ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ (Θ)

Χασάπης Δημήτριος
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΕ

Άδειες Χρήσης

- **Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.**

- **Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.**

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

5. Εναλλασσόμενα ρεύματα

Εναλλασσόμενο καλείται το ***ρεύμα,*** του οποίου η τιμή και η φορά είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Στην περίπτωση δε που πρόκειται για *ημιτονοειδή* (ή *συνιμητονοειδή*) συνάρτηση, το εναλλασσόμενο ρεύμα χαρακτηρίζεται ως ***αρμονικό.*** Αυτή την ειδική κατηγορία εναλλασσομένου ρεύματος θα εννοούμε, ακόμη και όταν μιλάμε απλώς για εναλλασσόμενο ρεύμα, εκτός και αν το τονίζουμε, ότι πρόκειται για *μη* ημιτονοειδές εναλλασσόμενο ρεύμα.

Ένα κύκλωμα διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, όταν στα άκρα του εφαρμόζεται ***εναλλασσόμενη τάση:*** τάση της οποίας η τιμή και το πρόσημο είναι περιοδικές συναρτήσει του χρόνου. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 4.2.6ε, εναλλασσόμενη τάση αναπτύσσεται στους ακροδέκτες μιας γεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος σαν άμεση εφαρμογή του φαινόμενου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής. Σημειωτέον ότι η κατασκευή μιας γεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος είναι αισθητά απλούστερη από εκείνη των γεννητριών συνεχούς, γεγονός το οποίο αποτελεί έναν από τους λόγους, στους οποίους οφείλεται η ευρεία χρήση εναλλασσομένου ρεύματος - όχι όμως και τον σπουδαιότερο! Αυτός συνδέεται:

α) με την δυνατότητα του εύκολου και σχεδόν χωρίς ενεργειακές απώλειες μετασχηματισμού της εναλλασσόμενης τάσης μέσω μετασχηματιστών (βλ. 4.6.2η). Έτσι η μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας από τις μονάδες παραγωγής στους τόπους κατανάλωσης γίνεται υπό υψηλή τάση και άρα χαμηλή ένταση, με αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση των θερμικών απωλειών λόγω του φαινομένου Joule. Εν συνεχεία στους τόπους κατανάλωσης η τάση υποβιβάζεται στα γνωστά μας 220 ή 380 V, με τα οποία τροφοδοτείται η οικιακή και βιομηχανική κατανάλωση.

β) με την δυνατότητα διανομής του εναλλασσομένου ρεύματος ως τριφασικό, η οποία επιτρέπει την χρήση των λεγομένων *ασύγχρονων* (η γωνιακή τους ταχύτητα είναι διαφορετική από την κυκλική συχνότητα του ρεύματος) *κινητήρων,* οι οποίοι είναι οι απλούστεροι και οικονομικότεροι ηλεκτροκινητήρες.

Φυσικά υπάρχουν τομείς, όπου επιβάλλεται η χρήση συνεχούς ρεύματος (τηλεπικοινωνίες, ηλεκτροχημική βιομηχανία, διάφορες οικιακές συσκευές κ.λ.π.). Ακόμη όμως και σ' αυτούς η απαιτούμενη ηλεκτρική ενέργεια προέρχεται από την ανόρθωση εναλλασσομένου ρεύματος.

Η συντριπτική λοιπόν μερίδα της δαπανώμενης παγκοσμίως ηλεκτρικής ενέργειας παράγεται υπό εναλλασσόμενη μορφή. Η μελέτη επομένως των ιδιοτήτων του εναλλασσομένου ρεύματος επιβάλλεται από την πληθώρα των τεχνικών του εφαρμογών.

5.1 Χαρακτηριστικά εναλλασσομένων μεγεθών

Η **γενική εξίσωση** ενός (αρμονικώς) **εναλλασσομένου μεγέθους α** έχει την μορφή

$$\boxed{\alpha = A_0 \sin(\omega t + \varphi)} \qquad [5.1]$$

όπου A_0 = ***πλάτος*** του εναλλασσομένου μεγέθους.

ω = ***κυκλική συχνότητα*** του εναλλ. μεγέθους. (Στην περίπτωση π.χ. που το εναλλασσόμενο μέγεθος είναι η στα άκρα εντός μαγνητικού πεδίου περιστρεφόμενου πλαισίου αναπτυσσόμενη τάση, η κυκλική συχνότητα ισούται αριθμητικά με την γωνιακή ταχύτητα του πλαισίου. Βέβαια η φυσική υπόσταση της κυκλικής συχνότητας είναι εντελώς διαφορετική από εκείνη της γωνιακής ταχύτητας!)

t = ο χρόνος

(ωt + φ) = ***φάση*** του εναλλ. μεγέθους. Σημειωτέον ότι *η φάση μετράται σε ακτίνια (rad)!*

φ = ***αρχική φάση*** του εναλλ. μεγέθους, δηλ. **φάση κατά την χρονική στιγμή t = 0.** (Στην περίπτωση της εναλλασσόμενης τάσης περιστρεφόμενου πλαισίου, η μεν φάση (ωt + φ) ισούται με την γωνία μεταξύ της καθέτου επί του πλαισίου και της διεύθυνσης του πεδίου σε μια τυχαία χρονική στιγμή t, η δε αρχική φάση με την τιμή της εν λόγω γωνίας κατά την χρονική στιγμή t = 0).

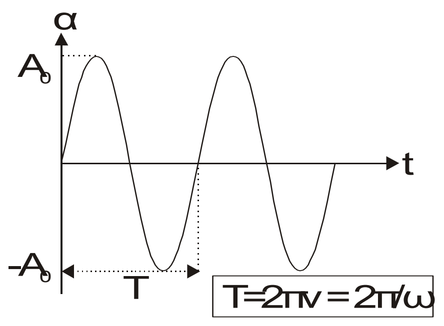
Χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις $\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$ [5.2],

παίρνουμε τις ακόλουθες, ισοδύναμες προς την [5.1] σχέσεις:

$$\boxed{\alpha = A_0 \sin(2\pi\nu t + \phi) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \phi\right)} \qquad [5.1α]$$

όπου ***ν*** = ***συχνότητα*** εναλλ. μεγέθους. Ισούται με τον αριθμό των πλήρων εναλλαγών του εναλλασσομένου μεγέθους στην μονάδα του χρόνου. (Στην περίπτωση της εναλλασσόμενης τάσης, η οποία παράγεται μέσω περιστρεφόμενου πλαισίου, ισούται ουσιαστικά με τον αριθμό περιστροφών του πλαισίου στην μονάδα του χρόνου).

T = ***περίοδος*** του εναλλ. μεγέθους. Πρόκειται για τον χρόνο μεταξύ δύο πλήρων διαδοχικών εναλλαγών, εντός του οποίου το εναλλασσόμενο μέγεθος ολοκληρώνει όλο το φάσμα των τιμών του, οπότε επαναλαμβάνεται ο ίδιος κύκλος τιμών. (Στην περίπτωση της γνωστής μας πλέον εναλλασσόμενης τάσης η περίοδος ισούται αριθμητικά με τον χρόνο μιας πλήρους περιστροφής του πλαισίου).



Σχήμα 5.1: Χρονοδιάγραμμα αρμονικού εναλλ. μεγέθους με αρχική φάση ίση με μηδέν.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά γίνονται κατανοητά με την βοήθεια του διπλανού ***χρονοδιαγράμματος,*** στο οποίο απεικονίζεται ένα τυχαίο εναλλασσόμενο μέγεθος, του οποίου η αρχική φάση ισούται με μηδέν.

5.2 Παράσταση εναλλασσομένου μεγέθους μέσω περιστρεφομένου ανύσματος

Ο φυσικός, θα λέγαμε, τρόπος της γραφικής παράστασης ενός (αρμονικώς εννοείται πάντα) εναλλασσομένου μεγέθους είναι το μόλις προαναφερθέν ***χρονοδιάγραμμα*** (βλ. σχ. 5.1): Πρόκειται για ένα διάγραμμα σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, του οποίου ο κατακόρυφος άξονας (***άξονας των τεταγμένων***) είναι ο άξονας του εναλλασσομένου μεγέθους και ο οριζόντιος (**άξονας των τετμημένων**) είναι ο άξονας του χρόνου.

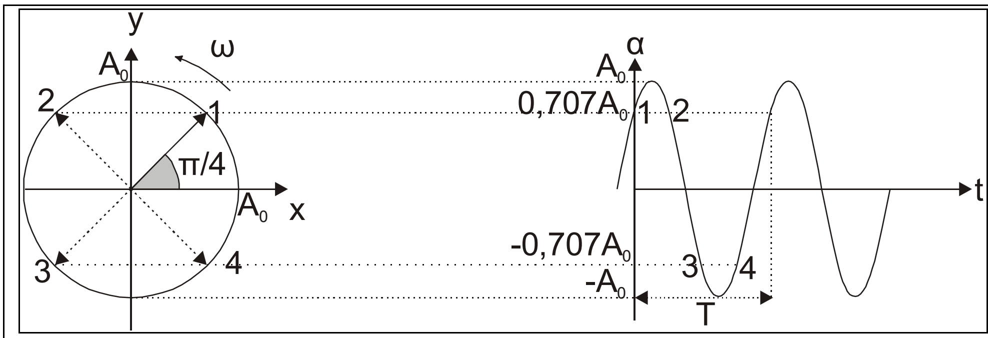
Το βασικό πλεονέκτημα του χρονοδιαγράμματος είναι ότι η στιγμιαία τιμή του εναλλασσομένου μεγέθους σε μια τυχαία χρονική στιγμή μπορεί να αναγνωσθεί απ' ευθείας από το διάγραμμα. Η ακριβής όμως χάραξη του εν λόγω διαγράμματος μπορεί να γίνει μόνο με την βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών και καταλλήλων σχεδιαστικών, γεγονός το οποίο περιορίζει αισθητά την πρακτική του χρησιμότητα. Εξάλλου, στις περισσότερες εφαρμογές, η στιγμιαία τιμή ενός εναλλασσομένου μεγέθους έχει μικρή έως και ανεπαίσθητη αξία. (Τι μας ενδιαφέρει, για παράδειγμα, η στιγμιαία τιμή της τάσης ενός ρευματοδότη (κν. «πρίζα») στο σπίτι μας, όταν αυτή μεταβάλλεται διαρκώς, παίρνοντας 50 φορές το δευτερόλεπτο όλο το φάσμα των τιμών της;). Για τους λόγους αυτούς στην πράξη προτιμάται συνήθως

Η *γραφική παράσταση ενός εναλλασσομένου μεγέθους με την βοήθεια περιστρεφομένου ανύσματος* στηρίζεται στους ακόλουθους συμβατικούς κανόνες:

α) Σ’ ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xy παίρνουμε (βλ. σχ. 5.2) άνυσμα $\vec{a}$, του οποίου το μήκος θα ισούται αριθμητικά με το πλάτος A_0 του εναλλασσομένου μεγέθους α.

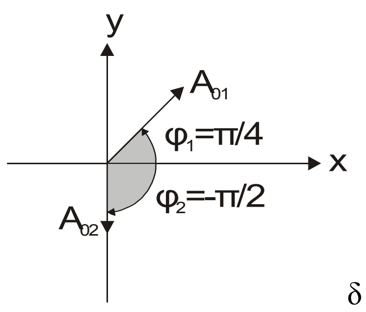
β) Το εν λόγω άνυσμα τοποθετείται στο διάγραμμα έτσι ώστε η μεν αρχή του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, η δε διεύθυνση του σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα x γωνία y, ίση με την αρχική φάση του εναλλασσομένου μεγέθους.

γ) Η στιγμιαία τιμή του εναλλασσομένου μεγέθους κατά την τυχαία χρονική στιγμή t υπολογίζεται με τον ακόλουθο τρόπο: θεωρούμε, ότι το άνυσμα $\vec{a}$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, ίση προς την κυκλική συχνότητα του εναλλασσομένου μεγέθους, και κατά την αντίθετη προς εκείνη των δεικτών του ωρολογίου φορά. Τότε - όπως παραστατικότατα φαίνεται από το σχήμα 5.2 - η προβολή του ανύσματος $\vec{a}$ επί του άξονα y (εξ ου και ***«άξονας προβολών»)*** ισούται αριθμητικά με την στιγμιαία τιμή $(a = A_0)\sin(\omega t + \phi)$ του εναλλασσομένου μεγέθους α. Εξάλλου η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης του ανύσματος και του άξονα x (εξ ου και «***άξονας φάσεων***») ισούται με την φάση ($\omega t + \phi$) κατά την τυχαία χρονική στιγμή t. (Εννοείται βέβαια, ότι για τον υπολογισμό της γωνίας πήραμε υπόψη μας και τον αριθμό των πλήρων περιστροφών του ανύσματος μέχρι την χρονική στιγμή t).



Σχήμα 5.2: Διανυσματική παράσταση εναλλασσομένου μεγέθους α = $A_0\sin(\omega t + \varphi)$ με την βοήθεια περιστρεφομένου ανύσματος. Η αρχική φάση φ θεωρήθηκε ίση με π/4 (= 45^o).

Η γραφική παράσταση ενός εναλλασσομένου μεγέθους μέσω περιστρεφόμενου ανύσματος χρησιμοποιείται ευρύτατα στις τεχνικές εφαρμογές, επειδή έχει το πλεονέκτημα να είναι απλή και αρκούντως πλήρης. Το τελευταίο συνδέεται με το γεγονός, ότι αποδίδει άμεσα όλα τα (στις συνηθισμένες τεχνικές εφαρμογές) ενδιαφέροντα στοιχεία του εναλλασσομένου μεγέθους: πλάτος, αρχική φάση, διαφορά φάσεως μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεγεθών, καθώς και την κυκλική συχνότητα ω του απεικονιζόμενου μεγέθους, η οποία συμβολίζεται με ένα βέλος ως γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου ανύσματος. Στο σχήμα 5.3 για παράδειγμα απεικονίζονται μέσω διανυσμάτων δύο εναλλασσόμενα μεγέθη με πλάτη A_{01} και A_{02}, κυκλική συχνότητα ω και αρχικές φάσεις $\varphi_1 = \pi/4$ και $\varphi_2 = -\pi/2$ αντίστοιχα. Από το σχήμα φαίνεται άμεσα, ότι η διαφορά φάσεως ισούται με 3π/4.



δ

Σχήμα 5.3: Διανυσματική παράσταση δύο εναλλασσομένων μεγεθών με πλάτη A_{01} και A_{02}, κυκλική συχνότητα ω και αρχικές φάσεις $\varphi_1 = \pi/4$ και $\varphi_2 = -\pi/2$ αντίστοιχα.

Δύσχρηστη γίνεται η διανυσματική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών, όταν πρέπει (στα πλαίσια θεωρητικών αλλά και πρακτικών προβλημάτων) να κάνουμε υπολογισμούς: προσθέσεις, αφαιρέσεις και κυρίως πολλαπλασιασμούς, διαιρέσεις, παραγωγίσεις και ολοκληρώσεις εναλλασσομένων μεγεθών. Οι προκύπτουσες τότε δυσκολίες σχετίζονται με την φύση των διανυσμάτων, για την περιγραφή έκαστου των οποίων χρειάζεται (εφόσον περιοριζόμαστε στο επίπεδο) ένα *ζεύγος* αριθμών, με αποτέλεσμα ο μαθηματικός τους χειρισμός να είναι πολυπλοκότερος εκείνου των μονόμετρων μεγεθών. Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε τις εν λόγω υπολογιστικές δυσκολίες καταφεύγουμε στην

5.3 Μιγαδική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών

Ένας ***μιγαδικός αριθμός z*** μπορεί να γραφεί πάντα στην (***ορθοκανονική*** ή ***καρτεσιανή,*** όπως λέγεται) ***μορφή***

$$\boxed{\underline{z} = x + jy} \qquad [5.3]$$

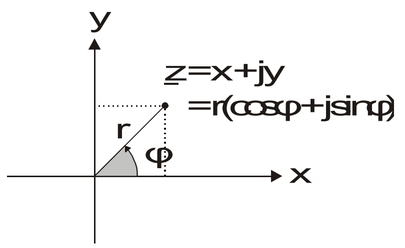
όπου ***x, y*** δύο τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.

Οι πραγματικοί αριθμοί x και y χαρακτηρίζονται ως το ***πραγματικό*** και ***φανταστικό μέρος*** του μιγαδικού αριθμού $\underline{z}$ αντίστοιχα, γεγονός το οποίο εκφράζεται συμβολικά ως εξής:

$$\boxed{\mathrm{Re}(\underline{z}) = x} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(\underline{z}) = y} \qquad [5.3\alpha]$$

Το ***j*** εξάλλου ονομάζεται ***φανταστική μονάδα*** και ορίζεται έτσι ώστε $\boxed{j^2 =: -1}$ [5.4]

(Σημειωτέον ότι στην μαθηματική βιβλιογραφία η φανταστική μονάδα συμβολίζεται με i. Στην τεχνική όμως βιβλιογραφία συμβολισμός αυτός θα οδηγούσε μοιραία σε σύγχυση, μια και χρησιμοποιείται και για την ένταση του ρεύματος. Για τον λόγο αυτό στην τεχνική βιβλιογραφία η φανταστική μονάδα συμβολίζεται με j).



Σχήμα 5.4: Ορθοκανονονική και πολική γραφή ενός μιγαδικού αριθμού.

Οι υπολογισμοί με μιγαδικούς αριθμούς γίνονται όπως και με τους πραγματικούς αριθμούς, αρκεί να παίρνουμε υπόψη μας την σχέση [5.4].

Όπως οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν γραφικά ως σημεία επάνω σε μια ευθεία, έτσι και οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν γραφικά σαν σημεία επάνω σε ένα επίπεδο, το οποίο καλείται ***επίπεδο Gauss.*** Το επίπεδο Gauss ορίζεται από ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων x, y. Ο οριζόντιος άξονας x καλείται ***πραγματικός άξονας,*** ενώ ο y ***φανταστικός άξονας.*** Ένας μιγαδικός αριθμός $\underline{z} = x + jy$ είναι το σημείο εκείνο του επιπέδου Gauss με τις συντεταγμένες (x, y) (βλ. σχ. 5.4).

Εκφράζοντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες x και y συναρτήσει των πολικών r και φ

$\boxed{x = r\cos\phi}$ $\boxed{y = r\sin\phi}$ {1}

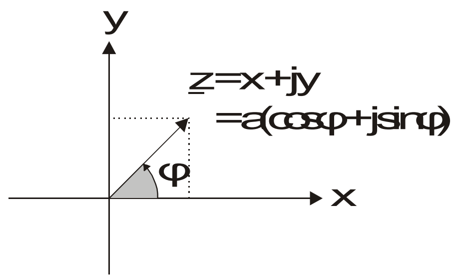
παίρνουμε την λεγόμενη ***πολική γραφή*** ενός μιγαδικού αριθμού

$$\boxed{\underline{z} = r(\cos\phi + j\sin\phi)} \qquad [5.5]$$

όπου $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2} \equiv |\underline{z}|}$ = μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\underline{z}$

φ = όρισμα του μιγαδικού αριθμού $\underline{z}$: **φ = Arg (** $\underline{z}$ **)**

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.4, η γωνία φ μπορεί να υπολογισθεί από την σχέση $\boxed{\tan\varphi = y/x.}$



Σχήμα 5.5: Περιγραφή ενός ανύσματος $\vec{a}$ μέσω του μιγαδικού αριθμού $\underline{z}$.

Αντί ενός σημείου θα μπορούσαμε εξίσου καλά να περιγράψουμε μέσω ενός μιγαδικού αριθμού $\underline{z} = x + jy$ ένα άνυσμα $\vec{a}$ (βλ. σχ. 5.5): Το μέτρο a του εν λόγω ανύσματος θα προσδιορίζετο από το μέτρο $|\underline{z}|$ του μιγαδικού αριθμού ($a = |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$), ενώ η γωνία φ μεταξύ του ανύσματος $\vec{a}$ και του φανταστικού άξονα x θα συνέπιπτε με το όρισμα φ του μιγαδικού αριθμού $\underline{z}$ και θα μπορούσε να υπολογισθεί από την σχέση tanφ = y/x.

Η δυνατότητα περιγραφής ενός ανύσματος μιγαδικού αριθμού μας δίνει το πλεονέκτημα αναγωγής του διανυσματικού λογισμού σε συνήθεις αριθμητικές πράξεις. Το ίδιο βέβαια θα μπορούσαμε να πετύχουμε εργαζόμενοι με τις συντεταγμένες του ανύσματος και μάλιστα χωρίς να μπλέξουμε με φανταστικές μονάδες. Θα μπορούσε λοιπόν κάποιος να διερωτηθεί, προς τι η φασαρία περί μιγαδικών αριθμών; Την απάντηση μας την δίνει η ***σχέση του Euler:***

$$\boxed{e^{+-j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi} \qquad [5.6]$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να γράψουμε έναν μιγαδικό αριθμό $\underline{z} = x + jy = r(\cos\phi + j\sin\phi)$ με την ακόλουθη ***εκθετική μορφή:***

$$\boxed{\underline{z} = re^{j\phi} \equiv r\underline{|\phi}} \qquad [5.7]$$

(Ο δεύτερος, *καθαρά συμβατικός* συμβολισμός, ο οποίος εισήχθη προς διευκόλυνση των τυπογραφείων και μόνο, θα λέγαμε ότι δεν είναι πλέον απαραίτητος στα πλαίσια της σύγχρονης τυπογραφικής και εκτυπωτικής τεχνολογίας. Ο συμβολισμός όμως αυτός παραμένει δημοφιλής, επειδή έχει το πλεονέκτημα να αποδίδει άμεσα τα δύο κύρια στοιχεία του διανυσματικού μεγέθους που παριστάνει: το μέτρο του r και -μέσω της γωνίας φ- τον προσανατολισμό του.)

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\boxed{\pm j = e^{\pm j\pi/2} \equiv \underline{|\pm \pi/2}}$ [5.8]

(Συγκεκριμένα $e^{\pm j\pi/2} \overset{[5.6]}{=} cos(\pi/2) \pm j\, sin(\pi/2) = \pm j$)

Με την βοήθεια της εκθετικής μιγαδικής έκφρασης ενός διανυσματικού μεγέθους οι υπολογισμοί απλουστεύονται δραματικά, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Προηγουμένως σε ξεκαθαρίσουμε τα διέποντα την

Εκθετική μιγαδική παράσταση εναλλασσομένων μεγεθών:

Ένα εναλλασσόμενο μέγεθος $a = A_0 \sin(\omega t + \phi)$ μπορεί (συμβατικά!) να θεωρηθεί, ότι παριστάνεται από το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $\underline{a} = A_0 \exp[j(\omega t + \phi)] \equiv A_0 \underline{|\omega t + \phi}$, αφού σύμφωνα με την σχέση του Euler έχουμε:

$$\underline{a} = A_0\, exp[j(\omega t + \varphi)] \overset{[5.6]}{=} A_0[cos(\omega t + \varphi) + j\, sin(\omega t + \varphi)] \Rightarrow Im(\underline{a}) = A_0\, sin(\omega t + \varphi) = a$$

Στην παραπάνω εκθετική μιγαδική παράσταση του εναλλασσομένου μεγέθους α διακρίνουμε άμεσα το πλάτος του A_0, την κυκλική του συχνότητα ω, την φάση ωt + φ και την αρχική του φάση φ.

Από τα παραπάνω προκύπτει εξάλλου ο ακόλουθος **κανόνας**, ο οποίος μας επιτρέπει *να* γράψουμε απ' ευθείας την τριγωνομετρική μορφή ενός εναλλασσομένου μεγέθους $a = A_0 \sin(\omega t + \phi)$, το οποίο παριστάνεται συμβολικά μέσω του φανταστικού μέρους του μιγαδικού αριθμού $\underline{a} = A_0 \exp[j(\omega t + \phi)]$:

Γράφουμε τον μιγαδικό αριθμό στην συμβολική μορφή $\underline{a} = A_0 \underline{|\omega t + \phi}$ και στην συνέχεια αντικαθιστούμε το σύμβολο «∟» με το ημίτονο («sin»):

$$\underline{a} = A_0 \exp[j(\omega t + \phi)] \to A_0 \underline{|\omega t + \phi} \to a = A_0 \sin(\omega t + \phi)$$

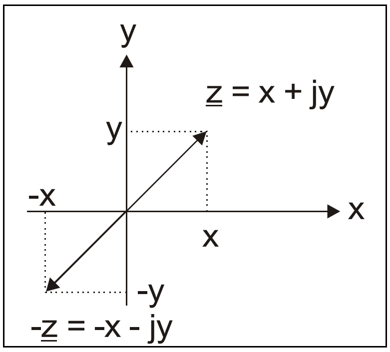
5.3.1 Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Ο χώρος των μιγαδικών αριθμών δεν εξαντλείται ουσιαστικά ούτε στα καλύτερα εγχειρίδια Μαθηματικών, στα εξειδικευμένα εκ των οποίων παραπέμπουμε κάθε ενδιαφερόμενο αναγνώστη. Εμείς εδώ συνοψίσαμε απλώς τους στοιχειώδεις εκείνους ορισμούς και κανόνες υπολογισμού, οι οποίοι πιστεύουμε ότι αρκούν για την αντιμετώπιση των προβλημάτων, τα οποία συναντώνται στις συνήθεις τεχνικές εφαρμογές των εναλλασσομένων ρευμάτων.

α) ***Μηδενικός μιγαδικός αριθμός,*** είναι ο μιγαδικός εκείνος αριθμός, του οποίου τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος ισούται με μηδέν. Στο επίπεδο Gauss ο μηδενικά μιγαδικός αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο τομής των αξόνων x και y.

β) ***Ίσοι*** ονομάζονται οι ***μιγαδικοί αριθμοί,*** των οποίων τόσο τα πραγματικά όσο και τα φανταστικά μέρη είναι ένα προς ένα ίσα:

$$\left.\begin{aligned}\underline{z}_1 = x_1 + jy_1\\ \underline{z}_2 = x_2 + jy_2\end{aligned}\right\}\underline{z}_1 = \underline{z}_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \kappa\alpha\iota \quad y_1 = y_2$$

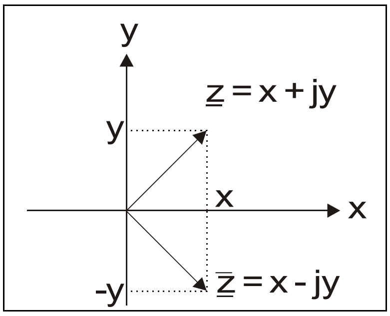


γ) *Αντίθετοι* ονομάζονται οι ***μιγαδικοί αριθμοί,*** $\underline{z} = x + jy$ και $-\underline{z} = -x - jy$

Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα, τα αντίστοιχα διανύσματα είναι ίσα και αντίθετα: έχουν δηλαδή ίσα μέτρα, τον ίδιο φορέα και αντίθετες φορές.

δ) *Συζυγείς* ονομάζονται οι ***μιγαδικοί αριθμοί*** $\underline{z} = x + jy$ και $\overline{\underline{z}} = x - jy$

Για δύο τυχαίους συζυγείς μιγαδικούς $\underline{z}$ και $\underline{w}$ ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες:



$$\boxed{\begin{gathered}\overline{\underline{z}+\underline{w}} = \overline{\underline{z}} + \overline{\underline{w}}\\ \overline{\underline{z}\cdot\underline{w}} = \overline{\underline{z}}\cdot\overline{\underline{w}}\\ \underline{z}\cdot\overline{\underline{z}} = \left|\underline{z}\right|^2\\ \underline{z} = re^{j\phi} \Rightarrow \overline{\underline{z}} = re^{-j\phi}\end{gathered}} \qquad [5.9]$$

Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, στο επίπεδο Gauss δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί αντιστοιχούν σε δύο κατοπτρικά (συμμετρικά) ως προς τον άξονα x διανύσματα.

δ) *Πρόσθεση/αφαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών* $\underline{z}_1 = x_1 + jy_1$ και $\underline{z}_2 = x_2 + jy_2$:

$$\boxed{\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 + y_2)} \qquad [5.10]$$

Δηλαδή το άθροισμα/διαφορά δύο μιγαδικών αριθμών είναι ένας νέος μιγαδικός αριθμός, του οποίου το πραγματικό και φανταστικό μέρος ισούται με το άθροισμα/διαφορά των πραγματικών και φανταστικών μερών αντίστοιχα.

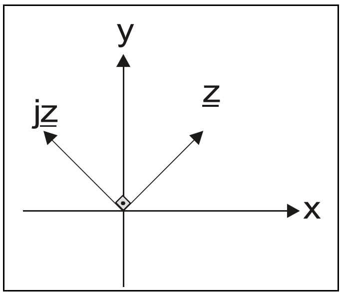
ε) Πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών $\underline{z}_1 = r_1 e^{j\phi_1}$ και $\underline{z}_2 = r_2 e^{j\phi_2}$:

$$\boxed{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 \cdot r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}} \text{ ή συμβολικά } \boxed{\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 \cdot r_2 \underline{|\varphi_1 + \varphi_2}} \qquad [5.11]$$

Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τα μέτρα και προσθέτουμε τα ορίσματα.

Ιδιαίτερη σημασία έχει ο **πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού** $\underline{z}$ **με την φανταστική μονάδα j:**

$$\boxed{j \cdot \underline{z} = e^{j\pi/2} \cdot re^{j\phi} = re^{j(\phi + \pi/2)} \equiv r\underline{|\phi + \pi/2}} \qquad [5.11\alpha]$$



Βλέπουμε λοιπόν, ότι πολλαπλασιάζοντας έναν μιγαδικό αριθμό με την φανταστική μονάδα αφήνουμε ανέπαφο το μέτρο του, αυξάνουμε όμως το όρισμα του κατά π/2. Αυτό σημαίνει, ότι ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού με την φανταστική μονάδα ισοδυναμεί με μία περιστροφή του αντιστοίχου διανύσματος στο επίπεδο Gauss κατά π/2 (≙90°). Για τον λόγο αυτό η φανταστική μονάδα j ονομάζεται και ***στροφέας.***

ζ) Διαίρεση δύο μιγαδικών αριθμών $\underline{z}_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$ και $\underline{z}_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$:

$$\boxed{\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}} \text{ ή συμβολικά } \boxed{\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} \underline{|\varphi_1-\varphi_2}} \qquad [5.12]$$

Δηλαδή διαιρούμε τα μέτρα και αφαιρούμε τα ορίσματα.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η **διαίρεση ενός μιγαδικού αριθμού** $\underline{z}$ **με την φανταστική μονάδα** j:

$$\frac{\underline{z}}{j} = \frac{re^{j\varphi}}{e^{j\pi/2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\underline{z}}{j} = re^{j(\varphi-\pi/2)} \equiv r\underline{|\varphi-\pi/2}} \qquad [5.12α]$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι διαιρώντας έναν μιγαδικό αριθμό με την φανταστική μονάδα αφήνουμε ανέπαφο το μέτρο του, ελαττώνουμε όμως το όρισμα του κατά π/2. Αυτό σημαίνει ότι η διαίρεση ενός μιγαδικού αριθμού με την φανταστική μονάδα ισοδυναμεί με μια περιστροφή του αντιστοίχου διανύσματος στο επίπεδο Gauss κατά -π/2(≙ 90°).

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε εξάλλου

$$\frac{1}{j} = \frac{e^0}{e^{j\pi/2}} = e^{j(0-\pi/2)} = e^{-j\pi/2} \overset{[5.8]}{=} -j \Leftrightarrow \boxed{1/j = -j} \qquad [5.13]$$

η) ***νιοστή δύναμη μιγαδικού αριθμού:*** $\underline{z}^\nu = \left(re^{j\varphi}\right)^\nu \Rightarrow \boxed{\underline{z}^\nu = r^\nu e^{j\nu\varphi} \equiv r^\nu \underline{|\nu\varphi}}$ [5.14]

θ) Παραγώγιση μιγαδικού αριθμού: Όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 5.3, κατά την μελέτη εναλλασσομένων μεγεθών (εντάσεων ή τάσεων) μας ενδιαφέρει η ακόλουθη μορφή μιγαδικών αριθμών: $\boxed{\underline{z} = re^{j(\omega t+\phi)}}$ {1} (Το φ είναι πλέον η *αρχική φάση*!).

Η παραγώγιση ενός τέτοιου μιγαδικού αριθμού ως προς τον χρόνο γίνεται ως εξής:

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[re^{j(\omega t+\varphi)}\right] = r\frac{d}{dt}\left[e^{j\varphi}e^{j\omega t}\right] = re^{j\varphi}\frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega re^{j\varphi}e^{j\omega t} = j\omega re^{j(\omega t+\varphi)} \overset{\{1\}}{\Rightarrow} \boxed{\frac{d\underline{z}}{dt} = j\omega\underline{z}} \quad [5.15]$$

όπου $\boxed{\underline{z} = re^{j(\omega t+\phi)}}$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η παραγώγιση ενός μιγαδικού αριθμού $\underline{z} = e^{j(\omega t+\phi)}$ ως προς τον χρόνο t ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του επί τον παράγοντα (jω).

Παίρνοντας εξάλλου υπόψη μας, ότι $j = e^{j\pi/2}$ προκύπτει:

$$\boxed{\frac{d\underline{z}}{dt} = \omega r e^{j[(\omega t+\phi)+\pi/2]}} \qquad [5.15α]$$

Επομένως η παραγώγιση ενός μιγαδικού αριθμού $\underline{z} = re^{j(\omega t+\phi)}$ ως προς τον χρόνο t ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του μέτρου του επί ω και αύξηση της φάσεως του κατά π/2.

Το αντίστοιχο διάνυσμα του επιπέδου Gauss αυξάνει το μήκος του κατά ω ενώ στρέφεται συγχρόνως κατά π/2.

ι) ***Ολοκλήρωση*** ενός ***μιγαδικού αριθμού*** της μορφής $\underline{z} = re^{j(\omega t+\phi)}$ ως προς τον χρόνο:

$$\int \underline{z}dt = \int re^{j(\omega t+\phi)}dt = r\int e^{j\phi}e^{j\omega t}dt = re^{j\phi}\int e^{j\omega t}dt = re^{j\phi}\left(\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}\right) = \frac{re^{j(\omega t+\phi)}}{j\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \underline{z}dt = \frac{\underline{z}}{j\omega}} \quad \text{όπου} \quad \underline{z} = re^{j(\omega t+\phi)} \qquad [5.16]$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι η ολοκλήρωση ενός μιγαδικού αριθμού $z = e^{j(\omega t+\phi)}$ ως προς τον χρόνο t ισοδυναμεί με διαίρεση του με τον παράγοντα (jω).

Παίρνοντας εξάλλου υπόψη μας, ότι $1/j = -j = e^{-j\pi/2}$ προκύπτει:

$$\boxed{\int \underline{z}dt = \frac{r}{\omega}e^{j(\omega t+\phi-\pi/2)}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\int \underline{z}dt = \frac{r}{\omega}\underline{|\omega t+\phi-\pi/2}} \qquad [5.16α]$$

Επομένως η ολοκλήρωση ενός μιγαδικού αριθμού $\underline{z} = re^{j(\omega t+\phi)}$ ως προς τον χρόνο t ισοδύναμα, με διαίρεση του μέτρου του δια ω και ελάττωση της φάσεως του κατά π/2.

Το αντίστοιχο διάνυσμα του επιπέδου Gauss ελαττώνει το μήκος του κατά ω ενώ στρέφεται συγχρόνως κατά - π/2.

Κατά την μελέτη κυκλωμάτων εναλλασσομένου ρεύματος ενδιαφερόμαστε κυρίως για το ρεύμα, το οποίο διαρρέει το υπό μελέτη κύκλωμα, όταν στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται (αρμονική) εναλλασσόμενη τάση $[u = U_0 \sin(\omega t)]$, πλάτους U_0 και κυκλικής συχνότητας ω. Όπως δε θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το ρεύμα είναι επίσης εναλλασσόμενο, η δε στιγμιαία του τιμή δίδεται από την εξίσωση $i = I_0 \sin(\omega t+\phi)$, όπου το πλάτος I_0 και η διαφορά φάσεως φ (ως προς την τάση) εξαρτώνται από την δομή του κυκλώματος. Σύμφωνα τώρα με όσα αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους, τάση και ρεύμα μπορούν να γραφούν σε μιγαδική μορφή ως εξής:

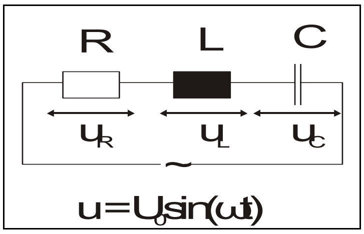
$$u = U_0\sin(\omega t) \to \underline{u} = U_0e^{j\omega t} \equiv> \qquad \boxed{\underline{u} = U_0\underline{|\omega t}}$$

$$[5.17]$$

$$i = I_0\sin(\omega t+\phi) \to \underline{i} = I_0e^{j(\omega t+\phi)} \equiv> \qquad \boxed{\underline{i} = I_0\underline{|\omega t+\phi}}$$

Επαναλαμβάνουμε, ότι η συμπεριφορά της πραγματικής τάσεως και εντάσεως αποδίδεται (συμβατικά) από το φανταστικό (!) μέρος της *μιγαδικής* τάσεως και εντάσεως αντιστοίχως:

$\boxed{u = Im(\underline{u}) = U_0 \, sin(\omega t)}$ $\boxed{i = Im(\underline{i}) = I_0 \, sin(\omega t + \varphi)}$ [5.17α]



5.4 Μελέτη κυκλώματος RLC (σε σειρά)

Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, το οποίο αποτελείται από ωμική αντίσταση τιμής R, σωληνοειδές αυτεπαγωγής L και πυκνωτή χωρητικότητας C συνδεμένα σε σειρά, μεταβάλλεται εκτός από την στα άκρα του κυκλώματος ασκούμενη τάση u, όπως είναι φυσικό, και η ένταση i του ρεύματος, η οποία όμως σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t είναι η ίδια σε όλο το μήκος του κυκλώματος. (Όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 3.1, η στατικότροπη αυτή συμπεριφορά του ρεύματος ισχύει για τις βιομηχανικές λεγόμενες συχνότητες, οι οποίες δεν ξεπερνούν τις μερικές εκατοντάδες Hertz και στις οποίες έχουμε ευθύς εξ αρχής περιοριστεί.)

Οι στιγμιαίες τιμές των τάσεων που παρατηρούνται στα στοιχεία του παραπάνω κυκλώματος δίδονται από τις ακόλουθες, γνωστές μας σχέσεις:

$u_R = iR$ {1} (Νόμος του Ohm)

$u_L = (-)L\dfrac{di}{dt}$ {2} (Νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής για την περίπτωση της αυτεπαγωγής)

$u_C = \dfrac{q}{C}$ {3} (Ορισμός της χωρητικότητας πυκνωτή)

Σύμφωνα με τον 2° κανόνα του Kirchhoff θα ισχύει για τις στιγμιαίες τιμές των τάσεων:

$u = u_E + u_L + u_C$ {4}

Στην παραπάνω σχέση αντικαθιστούμε την αναλυτική έκφραση της αρμονικής τάσεως u καθώς και των τάσεων u_R, u_L, και u_C.

$$U_0 \sin(\omega t) = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \qquad \{5\}$$

Σκεπτόμενοι ότι $i = dq/dt \Rightarrow dq = idt \Rightarrow q = \int idt$ παίρνουμε:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = U_0 \sin(\omega t) \qquad \{5α\}$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, η επίλυση της παραπάνω μη ομογενούς (ολοκληρω-) διαφορικής εξίσωσης μας δίνει ως αποτέλεσμα το άθροισμα δύο ρευμάτων: ενός φθίνοντος εκθετικού και ενός αρμονικού. (Πρόκειται για γενική λύση της ομογενούς και την μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης αντιστοίχως). Το πρώτο περιγράφει προφανώς την μεταβατική φάση της ενάρξεως της λειτουργίας του κυκλώματος και είναι χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού αργά ή γρήγορα εξαφανίζεται. Απομένει τότε το δεύτερο, αρμονικό ρεύμα, το οποίο περιγράφει την μόνιμη κατάσταση, κατά την οποία το ρεύμα μεταβάλλεται με την συχνότητα που επιβάλλει η στα άκρα του κυκλώματος εφαρμοζόμενη, αρμονική τάση, με πλάτος όμως εξαρτώμενο αποφασιστικά από την τιμή των R, L και C.

α) Επίλυση της ομογενούς εξίσωσης $$\boxed{iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0} \qquad \{6\}$$

Σκεπτόμενοι ότι i = dq/dt παραγωγίζουμε την {6} μία φορά ως προς τον χρόνο και παίρνουμε:

$$\frac{di}{dt}R + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \Longleftrightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0 \qquad \{7\}$$

Πρόκειται για μια (βλ. 3.5.8) συνήθη, γραμμική, ομογενή διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Η επίλυσή της γίνεται σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:

Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές

Η **γενική μορφή** μιας συνήθους, ομογενούς, γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές είναι:

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \qquad \{I\}$$

Θέτουμε $\boxed{y = e^{\lambda x}}$ $(\Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \quad \kappa\alpha\iota \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x})$, οπότε προκύπτει η ακόλουθη

χαρακτηριστική εξίσωση: $$\boxed{\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}} \qquad \{II\}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, πραγματικοί αριθμοί. **Γενική Λύση** $\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$ {IIIα}

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = -a_1/2$. **Γενική Λύση** $\boxed{y = (c_1 + c_2 x)e^{-a_1 x/2}}$ {IIIβ}

3. $\lambda_{1,2} = a \pm j\beta$, συζυγείς μιγαδικοί. **Γενική Λύση** $\boxed{y = e^{ax}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))}$ {IIIγ}

Οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Στην περίπτωσή μας (σύγκριση της {7} με την {I}) έχουμε: a_1 = R/L και a_2 = 1/(LC), οπότε στην θέση της εξίσωσης {II}παίρνουμε:

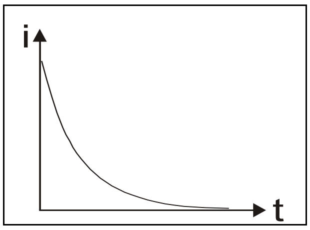
$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}} \qquad \{8\}$$

Διακρίνουμε λοιπόν τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $\boxed{(RL)^2 > 4/(LC)}$. **Λύση** ομογενούς:

$$\boxed{i(t) = c_1\, exp\left[\left(-\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}\right)t\right] + c_2 \exp\left[\left(-\frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}\right)t\right]} \quad \{7\alpha\}$$

Πρόκειται για ***απεριοδική εκθετική μείωση του ρεύματος,*** η οποία αποδίδεται ποιοτικά στο παρακάτω σχήμα.



2. $\boxed{(R/L)^2 = 4/(LC)}$. **Λύση** ομογενούς:

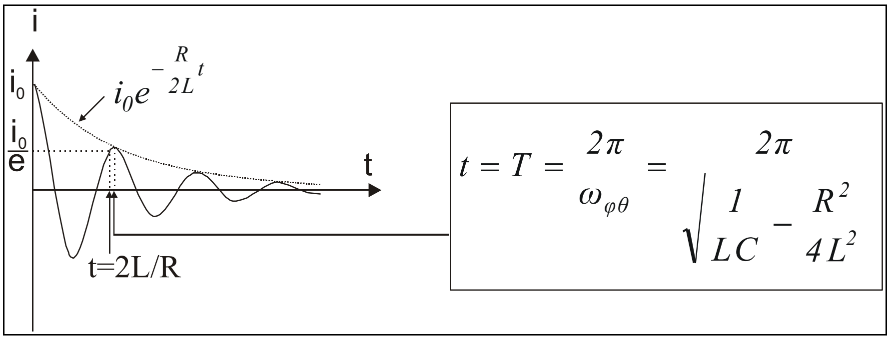
$$\boxed{i(t) = c_1 \exp\left[-\frac{R}{2L}t\right] + c_2 t \exp\left[-\frac{R}{2L}t\right]} \quad \{7\beta\}$$

Πρόκειται για ***οριακή απεριοδική εκθετική μείωση του ρεύματος,*** η οποία αποδίδεται ποιοτικά επίσης από το παραπάνω σχήμα.

3. $\boxed{(R/L)^2 < 4/(LC)}$. **Λύση** ομογενούς:

$$\boxed{i(t) = c_1\, exp\left[-\frac{R}{2L}t\right] cos\left[\frac{\sqrt{\frac{4}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}}{2}t\right] + c_2\, exp\left[-\frac{R}{2L}t\right] sin\left[\underbrace{\frac{\sqrt{\frac{4}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}}{2}t}_{\equiv \omega_\varphi\ t}\right]} \quad \{7\gamma\}$$

Πρόκειται για ***μια φθίνουσα ταλάντωση κυκλικής «συχνότητας»*** $\boxed{\omega_{\phi\vartheta} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$, η χρονική εξάρτηση της οποίας αποδίδεται ποιοτικά στο παρακάτω σχήμα.



Σ' όλες τις παραπάνω περιπτώσεις οι σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Αυτό σημαίνει ότι εξαρτώνται από το πότε άρχισε η μέτρηση του χρόνου, οπότε είναι χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Όπως είδαμε παραπάνω, η επίλυση της ομογενούς εξίσωσης {7} μας δίνει ως αποτέλεσμα ένα ρεύμα, του οποίου η ένταση φθίνει εκθετικά με τον χρόνο (βλ.{7α} ως {7γ}). Το ρεύμα αυτό παρατηρείται επομένως μόνο κατά την έναρξη λειτουργίας του κυκλώματος και είναι ως εκ τούτου περιορισμένου πρακτικού ενδιαφέροντος. Σημειώνουμε εξάλλου, ότι το εν λόγω ρεύμα δεν επηρεάζεται από την εξωτερική τάση u, η οποία άλλωστε δεν πάρθηκε υπόψη κατά τον υπολογισμό του.

Η αρμονική τάση u με την σειρά της περιμένουμε να προκαλεί ένα (επιπλέον) επίσης αρμονικό ρεύμα, της ίδιας συχνότητας με αυτήν, αν και όχι αναγκαστικά και της ίδιας φάσης. Το αρμονικό αυτό ρεύμα i θα αντιστοιχεί προφανώς στην μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης {5α}. Όπως δε θα δούμε ευθύς αμέσως, ο υπολογισμός του εν λόγω αρμονικού ρεύματος απλουστεύεται δραματικά με την χρήση μιγαδικών αριθμών. Μεταπηδούμε λοιπόν στον χώρο των μιγαδικών αριθμών, όπου η {5α} παίρνει την ακόλουθη συμβολική μορφή:

$$\underline{u} = \underline{i}R + L\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{C}\int \underline{i}dt \qquad \{5\beta\}$$

όπου $\underline{u} = U_0 \underline{|\omega t}$ και $u = Im(\underline{u}) = U_0 \sin(\omega t)$ (βλ. [5.17] και [5.17α])

$\underline{i} = I_0 \underline{|\omega t + \phi}$ $\qquad i = Im(\underline{i}) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Παίρνοντας υπόψη τους κανόνες παραγώγισης και ολοκλήρωσης του κεφαλαίου 5.3.1. σύμφωνα με τους οποίους η παραγώγιση/ολοκλήρωση ενός μιγαδικού αριθμού ως προς τον χρόνο ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του επί/διαίρεσή του δια (jω), έχουμε:

$$\underline{u} = \underline{i}R + j\omega L\underline{i} + \frac{1}{j\omega C}\underline{i} \Rightarrow \underline{u} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{i} \Rightarrow \underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i} \Rightarrow \boxed{\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}}} \qquad [5.18]$$

όπου $\boxed{\underline{Z} =: R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$ [5.19]

Η εξίσωση [5.18] θυμίζει έντονα τον νόμο του Ohm για συνεχές ρεύμα (βλ. κεφ. 3.4.1) και, ως εκ τούτου, χαρακτηρίζεται συνήθως ως ***νόμος του Ohm για εναλλασσόμενα ρεύματα.***

Το μέγεθος $\underline{Z}$**,** το οποίο έχει προφανώς διαστάσεις αντίστασης, αφού ο ένας προσθετέος είναι η ωμική αντίσταση R, χαρακτηρίζεται ως ***μιγαδική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.***

Ο νόμος λοιπόν ***του Ohm για εναλλασσόμενα ρεύματα*** μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Η μιγαδική ένταση $\underline{i}$ του ρεύματος, το οποίο διαρρέει κύκλωμα (ή τμήμα κυκλώματος), στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται η αρμονική τάση u, υπολογίζεται διαιρώντας την *μιγαδική* τάση $\underline{u}$ με την μιγαδική σύνθετη αντίσταση $\underline{Z}$ του κυκλώματος (ή του τμήματος κυκλώματος).

Πολύ συχνά η μιγαδική σύνθετη αντίσταση $\underline{Z}$ γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \overset{1/j=-j}{=} R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \equiv R + j(R_L - R_C)} \; [5.18\alpha]$$

όπου $\boxed{R = \textbf{ωμική αντίσταση}}$

$\boxed{R_L = \omega L = \textbf{επαγωγική αντίσταση}}$

$$\boxed{R_C = \frac{1}{\omega C} = \textit{χωρητική αντίσταση}}$$

Όπως βλέπουμε, η αντίσταση ενός δεδομένου σωληνοειδούς αυτεπαγωγής L αυξάνει με αυξανόμενη κυκλική συχνότητα ω του εναλλασσομένου ρεύματος, το οποίο το διαρρέει. Το γεγονός αυτό βρίσκει εφαρμογή στο «φιλτράρισμα» υψηλών συχνοτήτων μέσω των ***αποπνι-κτικών,*** όπως χαρακτηρίζονται, ***πηνίων.*** Ακριβώς αντίθετη είναι η συμπεριφορά ενός πυκνωτή χωρητικότητας C. Πυκνωτές, οι οποίοι χρησιμοποιούνται προκειμένου να επιτρέπουν υψηλόσυχνα ρεύματα και να καταστέλλουν τα χαμηλόσυχνα, χαρακτηρίζονται ως ***πυκνωτές διαρροής.***

Αν εισάγουμε την ***μιγαδική επαγωγική αντίσταση*** $\boxed{\underline{R}_L = j\omega L}$ και την ***μιγαδική χωρητική αντίσταση*** $\boxed{\underline{R}_C = -\frac{j}{\omega C}}$, η σύνθετη αντίσταση γράφεται: $\boxed{\underline{Z} = R + \underline{R}_L + \underline{R}_C}$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι **οι *μιγαδικές* εναλλασσόμενες αντιστάσεις όταν συνδέονται σε σειρά προστίθενται προκειμένου να διαμορφώσουν την σύνθετη αντίσταση $\underline{Z}$,** συμπεριφέρονται δηλαδή όπως και οι αντιστάσεις συνεχούς (Τα πλεονεκτήματα της χρήσης μιγαδικών αριθμών δεν έχουν τέλος!).

Ας ξαναγυρίσουμε όμως στον υπολογισμό του ρεύματος $\underline{i}$. Προς τον σκοπό αυτό γράφουμε την μιγαδική σύνθετη αντίσταση $\underline{Z}$ σε εκθετική μορφή:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad \{\alpha\}$$

$$= Z\left|\underline{Arg(\underline{Z})}\right. \qquad \{\beta\}$$

όπου
$$\boxed{Z \equiv |\underline{Z}| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{Z}) + \operatorname{Im}^2(\underline{Z})} \overset{\{\alpha\}}{\Rightarrow} Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad [5.20]$$

(απόλυτη τιμή ή φαινομένη αντίσταση)

και
$$\boxed{Arg(\underline{Z}) = arctan\frac{Im(\underline{Z})}{Re(\underline{Z})} \overset{\{\alpha\}}{\Rightarrow} Arg(\underline{Z}) = arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} \qquad [5.20\alpha]$$

Από την [5.19] παίρνουμε εξάλλου:

$$\boxed{\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} \underset{\{\beta\}}{=} \frac{U_0\left|\underline{\omega t}\right.}{Z\left|\underline{Arg(\underline{Z})}\right.} = \frac{U_0}{Z}\left|\underline{\omega t - Arg(\underline{Z})}\right. \equiv I_0\left|\underline{\omega t + \varphi}\right.} \qquad [5.21]$$

με $$\boxed{I_0 = \frac{U_0}{Z} \underset{[5.20]}{=} \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$ **: πλάτος εντάσεως** [5.21α]

και $$\boxed{\varphi = -Arg(\underline{Z}) = -arctan\frac{Im(\underline{Z})}{Re(\underline{Z})} \overset{[5.20\alpha]}{=} -arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} <\equiv> tan\,\varphi = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$ [5.21β]

(διαφορά φάσεως μεταξύ τάσεως $\underline{u}$ και εντάσεως $\underline{i}$)

ή

$$\boxed{I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}}}$$ **: πλάτος εντάσεως** [5.22]

$$\boxed{\phi = -\arctan\frac{R_L - R_C}{R} <\equiv> \tan\phi = -\frac{R_L - R_C}{R}}$$ [5.22α]

(διαφορά φάσεως μεταξύ τάσεως $\underline{u}$ και εντάσεως $\underline{i}$)

με $\boxed{R_L = \omega L}$ ***: επαγωγική αντίσταση***

$\boxed{R_C = \frac{1}{\omega C} =}$ ***: χωρητική αντίσταση***

Η μορφή [5.22] και [5.22α] έχει αυξημένο πρακτικό ενδιαφέρον, επειδή καλύπτει όλες τις ***υποπεριπτώσεις κυκλώματος RLC σε σειρά,*** όπως π.χ.

- ✓ ***Κύκλωμα RC*** *(σε σειρά):* Το πλάτος I_0 της έντασης και η διαφορά φάσεως φ μεταξύ τάσεως και εντάσεως υπολογίζονται από τις εξισώσεις [5.22] και [5.22α] αντίστοιχα θέτοντας $R_L = 0$:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + R_C^2}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \phi = -\arctan\frac{-R_C}{R}$$

- ✓ ***Κύκλωμα C*** ($\rightarrow$ R=0 και $R_L = 0$):

$$[5.22] \rightarrow I_0 = \frac{U_0}{R_C} \quad \text{και} \quad \varphi = -arctan\left(\underset{-\infty = \lim\limits_{\substack{R\to 0\\ R_L\to 0}} \frac{R_L - R_C}{R}}{\underset{\uparrow}{-\infty}}\right) = -(-\pi/2) \Rightarrow \varphi = \pi/2$$:το ρεύμα προηγείται κατά π/2

✓ ***Κύκλωμα L*** $(\to R = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathrm{P}_C = 0)$

$$[5.22] \to I_0 = \frac{U_0}{R_C} \quad \text{και} \quad \varphi = -\arctan\left(\underset{-\infty = \lim\limits_{\substack{R\to 0 \\ R_C \to 0}} \frac{R_L - R_C}{R}}{\underset{\uparrow}{\infty}} \right) \Rightarrow -\varphi = \pi/2$$

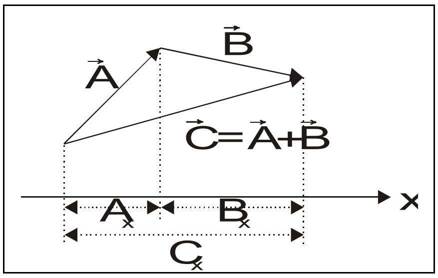
:το ρεύμα υστερεί κατά π/2

5.4.1 Κανόνες του Kirchhoff για εναλλασσόμενα ρεύματα

Είδαμε λοιπόν (βλ. [5.19]), ότι ο νόμος του Ohm διατηρεί την ισχύ του και για εναλλασσόμενα ρεύματα σε *μιγαδική* βέβαια μορφή. Το ίδιο ισχύει και για τους δύο κανόνες του Kirchhoff, οι οποίοι για εναλλασσόμενα ρεύματα διατυπώνονται ως εξής:

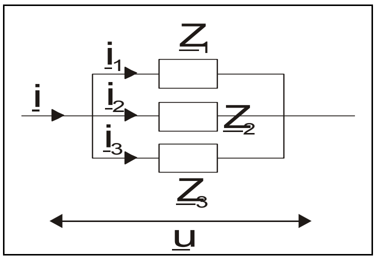
1^{ος} κανόνας του Kirchhoff για εναλλασσόμενα ρεύματα: Το άθροισμα των *μιγαδικών* εντάσεων των εναλλασσομένων ρευμάτων ενός κόμβου ισούται με μηδέν.

2^{ος} κανόνας του Kirchhoff για εναλλασσόμενα ρεύματα: Το άθροισμα των μιγαδικών εναλλασσομένων ΗΕΔ κατά μήκος ενός βρόγχου ισούται με το άθροισμα των *μιγαδικών* πτώσεων τάσεως στις μιγαδικές αντιστάσεις του βρόγχου.



Η ισχύς των κανόνων του Kirchhoff με την παραπάνω μορφή και για τα εναλλασσόμενα ρεύματα στηρίζεται στο γεγονός, ότι η προβολή της συνισταμένης δύο διανυσμάτων ισούται με το άθροισμα των προβολών των δύο συνιστωσών της. Έτσι οι κανόνες του Kirchhoff, οι οποίοι ισχύουν κατ' αρχήν για τις στιγμιαίες τιμές των τάσεων και εντάσεων, θα ισχύουν και για τα αντίστοιχα μιγαδικά μεγέθη, τα οποία ως γνωστόν παριστάνονται με ανύσματα, οι προβολές των οποίων ισούνται με τις στιγμιαίες τιμές των τάσεων και εντάσεων.

Είδαμε επίσης, ότι η ολική *μιγαδική* σύνθετη αντίσταση *μιγαδικών* εναλλασσομένων αντιστάσεων, συνδεομένων σε σειρά, ισούται με το αλγεβρικό τους άθροισμα. Έστω τώρα τρεις μιγαδικές *σύνθετες* αντιστάσεις $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ και $\underline{Z}_3$ συνδεμένες παράλληλα (βλ. σχ. 5.6).



Από τον 1^{ο} κανόνα του Kirchhoff προκύπτει ότι:

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 \overset{\underline{i}=\underline{u}/\underline{Z}}{\Rightarrow} \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_3} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι οι κανόνες υπολογισμού της ολικής σύνθετης μιγαδικής αντίστασης εναλλασσομένων αντιστάσεων είναι και σ' αυτήν την περίπτωση ίδιοι με εκείνους που ισχύουν και για το συνεχές ρεύμα. Μπορούμε λοιπόν να συνοψίσουμε ως εξής:

Όταν δύο υπό εναλλασσομένου ρεύματος διαρρεόμενα στοιχεία συνδέονται κατά σειρά, προστίθενται οι *μιγαδικές* τους αντιστάσεις, όταν είναι συνδεμένα παράλληλα προστίθενται οι *μιγαδικές* τους αγωγιμότητες (Υπενθυμίζουμε, ότι αγωγιμότητα = 1/αντίσταση).

Όλα αυτά δείχνουν τα πλεονεκτήματα της μιγαδικής διατύπωσης.

5.4.2 Συντονισμός σε κύκλωμα RLC σε σειρά

Το πλάτος I_0 και η διαφορά φάσεως φ μεταξύ τάσεως και εντάσεως δίδονται, όπως είδαμε (βλ. [5.21] και [5.21α]), από τις σχέσεις:

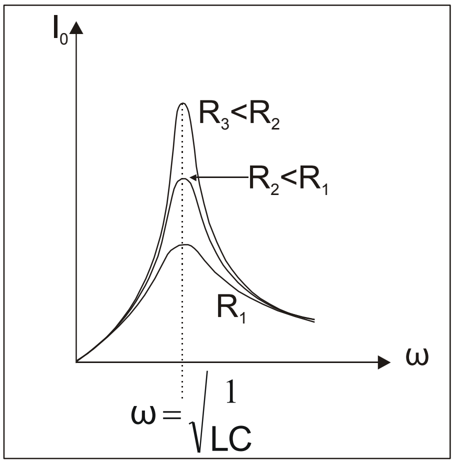
$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad \varphi = -\arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \qquad \{1\}$$

Εξαρτώνται λοιπόν αμφότερα από την συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσεως.

Η συμπεριφορά του πλάτους I_0 συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας ω αποδίδεται ποιοτικά στο σχήμα 5.6 για δύο διαφορετικές τιμές της ωμικής αντίστασης. Όπως βλέπουμε, **το *πλάτος* γίνεται *μέγιστο*, όταν η κυκλική συχνότητα ω γίνει**

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \qquad [5.23],$$

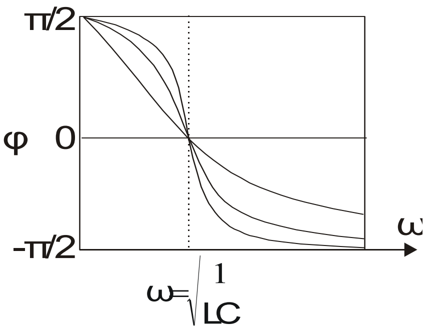
όταν δηλαδή η επαγωγική αντίσταση R_L = ωL γίνει ίση με την χωρητική R_C = 1/ (ωC). $\left(\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}\right)$.



Σχήμα 5.6: Εξάρτηση του πλάτους I_0 από την κυκλική συχνότητα ω.

Τότε έχουμε το ***φαινόμενο του συντονισμού.*** Η συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ χαρακτηρίζεται ως ***ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος.***

Όπως προκύπτει εξάλλου από τις παραπάνω σχέσεις, η διαφορά φάσεως μεταξύ ρεύματος και τάσεως σε κατάσταση συντονισμού μηδενίζεται.



Σχήμα 5.7: Εξάρτηση της διαφοράς φάσεως φ από την κυκλική συχνότητα.

Η συμπεριφορά της διαφοράς φάσεως φ συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας ω αποδίδεται ποιοτικά στο σχήμα 5.7. Όπως βλέπουμε, για μικρές συχνότητες $\left(\omega < \sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$ υπερισχύει η χωρητική αντίσταση $R_C = \frac{1}{\omega C}$ και το κύκλωμα εμφανίζει χωρητική συμπεριφορά: το ρεύμα προηγείται της τάσεως.

Για μεγάλες συχνότητες $\left(\omega > \sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$ υπερισχύει η επαγωγική αντίσταση $R_L = \omega L$ και το κύκλωμα εμφανίζει επαγωγική συμπεριφορά: το ρεύμα καθυστερεί.

Σε συντονισμό το κύκλωμα εμφανίζει καθαρά ωμική συμπεριφορά: το ρεύμα είναι συμφασικό προς την τάση.

5.5 Ισχύς και ενεργές τιμές εναλλασσομένων ρευμάτων

Η *στιγμιαία ισχύς P* ενός εναλλασσομένου ρεύματος $i = I_0 \sin(\omega t + \phi)$, το οποίο προκαλείται από την εναλλασσόμενη τάση $u = U_0 \sin(\omega t)$, ισούται κατά τα γνωστά με το γινόμενο της (στιγμιαίας τιμής) της τάσεως και της (στιγμιαία τιμή) εντάσεως:

στιγμιαία ισχύς: $\boxed{P = iu = I_0 U_0 \sin(\omega t)\sin(\omega t + \phi)}$ [5.24]

Λόγω της διαρκούς μεταβολής της με τον χρόνο, η στιγμιαία ισχύς P έχει ελάχιστη πρακτική αξία. Αντιθέτως άμεσο πρακτικό ενδιαφέρον έχει η ***μέση ισχύς*** $\overline{P}$, η οποία υπολογίζεται σύμφωνα με τον ακόλουθο γενικό ορισμό της μέσης τιμής χρονικώς μεταβαλλόμενου μεγέθους:

Μέση τιμή $\bar{f}$ συνάρτησης f(t): $\boxed{\bar{f} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt}$ [5.25]

Στην περίπτωση που πρόκειται για περιοδική συνάρτηση του χρόνου, το χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ λαμβάνεται, όπως είναι λογικό, ίσο με την περίοδο T:

Μέση τιμή $\bar{f}$ περιοδικής συνάρτησης f(t) με περίοδο T: $\boxed{\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt}$ [5.25α]

Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση αυτή παίρνουμε για την μέση ισχύ:

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt \overset{[5.24]}{=} \frac{1}{T}\int_0^T I_0 U_0 \sin(\omega t)\sin(\omega t + \varphi)dt = \frac{I_0 U_0}{T}\int_0^T I_0 U_0 \sin(\omega t)\sin(\omega t + \varphi)dt =$$

$$\overset{sin(\alpha+\beta)=sin\alpha\, cos\beta+cos\alpha\, sin\beta}{=}\ \frac{I_0U_0}{T}\int_0^T sin(\omega t)[sin(\omega t)cos\varphi + cos(\omega t)sin\varphi]dt =$$

$$= \frac{I_0U_0}{T}\int_0^T [sin^2(\omega t)cos\varphi + sin(\omega t)cos(\omega t)sin\varphi]dt = \frac{I_0U_0}{T}\left[cos\varphi\int_0^T sin^2(\omega t)dt + sin\varphi\int_0^T sin(\omega t)cos(\omega t)dt\right] =$$

$$\underset{\substack{\int sin(\omega t)dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4\omega}sin(2\omega t)\\ \int sin(\omega t)cos(\omega t)dt=\frac{1}{2\omega}sin^2(\omega t)}}{=}\ \frac{I_0U_0}{T}\left\{cos\varphi[\frac{1}{2}t - \underbrace{sin(2\omega t)]_0^T}_{=0} + sin\varphi[\frac{1}{2\omega}\underbrace{sin^2(\omega t)]_0^T}_{=0}\right. = = \frac{I_0U_0}{T}cos\varphi\frac{T}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2}I_0U_0\, cos\varphi}$ **: *μέση ή ενεργός ή πραγματική ισχύς*** [5.26]

όπου ***cosφ = συντελεστής ισχύος:*** χαρακτηριστικό για το κύκλωμα μέγεθος.

Στην περίπτωση που το εναλλασσόμενο ρεύμα διαρρέει μια ωμική αντίσταση R ($\Rightarrow$ φ = 0 $\Leftrightarrow$ cosφ = 1), η μέση του ισχύς γίνεται:

$$\overline{P}_R = \frac{1}{2}U_0I_0 \overset{I_0=U_0/R}{=} \frac{1}{2}I_0^2R \qquad \{1\}$$

Αν η ίδια αντίσταση διαρρέετο από συνεχές ρεύμα έντασης I_0, τότε η αντίστοιχη ισχύς θα ήταν $P_\sigma = I_\sigma^2R$. Στην περίπτωση δε που η ένταση του συνεχούς ρεύματος ήταν $I_\sigma = I_0/\sqrt{2}$, τότε το συνεχές ρεύμα θα είχε ισχύ ίση με την μέση ισχύ του εναλλασσομένου ρεύματος. Η τιμή αυτή χαρακτηρίζεται ως εκ τούτου ως ***ενεργός ένταση I του εναλλασσομένου ρεύματος,*** η δε αυτήν προκαλούσα συνεχής τάση $U = IR = (I_0/\sqrt{2})R = U_0/\sqrt{2}$, ως ***ενεργός τάση*** αυτού:

Ενεργός ένταση I εναλλασσομένου ρεύματος καλείται η τιμή του συνεχούς εκείνου ρεύματος, το οποίο -όταν διαρρέει την *ίδια* ωμική αντίσταση με το εναλλασσόμενο- αποδίδει ισχύ ίση με την μέση ισχύ του εναλλασσομένου.

Ενεργά μεγέθη εναλλασσομένου ρεύματος: $\boxed{I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}}$ [5.27]

Σημειωτέον ότι οι ενεργές τιμές μετρώνται απ' ευθείας με τα αμπερόμετρα και βολτόμετρα εναλλασσομένου ρεύματος. Στην χώρα μας η ενεργός τάση του ρεύματος οικιακής χρήσεως ισούται με 220 V.

Με την βοήθεια των ενεργών μεγεθών η σχέση [5.26] γράφεται:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}I_0U_0\, cos\varphi = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\frac{U_0}{\sqrt{2}}cos\varphi \overset{[5.27]}{\Rightarrow} \overline{P} = IU\, cos\varphi \qquad \{2\}$$

Από το νόμο του Ohm έχουμε εξάλλου: $\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} \Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{U_0}{Z} \Rightarrow I = \frac{U}{Z}}$ [5.28]

$\Leftrightarrow U = IZ$ {3}. Αντικαθιστώντας την {3} στην {2} παίρνουμε:

$$\overline{P} = I(IZ)cos\varphi = I^2 Z\, cos\varphi \overset{Z\,cos\varphi = Re(\underline{Z})}{\underset{βλ.\ κεφ. 5.3}{=}} I^2\, Re(\underline{Z}) \qquad \{4\}$$

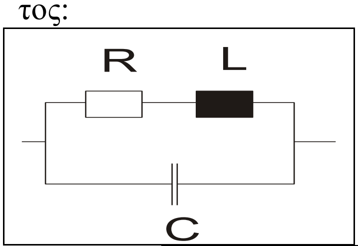
Συνοψίζοντας λοιπόν τις σχέσεις [5.26], {2} και {4} έχουμε:

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} I_0 U_0\, cos\varphi = IU\, cos\varphi = I^2 Z\, cos\varphi = I^2\, Re(\underline{Z})} \qquad [5.26α]$$

μέση ή ενεργός ή πραγματική ισχύς

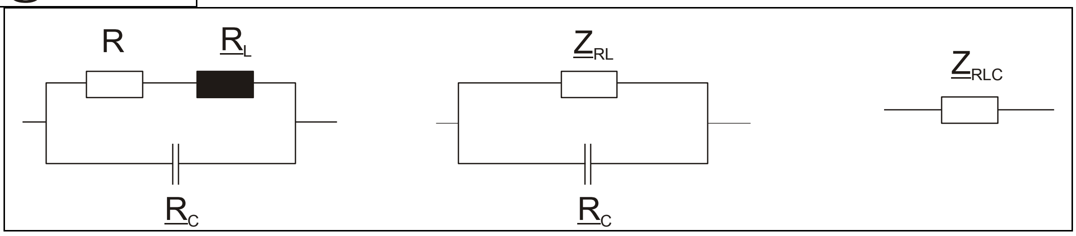
Παραδείγματα

Παράδειγμα Σ.5.1: Να υπολογισθεί η μιγαδική σύνθετη αντίσταση του παρακάτω κυκλώματος:



Λύση:

Όπως γνωρίζουμε, στον χώρο των μιγαδικών ισχύουν και για τα εναλλασσόμενα μεγέθη οι νόμοι, που ισχύουν για τα συνεχή. Το παραπάνω κύκλωμα μπορεί επομένως να μετασχηματιστεί ως εξής:



Όπου $\mathbf{\underline{R}_L = j\omega L}$ $\mathbf{\underline{R}_C = -j/(\omega C)}$

Οι αντιστάσεις R και $\underline{R}_L$ συνδέονται σε σειρά, οπότε έχουμε: $\underline{Z}_{RL} = R + \underline{R}_L = R + j\omega L$ {1}

Οι αντιστάσεις $\underline{Z}_{RL}$ και $\underline{R}_C$ συνδέονται παράλληλα, οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{RLC}} = \frac{1}{\underline{Z}_{RL}} + \frac{1}{\underline{R}_c} \Rightarrow \underline{Z}_{RLC} = \frac{\underline{Z}_{RL}\underline{R}_C}{\underline{Z}_{RL} + \underline{R}_C} \overset{\{1\}}{=} \frac{(R + j\omega L)\left(-\frac{j}{\omega C}\right)}{(R + j\omega L) + \left(-\frac{j}{\omega C}\right)} = \frac{-\frac{j}{\omega C}R - \frac{j^2\omega L}{\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} =$$

$$\overset{j^2=-1}{=}\frac{\dfrac{L}{C}-\dfrac{j}{\omega C}R}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}\ \underset{\uparrow}{\overset{=}{=}}\ \frac{\left(\dfrac{L}{C}-\dfrac{j}{\omega C}R\right)\left[R-j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)\right]}{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}=$$

πολλαπλασιάζουμε επί τον συζυγή του παρανομαστή και παίρνουμε υπόψη την σχέση $[\mathbf{5.9}]$: $\mathbf{z}\cdot\overline{\mathbf{z}}=\mathbf{Re}^2(\underline{\mathbf{z}})+\mathbf{Im}^2(\underline{\mathbf{z}})$

$$=\frac{\dfrac{L}{C}R-j\dfrac{L}{C}\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)-j\dfrac{R^2}{\omega C}+j^2\dfrac{R}{\omega C}\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}=\frac{\dfrac{L}{C}R-j\left[\dfrac{L}{C}\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)+\dfrac{R^2}{\omega C}\right]-\dfrac{R}{\omega C}\omega L+\dfrac{R}{\omega C}\dfrac{1}{\omega C}}{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\underline{Z}_{RLC}=\frac{\dfrac{R}{\omega^2C^2}-j\left[\dfrac{L}{C}\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)+\dfrac{R^2}{\omega C}\right]}{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Παράδειγμα Σ.5.2: Κύκλωμα αποτελούμενο από ωμική αντίσταση 2 kΩ και πυκνωτή 1μF συνδεμένα σε σειρά τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση ενεργούς τιμής 220 V και συχνότητας 50 Hz. Ζητείται:

α) Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

β) Η ενεργός τιμή του ρεύματος.

γ) Η δαπανώμενη ισχύς.

δ) Η ένδειξη ενός βολτομέτρου, όταν αυτό συνδέεται στα άκρα της αντίστασης ή του πυκνωτή.

Λύση:

α) Η αντίσταση R και ο πυκνωτής C συνδέονται σε σειρά. Στον χώρο λοιπόν των μιγαδικών έχουμε:

$$\underline{Z}=R+\underline{R}_C=R-\frac{j}{\omega C}=R-\frac{j}{2\pi\nu C}=2000-\frac{j}{2\pi\cdot 50\cdot 10^{-6}}\Rightarrow\boxed{\underline{Z}=2000-3184{,}7j}\qquad\{1\}$$

$$Z\equiv|\underline{Z}|=\sqrt{R^2+\left(\frac{-1}{\omega C}\right)^2}\overset{\{1\}}{=}\sqrt{2000^2+(-3184{,}7)^2}\Rightarrow\boxed{Z=3760{,}6\,\Omega}\qquad\{2\}$$

β) Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm έχουμε εξάλλου (βλ. [5.28]): I = U/Z = 220/3760,6 ⇒ $\boxed{I = 0{,}059\ A}$ {3}

γ) Η δαπανώμενη (= πραγματική) ισχύς δίδεται, από την σχέση [5.26α]:

$\overline{P}=I^2Z\cos\varphi$ {4}

όπου $\varphi \overset{[5.21\alpha]}{=} -arctan\dfrac{Im(\underline{Z})}{Re(\underline{Z})} \overset{\{1\}}{=} -arctan\dfrac{-3184{,}7}{2000} \Rightarrow$ $\boxed{\varphi = 57{,}87^{\circ} \Rightarrow cos\varphi = 0{,}532}$ {5}

Αντικαθιστούμε την {2}, {3} και {5} στην {4}: $\overline{P} = 0{,}059^2 \cdot 3760{,}6 \cdot 0{,}532 \Rightarrow$ $\boxed{\overline{P} = 6{,}96W}$

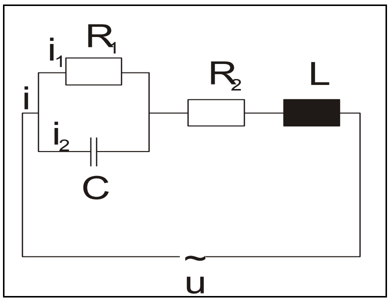
ή [5.26α]: $\vec{P} = I^2\,\mathrm{Re}(\underline{Z}) = I^2 R = 0{,}059 \cdot 2000 = 6{,}96W$

δ) Η ένδειξη του βολτομέτρου ισούται με τις αντίστοιχες ενεργές τάσεις U_R και U_C, οι οποίες σύμφωνα με τον νόμο του Ohm (βλ. [5.28]) είναι:

$U_R = IR = 0{,}059 \cdot 2000 \Rightarrow$ $\boxed{U_R = 118V}$

$U_C = IR_C = 0{,}059 \cdot 3184{,}7 \Rightarrow$ $\boxed{U_C = 187{,}9 \approx 188V}$

Παράδειγμα Σ.5.3: Ζητούνται τα ρεύματα, τα οποία διαρρέουν τους διαφόρους κλάδους του παρακάτω κυκλώματος, καθώς και τάσεις στα άκρα των στοιχείων αυτού.



R_1 = 2 kΩ

C = 40 μF

R_2 = 100 Ω

L = 0,2 H

U = 220 V

ν = 50 Hz

<u>**Παρατήρηση:**</u> Όταν ψάχνουμε τα ρεύματα, τα οποία διαρρέουν τους κλάδους ενός κυκλώματος, στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση, εργαζόμαστε συνήθως ως εξής:

Αφού μεταπηδήσουμε στον χώρο των μιγαδικών αριθμών,

α) υπολογίζουμε τις σύνθετες μιγαδικές αντιστάσεις των διαφόρων κλάδων χωριστά, όπως θα τις υπολογίζαμε για κυκλώματα συνεχούς.

β) υπολογίζουμε την ολική σύνθετη μιγαδική αντίσταση διαφόρων κλάδων μαζί, έως ότου καταλήξουμε στην σύνθετη μιγαδική αντίσταση $\underline{Z}$ ολοκλήρου του κυκλώματος.

γ) υπολογίζουμε το ολικό μιγαδικό ρεύμα $\underline{i}$ από τον νόμο του Ohm: $\underline{i} = \underline{u} / \underline{Z}$

δ) βρίσκουμε τις τάσεις $\underline{u}_\tau$ στα διάφορα τμήματα του κυκλώματος πολλαπλασιάζοντας το ολικό ρεύμα $\underline{i}$ με την σύνθετη μιγαδική αντίσταση $\underline{Z}_\tau$ του συγκεκριμένου τμήματος: $\underline{u}_\tau = \underline{i} \cdot \underline{Z}_\tau$. Αν το τμήμα περιλαμβάνει πολλούς κλάδους συνδεμένους παράλληλα, βρίσκουμε το ρεύμα $\underline{i}_\kappa$ κάθε κλάδου διαιρώντας την τάση $\underline{u}_\kappa = \underline{u}_\tau$ στα άκρα του, με την αντίσταση $\underline{Z}_\kappa$ του κλάδου: $\underline{i}_\kappa = \underline{u}_\kappa / \underline{Z}_\kappa$.

Λύση:

Με την βοήθεια των δεδομένων μπορούμε να γράψουμε αμέσως την «χρονοεξίσωση» της (μιγαδικής) εναλλασσόμενης τάσης:

$$\underline{u} = U_0\underline{|\omega t} = U\sqrt{2}\underline{|\omega t} = U\sqrt{2}\underline{|2\pi\nu t} \overset{\delta\varepsilon\delta o\mu\acute{\varepsilon}\nu\alpha}{\rightarrow} \quad \boxed{\underline{u} = 220\sqrt{2}\underline{|314t}} \qquad \{1\}$$

Στον χώρο των μιγαδικών αριθμών το κύκλωμα μας αποτελείται από τις ακόλουθες μιγαδικές αντιστάσεις:

$$\boxed{\underline{R}_1 = R_1 = 2000\Omega} \qquad \{2\alpha\}$$

$$\boxed{\underline{R}_2 = R_2 = 100\Omega} \qquad \{2\beta\}$$

$$\underline{R}_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{2\pi\nu C} = -\frac{j}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 40\cdot 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\underline{R}_C = -79{,}62j \overset{-j=\underline{|-\pi/2}}{\equiv} 79{,}62\underline{|-\pi/2}} \quad \{2\gamma\}$$

$$\underline{R}_L = j\omega L = j2\pi\nu L = j2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 0{,}2 \Rightarrow \boxed{\underline{R}_L = 62{,}8j \underset{j=\underline{|\pi/2}}{\equiv} 62{,}8\underline{|\pi/2}} \qquad \{2\delta\}$$

Οι αντιστάσεις $\underline{R}_1$ και $\underline{R}_C$ είναι συνδεμένες παράλληλα. Έτσι έχουμε: $\frac{1}{\underline{Z}_{R1C}} = \frac{1}{\underline{R}_1} + \frac{1}{\underline{R}_C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{R1C} = \frac{\underline{R}_1\underline{R}_C}{\underline{R}_1 + \underline{R}_C} = \frac{2000(-79{,}62j)}{2000-79{,}62j} \overset{\substack{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ \tau o\nu\ \sigma\upsilon\zeta\upsilon\gamma\acute{\eta} \\ \tau o\upsilon\ \pi\alpha\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}}}{=} \frac{-2000\cdot 79{,}62j(2000+79{,}62j)}{(2000-79{,}62j)(2000+79{,}62j)} =$$

$$= \frac{-2000\cdot 79{,}62j(2000+79{,}62j)}{2000^2+79{,}62^2} \Rightarrow \boxed{\underline{Z}_{R1C} = 3{,}16 - 79{,}49j} \qquad \{3\}$$

Προκειμένου να γράψουμε την (συμβολική) εκθετική μορφή της αντίστασης $\underline{Z}_{R1C}$ υπολογίζουμε κατά τα γνωστά το μέτρο της Z_{R1C} και το όρισμά της $Arg(\underline{Z}_{R1C})$:

$$Z_{R1C} = \sqrt{Re^2+Im^2} \overset{\{3\}}{=} \sqrt{3{,}16^2+79{,}49^2} = 79{,}55$$

$$\{3\alpha\}$$

$$Arg(\underline{Z}_{R1C}) = \arctan\frac{Im}{Re} \overset{\{3\}}{=} \arctan\frac{-79{,}49}{3{,}16} = -87{,}72^\circ \quad \acute{\eta} \quad -0{,}487\pi$$

Επομένως η συμβολική εκθετική μορφή της αντίστασης $\underline{Z}_{R1C}$ είναι:

$$\underline{Z}_{R1C} = Z_{R1C}\underline{|Arg(\underline{Z}_{R1C})} \overset{\{3\alpha\}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\underline{Z}_{R1C} = 79{,}55\underline{|-0{,}487\pi}} \quad \{3\beta\}$$

Οι αντιστάσεις $\underline{Z}_{R1C}$, $\underline{R}_2$ και $\underline{R}_L$ είναι συνδεμένες σε σειρά. Έτσι έχουμε:

$$\underline{Z}_{R1CR2L} = \underline{Z}_{R1C} + \underline{R}_2 + \underline{R}_L = (3{,}16-79{,}49j)+100+62{,}8j \Rightarrow \quad \boxed{\underline{Z}_{R1CR2L} = 103{,}16-16{,}69j}$$

$$\{4\}$$

Για την απόλυτη τιμή και το όρισμα παίρνουμε:

$$Z_{R1CR2L} = \sqrt{Re^2+Im^2} \overset{\{4\}}{=} \sqrt{103{,}16^2+16{,}69^2} = 104{,}5$$

$$\{4\alpha\}$$

$$Arg(\underline{Z}_{R1CR2L}) = arctan\frac{Im}{Re} \overset{\{4\}}{=} arctan\frac{-16,69}{103,16} = -9,19^{\circ} \quad ή \quad -0,051\pi$$

Επομένως η συμβολική εκθετική μορφή της αντίστασης $\underline{Z}_{R1CR2L}$ είναι:

$$\underline{Z}_{R1CR2L} = Z_{R1CR2L} \underline{|Arg(\underline{Z}_{R1CR2L})} \overset{\{4\alpha\}}{\Rightarrow} \boxed{\underline{Z}_{R1CR2L} = 104,5\underline{|-0,051\pi}} \qquad \{4β\}$$

Το ολικό ρεύμα $\underline{i}$ υπολογίζεται απ' ευθείας από τον νόμο του Ohm:

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_{R1CR2L}} \underset{\{4\beta\}}{\overset{\{1\}}{=}} \frac{220\sqrt{2}\underline{|314t}}{104,5\underline{|-0,051\pi}} \Rightarrow \boxed{\underline{i} = 2,98\underline{|314t + 0,051\pi}} \qquad \{5\}$$

Επίσης από τον νόμο του Ohm υπολογίζονται οι τάσεις στα διάφορα στοιχεία του κυκλώματος καθώς και τα ρεύματα, τα οποία τα διαρρέουν:

$$\underline{u}_{R1C} = \underline{i}\underline{Z}_{R1C} \overset{\{5\}\&\{3\beta\}}{=} 2,98\underline{|314t + 0,051\pi} \cdot 79,55\underline{|-0,487\pi} \Rightarrow \boxed{\underline{u}_{R1C} = 237,06\underline{|314t - 0,436\pi}} \quad \{6\}$$

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{u}_{R1C}}{\underline{R}_1} \underset{\{2\alpha\}}{\overset{\{6\}}{=}} \frac{237,06\underline{|314t - 0,436\pi}}{2000} \Rightarrow \boxed{\underline{i}_1 = 0,119\underline{|314t - 0,436\pi}} \qquad \{7\}$$

$$\underline{i}_2 = \frac{\underline{u}_{R1C}}{\underline{R}_C} \underset{\{2\gamma\}}{\overset{\{6\}}{=}} \frac{237,06\underline{|314t - 0,436\pi}}{76,62\underline{|-\pi/2}} \Rightarrow \boxed{\underline{i}_2 = 2,98\underline{|314t + 0,064\pi}} \qquad \{8\}$$

$$\underline{u}_{R2} = \underline{i}\underline{R}_2 \overset{\{5\}\&\{2\beta\}}{=} (2,98\underline{|314t + 0,051\pi})100 \Rightarrow \boxed{\underline{u}_{R2} = 298\underline{|314t + 0,051\pi}} \qquad \{9\}$$

$$\underline{u}_L = \underline{i}\underline{R}_L \overset{\{5\}\&\{2\delta\}}{=} (2,98\underline{|314t + 0,051\pi})(62,8\underline{|\pi/2}) \Rightarrow \boxed{\underline{u}_L = 187,14\underline{|314t + 0,551\pi}} \qquad \{10\}$$

Έλεγχος: Σύμφωνα με τον $1^{ο}$ κανόνα του Kirchhoff πρέπει να ισχύει η ισότητα

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 \Rightarrow Re(\underline{i}) = Re(\underline{i}_1) + Re(\underline{i}_2) \overset{βλ.\ κεφ\ 5.3}{\Rightarrow} |\underline{i}|cos[Arg(\underline{i})] = |\underline{i}_1|cos[Arg(\underline{i}_1)] + |\underline{i}_2|cos[Arg(\underline{i}_2)] \Rightarrow$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ χάριν\ απλότητα\ κάνουμε\ έλεγχο \\ για\ την\ χρονική\ στιγμή\ t=0}}{\overset{\{5\},\{7\}\&\{8\}}{\Rightarrow}} \quad 2,98cos(0,051\pi) = 0,119cos(-0,436\pi) + 2,98cos(0,064\pi) \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2,94 \approx 2,92$ Η μικρή διαφορά οφείλεται προφανώς στις υπολογιστικές στρογγυλοποιήσεις.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ελέγξουμε την ισχύ του $2^{ου}$ κανόνα του Kirchhoff: $\underline{u} = \underline{u}_{R1C} + \underline{u}_{R2} + \underline{u}_{RL}$.