



ΑΝΟΙΚΤΑ  
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



## ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ (Θ)

Χασάπης Δημήτριος  
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΕ



## Άδειες Χρήσης

---

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

## 1. Ηλεκτρικό πεδίο

*Ηλεκτρισμός* ονομάστηκε (Θαλής ο Μιλήσιος, 600 π.Χ.) η ιδιότητα του ήλεκτρου να έλκει, αφού τριφθεί με στεγνό ύφασμα, μικρά κομμάτια άχυρου.

*Μαγνητισμός* ονομάστηκε η ιδιότητα του μαγνητίτη ( $Fe_3O_4 = FeO \cdot Fe_2O_3$ , «μαγνήτης λίθος» = λίθος από τη Μαγνησία της Μικράς Ασίας) να έλκει τον σίδηρο.

Αρχικά Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός εθεωρούντο σαν δύο εντελώς ανεξάρτητα φαινόμενα. Αργότερα όμως (αφού παρατηρήθηκε, ότι ρευματοφόρος αγωγός επηρεάζει την μαγνητική βελόνη, Oersted 1820) αποδείχθηκε, ότι πρόκειται ουσιαστικά για τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, γεγονός το οποίο αποδίδεται με τον όρο *Ηλεκτρομαγνητισμός*: είναι ο κλάδος της Φυσικής, ο οποίος μελετάει τα λεγόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα.

Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε με τον *στατικό ηλεκτρισμό*, την μελέτη δηλαδή της συμπεριφοράς ακίνητων ηλεκτρικών φορτίων.

### 1.1 Το ηλεκτρικό φορτίο

Δομικός λίθος του Ηλεκτρομαγνητισμού είναι το *ηλεκτρικό φορτίο*, με την έννοια ότι χωρίς αυτό δεν θα υπήρχαν και τα διάφορα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Πιο συγκεκριμένα, και όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο μιν Ηλεκτρισμός απαιτεί απλώς την ύπαρξη, ο δε Μαγνητισμός επιπλέον και την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων.

Πειραματικά αποδείχθηκαν οι ακόλουθες **θεμελιώδεις ιδιότητες του ηλεκτρικού φορτίου**:

1. **το ηλεκτρικό φορτίο εμφανίζεται με δύο μορφές**, οι οποίες (εντελώς αυθαίρετα!) χαρακτηρίζονται σαν *θετική* και *αρνητική*. Φορτία της μιας μορφής έλκουν όλα τα φορτία της άλλης και απωθούν όλα τα φορτία της ίδιας μορφής:

**τα ομώνυμα φορτία απωθούνται ενώ τα ετερόνυμα έλκονται**

2. **το συνολικό φορτίο** (= αλγεβρικό άθροισμα των θετικών και αρνητικών φορτίων) **ενός κλειστού κυκλώματος** (= σύστημα το οποίο δεν ανταλλάσσει ύλη με το περιβάλλον του και το οποίο χαρακτηρίζεται συνήθως σαν *απομονωμένο*, ατυχώς βέβαια μια και επιτρέπεται η ανταλλαγή ενέργειας με το περιβάλλον του) **διατηρείται σταθερό**. Μάλιστα το συνολικό φορτίο ενός τέτοιου συστήματος είναι και σχετικιστικά αναλλοίωτο, ανεξάρτητο δηλαδή από την κινητική του κατάσταση, πράγμα το οποίο (*Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας*, Einstein) δεν ισχύει και για την μάζα του.
3. **το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένο**, υπάρχει δηλαδή σε τυποποιημένα, πακετοποιημένα και όχι σε τυχαία, δηλαδή συνεχή ποσά.

Συγκεκριμένα αποδείχθηκε πειραματικά («*Πείραμα του Millikan*»), ότι **όλα τα μετρούμενα στην φύση ηλεκτρικά φορτία είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας στοιχειώδους ποσότητας φορτίου**, η οποία και ονομάζεται

Στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο:  $e = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

παρατηρούμενα στη φύση φορτία:  $q = n \cdot e$  [1.1]

όπου  $n =$  ακέραιος αριθμός,  $-\infty < n < \infty$ .


Φορτίο πρωτονίου:	$q_p = e$
Φορτίο ηλεκτρονίου:	$q_e = -e$

**Παρατήρηση:** Τα τελευταία χρόνια θεωρητικές και πειραματικές μελέτες φαίνεται να κατοχυρώνουν την ύπαρξη των *quarks* σαν δομικών μονάδων των αδρονίων (πρωτόνιο, ουδετερόνιο, μεσόνια). Τα quarks έχουν φορτία  $-e/3$  και  $2e/3$ , δεν παρατηρούνται όμως ελεύθερα στη φύση και συνδυάζονται πάντα έτσι, ώστε το προκύπτον αδρόνιο να έχει ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο εκπληρώνει την σχέση [1.1].

Ο κλασικός Ηλεκτρομαγνητισμός αγνοεί την κβάντωση του φορτίου και θεωρεί, ότι ένα σημειακό ή μη φορτίο μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή. (Αντιστοίχια: η κλασική Μηχανική αγνοεί την ατομιστική δομή της ύλης). Η «ατέλεια» αυτή δεν δημιουργεί προβλήματα μια και αντικείμενο του κλασικού Ηλεκτρομαγνητισμού είναι η μελέτη ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων σε μακροσκοπική κλίμακα. (Τα κβάντα του φορτίου, δηλαδή το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο, είναι τόσα μικρά, ώστε για παράδειγμα να απαιτείται να διέρχονται  $3 \cdot 10^{18}$  στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία ανά δευτερόλεπτο από το νήμα ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα 100W/220V, όταν αυτός φωτοβολεί).

## 1.20 νόμος του Coulomb

Ο νόμος του Coulomb περιγράφει ποσοτικά την αλληλεπίδραση των δύο ακινήτων ηλεκτρικών (= ηλεκτροστατικών) σημειακών (οι διαστάσεις τους πρέπει να είναι αμελητέες σε σχέση με την μεταξύ τους απόσταση) φορτίων. (Όταν τα φορτία κινούνται αναπτύσσονται και μαγνητικές δυνάμεις, όπως θα δούμε αργότερα)



$$\vec{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \text{ :μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση } \vec{r}$$

$$|\vec{r}| = l, |\vec{r}| \equiv r$$

**Σχήμα 1.1:** Εξήγηση της «γεωμετρίας» του νόμου του Coulomb.

Ο νόμος αυτός διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

**Νόμος του Coulomb:**  $\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}$  [1.2]

Η τιμή της σταθερής  $k$  εξαρτάται τόσο από το σύστημα μονάδων όσο και από το μέσον, εντός του οποίου βρίσκονται τα φορτία  $q_1$  και  $q_2$ . Στο σύστημα SI, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά, το  $k$  έχει την τιμή

$$k = \frac{(SI) I}{4\pi\epsilon}$$

$\epsilon =$  *διηλεκτρική σταθερή* του μέσου εντός του οποίου βρίσκονται τα φορτία  $q_1$  και  $q_2$ . (Τιμές της για διάφορα υλικά περιέχονται στον Πίνακα 1.2.1)

Η *διηλεκτρική σταθερή του κενού* συμβολίζεται με  $\epsilon_0$  και έχει την τιμή:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{Nm}^2)$$

<b>Πίνακας 1.2.1: Διηλεκτρική <math>\epsilon</math> σταθερή διαφόρων διηλεκτρικών</b>			
<b>Οι παρακάτω τιμές πρέπει να πολλαπλασιασθούν επί <math>\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)</math></b>			
Αέρας(κ.σ.)	1,000594	Ελαιόλαδο	3
Άζωτο(κ.σ.)	1,000528	Ήλιο(κ.σ.)	1,000066
Αργό(κ.σ.)	1,000504	Μάρμαρο	8,4-14
Ασβέστης	4,8	Ναφθαλίνη	3,78
Ασφαλτος	2,66	Νερό	81
Βαζελίνη	2,1-2,3	Νιτροβενζόλιο	35,5
Βακελίτης	3-5	Οξυγόνο (κ.σ.)	1,000486
Βενζόλιο	2,28	Παραφίνη	2,2
Βρώμιο	3,1	Πετρέλαιο	2,2
Γυαλί	3-15	Πολυστυρόλη	2,3-2,5
Γλυκερίνη	41,1	Τέφλον	2
Διοξείδιο του		Χαλαζίας	3,5-4,5
Άνθρακα (κ.σ.)	1,000985	χαρτί	5

(κ.σ. = κανονικές συνθήκες: 0 °C, 1,013 bar)

Ο λόγος που η σταθερή  $k$  γράφεται (στο σύστημα SI εννοείται) με αυτή την κάπως πολύπλοκη μορφή σχετίζεται με την σφαιρική συμμετρία του χώρου ( $4\pi$  είναι μια πλήρη στερεή γωνία!), την οποία εκμεταλλευόμαστε προκειμένου να απλουστευθεί η μορφή άλλων θεμελιωδέστερων νόμων από εκείνον του Coulomb (π.χ. νόμος του Gauss), όπως θα δούμε αργότερα.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να κάνουμε την ακόλουθη, πολύ σπουδαία επισήμανση: Ο νόμος του Coulomb διατυπώνεται κατ' αρχήν για φορτία τα οποία βρίσκονται στο κενό. Η περίπτωση όμως αυτή έχει μειωμένο πρακτικό ενδιαφέρον (π.χ. όταν μελετάμε την έλξη μεταξυ ηλεκτρονίου και πρωτονίου στο άτομο του υδρογόνου, τα δύο αυτά σωματίδια βρίσκονται πράγματι μέσα στο κενό) κατά τη μακροσκοπική μελέτη των ηλεκτρικών φαινομένων, η οποία και χαρακτηρίζει τον κλασικό Ηλεκτρομαγνητισμό, μια και μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων θα παρεμβάλλεται πάντα κάποιο υλικό, συνήθως ο αέρας. Επειδή δε η ύλη συνδέεται αναπόσπαστα με την ύπαρξη ηλεκτρικών φορτίων (*ηλεκτρικά ουδέτερη ύλη* σημαίνει απλώς, ότι περιέχει συνολικά τόσα αρνητικά όσα και θετικά ηλεκτρικά φορτία), δύο τυχαία υπό με-

λέτη ηλεκτρικά φορτία, δέχονται πέραν της «δικής» τους δύναμης Coulomb, και την συλλογική δύναμη Coulomb όλων των υπόλοιπων φορτίων. Αυτό βέβαια δεν μεταβάλλει την δύναμη αλληλεπίδρασης των δύο φορτίων, διαφοροποιεί όμως την συνολική ηλεκτρική δύναμη, την οποία δέχεται το καθένα. Επειδή τώρα η συνολική αυτή δύναμη (δηλαδή η συνισταμένη των δύο παραπάνω δυνάμεων Coulomb) παρουσιάζει αυξημένο πρακτικό ενδιαφέρον (στις περισσότερες περιπτώσεις είναι και μόνη μετρήσιμη!) την συμπεριλαμβάνουμε στον (γενικευμένο) νόμο του Coulomb, μέσω μιας χαρακτηριστικής για το παρεμβαλλόμενο υλικό παραμέτρου της διηλεκτρικής του σταθερής  $\epsilon$ . Σημειωτέον ότι η εξίσωση [1.2] ισχύει απόλυτα όταν το περιβάλλον μέσο εκτείνεται απεριόριστα προς όλες τις κατευθύνσεις, είναι ομογενές (διαφορετικά δεν θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ενιαία με ένα και μόνο  $\epsilon$ ) και ισότροπο (διαφορετικά το  $\epsilon$  εξαρτάται από την κατεύθυνση, οπότε δεν είναι πλέον μονόμετρο μέγεθος αλλά τανυστής 2<sup>ου</sup> μεγέθους).

Όπως πιθανώς θα έχετε υποψιαστεί, η παραπάνω γενίκευση του νόμου του Coulomb, είναι απίθανο να αποτελεί προϊόν του πειράματος και μόνο, όπως συμβαίνει με την αρχική του διατύπωση. Η μέτρηση για παράδειγμα της δύναμης μεταξύ δυο ηλεκτρικών φορτίων ενσωματωμένων μέσα σε ένα στερεό υλικό είναι πρακτικά αδύνατη! Πράγματι η διεύρυνση του νόμου του Coulomb βρίσκει την λογική της εξήγηση μόνο στα πλαίσια ενός θεμελιωδέστερου νόμου, εκείνου του Gauss, τον οποίο θα γνωρίσουμε αργότερα. Τότε θα δούμε, ότι στην περίπτωση που το περιβάλλον μέσο είναι ένας *αγωγός* (= υλικό το οποίο επιτρέπει την μετακίνηση ηλεκτρικών φορτίων μέσα στην μάζα του), η δύναμη Coulomb μεταξύ δύο ενσωματωμένων μέσα σ' αυτό σημειακών φορτίων μηδενίζεται, όταν βέβαια το όλο σύστημα βρίσκεται σε *κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας*, δεν παρατηρείται δηλαδή μετακίνηση φορτίων. Αν θέλουμε λοιπόν να συμπεριλάβουμε στην εξίσωση [1.2] και τα αγωγίμα υλικά θα τα χαρακτηρίσουμε ενιαία με την «διηλεκτρική» τους σταθερή  $\epsilon \rightarrow \infty$ .

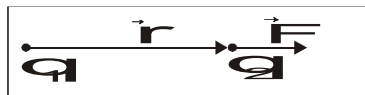
Κλείνουμε αυτή την κάπως μακρά παρένθεση με την ακόλουθη υπόδειξη: Η παραπάνω γενίκευση του νόμου του Coulomb αναφέρθηκε ουσιαστικά χάριν πληρότητας και όχι επειδή έχει κάποιο αξιόλογο πρακτικό ενδιαφέρον. Η μελέτη της αλληλεπίδρασης ηλεκτρικών φορτίων παρουσία ύλης γίνεται πολύ κομψότερα με την βοήθεια του προαναφερθέντος νόμου του Gauss, πράγμα το οποίο θα έχουμε την δυνατότητα να διαπιστώσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

**Παρατηρήσεις:** Στην εξίσωση [1.2] α) Τα φορτία  $q_1$  και  $q_2$  λαμβάνονται μαζί με το πρόσημό τους.

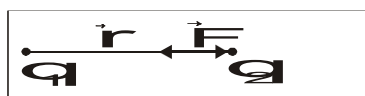
β) Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{r}$  έχει φορά προς το φορτίο, το οποίο δέχεται την επίδραση της δύναμης  $\vec{F}$ .

γ) Από το α) και β) προκύπτει, ότι στην περίπτωση ομώνυμων φορτίων τα διανύσματα  $\vec{F}$  και  $\vec{r}$  είναι ομόρροπα, ενώ στην αντίθετη *αντίρροπα*:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 > 0 \text{ και } q_2 > 0 \\ q_1 < 0 \text{ και } q_2 < 0 \end{array} \right\}$$



$$\left. \begin{array}{l} q_1 > 0 \text{ και } q_2 < 0 \\ q_1 < 0 \text{ και } q_2 > 0 \end{array} \right\}$$



δ) Πειραματικά αποδεικνύεται, ότι

**Η δύναμη Coulomb μεταξύ δύο σημειακών φορτίων είναι ανεξάρτητη από την παρουσία άλλων φορτίων.**

Έτσι η **ολική δύναμη Coulomb**, την οποία δέχεται ένα σημειακό φορτίο από άλλα σημειακά φορτία, υπολογίζεται ως εξής: Με την βοήθεια της εξίσωσης [1.2] υπολογίζουμε την δύναμη, την οποία δέχεται το συγκεκριμένο φορτίο από το καθένα των υπολοίπων *χωριστά*, σαν δηλαδή να μην υπήρχαν και άλλα φορτία, στην συνέχεια προσθέτουμε διανυσματικά όλες αυτές τις δυνάμεις (**Αρχή της γραμμικής υπερθέσεως**):

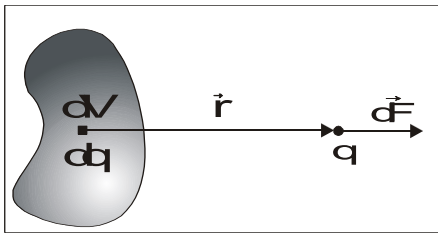
α) Σύστημα N σημειακών φορτίων  $q_i$ :

$$\vec{F} = kq \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_i \quad [1.2]$$

όπου  $r_i$  = απόσταση μεταξύ  $q$  και  $q_i$

$\vec{r}_i$  = μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση  $q_i \rightarrow q$

β) Συνεχής κατανομή φορτίου:



$$d\vec{F} = kq \frac{dq}{r^2} \vec{r} = kq \frac{\rho dV}{r^2} \vec{r} \Rightarrow \vec{F} = kq \int \frac{\rho \vec{r}}{r^2} dV \quad [1.2\beta]$$

όπου  $\rho = dq/dV$  *πυκνότητα φορτίου*

(αν το φορτίο κατανέμεται επιφανειακά (ή γραμμικά), αντικαθιστούμε την πυκνότητα φορτίου με την *επιφανειακή πυκνότητα φορτίου*  $\sigma = dq/dS$  (ή γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda = dq/dl$ ), και το στοιχείο όγκου  $dV$  με το *στοιχείο επιφάνειας*  $dS$  (ή μήκος  $dl$ ))

## Παράδειγματα

**Παράδειγμα 1.2.1:** Η ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου ισούται με  $5,3 \cdot 10^{-11}$  m περίπου. Να συγκριθούν τα μέτρα των δυνάμεων Coulomb και παγκόσμιας έλξης μεταξύ του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου. Δίδονται: οι μάζες (ηρεμίας) των δύο σωματιδίων:  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg και η σταθερή της παγκόσμιας έλξης  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$

### Λύση

Οι δύο δυνάμεις υπολογίζονται από τους νόμους του Coulomb και της παγκόσμιας έλξης (Newton) αντίστοιχα:

**Νόμος του Coulomb :**



$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1,6021 \cdot 10^{-19} \cdot 1,6021 \cdot 10^{-19}}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} \Rightarrow F_C = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

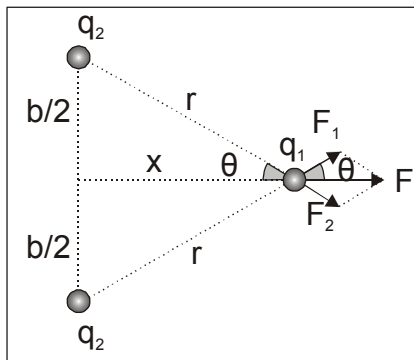
$$\text{Νόμος της παγκόσμιας έλξης: } F_N = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_N = 3,61 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι η παγκόσμια έλξη μεταξύ ηλεκτρονίου και πρωτονίου στο άτομο του υδρογόνου είναι κατά  $10^{39}$  φορές περίπου ασθενέστερη από την αντίστοιχη έλξη Coulomb. Το γεγονός αυτό μας δείχνει τον καθοριστικό ρόλο της δύναμης Coulomb σε επίπεδο ατόμων. Αν θέλαμε οι δύο δυνάμεις να είναι ίσες, θα έπρεπε η μάζα του ηλεκτρονίου ή του πρωτονίου να πολλαπλασιασθεί με τον παράγοντα  $F_C/F_N = 2,27 \cdot 10^{39}$ , ή και των δύο συγχρόνως με τον παράγοντα  $(F_C/F_N)^{1/2} = 4,76 \cdot 10^{19}$ .

**Παράδειγμα 1.2.2:** Σωματίδιο φορτίου  $q_1$  κινείται επί της ευθείας, η οποία διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος, το οποίο ορίζεται από τα κέντρα δύο άλλων σωματιδίων, και είναι κάθετη προς αυτό, όπως φαίνεται στο σχήμα Π1.2.2. Τα δύο αυτά σωματίδια θεωρούνται ακίνητα και το καθένα τους έχει φορτίο  $q_2$ . Ζητείται η θέση στην οποία το κινούμενο σωματίδιο δέχεται την μέγιστη δύναμη Coulomb.

### Λύση



Σχήμα Π.1.22

Λόγω ασυμμετρίας και ισότητας των ακινήτων φορτίων έχουμε:

$$[1.2] \quad \text{σχήμα} \quad F_1 = F_2 = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = k \frac{q_1 q_2}{x^2 + (b/2)^2} \quad \{1\}$$

Η συνισταμένη  $F$  των δύο αυτών δυνάμεων ισούται με το άθροισμα των οριζοντίων τους συνιστωσών (οι κατακόρυφες συνιστώσες είναι ίσες και αντίθετες, όπως φαίνεται από το σχήμα Π1.2.2:

$$F = 2(F_1 \cos \theta) \stackrel{\{1\}}{=} 2 \left( k \frac{q_1 q_2}{x^2 + (b/2)^2} \frac{x}{r} \right) \Rightarrow F = 2 \left( k \frac{q_1 q_2}{x^2 + (b/2)^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + (b/2)^2}} \right) \Rightarrow$$

$$F = 2 \left( k q_1 q_2 \frac{x}{[x^2 + (b/2)^2]^{3/2}} \right) \quad \{2\}$$

Όπως γνωρίζουμε από την Ανάλυση, για να γίνει η παραπάνω συνάρτηση μέγιστη πρέπει να μηδενίζεται η πρώτη της παράγωγος ως προς  $x$ :

$$F = max \rightarrow \frac{dF}{dx} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{παραγώγιση σαν πηλίκιο συναρτήσεων} \\ \text{και μηδενισμός του ναριθμητή} \end{array} \Rightarrow \left(x^2 + \frac{b^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - x \frac{3}{2} \left(x^2 + \frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b^2}{4} = 3x^2 \Rightarrow 2x^2 = \frac{b^2}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{b}{\sqrt{8}} = \pm \frac{b}{2\sqrt{2}}$$

διά  $(x^2 + b^2/4)^{1/2}$

---

### 1.3 Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου

Η έννοια του πεδίου εισήχθη στην προσπάθεια να κατανοηθεί η « μεταφορά » των δυνάμεων Coulomb (στον ηλεκτρισμό, βαρύτητας στην παγκόσμια έλξη κ.λ.π.) από το ένα φορτίο στο άλλο, επειδή η προϋπάρχουσα **θεωρία της δράσης από απόσταση** δεν ήταν ικανοποιητική. Σύμφωνα με την θεωρία αυτή οι δυνάμεις «μεταφέρονται» από το ένα φορτίο στο άλλο ακαριαία και χωρίς την μεσολάβηση κάποιου μέσου (με τρόπο μαγικό δηλαδή!). Η ακαριαία όμως μεταφορά συγκρούεται με την θεωρία της Σχετικότητας, σύμφωνα με την οποία θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί το πολύ με την ταχύτητα του φωτός. Η έννοια του πεδίου ορίστηκε στα πλαίσια της **θεωρίας της δράσης εκ του πλησίον**, σύμφωνα με την οποία η αλληλεπίδραση τόσο μεταξύ σωματιδίων όσο και απομακρυσμένων μακροσκοπικών σωμάτων αποδίδεται στην δράση κάποιου **φυσικού πεδίου** (στην περίπτωση μας του ηλεκτροστατικού).

**Το ηλεκτροστατικό πεδίο** πηγάζει από ακίνητα ηλεκτρικά φορτία, είναι εξ ορισμού χρονικά αμετάβλητο και αποτελεί ειδική περίπτωση του **ηλεκτρομαγνητικού πεδίου**, το οποίο δημιουργείται από *κινούμενα* ηλεκτρικά φορτία. Η δύναμη την οποία δέχεται ένα τυχαίο (ακίνητο) φορτίο σε κάποιο επίσης τυχαίο σημείο του χώρου αποδίδεται στην δράση του πεδίου που επικρατεί στο συγκεκριμένο σημείο, γεγονός το οποίο μας απαλλάσσει από την ανάγκη εφεύρεσης κάποιου τρόπου μετάδοσης των δυνάμεων Coulomb από φορτίο σε φορτίο. Όσον αφορά την ερώτηση κατά πόσο η έννοια του πεδίου έχει πραγματική ή μη υπόσταση, εμείς αρκούμαστε στο γεγονός, ότι η εισαγωγή της αποτέλεσε ένα από τα πιο καρποφόρα βήματα της Φυσικής, το οποίο διευκόλυνε και διευκολύνει δραματικά την επίλυση πολλών βασικών της προβλημάτων. και ότι δεν συγκρούεται με οποιονδήποτε από τους μέχρι τώρα γνωστούς φυσικούς νόμους.

Φορέας της πληροφορίας για την ποσοτική επίδραση του ηλεκτροστατικού πεδίου σε φορτία, τα οποία θα βρεθούν σε κάποιο σημείο του χώρου, όπου εκτείνεται το πεδίο, δηλαδή για τις δυνάμεις Coulomb που θα εξασκηθούν στα φορτία αυτά, είναι η

**Ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου:** καλείται το διανυσματικό μέγεθος  $\vec{E}$ , το οποίο έχει την διεύθυνση και φορά της δύναμης  $\vec{F}$ , η οποία ασκείται σε (συμβατικά!) θετικό μοναδιαίο φορτίο  $+q$ , το οποίο βρίσκεται στο συγκεκριμένο σημείο:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{+q}} \quad [1.3]$$

όπου:  $\vec{F}$  είναι η *συνολική* δύναμη Coulomb, η οποία ασκείται στο φορτίου  $+q$ , όταν αυτό βρίσκεται στο συγκεκριμένο σημείο του πεδίου. (Η αναγκαιότητα συμβατικού προσδιορισμού της φοράς πηγάζει από την ύπαρξη δύο ειδών φορτίου, των θετικών και αρνητικών.)

**Παρατήρηση:** Ο παραπάνω ορισμός της έντασης είναι μονοσήμαντος μόνο στην περι-

πτωση που τα γενεσιουργά του πεδίου φορτία είναι *ακίνητα*. Διαφορετικά η εισαγωγή του μη μηδενικού φορτίου +q μπορεί να προκαλέσει μετατόπιση των φορτίων αυτών και κατά συνέπεια αλλαγή του πεδίου. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο πολλοί συγγραφείς ορίζουν την ένταση βάσει ενός απειροστού ( $q \rightarrow 0$ ) δοκιμαστικού φορτίου, γεγονός βέβαια το οποίο δεν έχει φυσική υπόσταση μια και το μικρότερο παρατηρούμενο στην φύση φορτίο είναι το  $e$ . Η απειροστότητα παύει να είναι απαραίτητη, αν τα φορτία που δημιουργούν το πεδίο είναι ακίνητα. Σε περίπτωση που μετακινηθούν θα περιμένουμε απλώς μέχρι να αποκατασταθεί η νέα κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, η οποία και είναι εξ άλλου αυτή που μας ενδιαφέρει.

Αν γνωρίζουμε την ένταση  $\vec{E}$  σε όλα τα σημεία του πεδίου μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως την δύναμη  $\vec{F}$ , η οποία ασκείται σε οποιοδήποτε φορτίο  $q$ , το οποίο βρέθηκε σε κάποιο σημείο του πεδίου από την εξίσωση

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}} \quad (\text{Το } q \text{ λαμβάνεται εδώ μαζί με το πρόσημο του!}) \quad [1.4]$$

Από την παραπάνω εξίσωση φαίνεται, ότι

**η δύναμη, η οποία ασκείται σε θετικά φορτία, έχει την διεύθυνση και φορά της έντασης του πεδίου**

**η δύναμη, η οποία ασκείται σε αρνητικά φορτία, έχει την διεύθυνση της έντασης του πεδίου αλλά αντίθετη προς αυτήν φορά.**

Η απλούστερη μορφή πεδίου είναι το λεγόμενο *ομογενές*: καλείται το πεδίο, του οποίου η ένταση είναι σε όλα του τα σημεία η ίδια.

## 1.4 Δυναμικές γραμμές

Οι δυναμικές γραμμές «αισθητοποιούν» το πεδίο, μια και σχεδιάζονται έτσι ώστε

**α)** Η διεύθυνση της εφαπτομένης σε κάποιο σημείο μιας δυναμικής γραμμής συμπίπτει με εκείνη της έντασης πεδίου στο σημείο αυτό.

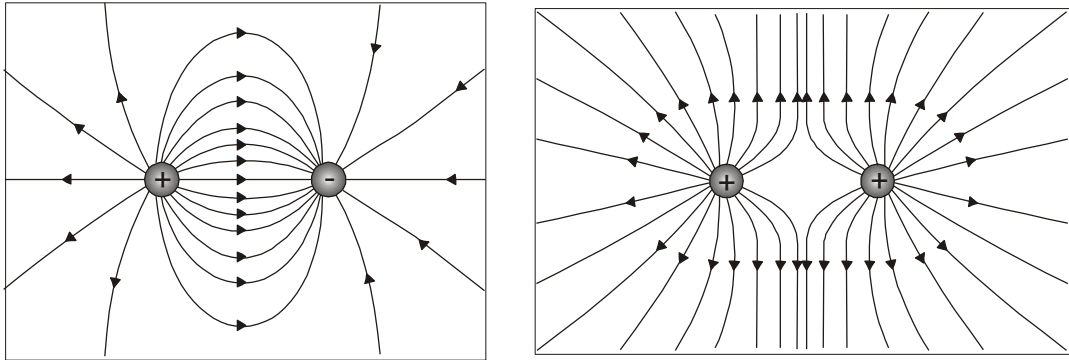
**β)** Η φορά των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών συμπίπτει με την φορά της έντασης. Επομένως οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές (ενός ηλεκτροστατικού πεδίου) πηγάζουν από θετικά και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία

**γ)** Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών, οι οποίες διέρχονται από την μοναδιαία επιφάνεια, κάθετης στην ένταση  $\vec{E}$ , του πεδίου στο κέντρο της μοναδιαίας επιφάνειας, είναι ανάλογος προς το μέτρο της έντασης στο σημείο αυτό. Έτσι όπου το πεδίο είναι ισχυρό, οι δυναμικές γραμμές πυκνώνουν, όπου ασθενές αραιώνουν.

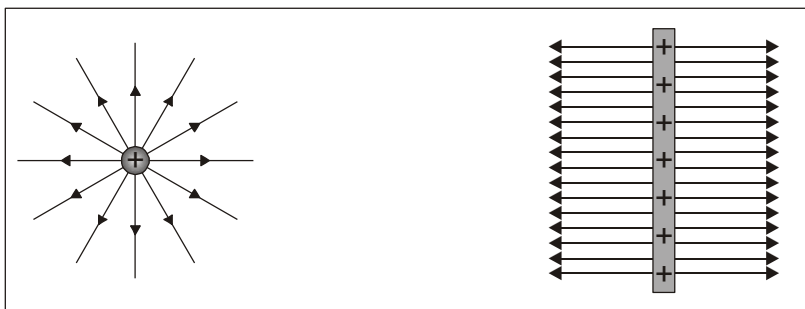
Οι δυναμικές γραμμές πρέπει να θεωρούνται σαν ένα εποπτικό μέσο, το οποίο μας επιτρέπει να πάρουμε μια γενική και παραστατική εικόνα του πεδίου και της ποιοτικής μεταβολής της έντασης του από περιοχή σε περιοχή, ακατάλληλο όμως για την ποσοτική περιγραφή του πεδίου.

Από τις παραπάνω ιδιότητες συμπεραίνουμε, ότι η μορφή των δυναμικών γραμμών εξαρτάται από την κατανομή των φορτίων στον χώρο. Ιδιαίτερα δε για ένα ομογενές πεδίο προκύπτει, ότι

οι δυναμικές γραμμές ομογενούς πεδίου είναι ευθείες παράλληλες και ισαπέχουσες.



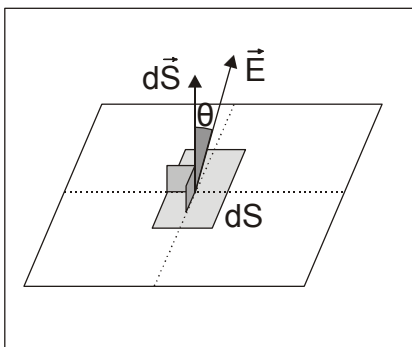
Σχήμα 1.2: Δυναμικές γραμμές συστήματος δύο ετερόνυμων και ομώνυμων φορτίων.



Σχήμα 1.3: Δυναμικές γραμμές ενός σημειακού θετικού φορτίου και ενός λεπτού επίπεδου στρώματος θετικού φορτίου, απείρων διαστάσεων (στο σχήμα φαίνεται τμήμα της τομής του).

### 1.5 Ροή του ηλεκτρικού πεδίου

Σε πολλές περιπτώσεις ενδιαφέρει εκτός από το μέγεθος (εμβαδόν) μιας επιφάνειας και ο προσανατολισμός της μέσα στον χώρο (π.χ. επιφάνεια ενός ηλιακού συλλέκτη, ενός παραθύρου κ.λ.π.).



$|d\vec{S}|$  = εμβαδόν στοιχειώδους επιφάνειας  $dS$

Σχήμα 1.4: Περιγραφή του μεγέθους και του προσανατολισμού στοιχειώδους επιφάνειας με την βοήθεια διανύσματος  $d\vec{S}$ .

Στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι στοιχειώδης (= απειροστή και επομένως *επίπεδη!*), τα δύο της παραπάνω χαρακτηριστικά μπορούν να περιγραφούν συγχρόνως με την βοήθεια ενός διανύσματος  $d\vec{S}$ , το οποίο είναι κάθετο στην (στοιχειώδη) επιφάνεια και έχει μέτρο  $dS$ , ίσο προς το εμβαδόν της (βλ. σχ.1.4).

Αν η στοιχειώδης επιφάνεια βρίσκεται εντός ηλεκτρικού πεδίου μπορεί (μια και είναι στοιχειώδης) να χαρακτηριστεί (όσον αφορά στην δράση του πεδίου) ενιαία από την ένταση  $\vec{E}$ , η οποία επικρατεί π.χ. στο κέντρο της. Τότε ο ακόλουθος ορισμός είναι μονοσήμαντος:

**Ηλεκτρική ροή  $d\Phi$  μέσω μιας στοιχειώδους επιφάνειας  $dS$ , η οποία βρίσκεται εντός ηλεκτρικού πεδίου έντασης  $\vec{E}$ , καλείται το γινόμενο**

$$d\Phi = (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = E \cdot dS \cdot \cos \vartheta$$

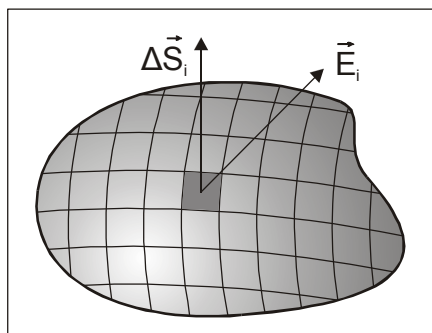
[1.5]

Οι δυναμικές γραμμές, όπως ορίσθηκαν στην §1.4, δίνουν στην αφηρημένη κατ' αρχήν, έννοια της (στοιχειώδους) ροής την ακόλουθη παραστατική διάσταση:

Όπως είπαμε, το μέτρο της έντασης  $\vec{E}$  είναι ίσο (γενικά ανάλογο, αλλά η σταθερή αναλογίας θα μπορούσε να επιλεγεί έτσι ώστε να έχουμε ισότητα) προς τον αριθμό των δυναμικών γραμμών, οι οποίες διέρχονται από την μοναδιαία επιφάνεια, η οποία είναι κάθετη προς το διάνυσμα  $\vec{E}$  στο κέντρο της. Εξάλλου το γινόμενο ( $dS \cdot \cos\theta$ ) στην [1.5] ισούται με το εμβαδόν της προβολής της επιφάνειας  $dS$  πάνω σε ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{E}$ . Άρα

η (στοιχειώδης) ηλεκτρική ροή  $d\Phi = E dS \cos\theta$  ισούται με τον αριθμό των δυναμικών γραμμών, οι οποίες περνούν («κάθετα») από την (στοιχειώδη) επιφάνεια  $dS$  (δηλαδή μέσω της κάθετης προς την  $\vec{E}$  προβολής της).

Στην περίπτωση που πρόκειται για το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας ροής ενός ρευστού η (στοιχειώδεις) ροή ισούται αριθμητικά με τον ρυθμό ροής (εξ ου και η ονομασία «ροή»), δηλαδή τον όγκο του ρευστού, ο οποίος ρέει στην μονάδα του χρόνου μέσω της στοιχειώδους επιφάνειας.



**Σχήμα 1.5:** Υπολογισμός της ροής μέσω τυχαίας μακροσκοπικής επιφάνειας

ηλεκτρική ροή  
μέσω τυχαίας  
ανοιχτής επι-  
φάνειας  $S$

$$\Phi = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{S}_i \equiv \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad [1.5\alpha]$$

επιφανειακό ολοκλήρωμα

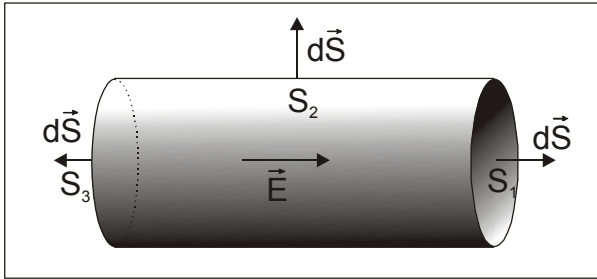
Αν η επιφάνεια είναι κλειστή, η σχέση [ 1.5α ] γράφεται

ηλεκτρική ροή μέσω τυχαίας κλειστής επιφάνειας  $S$   $\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$  [1.5β]

## Παράδειγματα

**Παράδειγμα 1.5.1:** Να υπολογιστεί η ηλεκτρική ροή μέσω μιας κλειστής κυλινδρικής επιφάνειας, η οποία βρίσκεται εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, η διεύθυνση της έντασης του οποίου συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας της εν λόγω επιφάνειας.

Λύση



**Σχήμα Π 1.5.1:** Ροή μέσω κλειστής κυλινδρικής επιφάνειας εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

Η κλειστή κυλινδρική επιφάνεια χωρίζεται με βάση τον προσανατολισμό του διανύσματος  $d\vec{S}$  σε τρεις υποεπιφάνειες (βλ. σχ. Π 1.5.1) : την παράπλευρη επιφάνεια και τις δύο βάσεις.

Η ολική ηλεκτρική ροή υπολογίζεται από την σχέση [1.5 β]:

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E} d\vec{S} = \\ &= \int_{S_1} E \cos \theta_1 dS + \int_{S_2} E \cos \theta_2 dS + \int_{S_3} E \cos \theta_3 dS\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= \sigma \alpha \theta. \\ &= E \left[ \int_{S_1} \cos 0 dS + \int_{S_2} \underbrace{\cos 90}_{=0} dS + \int_{S_3} \cos 180 dS \right]\end{aligned}$$

$$= E \left[ \int_{S_1} dS + 0 + \int_{S_3} (-1) dS \right] \begin{matrix} S_1 = \pi R^2 \\ S_3 = \pi R^2 \end{matrix} = E [\pi R^2 - \pi R^2] \Rightarrow \Phi = 0$$

( R = ακτίνα του κυλίνδρου).

**Παράδειγμα 1.5.2:(μ.γ.ό.ε.)<sup>1</sup>** Να υπολογιστεί η ηλεκτρική ροή μέσω ημισφαιρίου ακτίνας R, το οποίο βρίσκεται εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, παραλλήλου προς τον άξονα του.

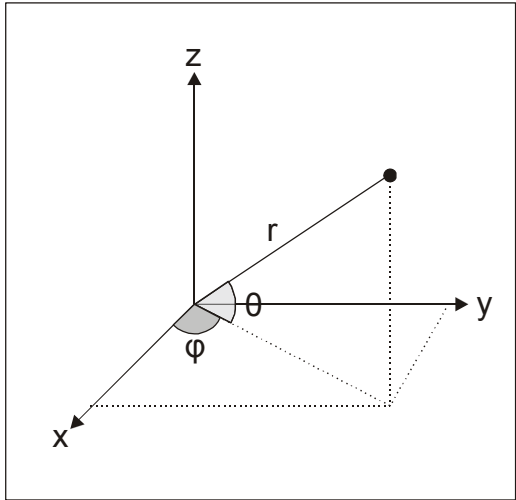
**Λύση:**

Η ηλεκτρική ροή  $\Phi$  υπολογίζεται από την σχέση [1.5α]:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cos \theta dS \stackrel{E=\sigma\alpha\theta.}{=} \int_S E \cos \theta dS \stackrel{\substack{\text{μεταπήδηση σε σφαιρικές} \\ \text{συντεταγμένες (βλ. Σχ. Π1.5.2.1)}}}{=}$$

**Σφαιρικές συντεταγμένες r, θ, φ**  
(Χωρικές πολικές συντεταγμένες)

<sup>1</sup> μ.γ.ο.ε. = μόνο για όσους ενδιαφέρονται!



Σχέσεις μεταξύ σφαιρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \cos \varphi \\y &= r \cos \theta \sin \varphi \\z &= r \sin \theta\end{aligned}$$

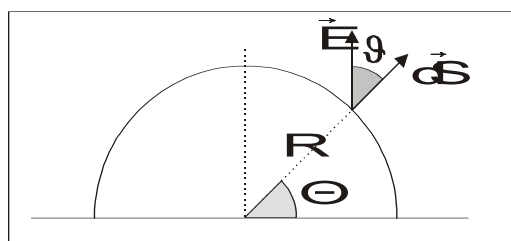
**Στοιχείο όγκου:**  $dV = dx dy dz = r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi$

**Στοιχείο επιφάνειας:**

$$dS = dx dy = R^2 \cos \theta d\theta d\varphi$$

(R= ακτίνα σφαιρικής επιφάνειας, στην οποία ανήκει το στοιχείο )

**Σχήμα Π1.5.2.1:** Γεωμετρία και χαρακτηριστικά σφαιρικών συντεταγμένων.



**Σχήμα Π1.5.2.2:** Ημισφαίριο εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, παραλλήλου προς τον άξονα του.

$$= E \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \left( \underbrace{R^2 \cos \theta d\theta d\varphi}_{=dS} \right) =$$

βλ. σχήμα Π1.5.2.2

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sin \theta \\ &= ER^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi =\end{aligned}$$

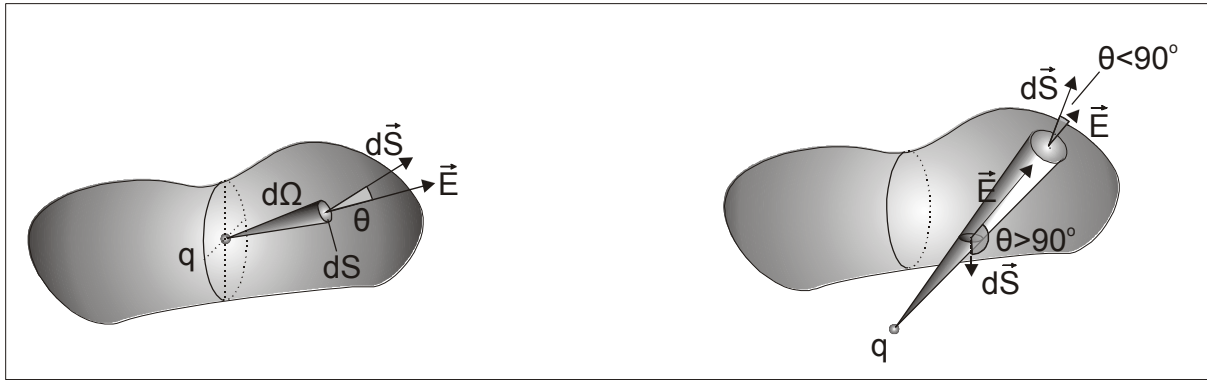
$$\int \sin ax \cos ax = \frac{1}{2a} \sin^2 ax \quad \frac{1}{2} ER^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \Rightarrow \Phi = ER^2 \pi$$

## 1.6 Ο νόμος του Gauss

Σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε από την αρχή του μαθήματος έως τώρα, η μόνη δυνατότητα, που μας παρέχεται για τον υπολογισμό της έντασης του πεδίου ενός συστήματος σημειακών φορτίων, φαίνεται να είναι, ο συνδυασμός της εξίσωσης ορισμού [1.3] της έντασης με τον νόμο του Coulomb. Όπως δε εύκολα μπορούμε να φανταστούμε, η μέθοδος αυτή είναι επίπονη ακόμη και σε περιπτώσεις, κατά τις οποίες η γεωμετρία των γενεσιουργών του πεδίου φορτίων είναι σχετικά απλή, προϋποθέτει εξάλλου πάντα την γνώση της ακριβούς θέσης των φορτίων αυτών.

Ευτυχώς όμως για μας, τα πράγματα δεν είναι πάντα έτσι, όπως φαίνονται. Σε πολλές περιπτώσεις, αυξημένου μάλιστα πρακτικού ενδιαφέροντος, ο υπολογισμός της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου απλοποιείται δραματικά με την βοήθεια του νόμου του Gauss, τον οποίο θα αναπτύξουμε ευθύς αμέσως.

Προς τον σκοπό αυτό θεωρούμε ένα σημειακό φορτίο  $q$  και μια κλειστή επιφάνεια τυχαίας μορφής, η οποία περικλείει το φορτίο  $q$  (βλ. σχ. 1.6). Σύμφωνα με την εξίσωση [1.5β], η ολική ροή μέσω της εν λόγω επιφάνειας είναι:



**Σχήμα 1.6:** Υπολογισμός της ολικής ροής μέσω κλειστής επιφάνειας, η οποία περικλείει ή αποκλείει σημειακό φορτίο q.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \stackrel{[1.3] \& [1.2]}{=} \oint_S \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \right) d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\cos\theta}{r^2} dS$$

βλέπε σχήμα 1.7  
 $\cos\theta dS = r^2 d\Omega$   
σε όλο τον χώρο

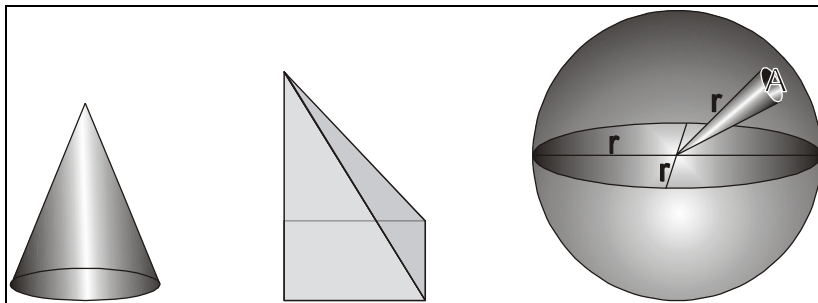
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{\text{sr}} \frac{r^2}{r^2} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}} \quad (\text{Νόμος του Gauss}) \quad [1.16]$$

q = ολικό φορτίο εντός της κλειστής επιφάνειας (βλ. συνέχεια)

### Στερεές γωνίες

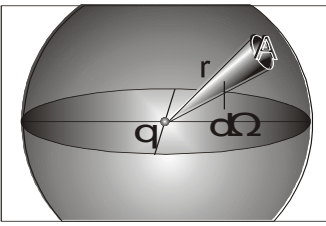
**Στερεά γωνία** ονομάζουμε μέρος του χώρου, το οποίο περιορίζεται από τον γεωμετρικό τόπο των ημιευθειών, οι οποίες ξεκινούν από ένα τυχαίο σημείο ( **κορυφή** ) του χώρου και κατευθύνονται προς όλα τα σημεία μιας κλειστής καμπύλης. Πρόκειται ουσιαστικά για την καλούμενη **γωνία οράσεως**, την γωνία δηλαδή υπό την οποία βλέπουμε την εν λόγω καμπύλη, όταν το μάτι μας βρίσκεται στην κορυφή της γωνίας. Το μέτρο μιας στερεάς γωνίας μετράται σε **sterad (sr)**, η δε αριθμητική της τιμή ισούται με το πηλίκο του εμβαδού A, το οποίο τέμνει η στερεά γωνία επί περιγεγραμμένης σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r, προς το τετράγωνο της ακτίνας :  $\Omega = A/r^2$ . Από τον ορισμό αυτό προκύπτει αυτομάτως, ότι μια **πλήρης στερεά γωνία** ισούται με  $4\pi$  sr.



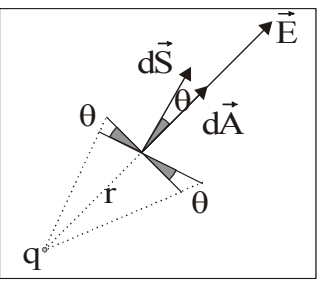
$$\Omega = A / r^2 \text{ sr}$$

Περίπτώσεις στερεών γωνιών και υπολογισμός του μέτρου μιας στερεάς γωνίας.





$d\Omega = dA/r^2 \quad \{1\}$



$dA = \cos\theta dS \quad \{2\}$

$d\Omega = \text{στοιχειώδης στερεή γωνία}$ , η οποία ορίζεται από την θέση του  $q$  και το στοιχείο  $dS$ .

$dA = \text{στοιχειώδης επιφάνεια}$ , η οποία περιορίζεται από την στοιχειώδη γωνία  $d\Omega$ , επί της σφαιρικής επιφάνειας η οποία έχει κέντρο την θέση του φορτίου  $q$  και ακτίνα την απόσταση  $r$  του στοιχείου  $dS$  από το φορτίο.

Σκεφτόμενοι ότι

1°) οι επιφάνειες  $dA$  και  $dS$  σαν στοιχειώδεις είναι επίπεδες και

2°) οι ακτίνες οι οποίες περιορίζουν την  $d\Omega$  είναι κάθετες στην  $dA$ , συμπεραίνουμε, ότι η  $dA$  είναι ουσιαστικά η προβολή της  $dS$  σε ένα επίπεδο κάθετο στην διεύθυνση της έντασης  $\vec{E}$ , η οποία συμπίπτει με εκείνη της ακτίνας  $r$ .

$\{1\} \& \{2\} \rightarrow \boxed{\cos\theta dS = r^2 d\Omega}$

**Σχήμα 1.7:** Γενικά περί στερεών γωνιών και σχηματική ανάλυση της ισότητας  $\cos\theta dS = r^2 d\Omega$ .

**Παρατήρηση:** α) Στην περίπτωση που το φορτίο  $q$  βρίσκεται εκτός της κλειστής επιφάνειας, η ολοκλήρωση πάνω από το στοιχείο της στερεής γωνίας δίνει μηδέν, επειδή κάθε στοιχείο τέμνει την εν λόγω επιφάνεια (βλ. σχ. 1.6) τόσο από την πλευρά που η γωνία  $\theta$  μεταξύ των διανυσμάτων  $d\vec{S}$  και  $\vec{E}$  είναι αμβλεία ( $\sim \cos\theta < 0$ ), οπότε το στοιχείο μετράει αρνητικά, όσο και από την απέναντι όπου η γωνία είναι οξεία ( $\cos\theta > 0$ ), οπότε το στοιχείο μετράει και θετικά.

β) Κατά την παραπάνω απόδειξη του νόμου του Gauss περιοριστήκαμε στην περίπτωση ενός και μοναδικού σημειακού φορτίου εντός της κλειστής επιφάνειας, απλώς και μόνο χάριν απλότητας. Η γενίκευση για περισσότερα, τυχαίως κατανομημένα φορτία είναι απλή:

β<sub>1</sub>) Σύστημα  $N$  σημειακών φορτίων  $q_i$ :

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \stackrel{\text{αρχή γραμμ. υπερθέσεως, κεφ. 1.2}}{=} \oint_S \sum_i \vec{E}_i \text{ πεδίο φορτίου } q_i d\vec{S} = \sum_i \left( \oint_S \vec{E}_i d\vec{S} \right) \stackrel{\text{Gauss}[1.6]}{=} \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi = \frac{q_{ολ.}}{\epsilon_0}$$

β<sub>2</sub>) Συνεχής κατανομή φορτίου:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \stackrel{\text{αρχή υπερθέσεως}}{=} \oint_S \left( \int_{\text{χώρος κατανομής φορτίου}} d\vec{E} \right) d\vec{S} = \int_{\mathbb{R}^3} \left( \oint_S d\vec{E} d\vec{S} \right) \stackrel{\text{Gauss}[1.6]}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dq}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi = \frac{q_{ολ.}}{\epsilon_0}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι σύμφωνα με τον νόμο του Gauss η ηλεκτρική ροή μέσω οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας ισούται με το πηλίκο του ολικού φορτίου (= άθροισμα όλων των επιμέρους φορτίων), το οποίο βρίσκεται εντός της επιφάνειας, προς την διηλεκτρι-

**κή σταθερή του κενού.**

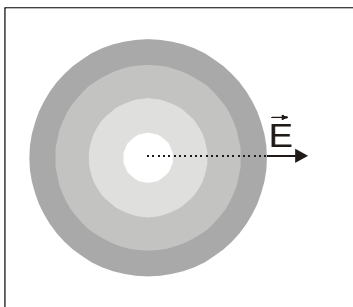
Ο νόμος του Gauss αποτελεί μια από τις θεμελιώδεις εξισώσεις της Ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, οι οποίες είναι γνωστές σαν **εξισώσεις του Maxwell**. Συνδέει ουσιαστικά το ηλεκτρικό πεδίο με τις πηγές του (τα ηλεκτρικά φορτία), γεγονός το οποίο συντελεί στην βαθύτερη κατανόηση της φύσης του πεδίου αυτού. Αποτελεί δε (όπως φαίνεται από την απόδειξη του) προϊόν

- α) του νόμου του αντιστρόφου τετραγώνου, ο οποίος διέπει την αλληλεπίδραση δύο (ακίνητων) σημειακών φορτίων.
- β) του κεντρικού χαρακτήρα της δύναμης Coulomb,
- γ) της αρχής της υπερθέσεως, η οποία διέπει την δράση των ηλεκτρικών φορτίων.

Με την βοήθεια του νόμου του Gauss μπορούμε, όταν γνωρίζουμε την ένταση του πεδίου, να υπολογίσουμε το φορτίο, το οποίο περιέχεται σε (θεωρητικά) οποιαδήποτε περιοχή του χώρου, πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει με τον νόμο του Coulomb. Ο τελευταίος μας επιτρέπει απλώς να υπολογίζουμε (και μάλιστα σε πρακτικά ενδιαφέρουσες περιπτώσεις μόνο μετά κόπων και βασάνων) το πεδίο, όταν δίδονται τα φορτία και η ακριβής τους στον χώρο διάταξη. Αντιθέτως ο νόμος του Gauss αποτελεί ένα φανταστικό εργαλείο υπολογισμού της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου, όπως θα διαπιστώσουμε κατά τις ακόλουθες

**εφαρμογές****1η ) Πεδίο σφαιρικής κατανομής φορτίου:**

**Σφαιρική κατανομή φορτίου** έχουμε, όταν το φορτίο κατανέμεται με σφαιρική συμμετρία γύρω από κάποιο κέντρο, το φορτίο δηλαδή το οποίο περιέχεται στην μονάδα του όγκου (= πυκνότητα φορτίου  $\rho$ ) εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το λεγόμενο **κέντρο της σφαιρικής κατανομής**. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου πρέπει να έχει την διεύθυνση της ακτίνας (βλ. σχ.1.8), η οποία συνδέει το κέντρο της σφαιρικής κατανομής με το συγκεκριμένο σημείο, και η τιμή της να εξαρτάται από την τιμή της ακτίνας και μόνο. Αυτό σημαίνει, ότι το μέτρο  $E$  της έντασης θα είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία μιας τυχαίας σφαιρικής επιφάνειας, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με εκείνο της σφαιρικής κατανομής.



**Σχήμα 1.8:** Σφαιρική κατανομή φορτίου.

Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss η ροή μέσω μιας τέτοιας **επιφάνειας (Gauss, όπως λέγεται)** είναι:

$$\Phi = q / \epsilon_0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} = q / \epsilon_0 \Rightarrow \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E dS \stackrel{E=\sigma\epsilon_0}{=} E \int_S dS \stackrel{S=\text{σφαιρική}}{=} E 4\pi r^2 \Rightarrow \boxed{E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \quad [1.7]$$

(**Ένταση του πεδίου σφαιρικής κατανομής φορτίου σε απόσταση  $r$  από το κέντρο της.** Στην [1.7]  $q$  είναι το φορτίο, το οποίο περικλείει σφαιρική επιφάνεια ακτίνας  $r$  και κέντρου ίδιου με εκείνο της σφαιρικής κατανομής).

Το φορτίο  $q$ , το οποίο περικλείεται από την επιφάνεια  $S$ , θα μπορούσε κάλλιστα (στην

απλούστερη δυνατότητα σφαιρικής κατανομής φορτίου) να είναι ένα μοναδικό σημειακό φορτίο ευρισκόμενο στο κέντρο της σημειακής κατανομής. Άρα

το ηλεκτρικό πεδίο (στο εξωτερικό) μιας σφαιρικής κατανομής φορτίου είναι το ίδιο με το πεδίο που θα παρατηρούσαμε, αν το ολικό της φορτίο ήταν συγκεντρωμένο στο κέντρο της.

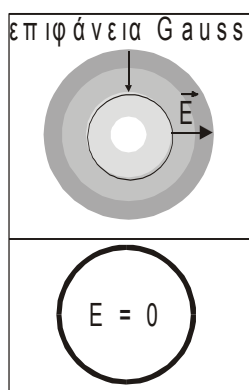
Στην περίπτωση λοιπόν του ενός σημειακού φορτίου (έστω  $q_1$ ) η [1.7] γράφεται:

$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . Η δύναμη, η οποία ασκείται σε δεύτερο σημειακό φορτίο  $q_2$ , ευρισκόμενο απόσταση  $r$  από το πρώτο θα είναι:

$F = q_2 E = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  Δηλαδή η δύναμη Coulomb (βλ. κεφ 1.2). Με άλλα λόγια

ο νόμος του Coulomb αποτελεί ουσιαστικά εφαρμογή του νόμου του Gauss για την περίπτωση σφαιρικής κατανομής φορτίου.

Λόγω αυτού ακριβώς του θεμελιωδέστερου χαρακτήρα του νόμου του Gauss προτιμάμε τον παράγοντα  $1/4\pi$  να τον κουβαλάμε στον επιμέρους νόμο του Coulomb.

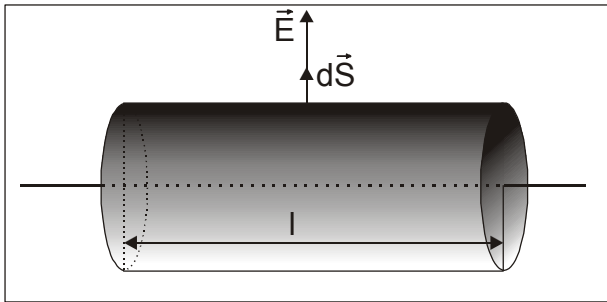


**Σχήμα 1.9:** Πεδίο στο εσωτερικό: σφαιρικής κατανομής φορτίου (επάνω) και σφαιρικού φλοιού (κάτω).

Σημειώτεον ότι τα ιόντα, από τα οποία αποτελούνται οι **ιοντικοί** καλούμενοι **κρύσταλλοι**, μπορούν να θεωρηθούν με πολύ καλή προσέγγιση σφαιρικές κατανομές φορτίου. Το γεγονός αυτό μας δίνει, κατά την μελέτη της ηλεκτροστατικής τους συμπεριφοράς, την δυνατότητα αντικατάστασης τους με ισοδύναμα σημειακά φορτία ευρισκόμενα στο κέντρο τους, απλουστεύοντας έτσι σημαντικά την επίλυση πολλών βασικών προβλημάτων.

**Παρατήρηση:** Η σχέση [1.7] ισχύει προφανώς και στην περίπτωση, κατά την οποία η σφαιρική επιφάνεια Gauss βρίσκεται εντός της σφαιρικής κατανομής (βλ. σχ.1.9). Στην περίπτωση αυτή το πεδίο επί της επιφάνειας  $S$  έχει την τιμή που θα είχε, αν όλα τα φορτία του εσωτερικού της ευρίσκοντο στο κέντρο της και δεν υπήρχαν φορτία στο εξωτερικό της. Αυτό το τελευταίο σημαίνει, ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό ενός φορτισμένου σφαιρικού φλοιού είναι ίση με μηδέν.

**2<sup>η</sup>) Πεδίο λεπτού, ευθυγράμμου σύρματος (μ.γ.ό.ε.):** Ένα φορτισμένο, λεπτό σύρμα αποτελεί ένα καλό παράδειγμα για την υλοποίηση της γραμμικής κατανομής φορτίου. Με εξαίρεση την περιοχή των άκρων του, τα οποία στην περίπτωση ενός μακριού σύρματος παίζουν ασήμαντο ρόλο, το ηλεκτρικό πεδίο θα κατευθύνεται λόγω συμμετρίας ακτινικά. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός αυτό, επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss την επιφάνεια κυλίνδρου με άξονα το σύρμα, ακτίνα  $r$  και μήκος  $l$  (αρκετά μικρότερο από εκείνο του σύρματος), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.10. Η προαναφερθείσα συμμετρία συνεπάγεται τον μηδενισμό της ροής ( $\cos(\vec{E}, d\vec{S})$ ) μέ-



**Σχήμα 1.10:** Υπολογισμός του πεδίου λεπτού ευθυγράμμου σύρματος με τον νόμο του Gauss.

σω των βάσεων του κυλίνδρου και επιπλέον την ισότητα του μέτρου της έντασης και της γωνίας μεταξύ έντασης και διανύσματος  $d\vec{S}$  ( $= 0^\circ$ ) για όλα τα σημεία της παράπλευρης (κυλινδρικής) επιφάνειας. Η ροή μέσω της παράπλευρης αυτής επιφάνειας, η οποία είναι και η ολική ροή μέσω του κυλίνδρου συνολικά, υπολογίζεται πολύ εύκολα με την βοήθεια της παρακάτω «πρότασης», η οποία έγινε φανερή κατά την μελέτη του πεδίου της σφαιρικής κατανομής:

Η ροή μέσω μιας τυχαίας ανοιχτής ή κλειστής επιφάνειας, καθ' όλη την έκταση της οποίας είναι σταθερά το μέτρο της έντασης  $\vec{E}$  καθώς και η μεταξύ των διανυσμάτων  $\vec{E}$  και  $d\vec{S}$  (διάνυσμα προσανατολισμένου στοιχείου επιφάνειας) γωνία, ισούται, με το γινόμενο  $E \cdot S \cdot \cos(\vec{E}, d\vec{S})$ :

$$\left. \begin{array}{l} E = \sigma \alpha \theta. \\ \theta \equiv \angle(\vec{E}, d\vec{S}) = \sigma \alpha \theta. \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_S = E \cdot S \cdot \cos\theta \quad [1.8]$$

$S$  = ολικό εμβαδόν της επιφάνειας

Σύμφωνα λοιπόν με τον νόμο του Gauss θα έχουμε:  $\Phi = \Phi_{\text{παραπλ.}} = q / \epsilon_0 \stackrel{[1.8]}{\Rightarrow}_{\theta=0^\circ}$

$$\Rightarrow ES_{\text{παραπλ.}} = q / \epsilon_0 \Rightarrow E(2\pi r l) = q / \epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi r l \epsilon_0} \stackrel{q=\lambda l}{=} \frac{\lambda l}{2\pi r l \epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \quad [1.9]$$

$$\lambda = dq / dl = \frac{q}{l} = \text{γραμμική πυκνότητα φορτίου}$$

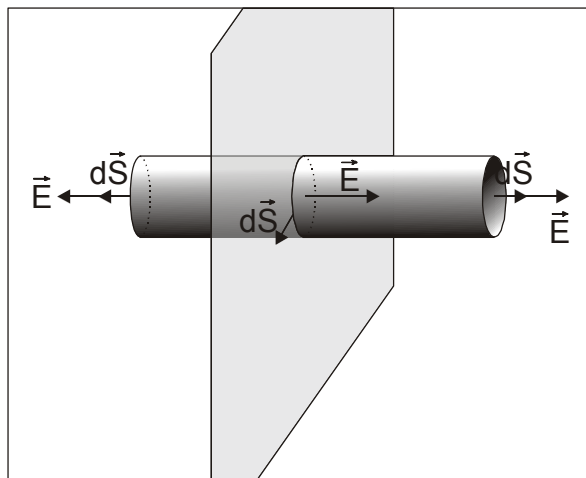
εδώ το φορτίο θεωρείται ομοιόμορφα κατανομημένο!

**3<sup>η</sup>) Πεδίο λεπτής, επίπεδης, φορτισμένης πλάκας απείρων διαστάσεων (μ.γ.ό.ε.):**

Στην προκειμένη περίπτωση η κατανομή φορτίου είναι, λόγω του αμελητέου πάχους, επιφανειακή, οπότε χαρακτηρίζεται από την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma = dq/dS$ . Στην απλούστερη περίπτωση το φορτίο θα κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλη την επιφάνεια και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου θα είναι σταθερή:  $\sigma = q/S = \text{σταθ.}$ , όπου  $q$  είναι το φορτίο τμήματος της επιφάνειας εμβαδού  $S$ .

Από την συμμετρία της κατανομής προκύπτει, ότι το πεδίο θα πρέπει να είναι κάθετο στο

επίπεδο της πλάκας και ότι η ένταση του πεδίου σε όλα τα σημεία ενός επίπεδου, παραλλήλου προς την πλάκα θα είναι η ίδια.



**Σχήμα 1.11:** Υπολογισμός του πεδίου λεπτής, επίπεδης πλάκας απείρων διαστάσεων.

Μετά τις παραπάνω διαπιστώσεις επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss (βλ. σχ. 1.11) κύλινδρο ακτίνας  $r$ , του οποίου ο άξονας είναι κάθετος προς την πλάκα, η οποία και τον διχοτομεί. Η ολική ροή μέσω του κυλίνδρου ισούται με εκείνη μέσω των βάσεων του μια και σε όλα τα σημεία της παράπλευρης επιφάνειας τα διανύσματα  $\vec{E}$  και  $d\vec{S}$  είναι κάθετα μεταξύ τους. Επομένως ο νόμος του Gauss μας δίνει

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{\text{βάσεις}} = q / \epsilon_0 \stackrel{[1.8]}{\Rightarrow} 2(ES_{\text{βάσης}})_{\theta=0^\circ} = q / \epsilon_0 \\ \Rightarrow 2E(\pi r^2) &= q / \epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi r^2 \epsilon_0} \stackrel{q=\sigma S_{\text{βάσης}}=\sigma \pi r^2}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned} \quad [1.10]$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει προσεγγιστικά και για επίπεδη, λεπτή πλάκα πεπερασμένων διαστάσεων, μόνο όμως για τα σημεία των οποίων η απόσταση από την πλάκα είναι πολύ μικρότερη από την απόστασή τους από τα άκρα της πλάκας. Στην περίπτωση βέβαια αυτή η πλάκα πρέπει να είναι *μονωτική*, αν θέλουμε ομοιόμορφη κατανομή φορτίου.

Όπως διαπιστώσαμε κατά τις παραπάνω εφαρμογές, σε περιπτώσεις συμμετρικής κατανομής φορτίου η ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου μπορεί να υπολογιστεί πολύ εύκολα (χωρίς να απαιτείται ουσιαστικά η αξιολόγηση οποιουδήποτε επιφανειακού ολοκληρώματος!) με την βοήθεια του νόμου του Gauss. Προϋπόθεση είναι βέβαια η αντικειμενική δυνατότητα εύρεσης κατάλληλης κλειστής επιφάνειας Gauss, στα σημεία της οποίας το μέτρο της έντασης και η γωνία  $\theta$  μεταξύ των διανυσμάτων  $\vec{E}$  και  $d\vec{S}$  είναι σταθερά για λόγους συμμετρίας. Τότε, όπως είδαμε, ο **νόμος του Gauss** παίρνει την μορφή  $\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cos\theta = q/\epsilon_0$ , όπου  $S$  το εμβαδόν της επιφάνειας και  $q$  το ολικό φορτίο εντός της επιφάνειας.

Στις περιπτώσεις, κατά τις οποίες είναι αδύνατο να ευρεθεί μια τέτοια επιφάνεια Gauss, η ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου υπολογίζεται με την βοήθεια του νόμου του Coulomb, κατά τον ακόλουθο τρόπο:

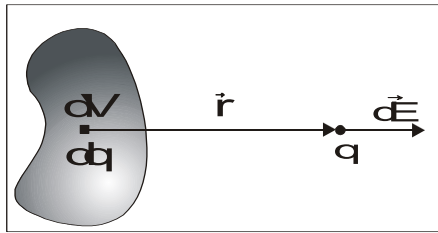
**α) Περίπτωση δύο ή περισσότερων σημειακών φορτίων:** Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο είναι το διανυσματικό άθροισμα των εντάσεων  $\vec{E}_i$ , οι οποίες οφείλονται στα μεμονωμένα σημειακά φορτία  $q_i$  και υπολογίζονται συνδυάζοντας την εξίσωση ορισμού της έντασης [(1.3)] με τον νόμο του Coulomb [1.2a]:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_i \quad [1.11]$$

όπου  $r_i$  = απόσταση μεταξύ  $q_i$  και σημείου, στο οποίο υπολογίζουμε το πεδίο

$\hat{r}_i$  = μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση  $q_i \rightarrow$  σημείο υπολογισμού

**β) Περίπτωση συνεχούς κατανομής φορτίου:** θεωρούμε τον χώρο (ή την επιφάνεια, ή την γραμμή) κατανομής του γενεσιουργού φορτίου χωρισμένο σε μικρές κυψελίδες  $dV$  (ή επιφανειακά στοιχεία  $dS$ , ή γραμμικά τμήματα  $dl$ ), έκαστη των οποίων περιέχει φορτίο  $dq$ , το οποίο στο σημείο  $\vec{r}$  δημιουργεί την στοιχειώδη ένταση  $d\vec{E}$  (βλ. σχ.1.12). Η ένταση  $\vec{E}$  του πεδίου στο συγκεκριμένο σημείο υπολογίζεται στην συνέχεια βάσει της αρχής της υπερθέσεως ως το διανυσματικό άθροισμα (ουσιαστικά ολοκλήρωμα) όλων των στοιχειωδών εντάσεων  $d\vec{E}$  :



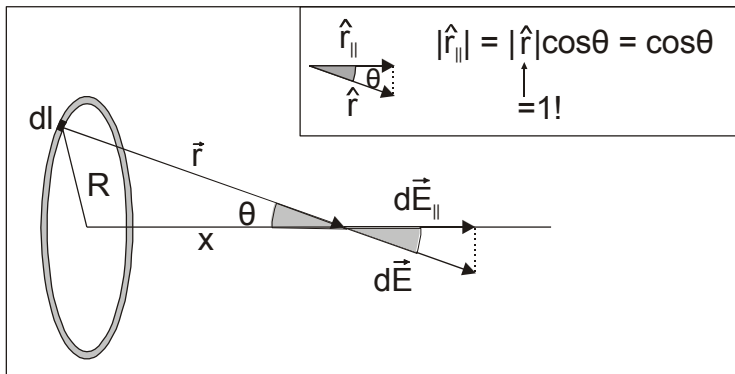
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \hat{r}}{r^2} dV} \quad [1.12]$$

(αν το φορτίο κατανέμεται επιφανειακά (ή γραμμικά), αντικαθιστούμε την πυκνότητα φορτίου  $\rho=dq/dV$  με την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma=dq/dS$  (ή γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda=dq/dl$ ), και το στοιχείο όγκου  $dV$  με το στοιχείο επιφάνειας  $dS$  (ή μήκους  $dl$ ))

Σχήμα 1.12: Υπολογισμός πεδίου συνεχούς κατανομής φορτίου.

## Παράδειγματα

**Παράδειγμα 1.6.1:(μ.γ.ο.ε.)** Να υπολογιστεί η ένταση του πεδίου φορτισμένου με φορτίο  $q$  δακτυλίου ακτίνας  $r$  και αμελητέου πάχους στα σημεία του άξονα του.



Σχήμα Π1.6.1: Υπολογισμός του πεδίου φορτισμένου δακτυλίου.

φορτίου είναι (το φορτίο θεωρείται *ομοιόμορφα* κατανεμημένο):  $\lambda = q/(2\pi R)$ , οπότε η {1} γράφεται:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \frac{\hat{r}}{r^2} dl \quad \{2\}$$

Λόγω συμμετρίας το πεδίο επί του άξονα του δακτυλίου έχει μόνο παράλληλη προς αυτόν συνιστώσα. Συγκεκριμένα κάθε στοιχειώδες τμήμα  $dl$  του δακτυλίου, το οποίο έχει φορ-

### Λύση:

Το πεδίο υπολογίζεται από την σχέση [1.12], όπως αυτή γράφεται για γραμμική κατανομή φορτίου, μια και ο δακτύλιος έχει αμελητέο πάχος:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda \hat{r}}{r^2} dl \quad \{1\}$$

Η γραμμική πυκνότητα



τίο  $dq$ , δημιουργεί σε ένα τυχαίο σημείο P του άξονα το στοιχειώδες πεδίο  $d\vec{E}$  (βλ. σχ.Π1.6.1).

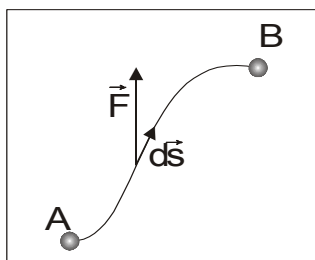
Το στοιχειώδες αυτό πεδίο μπορεί να αναλυθεί, σε δύο συνιστώσες: μια  $\parallel$  και μια  $\perp$  προς τον άξονα. Η  $\perp$  είναι ίση και αντίθετη με την αντίστοιχη συνιστώσα του στοιχειώδους πεδίου, το οποίο δημιουργεί στο σημείο P το αντιδιαμετρικό στοιχείο του δακτυλίου. Έτσι η συνισταμένη ένταση προκύπτει από την ολοκλήρωση των παραλλήλων συνιστωσών:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} \Rightarrow E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \frac{|\vec{r}_{\parallel}|}{r^2} dl \stackrel{\text{σχ.Π1.6.1: } |\vec{r}_{\parallel}| = \cos\theta = x/r}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \frac{x/r}{r^2} dl \stackrel{x=f(l)}{=} \stackrel{r=f(l)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{2\pi R r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{2\pi R r^3} (2\pi R) = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

### 1.7 Δυναμικό του ηλεκτροστατικού πεδίου

$$\int_{(AB)} \vec{F} d\vec{s} \equiv \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta s_j \rightarrow 0}} \left[ \sum_{j=1}^N \vec{F}_j \Delta s_j \right]$$

Με λόγια: Χωρίζουμε την συγκεκριμένη καμπύλη σε N μικροσκοπικά τμήματα  $\Delta s_j$ , υπολογίζουμε για το καθένα απ' αυτά το γινόμενο  $(\vec{F}_j \Delta \vec{s}_j) = F \Delta s_j \cos\theta_j$ , τα προσθέτουμε και βρίσκουμε το όριο του αθροίσματος αυτού, όταν τα τμήματα τείνουν να γίνουν άπειρα σε αριθμό και απειροστά σε διαστάσεις



**Σχήμα 1.13:** Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανύσματος.

Όπως γνωρίζουμε, το έργο, το οποίο παράγεται από μια δύναμη F κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της από την θέση A (βλ. σχ. 1.13) έως την θέση B, δίδεται από το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα**

$$W_{AB} = \int_{(AB)} \vec{F} d\vec{s}$$

Ο όρος «επικαμπύλιο» σημαίνει, ότι ο ολοκληρωτέος  $(\vec{F} d\vec{s})$  πρέπει να ολοκληρωθεί κατά μήκος της συγκεκριμένης καμπύλης, η οποία αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο (= σύνολο) των σημείων, από τα οποία διήλθε το σημείο εφαρμογής της δύναμης κατά την μετακίνηση A→B. Η «επικαμπυλότητα» του παραπάνω ολοκληρώματος αντικατοπτρίζει την εξάρτηση του έργου  $W_{AB}$  από την διαδρομή μετατόπισης του σημείου εφαρμογής της δύναμης  $\vec{F}$ , στην γενική εννοείται περίπτωση.

Δυνάμεις, των οποίων το έργο δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη διαδρομή, αλλά απλώς, από το σημείο εκκίνησης (A) και το σημείο άφιξης (B), καλούνται **συντηρητικές**:

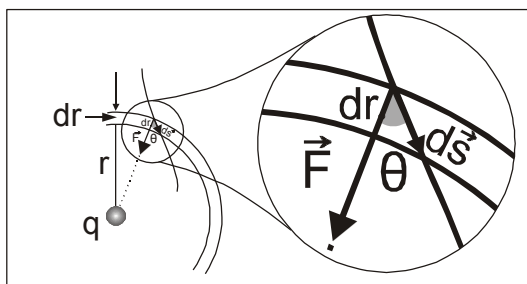
$$\text{Συντηρητικές δυνάμεις} \quad \int_{(AB)} \vec{F} d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \begin{matrix} \text{ανεξάρηττο} \\ \text{της διαδρομής} \end{matrix} \Leftrightarrow \oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$

Κατ' επέκταση καλούνται **συντηρητικά** και τα αντίστοιχα **πεδία δυνάμεων**. (Η ονομασία οφείλεται στο γεγονός, ότι κατά την μετακίνηση ενός σώματος υπό την επίδραση συντηρητικών και μόνο δυνάμεων έχουμε *συντήρηση*, δηλαδή διατήρηση της ολικής (= δυναμικής + κινητικής) ενέργειας του σώματος).

Αποδεικνύεται ( βλ. σχ. 1.14) ότι το **ηλεκτροστατικό και το βαρυτικό πεδίο είναι, συντηρητικά**.

### Συντηρητικότητα σφαιρικά συμμετρικών πεδίων

Προκειμένου να αποδείξουμε την συντηρητικότητα του ηλεκτροστατικού πεδίου εξετάζουμε την μετακίνηση ενός δοκιμαστικού φορτίου  $q$  (εδώ θετικού) μέσα στην απλούστερη δυνατή μορφή ηλεκτροστατικού πεδίου, του πεδίου ενός σημειακού φορτίου  $Q$  (εδώ αρνητικού). Έστω ότι το φορτίο  $q$  μετακινείται από την θέση  $A$  έως την θέση  $B$  ακολουθώντας δύο εντελώς τυχαίες, διαφορετικές τροχιές. Το στοιχειώδες έργο, το οποίο παράγεται υπό του πεδίου κατά την στοιχειώδη μετακίνηση  $d\vec{s}$ , είναι ως γνωστόν  $dW = \vec{F}d\vec{s} = F \cos \theta ds = Fdr$ . Επειδή τώρα το πεδίο που εξετάζουμε είναι σφαιρικά συμμετρικό (όπως και το πεδίο βαρύτητας!), η δύναμη έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο το  $Q$ . Επομένως το στοιχειώδες έργο, το οποίο παράγεται κατά την μετακίνηση από ένα τυχαίο σημείο μιας εξωτερικής σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας  $(r + dr)$  προς ένα τυχαίο σημείο μιας εσωτερικής (ακτίνας  $r$ ) είναι για όλες τις διαδρομές το ίδιο και ίσο προς  $(Fdr)$ . Το ίδιο θα ισχύει και για το ολικό έργο κατά την μακροσκοπική πλέον μετακίνηση από ένα σημείο  $A$  (μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας  $r_A$ ) προς ένα σημείο  $B$  (μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας  $r_B$ ), μια και θα ισούται με το άθροισμα όλων των στοιχειωδών έργων, τα οποία αντιστοιχούν στα στοιχειώδη τμήματα  $ds$ , στα οποία χωρίζεται η τροχιά από το άπειρο πλήθος των ομόκεντρων σφαιρών ακτίνας  $\{r_B, r_B + dr, r_B + 2dr, \dots, r_A\}$ .



**Σχήμα 1.14:** Όταν το πεδίο είναι σφαιρικά συμμετρικό το έργο κατά την μετακίνηση  $(r + dr) \rightarrow r$  είναι ανεξάρτητο της τροχιάς.

Το ηλεκτροστατικό πεδίο οποιασδήποτε κατανομής φορτίων προκύπτει ως γνωστόν υπερθέτοντας απλώς τα πεδία των σημειακών φορτίων, στα οποία μπορούμε να θεωρήσουμε διηρημένη την κατανομή. Επομένως σε κάθε ηλεκτροστατικό πεδίο το παραγόμενο ή δαπανώμενο υπό του πεδίου έργο θα είναι το άθροισμα των έργων, τα οποία παράγονται ή δαπανώνται κατά την ίδια μετακίνηση εντός του πεδίου έκαστου των παραπάνω σημειακών φορτίων χωριστά, δηλαδή ανεξάρτητο από την διαδρομή.

Σημειώνουμε ότι η συντηρητικότητα του ηλεκτροστατικού πεδίου οφείλεται στην σφαιρική συμμετρία του ηλεκτροστατικού πεδίου ενός σημειακού φορτίου και μόνο. Αυτό σημαίνει, ότι **κάθε σφαιρικά συμμετρικό πεδίο είναι συντηρητικό**.

Συντηρητικά πεδία μπορούν να χαρακτηρισθούν πλήρως με την βοήθεια μιας μονόμετρης (βαθμωτής, όπως αλλιώς λέγεται) συναρτήσεως, του δυναμικού  $U(\vec{r})$ :



**Δυναμικό**  $U_{\Sigma}$  ενός ηλεκτροστατικού πεδίου σε σημείο  $\Sigma$  καλείται το πηλίκο του έργου  $W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\text{δαπ.}}$ , το οποίο απαιτείται για να μετακινηθεί (συμβατικά θετικό) ηλεκτρικό φορτίο  $q$  από το  $\infty$  μέχρι το σημείο  $\Sigma$ , προς το φορτίο  $q$ :

$$U_{\Sigma} = \frac{W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\text{δαπ.}}}{(+q)} \quad [1.13]$$

Εδώ πρέπει να τονίσουμε, ότι το έργο  $W_{\infty \rightarrow \Sigma}$  είναι στην περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου ανεξάρτητο από την συγκεκριμένη διαδρομή, επειδή ακριβώς το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι *συντηρητικό*. Στην περίπτωση μη συντηρητικών πεδίων το «δυναμικό»  $U_{\Sigma}$ , όπως και το έργο  $W_{\infty \rightarrow \Sigma}$  εξαρτάται από την διαδρομή και όχι μόνο από την θέση του σημείου  $\Sigma$ . Επομένως για ένα και το αυτό σημείο θα είχαμε άπειρα «δυναμικά», οπότε δεν θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε το πεδίο μονοσήμαντα.

Όσον αφορά την **επιλογή του απείρου ( $\infty$ ) ως σημείου αναφοράς**, θα πρέπει να έχουμε υπ' όψη μας, ότι είναι **καθαρά συμβατική**.

Το έργο  $W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\text{δαπ.}}$ , το οποίο απαιτείται (προσφέρεται δηλαδή από κάποια *εξωτερική* δύναμη) προκειμένου να μετακινηθεί η μονάδα του θετικού φορτίου από το  $\infty$  μέχρι το σημείο  $\Sigma$ , αποταμιεύεται υπό μορφή δυναμικής ενέργειας του εν λόγω φορτίου, η οποία ξαναδίνει ισόποσο έργο κατά την μετακίνηση του φορτίου κάτω από την επίδραση του πεδίου πλέον από το σημείο  $\Sigma$  μέχρι το  $\infty$ . Επομένως **δυναμικό**  $U_{\Sigma}$  ενός ηλεκτροστατικού πεδίου σε ένα σημείο  $\Sigma$  καλείται η δυναμική ενέργεια, την οποία κατέχει η θετική μονάδα φορτίου στο σημείο  $\Sigma$  και (συμβατικά) σε σχέση με το  $\infty$ , δηλαδή το έργο το οποίο παράγεται υπό του πεδίου κατά την μετακίνηση της θετικής μονάδας φορτίου από το σημείο  $\Sigma$  ως το  $\infty$ :

$$U_{\Sigma} = \frac{E_{\text{δυν.}\Sigma}}{(+q)} = \frac{W_{\Sigma \rightarrow \infty}^{\text{παρ.}}}{(+q)} \quad [1.13\alpha]$$

Έστω τώρα ότι το σημείο  $\Sigma$  βρίσκεται εντός ηλεκτροστατικού πεδίου, του οποίου η ένταση  $\vec{E}$  είναι τυχαία συνάρτηση του χώρου. Προκειμένου να μετακινήσουμε ένα θετικό φορτίο η από το  $\infty$  μέχρι κάποιο σημείο  $\Sigma$  κατά μήκος μιας τυχαίας διαδρομής, πρέπει να ασκείται επί του φορτίου δύναμη  $\vec{F}_{\text{εξ}}$  ίση και **αντίθετη** προς την δύναμη  $\vec{F}$ , την οποία ασκεί το πεδίο επί του φορτίου σε κάθε σημείο της διαδρομής (βλ. σχ. 1.15). Η δύναμη αυτή προσφέρει κατά την στοιχειώδη μετατόπιση  $d\vec{s}$  στο φορτίο  $q$  το στοιχειώδες έργο  $dW = \vec{F}_{\text{εξ}} d\vec{s} = -\vec{F} d\vec{s} = -q\vec{E} d\vec{s}$ . Επομένως το ολικό έργο, το οποίο προσφέρεται στο φορτίο  $q$  κατά την μετατόπιση από το  $\infty$  μέχρι το σημείο  $\Sigma$ , θα είναι:

$$W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\text{δαπ.}} = \int_{\infty}^{\Sigma} \vec{F}_{\text{εξ}} d\vec{s} = - \int_{\infty}^{\Sigma} \vec{F} d\vec{s} \quad \vec{F}=q\vec{E} \quad U_{\Sigma} = \frac{W_{\infty \rightarrow \Sigma}^{\text{δαπ.}}}{(+q)} = - \int_{\infty}^{\Sigma} \vec{E} d\vec{s} \quad [1.14]$$

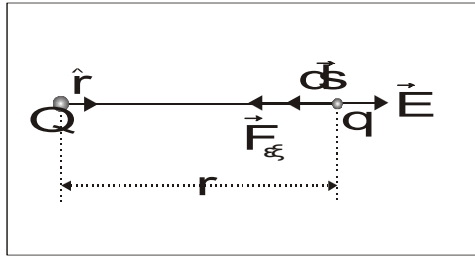
Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση είναι συμβατικό, και μας δείχνει πως στην περίπτωση που η μετακίνηση γίνει στην κατεύθυνση της έντασης  $\vec{E}$  ( $d\vec{s} \uparrow \vec{E} \Rightarrow \cos(d\vec{s}, \vec{E})=1$ ) κάθε άλλο παρά απαιτείται έργο.

### 1.7.1 Πρακτικός υπολογισμός του δυναμικού

Η εξίσωση [ 1.14 ] μας επιτρέπει βέβαια να υπολογίσουμε το δυναμικό οποιουδήποτε σημείου ενός ηλεκτροστατικού πεδίου, όταν είναι γνωστή η ένταση του σε όλα τα σημεία του χώρου. Στην πράξη όμως σπάνια χρησιμοποιούμε αυτόν τον τρόπο υπολογισμού του δυναμικού (ουσιαστικά μόνο όταν ο υπολογισμός της έντασης του πεδίου είναι απλός, όπως σε περιπτώσεις συμμετρικής κατανομής φορτίου), θα ήταν άλλωστε παράδοξο, από την μια να εισάγουμε ένα μονόμετρο μέγεθος (το δυναμικό) προκειμένου να απλοποιήσουμε τα πράγματα και από την άλλη να πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα, το διανυσματικό εκείνο μέγεθος (την ένταση) το οποίο ουσιαστικά θέλαμε να αποφύγουμε.

Είναι λοιπόν θέμα ουσίας να προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε μεθόδους, οι οποίες θα μας επιτρέπουν την απ' ευθείας εύρεση του δυναμικού. Στην προσπάθεια μας αυτή θα ξεκινήσουμε φυσικά από την απλούστερη δυνατή περίπτωση, το

**α) δυναμικό οφειλόμενο σε ένα σημειακό φορτίο:** Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του πεδίου, το οποίο εξετάζουμε, το δυναμικό ενός τυχαίου σημείου θα εξαρτάται προφανώς από την απόσταση του και μόνο από το σημειακό φορτίο. Για τον λόγο αυτό θα το συμβολίζουμε σαν  $U_r$



**Σχήμα 1.15:** Υπολογισμός του δυναμικού εντός του πεδίου ενός σημειακού φορτίου.

Σύμφωνα τώρα με την εξίσωση [ 1.14 ] έχουμε:

$$U_r = \frac{W_{\infty \rightarrow r}^{\text{δαν.}}}{(+)\dot{q}} = - \int_{\infty}^r \vec{E} d\vec{s} \stackrel{[1.2] \& [1.3]}{=} - \int_{\infty}^r \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \right) d\vec{s} =$$

$$= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{\vec{r}}{r^2} d\vec{s} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{|\vec{r}| \cos(\vec{r}, d\vec{s})}{r^2} ds \stackrel{\substack{|\vec{r}|=r \\ \cos(\vec{r}, d\vec{s})=-1}}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{ds}{r^2} \stackrel{ds=-dr}{=} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} =$$

$$= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \Rightarrow U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad [1.15]$$

**(δυναμικό σημειακού φορτίου Q σε απόσταση r από το φορτίο)**

Στην παραπάνω εξίσωση το φορτίο Q λαμβάνεται μαζί με το πρόσημο του. Στην περίπτωση δηλαδή ενός αρνητικού φορτίου το δυναμικό είναι αρνητικό. Αυτό σημαίνει πως η μετακίνηση ενός θετικού φορτίου από το  $\infty$  (= συμβατικό σημείο αναφοράς) μέχρι κάποιο τυχαίο σημείο, ευρισκόμενο σε απόσταση r από το φορτίο Q, κάθε άλλο παρά απαιτεί έργο, με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν επιδρούν άλλα φορτία εκτός του Q.

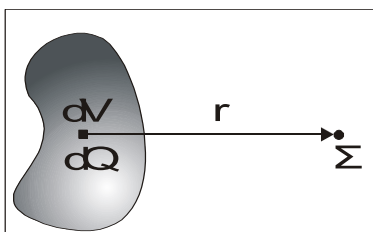
**β) δυναμικό οφειλόμενο σε ομάδα σημειακών φορτίων  $Q_i$ :** Σύμφωνα με την γνωστή μας αρχή της γραμμικής υπερθέσεως (βλ. κεφ.1.2), το δυναμικό U σε κάποιο σημείο του χώρου ισούται με το άθροισμα των δυναμικών των μεμονωμένων φορτίων στο εν λόγω σημείο:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \stackrel{[1.15]}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \quad [1.16]$$

όπου  $N$  = συνολικός αριθμός των φορτίων  $Q_i$

$r_i$  = απόσταση του εξεταζόμενου φορτίου από το φορτίο  $Q_i$

γ) **δυναμικό οφειλόμενο σε συνεχή κατανομή φορτίου:** υπολογισμός του δυναμικού στην περίπτωση αυτή είναι ανάλογος με εκείνον της έντασης του πεδίου της συνεχούς κατανομής (βλ. κεφ.1.6): θεωρούμε τον χώρο (ή την επιφάνεια, ή την γραμμή) κατανομής του γεωμετρικού φορτίου χωρισμένο σε μικρές κυψελίδες  $dV$  (ή επιφανειακά στοιχεία  $dS$ , ή γραμμικά τμήματα  $dl$ ), έκαστη των οποίων περιέχει φορτίο  $dQ$ , το οποίο στο σημείο  $\Sigma$  δημιουργεί το στοιχειώδες δυναμικό  $dU$  (βλ. σχ.1.16), το οποίο υπολογίζεται από την σχέση [1.15]. Το ολικό δυναμικό  $U$  στο συγκεκριμένο σημείο υπολογίζεται στην συνέχεια αθροίζοντας (ουσιαστικά ολοκληρώνοντας) τα στοιχειώδη δυναμικά όλων των στοιχειωδών φορτίων της κατανομής:



$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r} \Rightarrow U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} dV \quad [1.17]$$

(αν το φορτίο κατανέμεται επιφανειακά (ή γραμμικά), αντικαθιστούμε την πυκνότητα φορτίου  $\rho=dq/dV$  με την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma=dq/dS$  (ή γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda = dq/dl$ ), και το στοιχείο όγκου  $dV$  με το στοιχείο επιφάνειας  $dS$  (ή μήκους  $dl$ )).

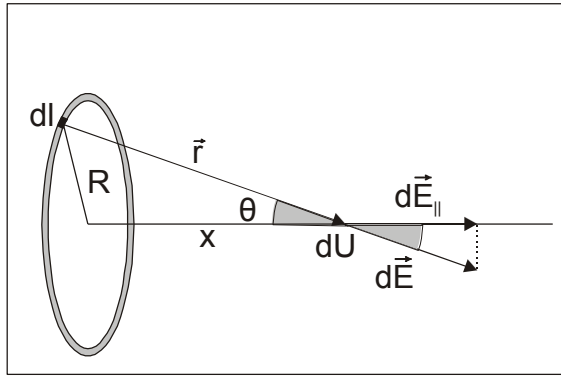
**Σχήμα 1.16:** Υπολογισμός του δυναμικού συνεχούς κατανομής φορτίου.

Αν συγκρίνουμε την παραπάνω σχέση [1.17] με την αντίστοιχη ([1.12]) για τον υπολογισμό της έντασης του πεδίου, θα δούμε ότι, πέραν του γεγονότος πως στον ολοκληρωτέο της [1.12] εμφανίζεται το τετράγωνο της απόστασης  $r$ , ο ολοκληρωτέος της [1.12] είναι διανυσματικό, ενώ της [1.17] μονόμετρο μέγεθος. Ο υπολογισμός λοιπόν του δυναμικού είναι αισθητά απλούστερος από εκείνον της έντασης, πράγμα βέβαια λογικό εξ αιτίας της διαφοράς που μόλις αναφέραμε. Το παράδειγμα που ακολουθεί θα μας το αποδείξει και έμπρακτα:

## Παράδειγματα

**Παράδειγμα 1.7.1.1:** Να υπολογισθεί το δυναμικό στα σημεία του άξονα φορτισμένου με φορτίο  $q$  δακτυλίου, ακτίνας  $R$  και αμελητέου πάχους.

Λύση:



**Σχήμα Π 1.7.1.1:** Υπολογισμός του δυναμικού φορτισμένου δακτυλίου.

Το δυναμικό υπολογίζεται από την σχέση [1.17], όπως αυτή γράφεται για γραμμική κατανομή φορτίου, μια και ο δακτύλιος έχει αμελητέο πάχος:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda}{r} dl \quad \{1\}$$

Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι  $\lambda=q/(2\pi R)$ , μια και το φορτίο θεωρείται ομοιόμορφα κατανομημένο, εξάλλου η απόσταση  $r$  δεν εξαρτάται από το στοιχείο  $dl$  (βλ. σχ. Π 1.7.1.1), οπότε η {1} γράφεται:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{1}{r} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{1}{r} (2\pi R) \quad r=(x^2+R^2)^{1/2} \Rightarrow U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$$

Ο υπολογισμός του δυναμικού είναι ασύγκριτα ευκολότερος από εκείνον της έντασης, τον οποίο είδαμε στο Παράδειγμα 1.6.1.

Αφού βεβαιωθήκαμε πλέον, ότι ο υπολογισμός του δυναμικού είναι ευκολότερος από εκείνον της έντασης (βλ. παράδειγμα 1.7.1.1), απομένει να δούμε, αν πράγματι μπορούμε να περιγράψουμε τα συμβαίνοντα σ' ένα ηλεκτροστατικό πεδίο με την βοήθεια του δυναμικού εξίσου καλά, όπως μέσω της έντασης του. Είναι δε προφανές, ότι η δυνατότητα υπολογισμού της έντασης από το δυναμικό θα διέλυε κάθε μας αμφιβολία περί αυτού, γι' αυτό και θα την εξετάσουμε ευθύς αμέσως.

## 1.8 Υπολογισμός της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου από το δυναμικό του

Από μαθηματική άποψη το δυναμικό είναι απλώς ένα μονόμετρο (αριθμητικό) μέγεθος, του οποίου η τιμή μεταβάλλεται σε συνάρτηση από τον τόπο:  $U = U(x,y,z)$ .

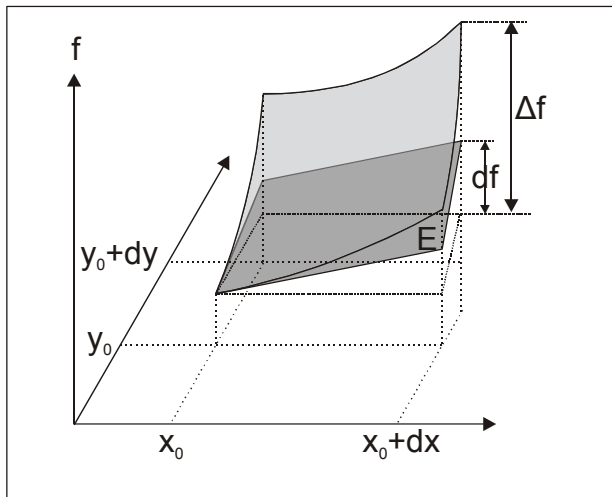
Έστω  $U = U(x,y,z)$  και  $U = U(x+dx,y+dy,z+dz)$  οι τιμές του δυναμικού σε δύο γειτονικά σημεία  $(x,y,z)$  και  $(x+dx,y+dy,z+dz)$  αντίστοιχα. Η μεταβολή  $\Delta U$  της τιμής του δυναμικού  $U$  μεταξύ των δύο αυτών σημείων ισούται με τυχαία προσέγγιση με το λεγόμενο **πλήρες διαφορικό  $dU$  της συνάρτησης  $U$**  (βλ. χ. 1.16):

$$\Delta U = U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x, y, z) = \boxed{dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz} \quad [1.18]$$

**Γεωμετρική σημασία του πλήρους διαφορικού**

“E»: εφαπτομενικό επίπεδο της επιφάνειας  $f(x,y)$  στο σημείο  $(x,y)$

Από το διπλανό σχήμα φαίνεται ότι



$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = \\ = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) \equiv df$$

(Στο παραπάνω σχήμα βέβαια το  $\Delta f$  είναι πολύ μεγαλύτερο του  $df$ , επειδή χάριν ευκρίνειας παραστήσαμε το  $dx$  και  $dy$  πολύ μεγάλα, ενώ στην πραγματικότητα τα μεγέθη αυτά είναι απειροστά)

**Σχήμα 1.16:** Γεωμετρική σημασία του πλήρους διαφορικού στην περίπτωση συναρτήσεως δύο μεταβλητών, η οποία ως γνωστόν παριστάνεται γραφικά σαν μία επιφάνεια στον χώρο ή καλύτερα σε ένα τριαξονικό σύστημα συντεταγμένων.

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  : **μερική παράγωγος**

της συνάρτησης  $f(x,y)$  ως προς  $x$  και  $y$  αντίστοιχα

Προς υπενθύμιση: Κατά την **μερική παραγωγή ως προς μια μεταβλητή** οι υπόλοιπες μεταχειρίζονται ως σταθερές:

Π.χ.  $f(x,y) = 2xy^2 + 3y$  :  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot 2xy + 3$

Η μεταβολή του δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B, στα οποία έχει τις τιμές  $U_A = U(x_A, y_A, z_A)$  και  $U_B = U(x_B, y_B, z_B)$  αντίστοιχα, δίδεται κατά συνέπεια από την ακόλουθη σχέση, η οποία αποτελεί **χαρακτηριστική ιδιότητα των τελείων (= πλήρων) διαφορικών**:

$$\int_A^B dU = U_B - U_A \Leftrightarrow \oint dU = 0 \tag{1.19}$$

Για το δυναμικό, και γενικότερα για κάθε άλλο μονόμετρο πεδίο (= μονόμετρο μέγεθος του οποίου η τιμή είναι συνάρτηση του τόπου), μπορούμε να ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο την λεγόμενη **βαθμίδα** του  $gradU \equiv \nabla U$ , ως εξής:

**ορισμός της βαθμίδας του δυναμικού:**  $gradU \equiv \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$  [1.20]

όπου  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  = μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων  $x, y$  και  $z$  αντίστοιχα.

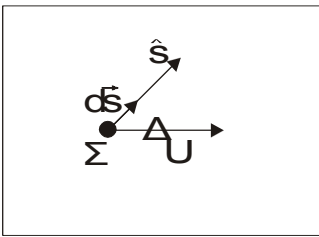
$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} : \text{Διανυσματικός διαφορικός τελεστής Nabla}$$

30 1.8 Υπολογισμός της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου από το δυναμικό του

Η βαθμίδα του δυναμικού είναι επομένως το διάνυσμα εκείνο, του οποίου οι τρεις συνιστώσες,  $(\nabla U)_x, (\nabla U)_y$  και  $(\nabla U)_z$ , έχουν μέτρο ίσο με εκείνο των μερικών παραγώγων  $\partial U / \partial x, \partial U / \partial y$  και  $\partial U / \partial z$  στο σημείο για το οποίο υπολογίζεται η βαθμίδα, αντίστοιχα.

Η φυσική τώρα υπόσταση της βαθμίδας του δυναμικού γίνεται εμφανής με τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω ότι υπολογίζουμε την βαθμίδα  $\nabla U$  του δυναμικού  $U$  σε κάποιο σημείο  $\Sigma$  και την πολλαπλασιάζουμε διανυσματικά με την στοιχειώδη μετατόπιση  $d\vec{s}$  (βλ. σχ. 1.17):



$d\vec{s} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$  : **στοιχειώδης μετατόπιση** με σημείο εκκίνησης το  $\Sigma$ .

(Επειδή οι διανυσματικές συντεταγμένες  $dx, dy$  και  $dz$  δεν πρέπει να είναι υποχρεωτικά ίσες, το διάνυσμα  $ds$  έχει τυχαίο προσανατολισμό)

**Σχήμα 1.17:** Για την φυσική υπόσταση της βαθμίδας.

$$\nabla U \cdot d\vec{s} = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \stackrel{[1.18]}{\Rightarrow} \nabla U \cdot d\vec{s} = dU \quad \{1\}$$

$$\stackrel{d\vec{s}=ds\hat{s}}{\Rightarrow} \nabla U \cdot ds \cdot \hat{s} = dU \Rightarrow \frac{dU}{ds} = \hat{s} \cdot \nabla U \quad [1.21]$$

Το γινόμενο  $\hat{s} \cdot \nabla U$  ισούται, όπως βλέπουμε, με την μεταβολή του δυναμικού σε συνάρτηση από την μετατόπιση στην διεύθυνση  $\hat{s}$  και καλείται *κατευθυνόμενη παράγωγος*.

Το γινόμενο  $\hat{s} \cdot \nabla U$  γίνεται, όπως ξέρουμε, μέγιστο, όταν τα διανύσματα  $\hat{s}$  και  $\nabla U$  γίνουν  $\Pi$  και ομόρροπα, όταν δηλαδή η διεύθυνση και φορά της μετατόπισης  $\hat{s}$  συμπίπτει με αυτήν της βαθμίδας  $\nabla U$ . Επομένως

η βαθμίδα του δυναμικού είναι ένα διάνυσμα, το οποίο κατευθύνεται προς την περιοχή μέγιστης (ανά μονάδα μήκους) αύξησης του δυναμικού, ίσης προς την απόλυτη τιμή της βαθμίδας.

Από την σχέση [1.14] ξέρουμε εξάλλου, ότι  $dU = -\vec{E}d\vec{s} = \nabla U d\vec{s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\nabla U \equiv -\text{grad}U} \quad [1.22]$$

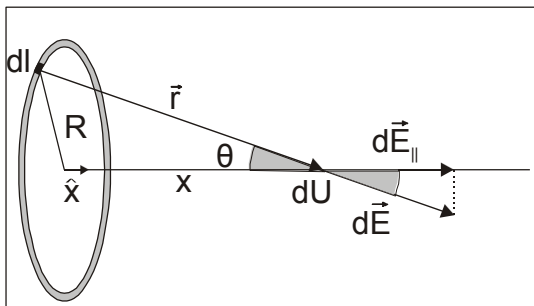
Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση δείχνει, ότι η ένταση  $\vec{E}$  του ηλεκτροστατικού πεδίου κατευθύνεται προς το σημείο μέγιστης ελάττωσης και όχι αύξησης του δυναμικού,

Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση [1.22]

η ένταση  $\vec{E}$  του ηλεκτροστατικού πεδίου σε κάποιο σημείο του χώρου είναι ένα διάνυσμα, με φορά την κατεύθυνση μέγιστης (ανά μονάδα μήκους) ελάττωσης του ηλεκτροστατικού δυναμικού  $U$ , ίσης με την απόλυτη τιμή της έντασης  $\vec{E}$ .

Κλείνοντας την ενότητα υπολογισμού του πεδίου από το δυναμικό, παραθέτουμε μερικούς πολύ χρήσιμους κανόνες υπολογισμού της βαθμίδας, η απόδειξη των οποίων βρίσκεται σε όλα τα εξειδικευμένα εγχειρίδια της Διανυσματικής Ανάλυσης:

**Κανόνες υπολογισμού της βαθμίδας**



**Σχήμα Π 1.8.1:** Υπολογισμός του πεδίου φορτισμένου δακτυλίου.

από το κέντρο του πεδίου προς το σημείο που εξετάζουμε.

$\alpha, \beta =$  σταθερές,  $\phi, \psi =$  μονόμετρα πεδία (συνεχόμενα παραγωγίσιμα)

$$\text{grad } \alpha = 0 \quad \text{grad } (\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha \text{ grad } \phi + \beta \text{ grad } \psi$$

$$\text{grad } (\phi\psi) = \phi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \phi$$

$$\text{grad } (\phi(\psi)) = (d\phi / d\psi) \text{ grad } \psi$$

$$\text{grad } U(r) = (dU / dr) \vec{r}$$

όπου  $U(r) =$  **κεντρικό πεδίο**: η τιμή του εξαρτάται μόνο από την απόσταση  $r$  από κάποιο συγκεκριμένο σημείο, το κέντρο του).

$\vec{r} =$  μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση

**Παρατήρηση:** Η βαθμίδα ενός μονόμετρου πεδίου  $\phi$  (το οποίο είναι συνεχόμενα παραγωγίσιμο, όπως λένε τα «ψιλά γράμματα» των Μαθηματικών) είναι πάντα ένα διανυσματικό,

συντηρητικό πεδίο, επειδή, όπως είδαμε (1), ισχύει  $\int_A^B \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A)$

Αυτό όμως δεν σημαίνει πως και κάθε διανυσματικό πεδίο μπορεί να γραφεί σαν βαθμίδα ενός μονόμετρου πεδίου, πως δηλαδή είναι συντηρητικό!

## Παράδειγματα

**Παράδειγμα 1.8.1:** Να υπολογισθεί η ένταση του πεδίου στα σημεία του άξονα φορτισμένου με φορτίο  $q$  δακτυλίου, ακτίνας  $R$  και αμελητέου πάχους, όταν ξέρουμε ότι το δυναμικό αυτών των σημείων ισούται με  $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$  (βλ. σχ. Π. 1.8.1).

**Λύση:**

Η ένταση  $\vec{E}$  υπολογίζεται απ' ευθείας από το δυναμικό  $U$  σύμφωνα με την σχέση [1.22]:

$$\vec{E} = -\text{grad}U \{1\}$$

Παίρνοντας υπόψη, ότι για τα σημεία του άξονα του δακτυλίου το πεδίο είναι κεντρικό, μια

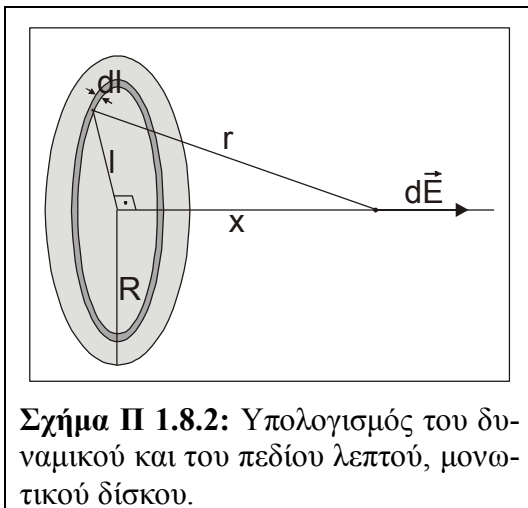
και εξαρτάται μόνο από την απόσταση τους  $\chi$  από το κέντρο του άξονα, αντικαθιστούμε το  $U$  και υπολογίζουμε:

$$\vec{E} = -\text{grad}U(x) = -\frac{dU}{dx} \hat{x} = -\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right] \hat{x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{2} (x^2 + R^2)^{-3/2} \right) \cdot (2x) \hat{x} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}$$

Πρόκειται φυσικά για το αποτέλεσμα του παραδείγματος Π 1.6.1. Η σύγκριση όμως του εδώ και εκεί εφαρμοσθέντος τρόπου υπολογισμού συνιστάται αυστηρώς, μια και αποκαλύπτει την σχέση μεταξύ έντασης και δυναμικού στην περίπτωση μιας συγκεκριμένης και απτής κατανομής φορτίου.

**Παράδειγμα 1.8.2:** Να υπολογισθεί το δυναμικό και στην συνέχεια η ένταση του πεδίου σε όλα τα σημεία του άξονα λεπτού, ομοιόμορφα φορισμένου, μονωτικού δίσκου ακτίνας  $R$  και φορτίου  $q$ . (Αν ο δίσκος δεν είναι μονωτικός δεν θα είναι ομοιόμορφα φορισμένος).



**Σχήμα Π 1.8.2:** Υπολογισμός του δυναμικού και του πεδίου λεπτού, μονωτικού δίσκου.

### Λύση:

Το δυναμικό υπολογίζεται από την σχέση [1.7], όπως αυτή γράφεται για επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, μια και ο δίσκος έχει αμελητέο πάχος:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} dS \quad \{1\}$$

Σαν στοιχείο επιφάνειας επιλέγουμε δακτύλιο ακτίνας  $l$  και πάχους  $dl$  (βλ. σχ. Π1.8.2), οπότε έχουμε  $dS = 2\pi l dl$ . Επειδή εξάλλου η επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma$  θεωρείται σταθερή, η σχέση {1} παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$U = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi l dl}{r} \stackrel{r=(x^2+l^2)^{1/2}}{=} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{l}{\sqrt{x^2+l^2}} dl$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{x^2+l^2} \right]_0^R \Rightarrow U = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{x^2+R^2} - x \right) \quad \{2\}$$

Η ένταση  $\vec{E}$  υπολογίζεται απ' ευθείας από το δυναμικό  $U$  σύμφωνα με την σχέση [1.22]:

$$\vec{E} = -\text{grad}U \quad \{3\}$$

Παίρνοντας υπόψη, ότι για τα σημεία του άξονα του δίσκου το πεδίο είναι κεντρικό, μια και εξαρτάται μόνο από την απόσταση τους  $\chi$  από το κέντρο του άξονα, αντικαθιστούμε το  $U$  και υπολογίζουμε:

$$\vec{E} = -\text{grad}U(x) = -\frac{dU}{dx} \hat{x} = -\frac{d}{dx} \left[ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( (x^2 + R^2)^{1/2} - x \right) \right] \hat{x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{2} (x^2 + R^2)^{-1/2} \cdot 2x \right) - 1 \right] \hat{x} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - x(x^2 + R^2)^{-1/2} \right] \hat{x}$$

### 1.9 Διαφορά δυναμικού ( ή τάση )

Στην πράξη δεν ενδιαφερόμαστε για το δυναμικό (το οποίο ούτως ή άλλως ορίζεται σε σχέση με κάποιο αυθαίρετο σημείο), αλλά για τις διαφορές δυναμικού:

**Διαφορά δυναμικού ( ή τάση ) μεταξύ δύο σημείων** καλείται η διαφορά των δυναμικών των δύο αυτών σημείων:

$$V_{BA} \equiv U_B - U_A \stackrel{[1.14]}{=} \frac{W_{\infty \rightarrow B}^{\text{δαπ.}}}{q} - \frac{W_{\infty \rightarrow A}^{\text{δαπ.}}}{q} \stackrel{\text{ανεξαρτησία του έργου από την διαδρομή}}{=} \left[ \frac{W_{\infty \rightarrow A}^{\text{δαπ.}}}{q} + \frac{W_{A \rightarrow B}^{\text{δαπ.}}}{q} \right] - \frac{W_{\infty \rightarrow A}^{\text{δαπ.}}}{q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{BA} \equiv U_B - U_A = \frac{W_{A \rightarrow B}^{\text{δαπ.}}}{q} \quad [1.23]$$

Επομένως η διαφορά δυναμικού  $V_{BA} \equiv U_B - U_A$  μεταξύ δύο σημείων A και B ισοδύναμα με το έργο που απαιτείται προκειμένου να μετακινηθεί η μονάδα του θετικού φορτίου από το σημείο A μέχρι το B.

Με την βοήθεια της [ 1.14 ] η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$V_{BA} \equiv U_B - U_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad [1.23a]$$

Από την σχέση αυτή φαίνεται πως αν η μετακίνηση γίνει κατά την διεύθυνση του πεδίου, η διαφορά  $V_{BA} \equiv U_B - U_A$  είναι αρνητική, δηλαδή πως  $U_B < U_A$ . Θετικά φορτία μετακινούνται όπως γνωρίζουμε, κατά την φορά του πεδίου, άρα κατά την φορά μειωμένου δυναμικού:

τα θετικά φορτία κινούνται πάντα προς τα σημεία με μικρότερο, τα αρνητικά προς τα σημεία με μεγαλύτερο δυναμικό, (όταν βέβαια επάνω τους επιδρά το ηλεκτροστατικό πεδίο και μόνο).

### 1.10 Ισοδυναμικές επιφάνειες

**Ισοδυναμικές** καλούνται οι επιφάνειες, των οποίων όλα τα σημεία έχουν το ίδιο δυναμικό.

Οι ισοδυναμικές επιφάνειες στην περίπτωση ενός σημειακού φορτίου Q, για παράδειγμα υπολογίζονται από την σχέση [1.15]:

$$U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = \text{σταθ.} \Rightarrow r = \text{σταθ.}$$

Στην περίπτωση ενός σημειακού φορτίου οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι σφαιρικές με κέντρο το σημειακό φορτίο.

Η μετακίνηση ενός σημειακού φορτίου επάνω σε οποιαδήποτε ισοδυναμική επιφάνεια

ούτε παράγει ούτε απαιτεί έργο και μάλιστα εξ ορισμού. Αυτό σημαίνει αυτομάτως, ότι η ένταση του πεδίου σε όλα τα σημεία της εν λόγω επιφάνειας δεν έχει παράλληλη (εφαπτομενική) προς την επιφάνεια συνιστώσα. Άρα

η ένταση  $\vec{E}$  του πεδίου είναι κάθετη σε όλα τα σημεία μιας ισοδυναμικής επιφάνειας.

Επομένως

οι δυναμικές γραμμές διαπερνούν κάθετα τις ισοδυναμικές επιφάνειες.

### 1.11 Αγωγοί μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο

Όπως αναφέραμε ήδη στο κεφάλαιο 1.2, η ύλη συνδέεται αναπόσπαστα με την ύπαρξη ηλεκτρικών φορτίων, εμφανίζεται δε συχνά ως ηλεκτρικά ουδέτερη, απλώς και μόνο επειδή περιέχει τον ίδιο αριθμό θετικών και αρνητικών φορτίων.

Χωρίς, στο σημείο αυτό, να μας ενδιαφέρει ποιο ακριβώς είναι οι φορείς του ηλεκτρικού φορτίου στην ύλη, σημειώνουμε, ότι ήδη οι πρώτες εμπειρίες των ανθρώπων με τον ηλεκτρισμό έδειξαν μια διαφοροποίηση στην συμπεριφορά των διαφόρων υλικών, η οποία οδήγησε τελικά στην κατάταξη τους στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες:

**α) Αγωγοί** καλούνται τα υλικά, τα οποία επιτρέπουν την εύκολη μετακίνηση ηλεκτρικών φορτίων μέσα από την μάζα τους. Στην κατηγορία ανήκουν π.χ. τα μέταλλα, τα ιονισμένα αέρια, ανθρώπινοι και ζωικοί ιστοί, ηλεκτρολυτικά διαλύματα οξέων, βάσεων και αλάτων, τήγματα αλάτων, νερό.

**β) Μονωτές** καλούνται τα υλικά, τα οποία δεν επιτρέπουν την εύκολη μετακίνηση των ηλεκτρικών φορτίων μέσα στην μάζα τους. Μονωτές είναι για παράδειγμα το γυαλί, τα πλαστικά, η πορσελάνη, το καουτσούκ, το (στεγνό) χαρτί και ξύλο, διάφορα λιπαντικά.

**γ) Ημιαγωγοί** καλούνται τέλος τα υλικά μιας ενδιάμεσης κατηγορίας, των οποίων η αγωγιμότητα επηρεάζεται σημαντικά από διάφορους εξωτερικούς παράγοντες. Τέτοιος είναι π.χ. η θερμοκρασία, είναι δε χαρακτηριστικό, ότι η αγωγιμότητα των ημιαγωγών αυξάνει με αυξανόμενη θερμοκρασία. Οι γνωστότεροι ημιαγωγοί είναι το Γερμάνιο (Ge) και το Πυρίτιο (Si). Η αγωγιμότητα των υλικών αυτών μεταβάλλεται δραστικά με την ενσωμάτωση μικρών ποσοτήτων Βορίου (B) και Αρσενίου (As) και μάλιστα κατά τρόπο απόλυτα ελεγχόμενο. Το γεγονός αυτό βρίσκει εφαρμογή στην κατασκευή τόσο μεμονωμένων ηλεκτρονικών στοιχείων, όπως οι κρυσταλλοτρίοδοι (transistors), όσο και των γνωστών μας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, τα οποία οδήγησαν στην επανάσταση των ηλεκτρονικών υπολογιστών (computers).

Η εξήγηση της διαφορετικής συμπεριφοράς των υλικών, τα οποία ανήκουν στις τρεις παραπάνω κατηγορίες, βρίσκεται στην δομή τους: Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες μπορούμε να πούμε, ότι αγωγοί είναι εκείνα τα υλικά, τα οποία διαθέτουν ευκίνητους φορείς ηλεκτρικού φορτίου, μονωτές εκείνα τα οποία δεν διαθέτουν, και ημιαγωγοί εκείνα στα οποία ο αριθμός ευκίνητων φορέων επηρεάζεται αποφασιστικά από τις εξωτερικές συνθήκες.

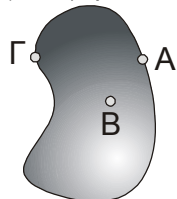
Η αγωγιμότητα των μετάλλων, επί παραδείγματι, οφείλεται στην ύπαρξη των λεγομένων **ελευθέρων ηλεκτρονίων**. Πρόκειται για τα εξωτερικά ηλεκτρόνια των ατόμων (**ηλεκτρόνια σθένους**), τα οποία κινούνται μέσα σε όλη την μάζα του μετάλλου σχηματίζοντας το λεγόμενο **ηλεκτρονικό νέφος**. Ελεύθερα ηλεκτρόνια δημιουργούν και την αγωγιμότητα των καθα-

ρών (χωρίς προσμίξεις) ημιαγωγών σε υψηλές θερμοκρασίες. Η αγωγιμότητα των ηλεκτρολυτών πηγάζει από την δυνατότητα μετακίνησης θετικών και αρνητικών ιόντων.

Ο αριθμός των ευκίνητων φορέων ανά μονάδα όγκου ποικίλει σημαντικά από υλικό σε υλικό. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι τιμές της αγωγιμότητας να καλύπτουν όλη την κλίμακα μεταξύ των καλύτερων αγωγών και του τέλει μονωτή, του κενού. Θα πρέπει λοιπόν να ξεκαθαρίσουμε, ότι τα επόμενα ισχύουν για « καλούς » αγωγούς, των οποίων η αγωγιμότητα είναι της ίδιας τάξεως με εκείνη των μετάλλων.

Ας δούμε τώρα τα συμβαίνοντα σε έναν τέτοιο αγωγό, όταν αυτός βρίσκεται σε **κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας**, όταν δηλαδή δεν έχουμε κατευθυνόμενη κίνηση φορτίων στο εσωτερικό του. (Τόσο τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων όσο και τα ιόντα των ηλεκτρολυτών κινούνται φυσιολογικά στατιστικά, δηλαδή άτακτα, και ακατάπαυστα. Στην περίπτωση όμως που επιδράσει κάποιο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, η κίνηση των ηλεκτρονίων παύει να είναι καθαρά στατιστική και αποκτά μια συνιστώσα προς την διεύθυνση του πεδίου: γίνεται **κατευθυνόμενη**.)

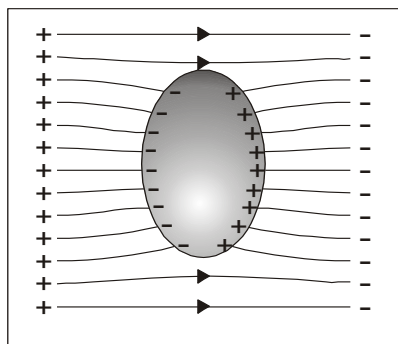
Αυτομάτως βγαίνει το συμπέρασμα, ότι **το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού, ο οποίος βρίσκεται σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, είναι μηδέν**. Διαφορετικά οι ευκίνητοι φορείς (π.χ. τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων) θα έπρεπε να κινούνται. (Όταν μιλάμε για πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού, εννοούμε την μέση του τιμή σε μικροσκοπική κλίμακα έχουμε πολύ ισχυρά πεδία, των οποίων η τιμή μεταβάλλεται δραματικά από σημείο σε σημείο). Σημειωτέον δε, ότι η παραπάνω πρόταση ισχύει, είτε πρόκειται για φορτισμένο, είτε για αφορτιστο αγωγό, και ανεξάρτητα από το αν υπάρχουν ή όχι πεδία στο εξωτερικό του.



Τα συμπεράσματα, τα οποία βγαίνουν από τα παραπάνω έχουν αποφασιστική σημασία για τις εφαρμογές, οπότε δικαιολογείται να τα δούμε κάπως αναλυτικά:

Αφού η μετακίνηση ενός φορτίου από το τυχαίο σημείο Α της επιφάνειας προς το τυχαίο σημείο Β του εσωτερικού του αγωγού, καθώς και η μετακίνηση από το Β προς το τυχαίο σημείο Γ της επιφάνειας δεν απαιτεί έργο, λόγω μηδενισμού της έντασης στο εσωτερικό του αγωγού, τα τρία αυτά σημεία θα έχουν το ίδιο δυναμικό. Επομένως

- ✓ Όλα τα σημεία ενός αγωγού (συμπεριλαμβανομένων και εκείνων της επιφάνειάς του) σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας έχουν το ίδιο δυναμικό.
- ✓ Η επιφάνεια ενός αγωγού σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας είναι ισοδυναμική επιφάνεια. Οπότε
- ✓ Η ένταση του πεδίου στα σημεία της επιφάνειας αγωγού ευρισκόμενου σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας είναι κάθετη προς την επιφάνεια του αγωγού.

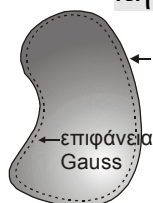


**Σχήμα 1.18:** Ηλεκτρική επαγωγή.

ευκίνητοι φορείς μετακινούνται κάτω από την επίδραση του, οι μιν θετικοί κατά την φορά του, οι δε αρνητικοί αντίθετα προς αυτήν. Η μετακίνηση αυτή μπορεί να γίνει φυσικά μέχρι την επιφάνεια του αγωγού (εκτός βέβαια από την περίπτωση εξαιρετικά ισχυρών πεδίων), όπου και συσσωρεύονται. Ο διαχωρισμός αυτός των φορτίων, γνωστός σαν **ηλεκτρική επαγωγή** έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία ενός πεδίου αντίθετης φοράς προς το εξωτερικό και συνεχίζεται μέχρις ότου η συνισταμένη ένταση στο εσωτερικό του αγωγού γίνει μηδέν, οπότε και αποκαθίσταται η νέα κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας. Τα παραπάνω συμβαίνουν σε ελάχιστο χρόνο, όπως αποδεικνύεται πρακτικά.

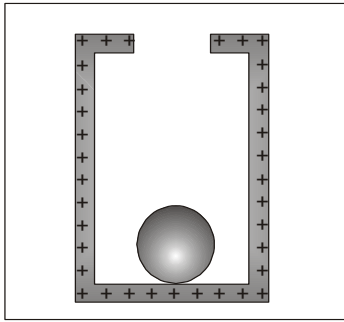
**Εφαρμογές της ηλεκτροστατικής θωράκισης:** Προστασία επιστημονικών οργάνων και διαφόρων ηλεκτρονικών συσκευών (κυρίως στον τομέα των τηλεπικοινωνιών) από ανεπιθύμητα ηλεκτροστατικά πεδία, δυνατότητα εργασίας πλησίον εγκαταστάσεων υψηλής τάσεως, επιβάτες αυτοκινήτων και αεροπλάνων δεν κινδυνεύουν από κεραυνούς. Στην περίπτωση που τα χρησιμοποιούμενα δοχεία φέρουν μικρές οπές ή πρόκειται για μεταλλικά πλέγματα, το ηλεκτροστατικό πεδίο στο εσωτερικό τους δεν είναι εντελώς μηδέν, αλλά σημαντικά εξασθενημένο, εκτός βέβαια από τα σημεία τα οποία βρίσκονται πολύ κοντά στις οπές. Το ίδιο ισχύει και για ένα σωλήνα με ανοιχτά άκρα, όταν το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο από την διάμετρο του: όσο απομακρυνόμαστε από τα άκρα του τόσο ασθενέστερο γίνεται το πεδίο στο εσωτερικό του.

- ✓ Στην κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας όλο το πλεονάζον φορτίο ενός φορτισμένου (και μονωμένου) αγωγού κατανέμεται στην εξωτερική του επιφάνεια.



Αυτό προκύπτει εύκολα, αν εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss για μία κλειστή επιφάνεια ευρισκόμενη αμέσως κάτω από την πραγματική επιφάνεια του αγωγού και επομένως στο εσωτερικό του ( βλ. διπλανό σχήμα). Η ροή μέσω της εν λόγω επιφάνειας θα είναι μηδέν, μια μηδέν είναι και η ένταση του πεδίου σε όλα της τα σημεία.

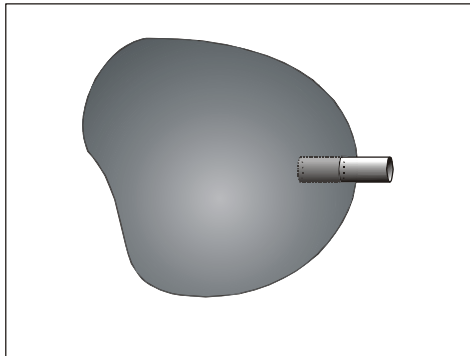
Η μικροσκοπική εξήγηση είναι και πάλι απλή: Τυχόν πλεονάζοντα φορτία, τα οποία θα βρεθούν με κάποιο τρόπο στο εσωτερικό ενός αγωγού, δημιουργούν ηλεκτρικά πεδία, κάτω από την επίδραση των οποίων μετακινούνται προς την επιφάνεια του αγωγού, δημιουργώντας τέτοια επιφανειακή κατανομή φορτίου, ώστε η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού να μηδενισθεί. Τότε σταματά κάθε μετακίνηση φορτίου και ο αγωγός ηρεμεί ηλεκτροστατικά.



**Σχήμα 1.19:** Πλήρη εκφόρτιση αγωγού μέσω δοχείου Faraday.

**Εφαρμογή** του παραπάνω φαινομένου αποτελεί το λεγόμενο *δοχείο του Faraday* (βλ. σχήμα 1.19), το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πλήρη αποφόρτιση ενός φορτισμένου αγωγού: Ο προς εκφόρτιση αγωγός φέρεται σε επαφή με το εσωτερικό κοίλου δοχείου. Το φορτίο του ρέει τότε προς την εξωτερική επιφάνεια του δοχείου, έως ότου ο αγωγός εκφορτισθεί πλήρως, οπότε και αποκαθίσταται κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας. (Θα πρέπει να πούμε, ότι τα παραπάνω ισχύουν απόλυτα, μόνο αν το δοχείο διαθέτει μεταλλικό σκέπασμα, με το οποίο το κλείνουμε όσο διαρκεί η εκφόρτιση. Στην πράξη βέβαια είναι αρκετό το βάθος του δοχείου να είναι αρκετά μεγαλύτερο από το στόμιο του.)

### 1.11.1 Ένταση του πεδίου επί της ( εξωτερικής) επιφάνειας φορτισμένου αγωγού



**Σχήμα 1.20:** Υπολογισμός της έντασης του πεδίου πλησίον της επιφανείας φορτισμένου αγωγού. (Χάριν απλότητας της επιχειρηματολογίας θεωρούμε κυλινδρική επιφάνεια Gauß, της οποίας ο άξονας είναι κάθετος προς την επιφάνεια του αγωγού ανά και προς την ένταση  $\vec{E}$ ).

Έστω ότι ένας αγωγός έχει φορτίο  $q$  και βρίσκεται σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, η οποία χαρακτηρίζεται από την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma = dq/dS$ . Αν εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss για μια στοιχειώδη κλειστή επιφάνεια Gauss (τυχαίου σχήματος), η οποία περιέχει το στοιχειώδες τμήμα  $dS$  της επιφάνειας του αγωγού ( βλ. σχ. 1.20), παίρνουμε:

$$\Phi = \Phi_{\text{βάσης}} + \Phi_{\text{οροφής}} + \Phi_{\text{παραπλ.}} = dq / \epsilon_0$$

$$\begin{aligned} & \text{βλ. παρακάτω} \\ \Rightarrow \Phi_{\text{οροφής}} &= dq / \epsilon_0 \Rightarrow EdS = dq / \epsilon_0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dS} \equiv \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad [1.24]$$

Κατά τον παραπάνω υπολογισμό πήραμε υπόψη, ότι:

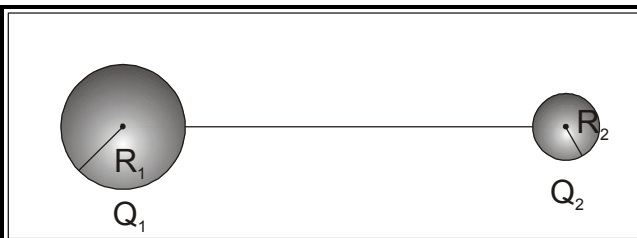
**1<sup>ο</sup>** ) το πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν, οπότε μηδέν είναι και η ροή μέσω της βάσης  $\Phi_{\text{βάσης}}$ .

**2<sup>ο</sup>** ) το πεδίο είναι κάθετο προς την επιφάνεια του αγωγού, οπότε η ροή,  $\Phi_{\text{παραπλ.}}$ , μέσω της παράπλευρης επιφάνειας του στοιχειώδους κυλίνδρου είναι επίσης μηδέν, ενώ η ροή μέσω της οροφής του είναι  $(E dS)$  (όπου  $E$  είναι η ένταση του πεδίου επί του στοιχείου  $dS$  και επομένως και επί της οροφής του κυλίνδρου, μια και αυτή βρίσκεται απειροστά πλησίον του στοιχείου).

**3<sup>ο</sup>** )  $dq$  είναι το φορτίο, το οποίο περιέχεται στο στοιχείο επιφάνειας  $dS$ .

Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση [1.24], η ένταση του πεδίου στα σημεία που βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια ενός φορτισμένου αγωγού είναι ανάλογη προς την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma$  του αγωγού. Όπως τώρα αποδεικνύεται πειραματικά ( στο σχ. 1.21 και θεωρητικά, σε ποιοτικό όμως επίπεδο)

η ένταση του πεδίου στα σημεία ( και πλησίον ) της επιφάνειας φορτισμένου αγωγού, ευρισκόμενου σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την ακτίνα καμπυλότητας της γεωμετρικής μορφής της επιφάνειάς του: στις αιχμές (μικρή ακτίνα καμπυλότητας) μεγάλη, στα σημεία μικρής καμπυλότητας μικρή.



Όπως το πεδίο (βλ. κεφ.1.6) έτσι και το δυναμικό σφαιρικής κατανομής φορτίου συμπίπτει με εκείνο σημειακού φορτίου, ίσου με το συνολικό φορτίο της σφαιρικής κατανομής και ευρισκόμενου στο κέντρο της σφαιρικής κατανομής. Επο-

μένως το δυναμικό επί της επιφάνειας φορτισμένης με φορτίο  $Q$  σφαίρας ακτίνας  $R$  είναι ( βλ. [1.15] ):

$$U_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad \{1\}.$$

Η επιφανειακή εξάλλου πυκνότητα φορτίου της σφαίρας είναι εξ ορισμού:  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$  {2}.

Οι δύο σφαίρες του παραπάνω σχήματος, φορτίου  $Q_1$  και  $Q_2$  και ακτίνας  $R_1$  και  $R_2$  αντίστοιχα, εφόσον συνδέονται με μεταλλικό σύρμα θα έχουν επί της επιφάνειάς τους το ίδιο δυναμικό, μια και αποτελούν ουσιαστικά έναν αγωγό, του οποίου η επιφάνεια θα είναι κατά συνέπεια ( βλ. κεφ.1.11) ισοδυναμική. Στην περίπτωση τώρα που οι δύο σφαίρες βρίσκονται αρκετά μακριά, ώστε η κατανομή φορτίου επί της επιφάνειας της μιας να μην επηρεάζει την κατανομή φορτίου επί της επιφάνειας της άλλης, το δυναμικό επί της επιφάνειας έκαστης θα δίδεται από την σχέση {1}, οπότε η ισότητα του δυναμικού γράφεται:

$$U_{R1} = U_{R2} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad \{3\}$$

Για τις επιφανειακές πυκνότητες φορτίου,  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ , των δύο σφαιρών έχουμε:

$$\sigma_i = \frac{Q_i}{4\pi R_i^2}, (i=1,2) \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1/R_1^2}{Q_2/R_2^2} \stackrel{\{3\}}{\Rightarrow} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \{4\}$$

Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση {4} η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, και επομένως βάσει της [1.24] και η ένταση του πεδίου κοντά στην επιφάνεια, των δυο σφαιρών είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την ακτίνα τους.

Η επιφάνεια τώρα ενός αγωγού τυχαίου σχήματος αποτελείται από τμήματα διαφορετικής (ακτίνας) καμπυλότητας και κατά συνέπεια διαφορετικής επιφανειακής πυκνότητας φορτίου. Ιδιαίτερα μεγάλη είναι η πυκνότητα φορτία στα αιχμηρά τμήματα, τα οποία δρουν σαν μικρές σφαίρες. Μεγάλη είναι επομένως και η ένταση του πεδίου στα σημεία αυτά.

Λόγω του ισχυρού πεδίου στις αιχμές ενός αγωγού, ο οποίος βρίσκεται μέσα στον αέρα, έχουμε σταδιακή εκφόρτιση του αγωγού μέσω έλξης των λίγων ιόντων, τα οποία πάντα υπάρχουν στον αέρα. Μάλιστα δε η τιμή του πεδίου στα αιχμηρά τμήματα ενός αγωγού μπορεί να γίνει τόσο μεγάλη, ώστε να ιονίσει τον περιβάλλοντα αέρα, με αποτέλεσμα την ακαριαία εκφόρτιση του αγωγού, γνωστής σαν **εκκένωση αιχμής**, όταν δε συνοδεύεται από φωτοβολία του αέρα και σαν **εκκένωση στέμματος**. (Ο ιονισμός του αέρα πραγματοποιείται ως εξής: τα υπάρχοντα σ' αυτόν ελάχιστα ιόντα, επιταχύνονται από το πεδίο του αγωγού, κινούμενα δε προς αυτόν συγκρούονται με ουδέτερα άτομα του αέρα, τα οποία και ιονίζουν, λόγω της μεγάλης τους ταχύτητας. Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται με την συμμετοχή και των νέων, δευτερογενών ιόντων με αποτέλεσμα την τρομακτική αύξηση του αριθμού τους με μορφή χιονοστιβάδας.)

**Εφαρμογές:** 1<sup>η</sup>) Κατά τον σχεδιασμό εγκαταστάσεων υψηλής τάσης αποφεύγονται τα αιχμηρά τμήματα προς αποφυγή ηλεκτρικών εκκενώσεων σαν συνέπεια ισχυρών πεδίων.

2<sup>η</sup>) Με την βοήθεια των αλεξικέραυνων πετυχαίνουμε, μέσω του ισχυρού πεδίου στην κορυφή τους, την λεγόμενη «σιωπηλή» (δηλαδή χωρίς κεραυνό) εκκένωση. Με τον τρόπο αυτό πραγματοποιείται ανταλλαγή φορτίου με την ατμόσφαιρα, χωρίς τις καταστροφικές συνέπειες του κεραυνού.

3<sup>η</sup>) Η εξαγωγή ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο με την βοήθεια ηλεκτρικού πεδίου («**εκπομπή πεδίου**») απαιτεί εντάσεις της τάξεως  $10^9$  V/m. Με την βοήθεια μεταλλικών ακίδων ακτίνας 1μm πετυχαίνουμε τέτοιες εντάσεις με τάσεις μερικών μόνο εκατοντάδων Volts. Ακίδες αυτού του είδους χρησιμοποιούνται για την δημιουργία ελευθέρων ηλεκτρονίων σε υψηλό κενό και καλούνται **κάθοδοι πεδίου**.

## Παράδειγματα

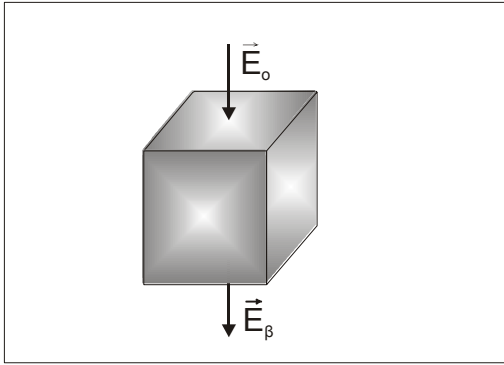
**Παράδειγμα Σ.1.1:** Όπως δείχνουν πειραματικές μελέτες, το πεδίο της γης είναι, σε μεγάλες περιοχές της ατμόσφαιρας, ακτινικό με φορά προς την επιφάνεια της γης. Η ένταση του σε ύψος 200m και 300m ισούται με 100 N/C και 60 N/C περίπου, αντίστοιχα. Να υπολογισθεί το φορτίο, το οποίο περιέχεται σε κύβο ακμής 100m και ευρισκόμενο μεταξύ 200 και 300m ύψους από την επιφάνεια της γης. (Η καμπυλότητα της γης να παραληφθεί)

**Λύση:**

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss για την επιφάνεια του εν λόγω κύβου, σκεπτόμενοι ολική ροή μέσω της παράπλευρης επιφάνειας είναι μηδέν, μια και η γωνία μεταξύ της έντασης  $\vec{E}$  και του αντίστοιχου διανύσματος  $\vec{S}$  είναι  $90^\circ$  :

$$\Phi = (E_\beta - E_o)S = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow q = \epsilon_0 (E_\beta - E_o)S = 8,854 \cdot 10^{-12} (100 - 60)100^2 \Rightarrow q = 3,54 \cdot 10^{-6} C$$





Αν υποθέσουμε ότι τα ιόντα, στα οποία οφείλεται το παραπάνω φορτίο είναι μονοσθενή, τότε στον παραπάνω κύβο περιέχονται

$$N = q / e = 3,54 \cdot 10^6 / (1,6021 \cdot 10^{-19}) \Rightarrow$$

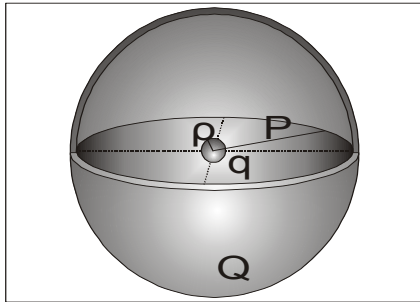
$$\Rightarrow N = 2,21 \cdot 10^{13} \text{ ιόντα} / 10^6 \text{ m}^3$$

Επομένως ο μέσος αριθμός ιόντων ανέρχεται σε  $\bar{N} = 2,21 \cdot 10^7$  ιόντα/ $\text{m}^3$  ή 22,1 ιόντα / $\text{cm}^3$ . Ο αντίστοιχος αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων ενός μετάλλου ισούται με  $10^{22} \sim 10^{23} \text{ e/cm}^3$ , είναι δηλα-

δή περίπου  $10^{22}$  φορές μεγαλύτερος! Το γεγονός αυτό μας δείχνει πόσο κακός αγωγός είναι ο ατμοσφαιρικός αέρας, κάτω από φυσιολογικές εννοείται συνθήκες.

**Παράδειγμα Σ.1.2:** Σφαίρα ακτίνας  $\rho$  είναι τοποθετημένη στο κέντρο σφαιρικού φλοιού ακτίνας  $P$  ( $> \rho$ ). Η σφαίρα και ο φλοιός έχουν φορτίο  $q$  και  $Q$  αντίστοιχα. Ζητείται η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους.

**Λύση:**



Το παραπάνω σύστημα σφαίρας - φλοιού αποτελεί προφανώς μια δυνατότητα υλοποίησης της σφαιρικής κατανομής φορτίου. Βάσει δε των όσων είπαμε στο κεφάλαιο 1.6, το πεδίο στον χώρο μεταξύ σφαίρας και φλοιού δίδεται από την σχέση ([ 1.7 ]):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r} \quad \{1\}$$

**Σχήμα Π.Σ.1.2:** Φορτισμένη σφαίρα ακτίνας  $\rho$  εντός φορτισμένου σφαιρικού φλοιού ακτίνας  $P$ .

Η διαφορά του δυναμικού μεταξύ των δύο σφαιρών υπολογίζεται από την σχέση [1.23a]

$$U_P - U_\rho = - \int_\rho^P \vec{E} d\vec{s} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\rho^P \frac{\vec{r}}{r^2} d\vec{s} \stackrel{\vec{r}d\vec{s}=dsdr}{=} =$$

$$- \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\rho^P r^{-2} dr = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [-r^{-1}]_\rho^P \Rightarrow U_P - U_\rho = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{\rho} \right)$$

Στην περίπτωση που η σφαίρα είναι θετικά φορτισμένη ( $q > 0$ ), η παραπάνω διαφορά είναι αρνητική, ο φλοιός δηλαδή έχει μικρότερο δυναμικό από την σφαίρα. Αν συνδέσουμε τότε την σφαίρα με τον φλοιό μέσω ενός σύρματος, όλο το φορτίο της σφαίρας θα κινηθεί προς τον φλοιό, μια και όπως ξέρουμε, τα θετικά φορτία κινούνται πάντα προς χαμηλότερο δυναμικό. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ενόητο, μια και το σύστημα ( σφαίρα - σύρμα - φλοιός ) αποτελεί ουσιαστικά έναν μοναδικό αγωγό όπως δε είδαμε στο κεφάλαιο 1.11, στην κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας όλο το πλεονάζον φορτίο ενός αγωγού κατανέμεται εξ ολοκλήρου στην εξωτερική του επιφάνεια.

**Παρατήρηση:** Αρκετά διδακτικός και πιο κοντά στην πρακτική αντιμετώπιση παρόμοιων ηλεκτροστατικών προβλημάτων (αν και λιγότερο κομψός) είναι ο ακόλουθος τρόπος επίλυσης:



Σύμφωνα με την αρχή της γραμμικής υπερθέσεως (βλ. κεφ. 1.7.1), το δυναμικό έ-  
καστου αγωγού θα είναι το άθροισμα των δυναμικών, τα οποία θα είχε, αν μόνο ένας εκ των  
δύο ήταν φορτισμένος:

$$\left. \begin{aligned} U_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{P} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{P} \\ U_\rho &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{P} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\rho} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ο πρώτος προσθετέος είναι το δυναμικό λόγω του} \\ \text{φορτίου του φλοιού ο δεύτερος λόγω του φορτίου} \\ \text{της σφαίρας.} \end{array}$$

(Κατά τα παραπάνω πήραμε υπόψη, ότι και οι δύο κατανομές φορτίου είναι σφαιρικές  
(οπότε το δυναμικό στο εξωτερικό τους δίδεται από την σχέση [1.15]), και ότι το δυναμικό  
στο εσωτερικό ενός αγωγού ευρισκόμενου σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας ισού-  
ται με εκείνο της επιφάνειας του αγωγού .)

Για την διαφορά δυναμικού παίρνουμε:  $U_P - U_\rho = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{\rho} \right)$ , το ίδιο δηλαδή απο-  
τέλεσμα όπως και προηγουμένως.

---

**Παρατήρηση:** Όπως είδαμε, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού, ευρισκόμενου  
σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας είναι μηδέν. Αν λοιπόν θεωρήσουμε έναν αγωγό  
ευρισκόμενο σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, και επιφάνεια Gauss τυχαίας μορ-  
φής στο εσωτερικό του, τότε το πεδίο σε όλα τα σημεία της επιφάνειας αυτής θα ισούται με  
μηδέν, οπότε μηδέν είναι και η αντίστοιχη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου καθώς και το ε-  
ντός της επιφάνειας ευρισκόμενο ηλεκτρικό φορτίο. Έτσι το τμήμα του αγωγού, το οποίο  
βρίσκεται εντός της επιφάνειας Gauss, ουδεμία ηλεκτρική επίδραση ασκεί επί του εκτός της  
επιφάνειας κείμενο (αλλά και γενικότερα επί του περιβάλλοντος)<sup>2</sup> και κατά συνέπεια δεν ε-  
πηρεάζει την τιμή του ηλεκτρικού πεδίου. Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο παραμένει ίσο με μη-  
δέν στο εσωτερικό ακόμη και ενός κοίλου αγωγού συμπεριλαμβανομένης και της κοιλότητας.

---

<sup>2</sup> Βέβαια και ένας αφόρτιστος αγωγός στερείται εξ ορισμού πλεονάζοντος φορτίου. Αυτό  
όμως δεν σημαίνει ότι δεν επηρεάζει την τιμή του εκτός αυτού επικρατούντος ηλεκτρικού  
πεδίου, επειδή δεν στερείται οπωσδήποτε και επιφανειακής πυκνότητας φορτίου: Όταν ο α-  
γωγός βρεθεί εντός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου φορτίζεται επαγωγικά με αποτέλεσμα την  
εμφάνιση επιφανειακής πυκνότητας φορτίου ίσης με  $\epsilon_0 E$ , η οποία επιδρά οπωσδήποτε επί του  
περιβάλλοντος και επιπλέον φροντίζει για τον μηδενισμό του συνολικού πεδίου στο εσωτερι-  
κό του αγωγού.