2.

Η ροπή αδράνειας είναι $I_x = bh^3/12 = αβ^3/12 = 5mm \times 7^3 mm^3 / 12 = 142{,}9 mm^4$

Το μέγιστο ύψος είναι $y_{μεγ} = β/2 = 3{,}5mm$

Η ροπή αντίστασης είναι $W_x = I/y_{μεγ} = 142{,}9mm^4 / 3{,}5mm = 40{,}8mm^3$

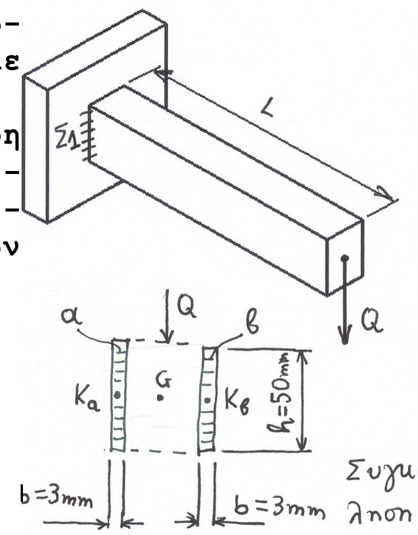
Η καμπτική τάση είναι

$$σ_{b,μεγ} = \frac{M_b}{W_x} = \frac{100.000\ Nmm}{40{,}8mm^3} \approx 2450\ N/mm^2$$

που και πάλι είναι υπερβολικά μεγάλη.

γ) Έστω ότι ζητείται να γίνουν οι ίδιοι υπολογισμοί για τη συγκόλληση $Σ_1$ του δοκαριού με το κατακόρυφο τοίχωμα.

Η συγκόλληση $Σ_1$ αποτελείται απο δύο μέρη α, β. Τα κέντρα βάρους των μερών $K_α$, $K_β$ βρίσκονται στο ίδιο ύψος, άρα έχουμε το δικαίωμα να προσθέσουμε τις ροπές αδράνειας των μερών: $I_{ολ} = I_α + I_β$



Επειδή τα μέρη α,β είναι ορθογώνια, άρα

$I_α = I_β = bh^3/12 = 3mm \times 50^3 mm^3 / 12 = 31.250mm^4$

και $I_{ολ} = ... = 2 \times 31.250mm^4 = 62.500mm^4$

Για το μέγιστο ύψος ισχύει

$y_{μεγ} = h / 2 = ... = 25mm$

Για τη ροπή αντίστασης σε κάμψη ισχύει

$W_{ολ} = I_{ολ} / y_{μεγ} = 62.500mm^4 / 25mm = 2.500mm^3$

Η καμπτική ροπή είναι

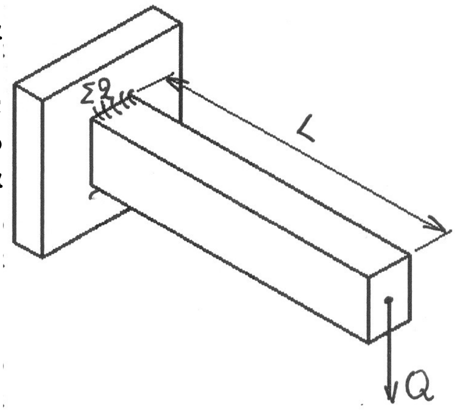
$M_b = Q\ L = ... = 100.000\ Nmm$

Η καμπτική τάση είναι

$$σ_{bμεγ} = \frac{M_b}{W_{ολ}} = \frac{100.000\ Nmm}{2500mm^3} = 40\ N/mm^2$$

Αυτή η ροπή είναι μικρότερη από τις επιτρεπόμενες ($σ_{επ} \approx 150\ N/mm^2$ για συγκολλήσεις), άρα η συγκόλληση αντέχει.

δ) Η συγκόλληση Σ_2 αποτελείται επίσης από δύο μέρη α,β, των οποίων όμως τα κέντρα βάρους K_α, K_β δεν βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Παρατηρούμε ότι τη συγκόλληση Σ_2 μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως διαφορά των δύο ορθογωνίων ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ', που τα κέντρα τους συμπίπτουν και τα δύο με το G, άρα έχουμε το δικαίωμα να αφαιρέσουμε τις ροπές αδράνειάς τους:



$I_{o\lambda} = I_{\varepsilon\xi} - I_{\varepsilon\sigma} = bH^3/12 - bh^3/12 =$
$=(25mm \times 56^3mm^3 - 25mm \times 50^3mm^3)\ /\ 12 =$
$= 105.450mm^4$

Το $y_{\mu\varepsilon\gamma}$ πρέπει να υπολογισθεί με βάση το <u>εξωτερικό</u> ορθογώνιο, γιατί συμβολίζει την απόσταση του <u>πιό απομακρυσμένου</u> σημείου απ'το κέντρο βάρους:

$y_{\mu\varepsilon\gamma} = H/2 = 56mm/2 = 28mm$

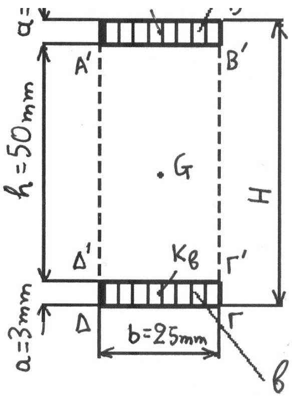
Η ροπή αντίστασης σε κάμψη είναι ίση με

$W_{o\lambda} = I_{o\lambda}/y_{\mu\varepsilon\gamma} = 105.450mm^4\ /\ 28mm = 3.766mm^3$

Η καμπτική τάση είναι

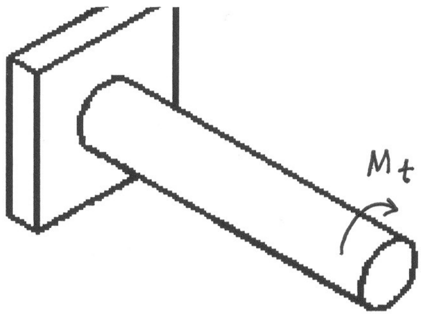
$$\sigma_{b\mu\varepsilon\gamma} = \frac{M_b}{W_{o\lambda}} = \frac{100.000\ Nmm}{3.766\ mm^3} = 26{,}5\ N/mm^2$$

Και αυτή η συγκόλληση αντέχει.



Σχήμα: Στοιχεία για τον υπολογισμό των I_x, W_x στο πρόβλ. 3.3.δ

<u>Πρόβλημα 3.4</u> Να βρεθεί η τάση λόγω στρέψης σε δοκάρι με στρεπτική ροπή M_t= =100 Nm, αν η διατομή του δοκαριού είναι μία απ' αυτές των παρακάτω σχημάτων. (Στο σχ. 3.4.α φαίνεται η πρώτη περίπτωση, στην οποία η διατομή είναι κυκλική).



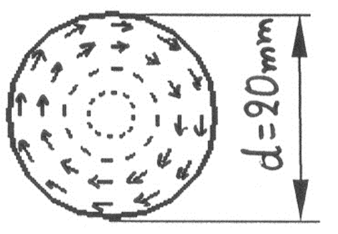
Λύση :

α) Η ροπή αντίστασης σε στρέψη για κυκλική διατομή είναι

$W_t \approx 0{,}2\ d^3 = 0{,}2 \times 20^3mm^3 = 1.600mm^3$

και η τάση λόγω στρέψης είναι

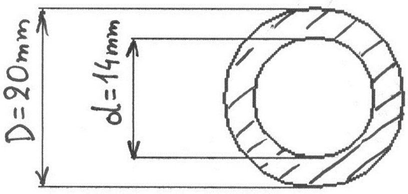
$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{100.000\ Nmm}{1.600mm^3} = 62{,}5\ N/mm^2$$



Σχήμα 3.4.α

β) Αν η διατομή είναι δακτυλιοειδής όπως στο σχ. 3.4.β, τότε το δοκάρι έχει το μισό βάρος απ' ό,τι το συμπαγές στρογγυλό του σχ. 3.4.α. (Πόσο εμβαδόν έχει το συμπαγές του σχημ. 3.4.α και πόσο το κούφιο του σχημ. 3.4.β;) Η ροπή αντίστασης σε στρέψη είναι

$$W_t \approx 0,2 \frac{(20^4 - 14^4)mm^4}{20mm} = 1.216mm^3$$

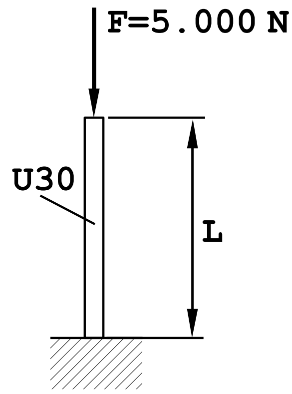


Σχήμα 3.4.β

(δηλαδή το δοκάρι έχει χάσει μόνο το 25% της αντοχής του, εν σχέσει με το $W_t = 1.600mm^3$ του συμπαγούς)
Η τάση λόγω στρέψης είναι

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{100.000\ Nmm}{1.216mm^3} = 82,2\ N/mm^2$$

<u>Πρόβλημα 3.5</u> Να ελεγχθεί αν ο στύλος του σχήματος αντέχει σε λυγισμό, σε δύο περιπτώσεις:
α) όταν L=400mm, β) όταν L=800mm.
Το υλικό κατασκευής του δοκαριού είναι χάλυβας St37.



<u>Λύση</u>:
Λόγω του τρόπου στήριξης, το ελεύθερο μήκος λυγισμού είναι L_κ=2L (βλ. σχ. 3.5.3, περίπτωση I (πρόβολος))
Άρα L_κ=2L=...=800mm ή 1600mm αντίστοιχα.

Από τον πίνακα τυποποιημένων διαστάσεων των δοκών σχήματος U (πίν. T6 τυπολογίου εργαστηρίου) βλέπουμε ότι η δοκός U30 έχει:
- εμβαδό διατομής $A=5,44cm^2=544mm^2$
- μικρότερη ακτίνα αδράνειας $i_{min}=i_y=0,99cm=9,9mm$

Ο βαθμός λυγηρότητας είναι $\lambda=L_\kappa/i_{min}=...=80$ ή 160 αντίστοιχα.
Το όριο μεταξύ των περιοχών ισχύος των τύπων Euler και Tetmajer είναι $\lambda_\varepsilon=100$ (βλ. πίν. 3.3).
Η θλιπτική τάση είναι $\sigma = F/A = 5000N / 544mm^2 = 9,2\ N/mm^2$

Στην πρώτη περίπτωση ισχύει λ=80, άρα $\lambda<\lambda_\varepsilon=100$, άρα η κρίσιμη τάση λυγισμού πρέπει να υπολογισθεί από τον τύπο του Tetmajer (βλ. τύπο (3-11) και πίν. 3.3 για St37):
$\sigma_K = (310 - 1,14\ \lambda)\ N/mm^2 = (310 - 1,14*80)\ N/mm^2 = 218,8\ N/mm^2$
Σύμφωνα με τον τύπο (3-12) λαμβάνεται επιθυμητός συντελεστής ασφάλειας σε λυγισμό ίσος με $S_K = 2,0$
Πρέπει να ισχύει (βλ. τύπο (3-13)):
$\sigma_z < (\sigma_K/S_K)$ => $9,2\ N/mm^2 < (218,8 / 2,0)\ N/mm^2$ => $9,2 < 109,4$
Η ανισότητα ισχύει, άρα η δοκός αντέχει σε λυγισμό.

Στη δεύτερη περίπτωση ισχύει λ=160, άρα $\lambda > \lambda_\varepsilon = 100$, άρα η κρίσιμη τάση λυγισμού πρέπει να υπολογισθεί από τον τύπο του Euler (βλ. τύπο (3-11) και πίν. 3.3 για St37):

$$\sigma_K = \pi^2 E / \lambda^2 = 3{,}14^2 * 210.000 \, N/mm^2 / 160^2 = 81 \, N/mm^2$$

Σύμφωνα με τον τύπο (3-12) λαμβάνεται επιθυμητός συντελεστής ασφάλειας σε λυγισμό ίσος με $S_K = 6{,}0$ (στους μεγαλύτερους βαθμούς λυγηρότητας πρέπει να εκλέγεται μεγάλη τιμή του επιθυμητού συντελεστή ασφάλειας)

Πρέπει να ισχύει (βλ. τύπο (3-13)):

$$\sigma_z < (\sigma_K / S_K) \;\Rightarrow\; 9{,}2 \, N/mm^2 < (81 / 6) \, N/mm^2 \;\Rightarrow\; 9{,}2 < 13{,}5$$

Η ανισότητα ισχύει, άρα και σ' αυτή την περίπτωση η δοκός αντέχει σε λυγισμό.