



ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ (Θ)

Χασάπης Δημήτριος
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΕ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



2. Διηλεκτρικά

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1.11, *οι αγωγοί έχουν την ικανότητα να θωρακίζουν το εσωτερικό τους από ηλεκτροστατικά πεδία*. Το γεγονός δε αυτό πηγάζει από την (εξ ορισμού) ύπαρξη ευκίνητων φορέων φορτίου:

Όταν ένας αγωγός βρεθεί εντός ηλεκτρικού πεδίου, τότε οι δυνάμεις, οι οποίες επιδρούν επάνω στους ευκίνητους φορείς φορτίου, τους μετακινούν και μάλιστα τους μεν θετικούς προς την κατεύθυνση του πεδίου τους δε αρνητικούς προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αποτέλεσμα του διαχωρισμού αυτού είναι η δημιουργία ενός νέου πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού με αντίθετη προς το εξωτερικό πεδίο φορά. Ο διαχωρισμός αυτός του φορτίου συνεχίζεται, έως ότου η συνολική ένταση του πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού μηδενισθεί, οπότε αποκαθίσταται η κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας.

Από τα παραπάνω γίνεται εμφανές, ότι η συμπεριφορά ενός *μονωτή* εντός ηλεκτρικού πεδίου θα είναι διαφορετική, μια και στο εσωτερικό του δεν υπάρχουν (εξ ορισμού!) ευκίνητοι φορείς φορτίου. Πιο συγκεκριμένα περιμένουμε, ότι το ηλεκτρικό πεδίο θα διαπερνά τα μονωτικά υλικά, πράγμα το οποίο επιβεβαιώνεται και πειραματικά. Αυτός είναι εξ άλλου και ο λόγος για τον οποίο οι (εντός ηλεκτρικών πεδίων ευρισκόμενοι) μονωτές χαρακτηρίζονται και ως *διηλεκτρικά*.¹

Με την μελέτη των διηλεκτρικών θα ασχοληθούμε εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια. Προηγουμένως όμως θα γνωρίσουμε την απλούστερη και οικονομικότερη δυνατότητα δημιουργίας ελεγχόμενων ηλεκτρικών πεδίων περιορισμένων διαστάσεων, τους πυκνωτές, οι οποίοι είναι και ένα από τα στοιχεία, τα οποία οδήγησαν στην ηλεκτρονική επανάσταση.

2.1 Πυκνωτές

Πυκνωτής καλείται κάθε ζεύγος γειτονικών, μονωμένων αγωγών τυχαίου σχήματος και γεωμετρίας.

Οι δύο αγωγοί από τους οποίους αποτελείται ο πυκνωτής, ονομάζονται **οπλισμοί**. Ανάλογα με το σχήμα τους, το οποίο στην πράξη των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων είναι απλό γεωμετρικό, διακρίνουμε **σφαιρικούς, κυλινδρικούς** και **επίπεδους πυκνωτές**.

Σαν μονωτικό μεταξύ των δύο οπλισμών παρεμβάλλεται κενό ή κάποιο άλλο μονωτικό υλικό (συνήθως σε στερεή ή υγρή κατάσταση), το οποίο καλείται **διηλεκτρικό**, μια και βρίσκεται εντός του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών.

Εφαρμογές: Αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας, με την μορφή ηλεκτρικού πεδίου περιορισμένου ουσιαστικά στον μεταξύ των οπλισμών ευρισκόμενο χώρο, γεγονός το οποίο καθιστά τους πυκνωτές απαραίτητο στοιχείο όλων σχεδόν των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.

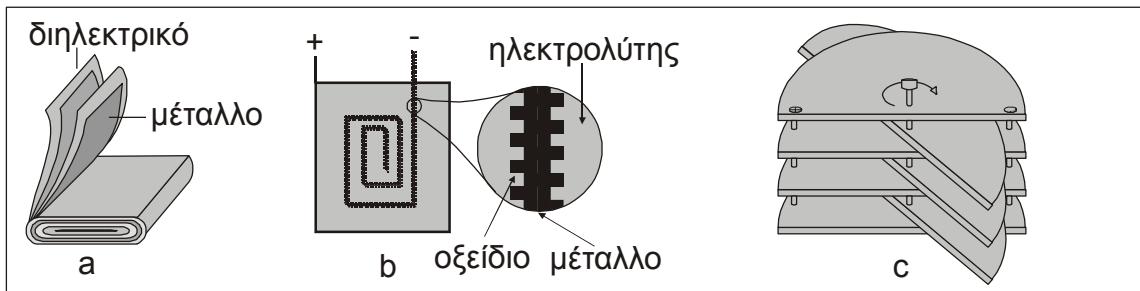
Μορφές πυκνωτών: **α) Πυκνωτές κενού:** Οι οπλισμοί είναι κλεισμένοι μέσα σε δοχεία υψηλού κενού. Χρησιμοποιούνται όπου υπάρχουν πολύ υψηλά και γρήγορα μεταβαλλόμενα δυναμικά.

¹ Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 2.8, κάποιοι μονωτές χαρακτηρίζονται ως *σιδηροηλεκτρικά*.

β) Φυλλωτοί πυκνωτές: Οι οπλισμοί τους αποτελούνται από λεπτά μεταλλικά ή συνθετικά φύλλα και τυλίγονται έτσι ώστε να έχουν μικρό όγκο (βλ. σχ.2).

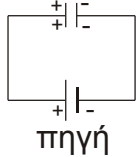
γ) Ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές: Ο ένας εκ των δύο οπλισμών είναι ένας ηλεκτρολύτης, εντός του οποίου είναι βυθισμένος ο δεύτερος μεταλλικός οπλισμός, ο οποίος περιβάλλεται από λεπτό στρώμα οξειδίου, το διηλεκτρικό (βλ. σχ.2b) Έχουν σχετικά μεγάλη χωρητικότητα, το οξύδιο όμως αντέχει μόνο σε χαμηλές τάσεις λειτουργίας. Πρέπει εξάλλου να πολώνονται σωστά (κίνδυνος έκρηξης!), οπότε χρησιμοποιούνται μόνο σε κυκλώματα συνεχούς ρεύματος.

δ) Μεταβλητοί πυκνωτές: Επιτρέπουν την συνεχόμενη μεταβολή της χωρητικότητας τους μέσω μεταβολής της δρώσας επιφάνειας των οπλισμών τους (βλ.σχ.2c).



Σχήμα 2: Διάφορες μορφές πυκνωτών: a: φυλλωτός, b: ηλεκτρολυτικός, c: μεταβλητός

Πυκνωτής Όλοι ανεξαιρέτως οι πυκνωτές είναι εφοδιασμένοι με ακροδέκτες προκειμένου να είναι δυνατή η φόρτο-εκφόρτιση των οπλισμών τους. Η πιο απλή περίπτωση φόρτισης, είναι η σύνδεση των ακροδεκτών με μια πηγή τάσεως. Οι οπλισμοί φορτίζονται τότε αναγκαστικά με ίσα και αντίθετα φορτία, μια και η πηγή δεν παράγει, αλλά απλώς μετακινεί φορτία. Έτσι τα αρνητικά φορτία (ηλεκτρόνια) του αρνητικά φορτισμένου οπλισμού προέρχονται από τον άλλο οπλισμό, ο οποίος μένει με ισόποσο περίσσειμα θετικών φορτίων.



συμβολισμός πυκνωτή: $\text{---}||\text{---}$

2.2 Χωρητικότητα

Η γεωμετρία του πεδίου ενός φορτισμένου αγωγού τυχαίου σχήματος είναι προφανώς, ανεξάρτητη από το ολικό φορτίο Q του αγωγού, εφόσον βέβαια αυτός δεν δέχεται την επίδραση χρονικών μεταβαλλόμενων εξωτερικών πεδίων. Αν λοιπόν διπλασιάσουμε το φορτίο του αγωγού διπλασιάζεται μεν η ροή μέσω μιας τυχαίας επιφάνειας Gauss, η οποία περιβάλλει τον αγωγό, μένει όμως αμετάβλητη η γεωμετρία του πεδίου σε όλα τα σημεία της εν λόγω επιφάνειας. Αυτό όμως είναι δυνατό (μια και ο παράγοντας "cosθ ads" στην εξίσωση [1.6] παραμένει ο ίδιος) μόνο αν διπλασιάζεται παντού και το μέτρο E της έντασης και κατά συνέπεια και το δυναμικό U του πεδίου. Επομένως

το δυναμικό U ενός φορτισμένου αγωγού τυχαίου σχήματος είναι ανάλογο προς το ολικό του φορτίο Q:

$$C = \frac{Q}{U} = \sigma a \theta \quad \text{:χωρητικότητα αγωγού} \quad [2.1]$$

Η χωρητικότητα ενός αγωγού εξαρτάται μόνο από την μορφή του (γεωμετρική κατανομή του φορτίου του), τις διαστάσεις του και το περιβάλλον μέσο (όπως θα δούμε στις επόμενες §§).

Σύμφωνα με την σχέση [2.1] η χωρητικότητα ενός αγωγού ισούται αριθμητικά με το φορτίο, το οποίο πρέπει να απομακρύνουμε από τον αγωγό, ώστε να ελαττωθεί το δυναμικό του κατά μια μονάδα. Ή διαφορετικά, με το φορτίο, το οποίο πρέπει να απομακρύνουμε από τον αγωγό, προκειμένου να μηδενισθεί το δυναμικό του, να εξισωθεί δηλαδή με το δυναμικό του τυχαίου σημείου αναφοράς.

Στην περίπτωση ζεύγους αγωγών μπορούμε να θεωρήσουμε την (ισοδυναμική) επιφάνεια του ενός εκ των δύο σαν (το ούτως ή άλλως αυθαίρετα επιλεγμένο) σημείο αναφοράς του δυναμικού. Τότε στην θέση του δυναμικού του ενός αγωγού που είχαμε πριν μπαίνει η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο αγωγών, η οποία μάλιστα είναι ανεξάρτητη από το σημείο αναφοράς του δυναμικού. Εξάλλου την θέση του φορτίου του ενός αγωγού παίρνει το φορτίο, το οποίο μετακινείται από τον έναν αγωγό στον άλλο, όταν τους συνδέσουμε αγωγίμα μεταξύ τους, μια και η μετακίνηση φορτίου σταματάει μόνον όταν οι δύο αγωγοί αποκτήσουν το ίδιο δυναμικό. Η έτσι οριζόμενη ονομάζεται

$$\text{(σχετική) χωρητικότητα ζεύγους αγωγών: } C = \frac{Q}{V} \quad [2.2]$$

όπου: V = διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών

Q = φορτίο, το οποίο πρέπει να μετακινηθεί από τον έναν αγωγό στον άλλο, προκειμένου να εξαφανιστεί η διαφορά δυναμικού.

Ζεύγος αγωγών αποτελεί εξ ορισμού και κάθε πυκνωτής, οπότε η χωρητικότητά του θα δίδεται επίσης από την σχέση [2.2]:

$$\text{χωρητικότητα πυκνωτή: } C = \frac{Q}{V} \quad [2.2a]$$

όπου: V = διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών

Q = φορτίο, ενός εκ των δύο οπλισμών

Η χωρητικότητα δηλαδή ενός πυκνωτή είναι το συνώνυμο της σχετικής χωρητικότητας των δύο οπλισμών του και περιγράφει ποσοτικά το φορτίο, το οποίο μπορούμε να αποθηκεύσουμε στον πυκνωτή, όταν τον συνδέσουμε με μια πηγή συγκεκριμένης τάσεως. Το γεγονός ότι στην σχέση [2.2a] υπεισέρχεται, το φορτίο του ενός από τους δυο (ίσα και αντίθετα φορτισμένους) οπλισμούς του, είναι αυτονόητο μια και η ροή του φορτίου αυτού είναι το αίτιο, το οποίο δημιούργησε την διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο οπλισμών κατά την φόρτιση του πυκνωτή.

Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή εξαρτάται, μόνο από την μορφή του (γεωμετρική κατανομή του φορτίου του), τις διαστάσεις του και το διηλεκτρικό μεταξύ των οπλισμών του (όπως θα δούμε στις επόμενες §§).

Το πλεονέκτημα ενός πυκνωτή σε σχέση με δύο ανεξάρτητους αγωγούς (π.χ.

τους οπλισμούς του σε μεγάλη απόσταση) είναι το ακόλουθο: Όσο πιο μακριά βρίσκονται οι «οπλισμοί» τόσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ τους και αντίστροφα (όταν βέβαια το φορτίο τους παραμένει αμετάβλητο). Ανάλογα μεγαλώνει και η τάση της πηγής, την οποία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να αποθηκεύσουμε μια συγκεκριμένη ποσότητα φορτίου. Με άλλα λόγια, όσο αυξάνει η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του (οπότε ο πυκνωτής τείνει να εκφυλισθεί σε σύστημα δύο ανεξαρτήτων αγωγών), τόσο ελαττώνεται η χωρητικότητα του πυκνωτή

Μονάδες χωρητικότητας : Από την εξίσωση [2.2α] προκύπτει αυτομάτως η εξίσωση ορισμού των μονάδων της χωρητικότητας:

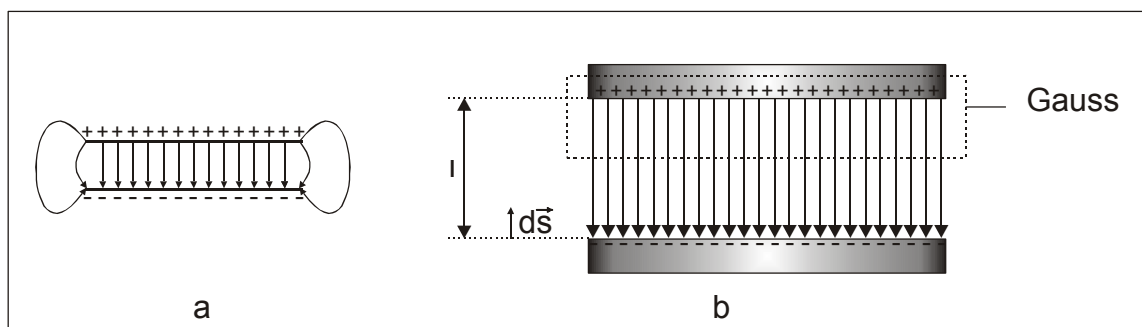
$$[2.2 \alpha] \rightarrow [C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{C}{V} \equiv F(\text{arad})$$

Επειδή το Farad είναι πολύ μεγάλη μονάδα (π.χ. επίπεδος πυκνωτής, του οποίου οι οπλισμοί απέχουν κατά 1 mm και ο οποίος έχει αέρα ως διηλεκτρικό, θα έπρεπε να διαθέτει οπλισμούς εμβαδού 100 km² περίπου, προκειμένου η χωρητικότητά του να είναι ίση με 1F) στην πράξη χρησιμοποιούνται τα υποπολλαπλάσια $\mu F (\equiv 10^{-6} F)$ και $p F (\equiv 10^{-12} F)$.

2.3 Υπολογισμός της χωρητικότητας ορισμένων μορφών πυκνωτών

α) Επίπεδος πυκνωτής: Το πεδίο είναι περιορισμένο κατά κύριο λόγο μεταξύ των οπλισμών και είναι ουσιαστικά ομογενές (βλ. σχ. 2.1) με εξαίρεση τα άκρα, τα οποία όμως παίζουν τόσο μικρότερο λόγο όσο ελαττώνεται η απόσταση των οπλισμών. (Το πειραματικά κατοχυρωμένο αυτό γεγονός γίνεται κατανοητό, αν θεωρήσουμε ότι οι φορτισμένοι οπλισμοί του πυκνωτή ευρίσκοντο αρχικά σε μεγάλη απόσταση, για να πλησιάσουν στην συνέχεια σιγά - σιγά σχηματίζοντας τον επίπεδο πυκνωτή. Όταν η απόσταση των οπλισμών ήταν μεγάλη, το φορτίο τους θα κατανέμετο, λίγο πολύ ομοιόμορφα, σε όλη τους την επιφάνεια, δηλαδή και στις προς το εξωτερικό του «πυκνωτή» στραμμένες πλευρές. Αυτό σημαίνει πως και το πεδίο εκτείετο σε όλο τον χώρο. Με την σταδιακή όμως ελάττωση της απόστασης αυξάνεται συνεχώς η πυκνότητα φορτίου στις εσωτερικές πλευρές των οπλισμών λόγω της αμοιβαίας έλξης των ετερονύμων τους φορτίων. Όταν η απόσταση των οπλισμών γίνει πολύ μικρή (σε σχέση πάντα με τις διαστάσεις των οπλισμών), όλο σχεδόν το φορτίο έχει μετακινηθεί προς τις δύο αυτές πλευρές, μεταξύ των οποίων περιορίζεται πλέον και το πεδίο. Επειδή δε η πυκνότητα φορτίου έκαστου οπλισμού είναι η ίδια για όλη του την επιφάνεια (μια και δεν υπάρχει λόγος να μην είναι) με εξαίρεση την περιοχή των άκρων, το πεδίο είναι ουσιαστικά ομογενές.)

Μετά την κάπως μακρά αυτή παρένθεση επαναλαμβάνουμε, ότι τα επόμενα ισχύουν με την **προϋπόθεση** πως το **πεδίο είναι περιορισμένο στον μεταξύ των οπλισμών χώρο και είναι ομογενές**, γεγονός το οποίο λίγο μόνον απέχει από την πραγματικότητα.



Σχήμα 2.1: Πεδίο επίπεδου πυκνωτή (a) και υπολογισμός του φορτίου ενός εκ των δύο οπλισμών με την βοήθεια του νόμου του Gauss (b).

Η χωρητικότητα ενός επίπεδου (όπως άλλωστε και κάθε) πυκνωτή θα δίνεται από την σχέση [2.2α]:

$$C = \frac{Q}{V} \quad \{ 1 \} \quad (V = \text{διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών,}$$

$Q = \text{φορτίο ενός εκ των δύο οπλισμών})$

Ο υπολογισμός του φορτίου Q του ενός οπλισμού, το οποίο χρειαζόμαστε προκειμένου να υπολογίσουμε την χωρητικότητα του πυκνωτή, μπορεί να γίνει με την βοήθεια του νόμου του Gauss:

Η ροή μέσω της κλειστής επιφάνειας Gauss του σχήματος 2.1(b) ισούται με την ροή μέσω του μεταξύ των οπλισμών ευρισκόμενου τμήματός της: Μέσω του επάνω τμήματος η ροή είναι μηδέν, επειδή μηδέν είναι και το πεδίο στο εσωτερικό του οπλισμού, μια και πρόκειται για αγωγό. Οι δύο πλευρικές εξάλλου επιφάνειες είναι παράλληλες προς την ένταση, οπότε η ροή τους είναι επίσης μηδενική. Απομένει λοιπόν μόνο η ροή μέσω του κάτω τμήματος, η οποία ισούται απλώς με το γινόμενο της έντασης E επί το εμβαδόν S του εν λόγω τμήματος, μια και η ένταση είναι σταθερή και κάθετη προς την επιφάνεια:

$$\Phi = \int_{\text{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Gauss}} E \cos\theta dS = \int_{\text{Gauss}} E dS = Q / \epsilon_0 \Rightarrow Q = \epsilon_0 E S \quad \{ 2 \} : \quad \text{Φορτίο οπλισμού επιπέδου πυκνωτή (S = επιφάνεια οπλισμού)}$$

Η διαφορά δυναμικού V μεταξύ των οπλισμών υπολογίζεται από την γενική σχέση [1.23α]:

$$V \equiv U_+ - U_- = - \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_0^l -E ds = E \int_0^l ds \Rightarrow \boxed{V = El}$$

[2.3]

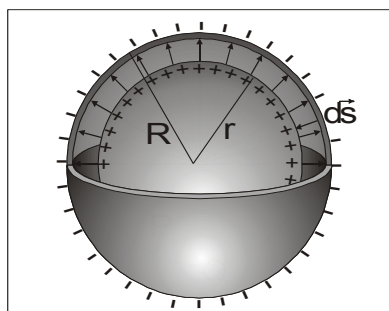
Η παραπάνω σχέση ισχύει για όλα τα ομογενή πεδία και μας επιτρέπει να υπολογίζουμε την διαφορά δυναμικού V μεταξύ δύο τυχαίων σημείων ενός ομογενούς πεδίου, των οποίων η απόσταση κατά την διεύθυνση της έντασης E ισούται με l .

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις [2.3] και {2} στην {1} παίρνουμε:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 E S}{El} \Rightarrow \boxed{C = \epsilon_0 \frac{S}{l}} \quad \text{:Χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή με κενό σαν διηλεκτρικό} \quad [2.4]$$

όπου S = επιφάνεια οπλισμού

l = απόσταση οπλισμών



Σχήμα 2.2: Σφαιρικός πυκνωτής.

β) Σφαιρικός πυκνωτής: Στον σφαιρικό πυκνωτή οι οπλισμοί είναι ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας R και r ($< R$) αντίστοιχα (βλ. σχ. 2.2).

Οι φορτισμένοι οπλισμοί του αποτελούν χαρακτηριστικό παράδειγμα σφαιρικής κατανομής φορτίου, οπότε το πεδίο στον χώρο μεταξύ των οπλισμών θα δίνεται από την σχέση

$$[1.7]: \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} \quad \{1\}$$

όπου r η απόσταση από το κέντρο των οπλισμών και Q το φορτίο του μικρού οπλισμού.

Η τάση V μεταξύ των οπλισμών υπολογίζεται από την σχέση [1.23α]:

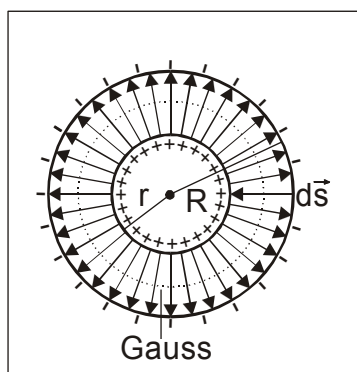
$$V \equiv U_+ - U_- = -\int_R^r \vec{E} d\vec{s} = -\int_R^r -Eds = \int_R^r Eds \stackrel{\{1\}}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^r \frac{ds}{Rr^2} \quad ds = -dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^r \frac{dr}{Rr^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right] \quad \{2\}$$

Η χωρητικότητα C του πυκνωτή θα είναι:

$$C = \frac{Q}{V} \stackrel{\{2\}}{=} \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right]} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right]} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{Rr}{R-r} \quad : \text{χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή οπλισμών ακτίνων } R > r \text{ (δηλ. = κενό)} \quad [2.5]$$

γ) Κυλινδρικός πυκνωτής (μ.γ.ο.ε!): Οι οπλισμοί ενός κυλινδρικού πυκνωτή είναι δύο ομοαξονικοί κύλινδροι ακτίνας R και r ($< R$) αντίστοιχα (βλ. σχ. 2.3).



Σχήμα 2.3: Κάθετη τομή κυλινδρικού πυκνωτή

λύνει η διαφορά μεταξύ l και R .

Το πεδίο μεταξύ των οπλισμών μπορεί να υπολογισθεί από τον νόμο του Gauss. Προς τον σκοπό αυτό επιλέγουμε σαν επιφάνεια Gauss κύλινδρο ομοαξονικό προς τους οπλισμούς (βλ. σχ.2.3) και μήκους l ίσο με το μήκος των οπλισμών.

Αν το μήκος l των οπλισμών είναι πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα R του εξωτερικού οπλισμού και κατά συνέπεια και από την απόσταση $(R - r)$ των οπλισμών, το πεδίο θα έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία του παράπλευρου (κυλινδρικού) τμήματος της παραπάνω επιφάνειας Gauss και θα είναι κάθετο προς αυτήν. (Εξαιρέση θα αποτελούν τα άκρα, τα οποία όμως θα παίζουν τόσο μικρότερο ρόλο στην διαμόρφωση της ηλεκτρικής ροής μέσω της εν λόγω επιφάνειας Gauss, όσο μεγα-

Με την **προϋπόθεση** λοιπόν ότι $l \gg R$ ο νόμος του Gauss μας δίνει:

$$\Phi = \Phi_{\text{παραπλ.}} = \int_{S_{\text{παραπλ.}}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{\text{παραπλ.}}} E dS = E \int_{S_{\text{παραπλ.}}} dS = E(2\pi r)l \stackrel{\text{Gauss}}{=} Q / \epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0 r} \quad \{1\}$$

Σημειωτέον ότι η παραπάνω σχέση περιγράφει ουσιαστικά το πεδίο του εσωτερικού οπλισμού, μια και ο εξωτερικός οπλισμός δεν δημιουργεί πεδίο στο εσωτερικό του, με την προϋπόθεση βέβαια ότι το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο από την διάμετρο του (βλ. κεφ. 1.11).

Η τάση V μεταξύ των οπλισμών υπολογίζεται και πάλι από την σχέση [1.23α]:

$$V \equiv U_+ - U_- = - \int_R^r \vec{E} d\vec{s} = - \int_R^r E ds = - \int_R^r \frac{Q}{4\pi l \epsilon_0 R r} ds \stackrel{\{1\}}{=} - \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0 R} \int_R^r \frac{dr}{r} = - \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} [\ln r]_R^r = - \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \Rightarrow V = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln \frac{R}{r} \quad \{2\}$$

Η χωρητικότητα τέλος του κυλινδρικού πυκνωτή θα είναι:

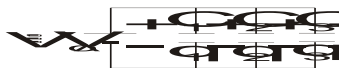
$$C = \frac{Q}{V} \stackrel{\{2\}}{=} \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln \frac{R}{r}} \Rightarrow C = \frac{2\pi l \epsilon_0}{\ln \frac{R}{r}} \quad \text{Χωρητικότητα κυλινδρικού πυκνωτή ακτίνων } R \text{ και } r \text{ και μήκους } l \text{ (} l \gg R > r, \text{ δηλ. = κενό)} \quad [2.6]$$

Παρατήρηση: Όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 2.2, η χωρητικότητα ενός πυκνωτή αυξάνεται, όσο ελαττώνεται η απόσταση των οπλισμών του. Το γεγονός αυτό αντικατοπτρίζεται άμεσα στις σχέσεις [2.4] ως [2.6].

2.4 Συνδεσμολογίες πυκνωτών

Είναι βέβαια προφανές πως για λόγους καθαρά τεχνικοοικονομικούς στο εμπόριο δεν διατίθενται πυκνωτές τυχαίας χωρητικότητας. Οι απαιτούμενες λοιπόν στην πράξη χωρητικότητες επιτυγχάνονται συνδυάζοντας τις λίγες τυποποιημένες του εμπορίου. Οι χρησιμοποιημένες προς τον σκοπό αυτό διατάξεις πυκνωτών προκύπτουν από τους ακόλουθους δύο βασικούς συνδυασμούς:

α) Πυκνωτές σε παράλληλη σύνδεση:



Στην παράλληλη σύνδεση η τάση μεταξύ των οπλισμών είναι για όλους τους πυκνωτές εξ' ορισμού η ίδια:

$$V = V_1 = V_2 = V_3 = V_{ολ} \equiv V \quad \{1\}$$

Επομένως το ολικό φορτίο θα μοιράζεται στους επιμέρους πυκνωτές ανάλογα με την χωρητικότητά τους. Άρα το ολικό φορτίο $q_{ολ} \equiv Q$ ισούται με το άθροισμα των φορτίων (π.χ. των θετικά φορτισμένων οπλισμών) των μεμονωμένων πυκνωτών: $Q \equiv q_{ολ} = q_1 + q_2 + q_3 \quad \{2\}$

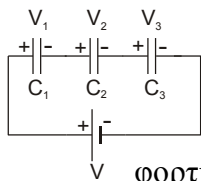
Η **ισοδύναμη ή ολική χωρητικότητα** C ορίζεται ως η χωρητικότητα ενός μόνου πυκνωτή, ο οποίος έχει φορτίο ίσο με το ολικό φορτίο της συστοιχίας, όταν στα άκρα του εφαρμόζεται η ίδια τάση με εκείνη της συστοιχίας:

$$C = \frac{q_{ολ}}{V_{ολ}} \equiv \frac{Q}{V} \stackrel{\{2\}}{=} \frac{q_1 + q_2 + q_3}{V} = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V} + \frac{q_3}{V} \Rightarrow C = C_1 + C_2 + C_3.$$

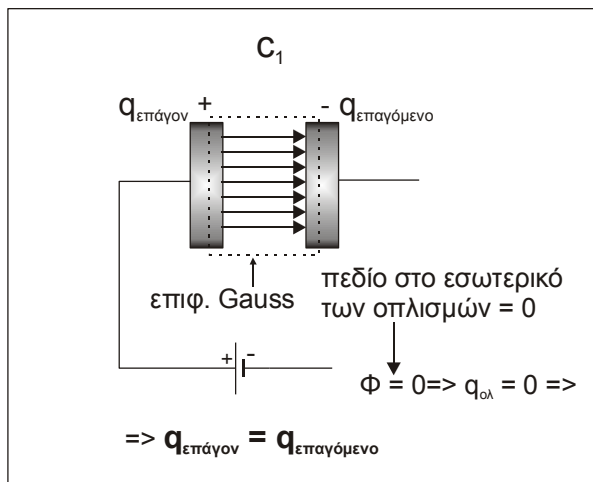
Στην γενική περίπτωση k παράλληλα συνδεμένων πυκνωτών έχουμε επομένως:

$$C = \sum_{i=1}^k C_i \quad \text{Ολική χωρητικότητα παράλληλης συστοιχίας k πυκνωτών} \quad [2.7]$$

β) Πυκνωτές σε σύνδεση κατά σειρά:



Στην σύνδεση σε σειρά φορτίζονται απ' ευθείας από την πηγή μόνο οι δύο ακραίοι οπλισμοί της συστοιχίας. Τα φορτία των ενδιάμεσων οπλισμών είναι επαγωγικά: προκύπτουν δηλαδή υπό την επίδραση του πεδίου των δύο ακραίων οπλισμών, το οποίο απλώς διαχωρίζει τα θετικά από τα αρνητικά φορτία, ενώ το ολικό φορτίο κάθε ζεύγους μεταξύ τους συνδεομένων εσωτερικών οπλισμών παραμένει αμετάβλητο, ίσο δηλαδή με μηδέν.



Σχήμα 2.4: Ισότητα μεταξύ επάγοντος και επαγόμενου φορτίου.

Επειδή τα επαγόμενα φορτία είναι ίσα με τα επάγοντα (βλ. σχ. 2.4), συμπεραίνουμε ότι

στη σύνδεση κατά σειρά το φορτίο όλων των πυκνωτών είναι το ίδιο και ίσο με το ολικό φορτίο της συστοιχίας:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_{ολ} \equiv Q \quad \{3\}$$

Επομένως η ολική τάση θα μοιράζεται στους επιμέρους πυκνωτές ανάλογα με την χωρητικότητά τους. Άρα η ολική τάση $V \equiv V_{ολ}$ ισούται με το άθροισμα των τάσεων μεμονωμένων πυκνωτών:

$$V \equiv V_{ολ} = V_1 + V_2 + V_3 \quad \{4\}$$

Η ολική χωρητικότητα C θα είναι:

$$C = \frac{q_{ολ}}{V_{ολ}} \equiv \frac{Q}{V} \stackrel{\{3\}}{=} \frac{Q}{V_1 + V_2 + V_3} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{Q} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} + \frac{V_3}{Q} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

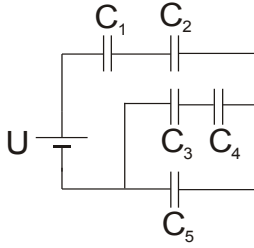
Στην γενική περίπτωση k σε σειρά συνδεομένων πυκνωτών έχουμε επομένως:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{C_i} \quad \text{ολική χωρητικότητα κατά σειρά συστοιχίας k πυκνωτών} \quad [2.8]$$

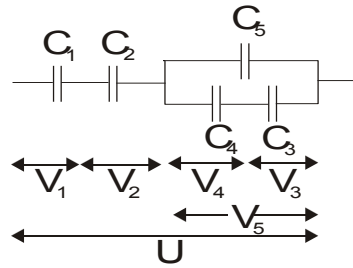
Παράδειγματα

Παράδειγμα 2.5.1: Να υπολογιστεί η τάση στα άκρα κάθε πυκνωτή του διπλανού κυκλώματος, όταν οι πυκνωτές έχουν φορτισθεί πλήρως. Να γίνει εφαρμογή για την περίπτωση: $U=9V$ και $C_i = aF$ ($i = 1, 2, \dots, 5$)

Λύση:



Το παραπάνω κύκλωμα μπορεί να σχεδιασθεί ως εξής:



Από το σχήμα αυτό προκύπτει άμεσα:

$$U = V_1 + V_2 + V_5 \quad \{1\}$$

$$V_5 = V_3 + V_4 \quad \{2\}$$

Από την θεωρία γνωρίζουμε εξάλλου, ότι

$$V_i = Q_i / C_i \quad (i=1,2,\dots,5) \quad \{3\}$$

Εφόσον οι χωρητικότητες C_i είναι γνωστές, απομένει να υπολογιστούν τα φορτία Q_i των πυκνωτών.

Από το σχήμα της συνδεσμολογίας προκύπτει άμεσα, ότι $Q_1 = Q_2 = Q^{345} = Q_{ολ} = C_{ολ} U$ {4}

Η ολική χωρητικότητα $C_{ολ}$ της συστοιχίας υπολογίζεται κατά τα γνωστά:

$$\frac{1}{C^{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \Rightarrow C^{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{\alpha \cdot \alpha}{\alpha + \alpha} \Rightarrow C^{34} = \frac{\alpha}{2} (F) \quad \{5\}$$

$$C^{345} = C_5 + C^{34} = \alpha + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow C^{345} = \frac{3}{2} \alpha (F) \quad \{6\}$$

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C^{345}} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot C^{345}}{C_2 \cdot C^{345} + C_1 \cdot C^{345} + C_1 \cdot C_2} \stackrel{\{6\}}{=} \frac{\alpha \cdot \alpha \cdot 3\alpha / 2}{\alpha \cdot 3\alpha / 2 + \alpha \cdot 3\alpha / 2 + \alpha \cdot \alpha} = \frac{3\alpha^3 / 2}{4\alpha^2} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{3}{8} \alpha (F) \quad \{7\}$$

Αντικαθιστούμε την {7} στην {4} και υπολογίζουμε: $Q_{ολ} = C_{ολ} \cdot U = \frac{3}{8} \alpha \cdot 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_{ολ} = \frac{27}{8} \alpha (C) \stackrel{\{4\}}{=} Q_1 = Q_2 = Q^{345} \quad \{8\}$$

Η {8} με την {3} μας δίνει λοιπόν τις τάσεις: $V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \stackrel{\{8\}}{=} \frac{27\alpha / 8}{\alpha} \Rightarrow V_1 = \frac{27}{8} (V)$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} \stackrel{Q_1=Q_2}{=} \stackrel{C_1=C_2}{=} V_1 \Rightarrow V_2 = \frac{27}{8} (V)$$

$$V_5 \stackrel{\text{σχήμα}}{=} V^{345} = \frac{Q^{345}}{C^{345}} \stackrel{\{8\}}{=} \frac{27\alpha / 8}{3\alpha / 2} \Rightarrow V_5 = \frac{9}{4} (V)$$

(Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της τάσης V_5 : Από την {1} προκύπτει, ότι $V_5 = U - V_1 - V_2$ Αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε.)

Τα φορτία Q_3 και Q_4 των πυκνωτών C_3 και C_4 υπολογίζονται, τέλος, ως εξής: Όπως φαίνεται από το σχήμα της συνδεσμολογίας, ισχύει

$$Q^{345} = Q_5 + Q^{34} \Rightarrow Q^{34} = Q^{345} - Q_5 = Q^{345} - C_5 \cdot V_5 = \frac{27}{8} \alpha - \alpha \cdot \frac{9}{4} \Rightarrow Q^{34} = \frac{9}{8} \alpha (C) \stackrel{\text{σχήμα}}{=} Q_3 = Q_4$$

$$\text{Όποτε } V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{9\alpha/8}{\alpha} \Rightarrow V_3 = \frac{9}{8}(V) \quad \text{και} \quad V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{9\alpha/8}{\alpha} \Rightarrow V_4 = \frac{9}{8}(V)$$

Το γεγονός ότι στην προκειμένη περίπτωση $V_3 = V_4 = V_5/2$, αντικατοπτρίζει την ισότητα των χωρητικότητων των πυκνωτών.

2.5 Ενέργεια μιας κατανομής φορτίου

Προκειμένου να επιτευχθεί μια τυχαία κατανομή φορτίου, όπως για παράδειγμα να φορτισθεί ένας αγωγός με φορτίο Q , δαπανάται προφανώς κάποια ενέργεια: Ήδη η απομάκρυνση ή πρόσδοση (ανάλογα με το αν το φορτίο Q είναι θετικό ή αρνητικό) του πρώτου ηλεκτρονίου συνεπάγεται την δημιουργία ενός ηλεκτρικού πεδίου, μέσα στο οποίο πρέπει να μετακινηθεί υπό κατανάλωση έργου το δεύτερο κ.ο.κ.

Ο υπολογισμός του συνολικά δαπανώμενου έργου W γίνεται, θεωρώντας ότι το ολικό φορτίο Q μετακινείται κατά απειροστά ποσά dq , ώστε κατά την μετακίνησή τους να μην μεταβάλλεται ουσιαστικά το πεδίο και επομένως το δυναμικό του αγωγού: Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή έχει μετακινηθεί ήδη φορτίο q . Τότε ο αγωγός (για να μην μιλάμε αφηρημένα περί κατανομής) έχει το δυναμικό $u=q/C$, όπου C είναι ως γνωστόν η χωρητικότητα του. Η μετακίνηση του αμέσως επόμενου ποσού φορτίου dq απαιτεί, σύμφωνα με τον ορισμό του δυναμικού, το έργο $dW = u dq$. Το ολικό έργο W θα είναι λοιπόν:

$$dW = u \cdot dq \Rightarrow dW = C \cdot u \cdot du \Rightarrow \int_0^W dW = C \int_0^U u du \Rightarrow W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad [2.9]$$

Οι δύο τελευταίες ισότητες προέκυψαν από τον ορισμό της χωρητικότητας ενός αγωγού: $C=Q/U$.

Σημειωτέον ότι U είναι το επιπλέον δυναμικό, το οποίο απέκτησε, ο αγωγός λόγω της μετακίνησης του φορτίου Q , από το σημείο αναφοράς του δυναμικού ως τον αγωγό. Στην περίπτωση λοιπόν που το ζητούμενο έργο είναι εκείνο της φόρτισης ενός πυκνωτή θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το δυναμικό U με την τάση V μεταξύ των οπλισμών, η οποία δημιουργείται κατά την μετακίνηση του φορτίου Q από τον ένα οπλισμό στον άλλο. Το παραπάνω έργο «φόρτισης», το οποίο στην περίπτωση του πυκνωτή προσφέρεται συνήθως από κάποια ηλεκτρική πηγή, δεν χάνεται (μια και το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι συντηρητικό), αλλά αποταμιεύεται στον αγωγό ή πυκνωτή με την μορφή ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας, η οποία θα μας δώσει ισόποσο έργο κατά την εκφόρτισή του. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω έχουμε:

$$\text{Ενέργεια φορτισμένου πυκνωτή: } W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad [2.9\alpha]$$

2.5.1 Το ηλεκτρικό πεδίο ως φορέας της ηλεκτρικής ενέργειας

Η ενέργεια ενός επίπεδου πυκνωτή χωρητικότητας $C (= \epsilon_0 S/l, \text{ βλ. [2.4] })$, θα είναι λοιπόν σύμφωνα με την σχέση [2.9α]:

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{l} V^2 \stackrel{V=El}{=} \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{S}{l} (El)^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 v$$

όπου $v = \text{όγκος του χώρου μεταξύ των οπλισμών}$, δηλαδή του χώρου μέσα στον οποίο εκτείνεται το πεδίο.

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση η ενέργεια του φορτισμένου πυκνωτή μπορεί να θεωρηθεί αποθηκευμένη μέσα στο ηλεκτρικό του πεδίο και μάλιστα με μια πυκνότητα ενέργειας $w=W/v= \epsilon_0 E^2/2$. Η σχέση αυτή διατηρεί την ισχύ της ακόμη και στην γενική περίπτωση ενός μη ομογενούς πεδίου, αρκεί η **πυκνότητα ενέργειας** να ορισθεί σαν η ενέργεια, η οποία είναι αποταμιευμένη σ' έναν τόσο μικρό όγκο dv , ώστε η ένταση του πεδίου να μπορεί να θεωρηθεί σαν σταθερή σε όλη του την έκταση:

$$\text{Πυκνότητα ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου: } w = \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad [2.10]$$

Είναι βέβαια ευνόητο, ότι στην γενική αυτή περίπτωση η πυκνότητα ενέργειας μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο.


Σημειωτέον ότι η παραπάνω αντίληψη για την φύση του ηλεκτρικού πεδίου, ως φορέα της ηλεκτρικής ενέργειας, έχει τις αρχές της στους Maxwell και Faraday. Κατά την μελέτη δε της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων γίνεται φανερό, ότι δεν πρόκειται απλώς για μια δυνατότητα ερμηνείας της εξίσωσης [2.10], αλλά για μια από την Φύση επιβεβλημένη πραγματικότητα.

2.6 Δίπολα

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η συμπεριφορά των μονωτικών υλικών εντός του ηλεκτρικού πεδίου πηγάζει από εκείνη των λεγόμενων *ηλεκτρικών διπόλων*, τα οποία είτε υπάρχουν ευθύς εξ αρχής είτε εμφανίζονται, αφού το μονωτικό υλικό δεχθεί την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου. Είναι λοιπόν αναγκαίο να γνωρίσουμε τα χαρακτηριστικά αυτών των διπόλων πριν περάσουμε στην μελέτη της συμπεριφοράς των μονωτών.

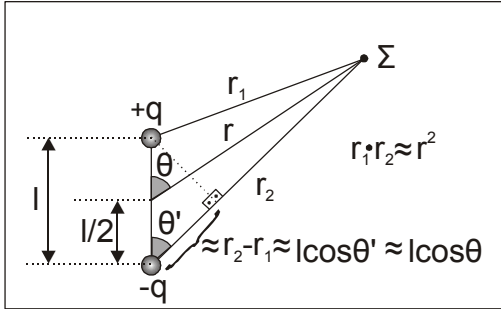
Ηλεκτρικό δίπολο καλείται κάθε ζεύγος δύο ίσων και αντίθετων σημειακών φορτίων ευρισκομένων πολύ κοντά το ένα στο άλλο. (Η μεταξύ τους απόσταση πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από εκείνη του κέντρου του δίπολου από το σημείο που μας ενδιαφέρει).

Οι ηλεκτρικές ιδιότητες ενός δίπολου μπορούν να περιγραφούν πολύ κομψά από μαθηματική άποψη με την βοήθεια ενός διανύσματος, το οποίο καλείται



$$\text{Διπολική ροή: } \vec{p} = q\vec{l} \quad [2.11]$$

Ας υπολογίσουμε για παράδειγμα το **ηλεκτρικό δυναμικό του δίπολου σε κάποιο σημείο Σ** το οποίο απέχει **απόσταση $r \gg l$ από το κέντρο του δίπολου** (επειδή $r \gg l$ μπορούμε να πούμε απλώς "από το δίπολο"):



Το δυναμικό σε ένα τυχαίο σημείο Σ θα ισούται με το άθροισμα των δυναμικών των μεμονωμένων σημειακών φορτίων +q και -q (βλ. σχ. 2.5):

$$U = U_{+q} + U_{-q} \stackrel{[1.15]}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$$

Σχήμα 2.5: Για τον υπολογισμό του δυναμικού ενός διπόλου.

Για $r \gg l$ οι γωνίες θ και θ' (βλ. σχ. 2.5) είναι σχεδόν ίσες, οπότε η διαφορά $r_2 - r_1 \approx l \cdot \cos\theta' \approx l \cdot \cos\theta$.

Για $r \gg l$ έχουμε εξάλλου $r_1 \approx r_2 \approx r$ και γι' αυτό $r_1 r_2 \approx r^2$. Έτσι η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q l \cos\theta}{r^2} \stackrel{[2.11]}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2} \quad [2.12]$$

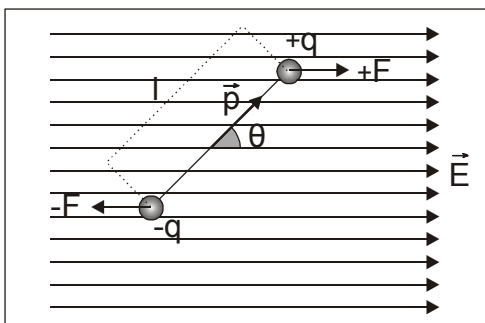
(Δυναμικό διπόλου διπολικής ροπής \vec{p})

όπου \vec{r} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση προς το σημείο που μας ενδιαφέρει (βλ. σχ. 2.5).

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται, ότι τα σημεία της μεσοκαθέτου στον άξονα του διπόλου ($\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos\theta = 0$) έχουν δυναμικό μηδέν, ενώ τα σημεία του άξονα του διπόλου ($\theta = 0^\circ \Rightarrow \cos\theta = 1$) έχουν το μέγιστο δυναμικό, το οποίο ελαττώνεται με το τετράγωνο της απόστασης (Το δυναμικό σημειακού φορτίου ελαττώνεται ανάλογα προς την απόσταση).

Το δίπολο μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο: Όταν το δίπολο βρεθεί μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο (π.χ. μεταξύ των οπλισμών επίπεδου πυκνωτή) έντασης \vec{E} , δέχεται την επίδραση ζεύγους δυνάμεων $\vec{F} = q\vec{E}$ και $-\vec{F}$, το οποίο ασκεί επί του δίπολου μηχανική ροπή $\vec{M} = [\vec{l} \times \vec{F}] = [\vec{l} \times q\vec{E}] = [q\vec{l} \times \vec{E}] = q[\vec{l} \times \vec{E}] \Rightarrow \vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}]$ [2.13]

\vec{M} : μηχανική ροπή, εξασκούμενη επί διπόλου ηλεκτρικής ροπής \vec{p} εντός ομογενούς ηλ. πεδίου έντασης \vec{E} .



Σχήμα 2.6: Δίπολο εντός ομογενούς ηλ. πεδίου.

Το μέτρο M της μηχανικής ροπής είναι κατά τα γνωστά $M = pE \sin\theta$ [2.13α], και η φορά της φαίνεται από το σχήμα 2.7.

Από την σχέση [2.13α] φαίνεται, ότι η μηχανική ροπή μηδενίζεται, όταν η γωνία θ γίνει επίσης ίση με μηδέν, όταν δηλαδή η ηλεκτρική ροπή p (άρα και ο άξονας του διπόλου) γίνει παράλληλη προς την διεύθυνση του πεδίου.

από την σχέση [2.12].

Σημειωτέον ότι στην πράξη χαρακτηρίζουμε σαν δίπολο οποιοδήποτε σύστημα φορτίων, του οποίου το δυναμικό (σε απομακρυσμένα σημεία) δίδεται,

Έτσι για παράδειγμα τα μόρια εκείνα, στα οποία δεν συμπίπτουν τα κέντρα κατανομής των θετικών και αρνητικών τους φορτίων (λόγω ασυμμετρίας της θέσεως των ηλεκτρονικών στοιβάδων και των πυρήνων του μορίου), έχουν (μόνιμη) διπολική ροπή και αποτελούν - τα πιο ενδιαφέροντα ίσως - δείγματα *φυσικών διπόλων*.

Υλικά, των οποίων τα μόρια έχουν μόνιμη διπολική ροπή ονομάζονται *πολικά* (π.χ. νερό/ H_2O , υδροχλώριο / HCl , αμμωνία / NH_3). Τα υπόλοιπα ονομάζονται *μη πολικά*.

2.7 Επίπεδος πυκνωτής με διηλεκτρικό – Διηλεκτρική σταθερά

Όπως παρατήρησε πρώτος ο Faraday, όταν μεταξύ των οπλισμών φορτισμένου και απομονωμένου επίπεδου πυκνωτή τοποθετηθεί ένα μονωτικό, η τάση μεταξύ των οπλισμών ελαττώνεται (χωρίς όμως να μηδενίζεται!). Αν αφαιρεθεί εξ άλλου το μονωτικό η τάση επανακτά την αρχική της τιμή, πράγμα το οποίο σημαίνει, ότι το φορτίο του πυκνωτή παρέμεινε αμετάβλητο.

Τα παραπάνω οδηγούν αναγκαστικά στο συμπέρασμα, ότι η αρχική χωρητικότητα $C_0=Q/V_0$ αυξήθηκε σε $C = Q/V$, ενώ η ένταση του πεδίου μεταξύ των οπλισμών ελαττώθηκε από $E_0=V_0/l$ σε $E=V/l$, όπου l η απόσταση των οπλισμών.

Το πηλίκο της χωρητικότητας C ενός επίπεδου πυκνωτή, όταν *ολόκληρος* ο χώρος μεταξύ των οπλισμών του είναι γεμάτος με κάποιο διηλεκτρικό, προς την χωρητικότητα C_0 του ίδιου πυκνωτή στο κενό καλείται *διηλεκτρικός αριθμός ϵ_r* (δυστυχώς πολύ συχνά λανθασμένα και *σχετική* - ως προς το κενό - *διηλεκτρική σταθερή*) του εν λόγω διηλεκτρικού και σύμφωνα με τα παραπάνω είναι:

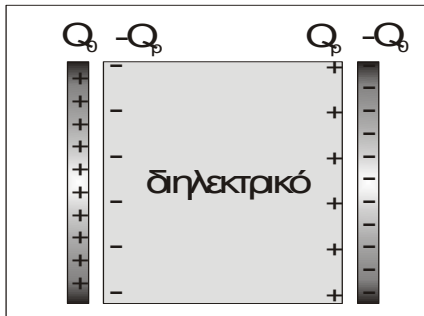
$$\boxed{\epsilon_r = \frac{C}{C_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E}} \quad \text{διηλεκτρικός αριθμός} \quad [2.14]$$

Οι τιμές του διηλεκτρικού αριθμού ϵ_r ορισμένων μονωτικών περιέχονται στον Πίνακα 1.2.1. Σημειωτέον ότι πρόκειται για *ομογενή* (διαφορετικά ο ϵ_r μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο) και *ισότροπα* (διαφορετικά η τιμή του ϵ_r εξαρτάται από την κατεύθυνση) *διηλεκτρικά*, στα οποία και θα περιοριστούμε.

Το γεγονός ότι η τάση -άρα και η ένταση του πεδίου- απλώς ελαττώνεται *χωρίς* όμως να μηδενίζεται (όπως θα συνέβαινε αν ο μεταξύ των οπλισμών χώρος γέμιζε με κάποιον *αγωγό*) σημαίνει, ότι το ηλεκτρικό πεδίο *διαπερνά* τους μονωτές, εξ ου και ο χαρακτηρισμός τους ως «διηλεκτρικά».

Εφαρμογές: Διηλεκτρικά υψηλού διηλεκτρικού αριθμού επιτρέπουν την κατασκευή πυκνωτών σχετικά μεγάλης χωρητικότητας και μικρών διαστάσεων. Συνθετικά κεραμικά διηλεκτρικά, τα οποία περιέχουν οξείδιο του Βαρίου (BaO) και οξείδιο του Τιτανίου (TiO), έχουν για παράδειγμα διηλεκτρικούς αριθμούς της τάξεως $10^3 - 10^4$. Παρόμοια αύξηση της χωρητικότητας επιτυγχάνεται εξάλλου με την βοήθεια λεπτότατων στρωμάτων διηλεκτρικού, όπως στην περίπτωση των ηλεκτρολυτικών πυκνωτών. Η χρήση, τέλος, των διηλεκτρικών έχει πλέον και ένα άλλο «μηχανικό» πλεονέκτημα: εμποδίζει τους οπλισμούς του πυκνωτή να έρθουν σε επαφή αυξάνοντας έτσι την ανθεκτικότητα των πυκνωτών σε μηχανικές καταπονήσεις, όπως π.χ. είναι οι κραδασμοί.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να κατανοήσουμε την συμπεριφορά των διηλεκτρικών εντός του ηλεκτρικού πεδίου, ξεκινώντας από τα πειραματικά δεδομένα για τον επίπεδο πυκνωτή με διηλεκτρικό. Σημειωτέον ότι όλα τα υπόλοιπα ισχύουν με την **προϋπόθεση** πως το πεδίο μεταξύ των οπλισμών είναι ομογενές, δεν παίρνουν δηλαδή υπόψη την περιοχή των άκρων.



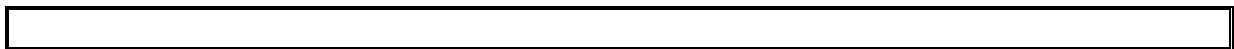
Σχήμα 2.8: Πόλωση διηλεκτρικού εντός του ομογενούς πεδίου επίπεδου πυκνωτή.

φορτίων στην επιφάνεια του διηλεκτρικού και μάλιστα αρνητικών ($-Q_p$) στην πλευρά που εφάπτεται τον θετικά φορτισμένο οπλισμό και θετικών ($+Q_p$) στην απέναντι (βλ. σχ. 2.8). Το φαινόμενο αυτό καλείται **πόλωση του διηλεκτρικού**, όρος ο οποίος θα αποσαφηνιστεί στην συνέχεια.

Το φορτίο πολώσεως δημιουργεί ένα νέο πεδίο έντασης $E_p = Q_p / (\epsilon_0 S) \equiv \sigma_p / \epsilon_0$, όπου σ_p είναι η **επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως**.

Σημειωτέον ότι η παραπάνω τιμή της E_p αναφέρεται στο *εσωτερικό* του διηλεκτρικού. Στον χώρο έξω από το διηλεκτρικό το πεδίο πολώσεως μηδενίζεται, μια και το πεδίο της μιας πλευράς του διηλεκτρικού εξουδετερώνει εκείνο της άλλης.

Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.9, το πεδίο πολώσεως \vec{E}_p είναι αντίθετο προς το πεδίο \vec{E}_0 , το οποίο οφείλεται στο φορτίο Q_0 του πυκνωτή ($E_0 = Q_0 / (\epsilon_0 S) \equiv \sigma_0 / \epsilon_0$). Έτσι το συνολικό πεδίο $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ είναι μειωμένο στο εσωτερικό του διηλεκτρικού και μάλιστα κατά τον παράγοντα $1 / \epsilon_r$, όπως προκύπτει πειραματικά:



Σύμφωνα με την εξίσωση {2} ($Q = \epsilon_0 E S$, $Q =$ φορτίο, $S =$ μετωπική επιφάνεια έκαστου οπλισμού) του κεφαλαίου 2.4α, η ένταση E του πεδίου στον χώρο μεταξύ των οπλισμών είναι ανάλογη της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου $\sigma = Q/S$ των οπλισμών του. Η εξασθένιση λοιπόν του πεδίου παρουσία διηλεκτρικού θα συνεπάγεται κατ' ανάγκη και την ελάττωση της γενεσιουργού του πεδίου επιφανειακής πυκνότητας και μάλιστα κατά τον ίδιο παράγοντα ϵ_r . Επειδή δε η τοποθέτηση του διηλεκτρικού δεν μετέβαλλε το φορτίο Q_0 των οπλισμών, πρέπει η εν λόγω ελάττωση της γενεσιουργού επιφανειακής πυκνότητας φορτίου να οφείλεται στην εμφάνιση

Πεδίο εντός ομογενούς και ισότροπου διηλεκτρικού ευρισκόμενου εντός του ομογενούς πεδίου επίπεδου πυκνωτή

$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$: συνολικό πεδίο

\vec{E}_0 : πεδίο του φορτίου του πυκνωτή

\vec{E}_p : πεδίο του φορτίου πόλωσης

$E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$: μεταξύ των οπλισμών

$E_p = \sigma_p / \epsilon_0$: εντός του διηλεκτρικού

σ_0 : επιφανειακή πυκνότητα των οπλισμών

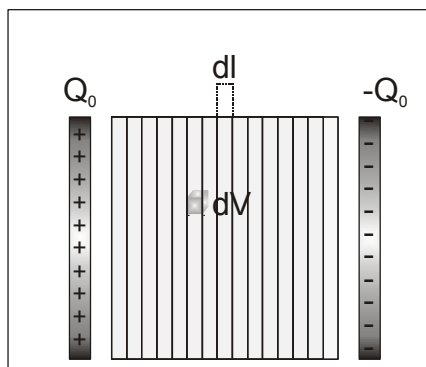
σ_p : επιφανειακή πυκνότητα του διηλεκτρικού

Σχήμα 2.9: Πεδίο \vec{E}_0 : του φορτίου των οπλισμών, \vec{E}_p : του φορτίου πόλωσης και \vec{E} : συνολικό πεδίο εντός του διηλεκτρικού.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \stackrel{\text{πείραμα}}{=} \vec{E}_0 / \epsilon_r \quad (\text{πεδίο στο εσωτερικό του ομογενούς και ισότροπου διηλεκτρικού επίπεδου πυκνωτή}) \quad [2.15]$$

Θεωρώντας την φορά του πεδίου \vec{E}_0 ως θετική η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$E_0 - E_p = E_0 / \epsilon_r \Rightarrow E_p = (1 - 1/\epsilon_r) E_0 \stackrel{E_p = \sigma_p / \epsilon_0}{\Rightarrow} \sigma_p = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) E_0 \quad \{1\}$$



Σχήμα 2.10: Διπολική ροπή στοιχειώδους κύβου dv .

του) κύβου $dv = dS \cdot dl$, μια και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το διηλεκτρικό αποτελείται από λεπτές φέτες αντίστοιχου πάχους dl .

Κάθε τέτοιος στοιχειώδης κύβος dv θα έχει κατά συνέπεια μια στοιχειώδη διπολική ροπή $d\vec{p}$, της οποίας η τιμή θα δίδεται από την σχέση [2.11]:

$$dp = dQ_p dl \stackrel{dQ_p = \sigma_p dS}{=} \sigma_p dS dl \Rightarrow dp = \sigma_p dv \Leftrightarrow \sigma_p = \frac{dp}{dv} \quad \{2\}$$

Σκεπτόμενοι τώρα, ότι το πεδίο στο εσωτερικό του διηλεκτρικού εξαρτάται (βλ. σχέσεις σχήματος 2.9) από την τιμή της επιφανειακής πυκνότητας σ_p , η οποία με την σειρά της ισούται (βλ. σχ. {2}) με την ανά μονάδα όγκου dv από το εξωτερικό πεδίο (με κάποιον διερευνη-

τέο μηχανισμό) προκαλούμενη διπολική ροπή $d\vec{p}$, εύκολα καταλαβαίνουμε την ανάγκη εισαγωγής του ακόλουθου φυσικού μεγέθους:

Διηλεκτρική πόλωση \vec{P} ενός διηλεκτρικού καλείται η (συνήθως υπό την επίδραση κάποιου εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου προκαλούμενη) συνολική ηλεκτρική ροπή της μονάδας όγκου του διηλεκτρικού: $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$, $P = \sigma_p$ [2.16]

Όπου σ_p : **επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου (πολώσεως)**, την οποία θα έπρεπε να έχει κάθε *κάθετη* προς την διηλεκτρική πόλωση \vec{P} (στο κέντρο του) έδρα ενός στοιχειώδους κύβου dv του διηλεκτρικού, ώστε να προκαλούσε διπολική ροπή $d\vec{p} = \vec{P}dv$.

Από τον συνδυασμό των σχέσεων [2.16] και {1} και αφού πάρουμε υπόψη και την φορά των διανυσμάτων \vec{P} , \vec{E}_0 και \vec{E} παίρνουμε:

$$\left. \begin{array}{l} [2.16] : P = \sigma_p \\ \{1\} : \sigma_p = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) E_0 \end{array} \right\} \vec{P} = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \vec{E}_0 \stackrel{[2.15]}{\Rightarrow} \boxed{\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \equiv \epsilon_0 \chi \vec{E}} \quad [2.17]$$

$$\text{όπου} \quad \boxed{\chi = \epsilon_r - 1} \quad : \text{διηλεκτρική επιδεκτικότητα} \quad [2.18]$$

Παρατηρήσεις : 1^η) Η σχέση [2.17] ισχύει για *ομογενή και ισότροπα* διηλεκτρικά ακόμη και στην περίπτωση που το πεδίο \vec{E}_0 είναι *μη ομογενές*, μια και - σύμφωνα με την εξίσωση ([2.16]) ορισμού της - η διηλεκτρική πόλωση \vec{P} χαρακτηρίζει κατ' αρχήν μια τόσο μικρή περιοχή του διηλεκτρικού, ώστε το πεδίο \vec{E}_0 να μπορεί να εκληφθεί σαν ομογενές σε όλο της τον όγκο dv . Εξάλλου η σχέση [2.17] δεν μας λέει τίποτε άλλο, παρά πως

α) η πόλωση σε κάποιο σημείο ενός διηλεκτρικού έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με την ένταση του πεδίου στο εν λόγω σημείο -και πώς θα μπορούσε να μην έχει, την στιγμή που το διηλεκτρικό προϋποτίθεται ισότροπο;

β) το αποτέλεσμα (δηλ. η πόλωση) είναι ανάλογο προς το αίτιο (δηλ. την ένταση του ηλ. πεδίου), πράγμα το οποίο είναι αυτονόητο για όλα τα **γραμμικά** καλούμενα **υλικά**. Υλικά, τα οποία δεν ακολουθούν τον κανόνα αυτό δεν θεωρούνται διηλεκτρικά αλλά σιδηροηλεκτρικά (βλ. παρακάτω).

2^η) Στην περίπτωση *μη ισότροπου* διηλεκτρικού η διηλεκτρική πόλωση εξαρτάται από τον προσανατολισμό του. Έτσι η διηλεκτρική επιδεκτικότητα χ δεν είναι πλέον μονόμετρο μέγεθος αλλά τανυστής 2^{ου} μεγέθους (βλ. σχ. 2.11), με αποτέλεσμα τα διανύσματα \vec{P} και \vec{E} να μην έχουν πλέον την ίδια διεύθυνση.

Τανυστής διηλεκτρικής επιδεκτικότητας

Οι ηλεκτρικές (και όχι μόνο) ιδιότητες ενός *ανισότροπου* διηλεκτρικού εξαρτώνται από την κατεύθυνση. Για τον λόγο αυτό η διηλεκτρική επιδεκτικότητα είναι **τανυστής 2^{ου} μεγέθους**, πράγμα το οποίο υποδηλώνουν οι δύο γραμμές κάτω από το σύμβολο της: $\underline{\underline{\chi}}$. Σαν τανυστής (2^{ου} μεγέθους εννοείται από δω και στο εξής) η επιδεκτικότητα έχει εννέα συντελεστές, οι οποίοι αποδίδονται συνήθως με την βοήθεια του ακόλουθου μητρώου:

$$\underline{\underline{\chi}} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \quad \text{:τανυστής διηλεκτρικής επιδεκτικότητας}$$

(Οι δείκτες 1,2,3, χρησιμοποιούνται συνήθως αντί των x, y, z.

Η φυσική σημασία των συντελεστών χ_{ij} της διηλεκτρικής επιδεκτικότητας είναι η ακόλουθη:

Ο συντελεστής χ_{ij} καθορίζει την διηλεκτρική πόλωση την οποία προκαλεί κατά την κατεύθυνση i από την συνιστώσα E_j του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} ($i, j = 1, 2, 3 \equiv x, y, z$). Το γεγονός αυτό κάνει την παρακάτω σχέση υπολογισμού των συντελεστών \vec{P} , της διηλεκτρικής πόλωσης \vec{P} , η οποία προκύπτει από την σχέση [2.17] σε συνδυασμό με τους κανόνες πολλαπλασιασμού των μητρώων, αυτονόητη:
$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j$$

Σημειωτέον ότι ο τανυστής της διηλ. Επιδεκτικότητας είναι πάντα **συμμετρικός**: $\chi_{ij} = \chi_{ji}$

Σχήμα 2.11: Γενικά περί του τανυστή της διηλεκτρικής επιδεκτικότητας.

3^η) Υπάρχει μια κατηγορία υλικών, τα λεγόμενα **σιδηροηλεκτρικά** (σε αντιστοιχία με τα σιδηρομαγνητικά), των οποίων η επιδεκτικότητα εξαρτάται τόσο από την ένταση του πεδίου όσο και από την προϊστορία τους. Αυτό σημαίνει, ότι η σχέση μεταξύ της διηλ. πόλωσης \vec{P} και της έντασης \vec{E} δεν είναι πλέον γραμμική (η σχέση [2.17] είναι δηλαδή ουσιαστικά άχρηστη). Η πόλωση των υλικών αυτών μπορεί να είναι διάφορη του μηδενός ακόμη και όταν δεν υπάρχει εξωτερικό πεδίο. Σε ορισμένες περιπτώσεις η πόλωση παραμένει αμετάβλητη ακόμη και υπό την επίδραση ισχυρών ηλεκτρικών πεδίων, μεταβάλλεται όμως εάν το υλικό θερμανθεί. Τέτοια υλικά χαρακτηρίζονται συνήθως σαν **πυροηλεκτρικά** προκειμένου να τα διακρίνουμε από τα υπόλοιπα, τα οποία και χαρακτηρίζονται σαν σιδηροηλεκτρικά.

Ο σιδηροηλεκτρισμός εξαφανίζεται συνήθως, όταν η θερμοκρασία ξεπεράσει μια χαρακτηριστική για το υλικό τιμή. Το μέχρι τότε σιδηροηλεκτρικό υλικό μεταβαίνει σε μια κατάσταση, η οποία χαρακτηρίζεται σαν **παραηλεκτρική**. Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται και πάλι σε αντιστοιχία με τον παραμαγνητισμό, και υποδηλώνει κυρίως την γρήγορη πτώση της διηλεκτρικής σταθερής με αυξανόμενη θερμοκρασία. (Περισσότερα περί σιδηροηλεκτρικών υλικών θα βρει ο αναγνώστης π.χ. στο βιβλίο του Charles Kittel: “Einführung in die Festkörperphysic”, 5^η Έκδοση, R.Oldenbourg 1980, ή στο πρωτότυπο “Introduction to Solid State Physics”, 5^η Έκδοση, John Wiley & Sons 1976)

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να ανακεφαλαιώσουμε, όσα είπαμε μέχρι τώρα για τον επίπεδο πυκνωτή με διηλεκτρικό, πριν επιχειρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο να καταλήξουμε σε γενικά συμπεράσματα.

Όταν λοιπόν ο χώρος μεταξύ των οπλισμών *επίπεδου πυκνωτή* γεμίσει *πλήρως* με κάποιο διηλεκτρικό, η χωρητικότητα του πυκνωτή αυξάνει κατά έναν παράγοντα ϵ_r , ο οποίος καλείται διηλεκτρικός αριθμός και είναι χαρακτηριστικός για το συγκεκριμένο διηλεκτρικό.

Η παραπάνω αύξηση της χωρητικότητας του επίπεδου πυκνωτή είναι αποτέλεσμα της αντίστοιχης ελάττωσης του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του διηλεκτρικού, η οποία με την σειρά της οφείλεται στην εμφάνιση φορτίων πολώσεως στην επιφάνεια του διηλεκτρικού:

θετικών στην πλευρά που εφάπτεται τον αρνητικά φορτισμένο οπλισμό και αρνητικών στην απέναντι.

Η πόλωση αυτή του διηλεκτρικού έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία ενός νέου ηλεκτρικού πεδίου, του πεδίου πολώσεως \vec{E}_p , το οποίο έχει αντίθετη φορά προς το πεδίο \vec{E}_0 , που πηγάζει από το φορτίο των οπλισμών. Αποτέλεσμα του γεγονότος αυτού είναι η ελάττωση του συνολικού πεδίου $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ ακριβώς κατά τον παράγοντα ϵ_r : $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r$. Σημειωτέον ότι η τιμή αυτή του συνολικού πεδίου ισχύει για την συγκεκριμένη γεωμετρία του *επίπεδου πυκνωτή*, του οποίου *όλος ο* μεταξύ των οπλισμών του ευρισκόμενος χώρος καλύπτεται από διηλεκτρικό.

Η πόλωση του διηλεκτρικού περιγράφεται εξάλλου με την βοήθεια ενός νέου διανυσματικού μεγέθους, της διηλεκτρικής πόλωσης \vec{P} , η οποία ορίζεται σαν η συνολική ηλεκτρική ροπή της μονάδας όγκου του διηλεκτρικού: $\vec{P} = d\vec{p} / dV$. Στην περίπτωση *ομογενών* και *ισότροπων* διηλεκτρικών η διηλ. πόλωση δίδεται από την σχέση: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, όπου χ είναι η χαρακτηριστική για το συγκεκριμένο διηλεκτρικό διηλεκτρική επιδεκτικότητα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση του *επίπεδου πυκνωτή* η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως καθώς και το εξ αυτής πηγάζον πεδίο πολώσεως συνδέονται με την διηλεκτρική πόλωση μέσω των ακόλουθων εξισώσεων: $\sigma_p = P, \vec{E}_p = -\vec{P} / \epsilon_0$

2.8 Φορτίο πολώσεως. Ηλεκτρική διαταραχή (ή μετατόπιση)

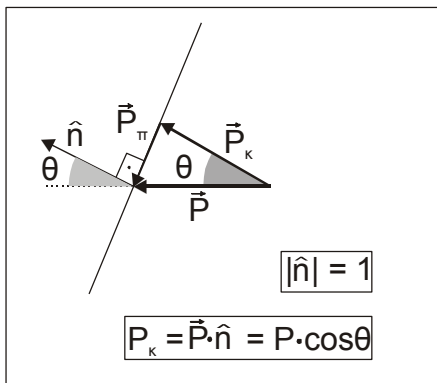
[μόνο τύπους & συμπεράσματα]

Ας προσπαθήσουμε τώρα, όπως υποσχθήκαμε, να γενικεύσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα, έτσι ώστε να ισχύουν για κατά το δυνατόν γενικότερες, πρακτικά ενδιαφέρουσες περιπτώσεις:

α) Επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί της επιφάνειας διηλεκτρικού, το οποίο περιβάλλεται από κενό: Όπως είδαμε (βλ. [2.16]), στην περίπτωση που η διηλ. πόλωση \vec{P} είναι κάθετη προς την επιφάνεια του διηλεκτρικού, το μέτρο της P ισούται (ουσιαστικά εξ ορισμού) με την επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως ($\sigma_p = P$). Αντιθέτως αν η διηλ. πόλωση είναι *παράλληλη* προς την επιφάνεια του διηλεκτρικού, η επιφανειακή πυ-

κνότητα του φορτίου πολώσεως ισούται με μηδέν.

Στην γενική περίπτωση τυχαίου προσανατολισμού της διηλεκτρικής πόλωσης (βλ. σχ. 2.12)

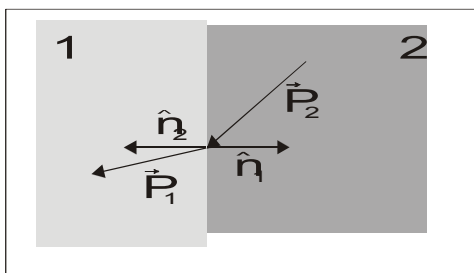


Σχήμα 2.12: Για τον υπολογισμό της επιφανειακής πυκνότητας του φορτίου πολώσεως, όταν το διηλεκτρικό περιβάλλεται από κενό. (\hat{n} είναι το κάθετο επί της επιφάνειας μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του διηλεκτρικού).

Με αφετηρία την σχέση [2.18] μπορούμε να υπολογίσουμε το **ολικό φορτίο πολώσεως επί της εξωτερικής επιφάνειας οποιουδήποτε διηλεκτρικού, το οποίο περιβάλλεται, από κενό:**

$$[2.18]: \quad \sigma_p = \frac{dQ_p}{dS} = (\vec{P} \cdot \hat{n}) \Rightarrow dQ_p = (\vec{P} \cdot \hat{n}) dS \equiv \vec{P} \cdot d\vec{S} \Rightarrow Q_p = \oint \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad [2.18\alpha]$$

β) Επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί της διαχωριστικής επιφάνειας δύο διαφορετικών διηλεκτρικών: Στην περίπτωση αυτή (βλ. σχ. 2.13) θα πρέπει να πάρουμε υπ' όψη μας την συνεισφορά των διηλεκτρικών πολώσεων \vec{P}_1 και \vec{P}_2 εκατέρωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας. Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση [2.18] έχουμε:



Σχήμα 2.13: Για τον υπολογισμό της επιφανειακής πυκνότητας του φορτίου πολώσεως επί της διαχωριστικής επιφάνειας δύο διαφορετικών διηλεκτρικών.

Στην παραπάνω περίπτωση εντάσσεται και η **υποπερίπτωση β1)** κατά την οποία εκατέ-

μπορούμε να την αναλύσουμε σε μια κάθετη (\vec{P}_{κ}) και μια παράλληλη (\vec{P}_{π}) προς την επιφάνεια συνιστώσα. Η επιφανειακή πυκνότητα σ_p θα ισούται κατά τα γνωστά με το μέτρο P_{κ} της κάθετης προς την επιφάνεια συνιστώσας:

$$\sigma_p = P_{\kappa} \stackrel{\text{σχ. 2.12}}{=} P \cos\theta \equiv P \cos\theta |\hat{n}| \Rightarrow \sigma_p = (\vec{P} \cdot \hat{n}) \quad [2.18]$$

(επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί της επιφάνειας διηλεκτρικού, το οποίο περιβάλλεται από κενό.)

Στην παραπάνω σχέση: \vec{P} = διηλεκτρική πόλωση αμέσως κάτω από την επιφάνεια

\hat{n} = μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο επί της επιφάνειας και με φορά προς το εξωτερικό του διηλεκτρικού.

$$\sigma_p = (\vec{P}_1 \cdot \hat{n}_1) + (\vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2) \quad [2.19]$$

(επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί της διαχωριστικής επιφάνειας δύο διαφορετικών διηλεκτρικών)

Στην παραπάνω σχέση: \vec{P}_i = διηλ. πόλωση του διηλεκτρικού i.

\hat{n}_i = μοναδιαίο διά-

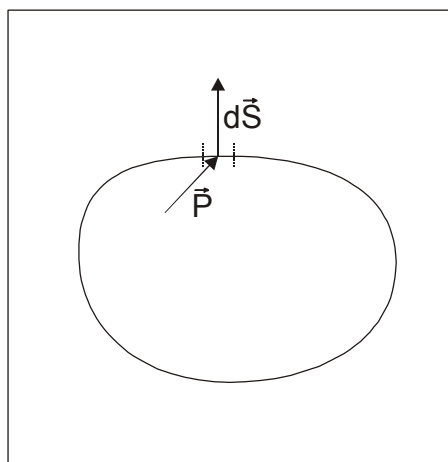
ρωθεν της «διαχωριστικής» επιφάνειας βρίσκεται το ίδιο διηλεκτρικό. Πρόκειται δηλαδή για την **επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί τυχαίας επιφάνειας στο εσωτερικό ενός (ομογενούς και ισότροπου εννοείται πάντα) διηλεκτρικού**: Τότε θα έχουμε

$$\vec{P}_1 \equiv \vec{P}_2 \stackrel{[2.17]}{=} \epsilon_0 \chi \vec{E}, \text{ όπου } \vec{E} \text{ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου επί της εν λόγω επιφάνειας.}$$

Παίρνοντας επιπλέον υπ' όψη ότι $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$, η σχέση [2.19] μας δίνει απ' ευθείας: $\sigma_p = 0$.

Επομένως η επιφανειακή πυκνότητα του φορτίου πολώσεως επί μιας τυχαίας επιφάνειας στο εσωτερικό ενός ομογενούς και ισότροπου διηλεκτρικού ισούται με μηδέν.

γ) Στην περίπτωση μιας κλειστής επιφάνειας S (βλ. σχ.2.14) το γινόμενο $(\vec{P} \cdot d\vec{S})$ ισούται με το φορτίο πολώσεως, το οποίο μετακινήθηκε από το εντός της επιφάνειας ευρισκόμενο διηλεκτρικό προς το στοιχείο dS της εν λόγω επιφάνειας, αφήνοντας έτσι φορτίο $-(\vec{P} \cdot d\vec{S})$ στο εσωτερικό της. Άρα το ολικό φορτίο πολώσεως στο εσωτερικό της κλειστής επιφάνειας S θα είναι:



Σχήμα 2.14: Κλειστή επιφάνεια εντός διηλεκτρικού.

$$Q_p = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad [2.20]$$

(φορτίο πολώσεως εντός κλειστής επιφάνειας S στο εσωτερικό ενός διηλεκτρικού)

Ας θεωρήσουμε τώρα μια τυχαία κλειστή επιφάνεια S , σε έναν χώρο όπου επικρατεί ηλεκτροστατικό πεδίο εντάσεως \vec{E} , η οποία περικλείει διάφορους αγωγούς και διηλεκτρικά ή τμήματα αυτών. Όσο πολύπλοκη και αν είναι η μορφή του πεδίου, πάντα θα ισχύει με το νόμο του Gauss:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{ολ}}{\epsilon_0} = \frac{Q + Q_p}{\epsilon_0} \quad \{1\},$$

όπου Q = ολικό «πραγματικό» φορτίο (π.χ. πλεόνασμα ηλεκτρονίων εντός ενός μετάλλου) εντός της επιφάνειας S .

Q_p = ολικό «φαινομενικό» (δηλαδή μέσω πολώσεως «εμφανισμένο» φορτίο πολώσεως εντός της επιφάνειας S).

Αν στην σχέση {1} αντικαταστήσουμε το φορτίο πολώσεως από την σχέση [2.20], θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_S \vec{P} d\vec{S} \Rightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} + \frac{1}{\epsilon_0} \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S \left(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \right) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q \Leftrightarrow \boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q} : \text{Γενική διατύπωση του νόμου του Gauss} \quad [2.21] \end{aligned}$$

(ισχύει παρουσία και μη ύλης)

$$\text{όπου } \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} : \text{Ηλεκτρική διαταραχή ή μετατόπιση} \quad [2.22]$$

$Q =$ ολικό «πραγματικό» φορτίο (π.χ. πλεόνασμα ηλεκτρονίων εντός ενός μετάλλου) εντός της επιφάνειας S .

Αντικαθιστώντας στην [2.22] τις σχέσεις [2.17] $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ και [2.18] $\chi = \varepsilon_r - 1$ παίρνουμε:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \equiv \varepsilon \vec{E}} \quad [2.23]$$

$$\text{όπου } \boxed{\varepsilon = : \varepsilon_0 \varepsilon_r} : \text{διηλεκτρική σταθερή} \quad [2.24]$$

Τιμές της διηλεκτρικής σταθερής ορισμένων διηλεκτρικών περιέχονται στον Πίνακα 1.1.1.

Όπως η διηλεκτρική επιδεκτικότητα (βλ. κεφ. 2.8) έτσι και η διηλεκτρική σταθερή, στην περίπτωση ανισότροπων διηλεκτρικών, δεν είναι μονόμετρο μέγεθος αλλά τανυστής 2^{ου} μεγέθους, με αποτέλεσμα τα διανύσματα \vec{D} και \vec{E} να έχουν διαφορετικές διευθύνσεις. Επιπλέον η διηλεκτρική σταθερή των σιδηροηλεκτρικών υλικών εξαρτάται και από την ένταση \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου.

Η ονομασία «διηλεκτρική διαταραχή» (ή «μετατόπιση») για το διάνυσμα \vec{D} έχει καθαρά ιστορική προέλευση και δεν συνδέεται με την πραγματική του υπόσταση, η οποία παραμένει ουσιαστικά ασαφής. Γεγονός είναι βέβαια, ότι η εισαγωγή του διανύσματος \vec{D} συμβάλλει αποφασιστικά στην συστηματική συντομογράφηση των αντιστοίχων εξισώσεων, πράγμα το οποίο και την καταξιώνει. Σαν απλό παράδειγμα αναφέρουμε την παραπάνω γενική διατύπωση του νόμου του Gauss ([2.21]).

δ)(μ.γ.ο.ε.) Στην περίπτωση ενός ομογενώς πολωμένου διηλεκτρικού ($\vec{P} =$ σταθ.) η ροή $\oint \vec{P} d\vec{S}$ της πόλωσης μέσω μιας τυχαίας κλειστής επιφάνειας S μηδενίζεται, όπως αποδεικνύεται στο σχήμα 2.15. Τότε σύμφωνα με την σχέση [2.20] μηδενίζεται και το εντός της επιφάνειας ευρισκόμενο φορτίο πολώσεως. Αυτό σημαίνει ότι το φορτίο πολώσεως ενός ομογενώς πολωμένου διηλεκτρικού κατανέμεται εξ ολοκλήρου στην επιφάνειά του.

Επομένως το πεδίο πολώσεως \vec{E}_p ενός ομογενώς πολωμένου διηλεκτρικού καθορίζεται εξ ολοκλήρου από την γεωμετρική μορφή της επιφάνειας του διηλεκτρικού.

Σημειωτέον ότι στην πράξη δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις ομογενώς πολωμένων διηλεκτρικών. Συγκεκριμένα (βλ. π.χ. R.Becker "Theorie der Elektrizität", τόμος 1, Teubner 1972) διηλεκτρικά ελλειψοειδούς μορφής - οριακές περιπτώσεις της οποίας αποτελούν και οι σφαίρες, επιμήκεις κύλινδροι και λεπτές επίπεδες πλάκες - πολώνονται ομοιόμορφα, όταν βρεθούν εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Η δε ομοιόμορφη τους πόλωση συνεπάγεται ένα επίσης ομοιόμορφο πεδίο πολώσεως στο εσωτερικό του διηλεκτρικού, του οποίου οι συντεταγμένες δίδονται από την σχέση:

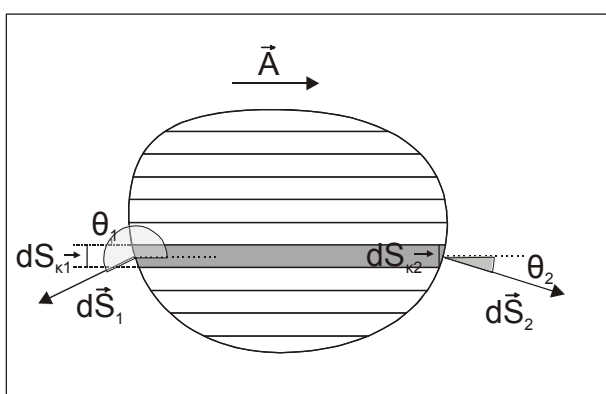
Συντεταγμένες του πεδίου πολώσεως εντός ενός ομογενώς πολωμένου διηλεκτρικού ελλειψοειδούς μορφής

$$E_{pi} = -\frac{N_i P_i}{\epsilon_0}$$

($i = 1,2,3$: κύριοι άξονες του ελλειψοειδούς) [2.25]

Οι τιμές των παραγόντων N_i εξαρτώνται από τον λόγο των κυρίων αξόνων του ελλειψοειδούς, ο οποίος και καθορίζει την μορφή της επιφάνειας του διηλεκτρικού και κατά συνέπεια και την κατανομή του φορτίου πολώσεως, το οποίο με την σειρά του δημιουργεί το πεδίο πολώσεως \vec{E}_p . Οι συντελεστές N_i είναι εξάλλου θετικοί και εκπληρώνουν την σχέση: $N_1 + N_2 + N_3 = 1$.

Ροή ομογενούς πεδίου \vec{A} μέσω τυχαίας κλειστής επιφάνειας S



(Χάριν απλότητας στο διπλανό σχήμα αποδίδεται η τομή της κλειστής επιφάνειας S με το επίπεδο του χαρτιού.)

Θεωρούμε την επιφάνεια S χωρισμένη σε στοιχειώδεις κυλίνδρους (ή παραλληλεπίπεδα), των οποίων ο άξονας συμπίπτει με την διεύθυνση του πεδίου \vec{A} . Κάθε τέτοιος κύλινδρος τέμνει από την επιφάνεια S τα στοιχειώδη τμήματα $d\vec{S}_1$ και $d\vec{S}_2$.

Η ροή $d\Phi$ μέσω έκαστου στοιχειώδους κυλίνδρου ισούται με εκείνη μέσω των παραπάνω τμημάτων $d\vec{S}_1$ και $d\vec{S}_2$:

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 + \vec{A} \cdot d\vec{S}_2 = A[\cos \theta_1 \cdot dS_1 + \cos \theta_2 \cdot dS_2] = A[-dS_{k1} + dS_{k2}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\Phi = 0 \quad \{1\}$$

(dS_{k1} , $dS_{k2} =$ προβολές των τμημάτων dS_1 και dS_2 αντίστοιχα σ' ένα επίπεδο κάθετο προς τον άξονα του κυλίνδρου, και κατά συνέπεια ίσες με την γεωμετρική βάση dS_k του στοιχειώδους κυλίνδρου.)

Ο μηδενισμός της στοιχειώδους ροής $d\Phi$ μέσω έκαστου από τους στοιχειώδεις κυλίνδρου, στους οποίους έχουμε χωρίσει την κλειστή επιφάνεια S , συνεπάγεται αναγκαστικά και τον μηδενισμό της ολικής ροής $\Phi = \int d\Phi$ μέσω της ίδιας της επιφάνειας S . Επομένως

η ολική ροή ενός ομογενούς διανυσματικού πεδίου \vec{A} μέσω μιας τυχαίας κλειστής επιφάνειας S ισούται πάντα με μηδέν.

Σχήμα 2.15: Μηδενισμός της ροής ομογενούς διανυσματικού πεδίου μέσω τυχαίας κλειστής επιφάνειας.

Αν η πόλωση \vec{P} έχει την διεύθυνση κάποιου από τους κύριους άξονες του ελλειψοειδούς μηδενίζονται οι συνιστώσες της ως προς τους υπόλοιπους και σύμφωνα με την πα-

ραπάνω σχέση [2.25] μηδενίζονται και οι αντίστοιχες συνιστώσες του πεδίου πολώσεως. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή μας ενδιαφέρει προφανώς ένα μόνο N , εκείνο που χαρακτηρίζει τον συγκεκριμένο άξονα. Στον πίνακα Π2.9.1 περιέχονται οι τιμές της παραμέτρου N για μερικές, πρακτικά ενδιαφέρουσες, οριακές περιπτώσεις. (Για επιπλέον περιπτώσεις βλ. J.A. Osborn, Physical Review 67, 351 (1945) και E.C. Stoner, Philosophical Magazine 36, 803 (1945)).

Πίνακας Π 2.9.1		
ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ	ΑΞΟΝΑΣ	N
Σφαίρα	τυχαίως	1/3
Λεπτή επίπεδη πλάκα	κάθετος στο επίπεδό της	1
Λεπτή επίπεδη πλάκα	παράλληλος στο επίπεδό της	0
Επιμήκης κύλινδρος	παράλληλος προς άξονα κυλίνδρου	0
Επιμήκης κύλινδρος	κάθετος προς άξονα κυλίνδρου	1/2

Στην ειδική λοιπόν αυτή περίπτωση η σχέση [2.25] παίρνει τη μορφή:

πεδίο πολώσεως εντός ενός ομογενούς και κατά τη διεύθυνση κάποιου κύριου άξονα πολωμένου διηλεκτρικού ελλειψοειδούς μορφής

$$\vec{E}_p = -\frac{N}{\epsilon_0} \vec{P} \quad [2.26\alpha]$$

Η σχέση αυτή μας δείχνει, ότι το πεδίο πολώσεως έχει την ίδια διεύθυνση με την διηλ. πόλωση.

Για το συνολικό πεδίο παίρνουμε εξάλλου:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \stackrel{[2.26\alpha]}{\Rightarrow} \vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{N}{\epsilon_0} \vec{P} \quad [2.26\beta]$$

Η διηλεκτρική πόλωση τέλος θα δίδεται από τη σχέση :

$$[2.17]: \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \stackrel{[2.26\beta]}{=} \epsilon_0 \chi \left(\vec{E}_0 - \frac{N}{\epsilon_0} \vec{P} \right) \Rightarrow \vec{P} (1 + \chi N) = \epsilon_0 \chi \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{P} = \frac{\epsilon_0 \chi}{1 + N\chi} \vec{E}_0 \quad [2.26\gamma]$$

Από την σχέση αυτή φαίνεται ότι τα διανύσματα \vec{P} και \vec{E}_0 έχουν την ίδια διεύθυνση. Επομένως

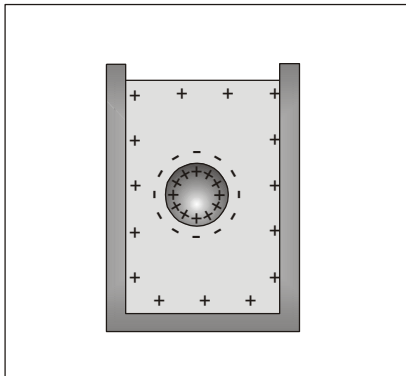
οι σχέσεις [2.26α] έως και [2.26δ] – βλέπε παρακάτω – ισχύουν στην περίπτωση ενός ομογενούς και ισότροπου διηλεκτρικού ελλειψοειδούς μορφής, ευρισκόμενου εντός ομογενούς εξωτερικού πεδίου παράλληλου προς κάποιον από τους κύριους άξονές του.

Αντικαθιστώντας την σχέση [2.26β] στην [2.26γ] παίρνουμε για το συνολικό πεδίο εντός του διηλεκτρικού :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{N}{\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_0 \chi}{I + N\chi} \vec{E}_0 \right) = \left(I - \frac{N\chi}{I + N\chi} \right) \vec{E}_0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{I}{I + N\chi} \vec{E}_0} \quad [2.26 \delta]$$

Σημειώνουμε τέλος, ότι οι γνωστές μας από τα προηγούμενα κεφάλαια σχέσεις για την περίπτωση του επίπεδου πυκνωτή προκύπτουν απ' ευθείας από τις γενικευμένες σχέσεις [2.26α] – [2.26δ], αν θέσουμε $N=1$ (βλέπε πίνακα Π 2.9.1)

ε) Συνολικό πεδίο εντός ενός ομογενούς και ισότροπου ρευστού διηλεκτρικού απείρων (\approx πολύ μεγάλων) διαστάσεων: Ας θεωρήσουμε ένα δοχείο (βλ. σχ. 2.16), το οποίο περιέχει κάποιο ηλεκτρικά ουδέτερο, ομογενές και ισότροπο, υγρό διηλεκτρικό. Μέσα σ' αυτό το υγρό βυθίζουμε ένα φορτισμένο σφαιρίδιο, οπότε το πρώτο πολώνεται. Αποτέλεσμα του γεγονότος αυτού είναι η εμφάνιση φορτίων πολώσεως στην επιφάνεια του υγρού, τόσο την εξωτερική όσο και την επιφάνεια επαφής μεταξύ υγρού και σφαιριδίου.

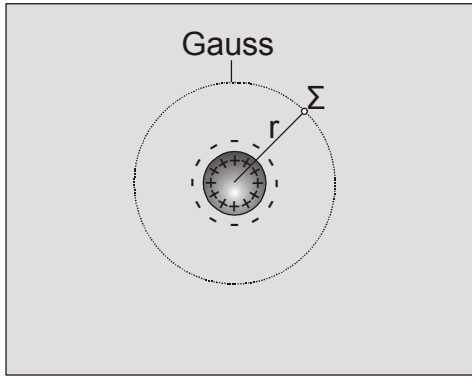


Σχήμα 2.16: Φορτισμένο σφαιρίδιο εντός υγρού διηλεκτρικού.

εκτείνεται απεριόριστα προς όλες τις κατευθύνσεις. Στην περίπτωση λοιπόν αυτή χρειάζεται να πάρουμε υπόψη την συμμετοχή μόνο εκείνων των φορτίων πολώσεως, τα οποία περιβάλλουν το φορτισμένο σφαιρίδιο.

Ο (γενικευμένος) νόμος του Gauss (βλ. [2.21]) για μια σφαιρική επιφάνεια Gauss (βλ. σχ. 2.17), με κέντρο το κέντρο του σφαιριδίου και ακτίνα την απόσταση του από το σημείο Σ , γράφεται:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q, \text{ όπου } Q \text{ το φορτίο του σφαιριδίου.}$$



Σχήμα 2.17: Φορτισμένο σφαιρίδιο εντός υγρού διηλεκτρικού απείρων διαστάσεων.

δεν υπήρχε το διηλεκτρικό).

Στην εξίσωση {1} θα καταλήγαμε προφανώς και στην περίπτωση ενός όλο και μικρότερου σφαιριδίου, και κατά συνέπεια, και στην οριακή περίπτωση ενός *σημειακού* φορτίου. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε, ότι το πεδίο ενός σημειακού φορτίου, το οποίο είναι βυθισμένο εντός ενός απεριόριστου, ομογενούς και ισότροπου, ρευστού διηλεκτρικού, ελαττώνεται, κατά τον παράγοντα ϵ_r σε σχέση με την τιμή του στο κενό. Σύμφωνα τώρα με την αρχή της γραμμικής υπερθέσεως το ίδιο θα ισχύει και για το συνολικό πεδίο μιας τυχαίας κατανομής σημειακών φορτίων και κατά συνέπεια και ενός συστήματος αγωγών οιοδήποτε σχήματος:

Το ηλεκτρικό πεδίο ενός συστήματος αγωγών τυχαίου σχήματος και γεωμετρίας, οι οποίοι βρίσκονται εντός ενός απεριόριστου, ομογενούς και ισότροπου ρευστού διηλεκτρικού, είναι μειωμένο σε σχέση με την τιμή του απουσία του διηλεκτρικού κατά τον διηλεκτρικό αριθμό ϵ_r του διηλεκτρικού.

Παρατήρηση: Για τους *δύσπιστους*, οι οποίοι θα αντιτάξουν το επιχείρημα, ότι η επίδραση του διηλεκτρικού επί του πεδίου ενός σημειακού φορτίου ενδέχεται να επηρεάζεται από την παρουσία ή μη άλλων σημειακών φορτίων με αποτέλεσμα να μην ισχύει η αρχή της γραμμικής υπερθέσεως, αντιπαραθέτουμε το εξής:

1^ο (ποιοτικά για να μην κουρασθούν) : Η απάντηση του διηλεκτρικού στην παρουσία ενός σημειακού -και όχι μόνο- φορτίου καθορίζεται προφανώς από την μορφή του πεδίου του, στην συγκεκριμένη δηλαδή περίπτωση από την σφαιρική του συμμετρία. Είναι δε προφανές, ότι εφόσον η συμμετρία αυτή δεν επηρεάζεται από την παρουσία άλλων φορτίων στο κενό, δεν θα επηρεάζεται και παρουσία διηλεκτρικού. Επομένως είτε υπάρχουν άλλα φορτία είτε όχι, η απάντηση του διηλεκτρικού στο πεδίο ενός συγκεκριμένου σημειακού φορτίου θα είναι η ίδια.

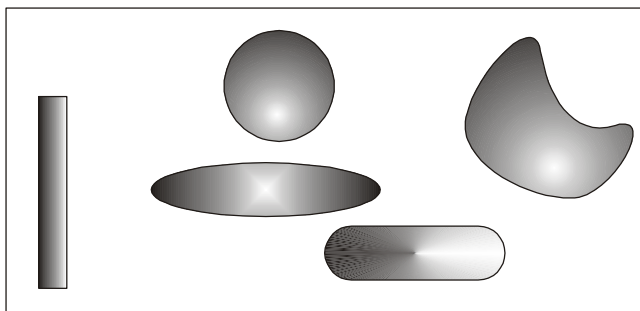
2^ο (μαθηματικά για να τελειώνουμε) : Έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο σύστημα αγωγών (βλ. σχ. 2.18) στο κενό. Τότε σύμφωνα με τον νόμο του Gauss θα ισχύει:

Η ηλεκτρική διαταραχή \vec{D} θα έχει λόγω συμμετρίας το ίδιο μέτρο σε όλα τα σημεία της επιφάνειας Gauss, ενώ η διεύθυνσή της θα συμπίπτει με την αντίστοιχη ακτίνα. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την άμεση αξιολόγηση της παραπάνω σχέσης:

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} \stackrel{\text{σφαιρική}}{\text{συμμετρία}} = D \oint_s dS = D(4\pi r^2) = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} =$$

$$\stackrel{[2.23]}{=} \epsilon E \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad \{1\}$$

(E_0 είναι η ένταση του πεδίου, το οποίο θα δημιουργούσε το φορτισμένο σφαιρίδιο στο κενό, αν δηλαδή



Σχήμα 2.18: Σύστημα αγωγών τυχαίου σχήματος και γεωμετρίας.

$$\oint_S \vec{E}_0 d\vec{S} = Q / \epsilon_0 \quad \{2\},$$

όπου S μια τυχαία κλειστή επιφάνεια και Q το εντός αυτής ευρισκόμενο ηλεκτρικό φορτίο.

Η συντηρητικότητα του πεδίου απαιτεί εξάλλου

$$\oint_L \vec{E}_0 d\vec{l} = 0 \quad \{3\}$$

για μια τυχαία κλειστή καμπύλη L .

Στην περίπτωση τώρα που το σύστημα αγωγών περιβάλλεται από ένα ομογενές και ισότροπο υγρό διηλεκτρικό, το οποίο εκτείνεται απεριόριστα προς όλες τις κατευθύνσεις, οι δύο παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q \Rightarrow \int_S \epsilon \vec{E} d\vec{S} \stackrel{\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \text{σταθ.}}{\Rightarrow} \int_S (\epsilon_r \vec{E}) d\vec{S} = Q / \epsilon_0 \quad \{2a\}$$

και

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \stackrel{\text{επί } \epsilon_r = \text{παντού σταθ.}}{\Rightarrow} \int_L (\epsilon_r \vec{E}) d\vec{l} = 0 \quad \{3a\}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι έχουμε τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις ($\{2\} \leftrightarrow \{2a\}$, $\{3\} \leftrightarrow \{3a\}$) για τα διανύσματα $(\epsilon_r \vec{E})$ και \vec{E}_0 . Από το γεγονός αυτό προκύπτει η ισότητα $(\epsilon_r \vec{E} = \vec{E}_0)$.

Σημειωτέον ότι στην περίπτωση διηλεκτρικού πεπερασμένων διαστάσεων οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι ταυτόσημες: οι μεν $\{2\}$ και $\{3\}$ ισχύουν για όλο τον χώρο, οι δε $\{2a\}$ και $\{3a\}$ μόνο εντός του διηλεκτρικού!

Η ελάττωση του πεδίου κατά τον διηλεκτρικό αριθμό ϵ_r του διηλεκτρικού συνεπάγεται φυσικά και την αντίστοιχη εξασθένηση των δυνάμεων Coulomb, οι οποίες εξασκούνται μεταξύ των εντός του ρευστού διηλεκτρικού ευρισκόμενων ηλεκτρικών φορτίων. Το γεγονός αυτό είχαμε επισημάνει ήδη στο κεφάλαιο 1.2 κατά την διατύπωση του νόμου του Coulomb. Στο σημείο όμως αυτό θα πρέπει να κάνουμε μια **πολύ σπουδαία επισήμανση**:

Αν το διηλεκτρικό είναι στερεό, δεν επιτρέπει προφανώς την μετακίνηση των ενδεχομένως εντός αυτού ευρισκόμενων πραγματικών φορτίων ή αγωγών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την άσκηση επί του διηλεκτρικού μηχανικών δυνάμεων, οι οποίες μεταβάλλουν την μικροσκοπική του δομή και συνεπώς και τις διηλεκτρικές ιδιότητες, δηλαδή των διηλεκτρικό αριθμό ϵ_r και μάλιστα κατά τρόπο μη ομογενή και ανισότροπο. Η μεταβολή του διηλεκτρικού αριθμού προκαλεί με την σειρά της την αλλαγή του ηλεκτρικού πεδίου και πάει λέγοντας. Η επιτυγχανόμενη τελικά κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας είναι πρακτικά αδύνατο να υπολογισθεί. Όλα αυτά πρέπει να τα έχουμε υπόψη μας κατά την χρήση του νόμου του Coulomb για φορτία, τα οποία βρίσκονται εντός στερεών διηλεκτρικών.

2.9 Οριακές συνθήκες της Ηλεκτροστατικής (μ.γ.ο.ε)

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, οι μονωτές δεν επιτρέπουν μεν την μακροσκοπική μετακίνηση ηλεκτρικών φορτίων, αντιδρούν όμως στην επίδραση ηλεκτρικών πεδίων μέσω του φαινομένου της πόλωσης. Ο υπολογισμός όμως του διανύσματος της διηλεκτρικής πόλωσης \vec{P} , το οποίο περιγράφει το παραπάνω φαινόμενο ποσοτικά, και κατ' επέκταση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} , το οποίο επικρατεί τελικά στο εσωτερικό του διηλεκτρικού, είναι γενικά δύσκολος, επηρεάζεται δε εξαιρετικά από την συγκεκριμένη γεωμετρία. (Για όσους ξέχασαν πόσο απλά ήταν τα πράγματα στην περίπτωση των αγωγών, παραπέμπουμε στο κεφάλαιο 1.11). Σε κάθε περίπτωση όμως, όσο πολύπλοκη κι αν είναι, στα σημεία της επιφάνειας ενός διηλεκτρικού (και κατ' επέκταση της διαχωριστικής επιφάνειας δύο διηλεκτρικών) ισχύουν συγκεκριμένες συνθήκες, τις οποίες θα γνωρίσουμε στην συνέχεια και οι οποίες καλούνται **(συν)οριακές συνθήκες της Ηλεκτροστατικής**:

στην περίπτωση αγωγών
(βλ. κεφ. 1.11 και 1.11.1)

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{στο εσωτερικό} \\ (\sigma / \epsilon_0) \vec{n} & \text{επί της επιφάνειας} \end{cases} \quad [2.27]$$

στην περίπτωση της διαχωριστικής επιφάνειας δύο ομογενών και ισότροπων διηλεκτρικών (βλ. σχ. 2.19)

$$\begin{cases} \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} \Leftrightarrow \vec{D}_{2t} / \epsilon_2 = \vec{D}_{1t} / \epsilon_1 \\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma \Leftrightarrow \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma \\ \text{ιδιαίτερα αν } \sigma = 0 : \vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n} \Leftrightarrow \epsilon_2 \vec{E}_{2n} = \epsilon_1 \vec{E}_{1n} \end{cases} \quad [2.28]$$

όπου \vec{n} : μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο επί της επιφάνειας και με φορά προς το εξωτερικό του αγωγού ή του διηλεκτρικού.

σ : επιφανειακή πυκνότητα *πραγματικού* φορτίου.

ϵ_1, ϵ_2 : διηλεκτρικές σταθερές του διηλεκτρικού 1 και 2 αντίστοιχα.

$\vec{E}_{it}, \vec{D}_{it}$: *εφαπτομενική* προς την διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσα της ηλεκτρικής έντασης διαταραχής από την πλευρά του διηλεκτρικού i ($i = 1, 2$)

$\vec{E}_{in}, \vec{D}_{in}$: *κάθετη* προς την διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσα της ηλεκτρικής έντασης/ διαταραχής από την πλευρά του διηλεκτρικού i ($i = 1, 2$)

$\vec{E}_{in}, \vec{D}_{in}$: *μέτρο* της κάθετης προς την διαχωριστική επιφάνεια συνιστώσας της ηλεκτρικής έντασης διαταραχής από την πλευρά του διηλεκτρικού i ($i = 1, 2$), του οποίου το πρόσημο καθορίζεται με βάση την φορά του διανύσματος \vec{n} : θετικό αν τα διανύσματα $\vec{E}_{in} / \vec{D}_{in}$ και \vec{n} έχουν την ίδια φορά και αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση.

(Συν)οριακές συνθήκες της Ηλεκτροστατικής

Οι συνοριακές συνθήκες [2.28] προκύπτουν από τις ακόλουθες δύο, θεμελιώδεις εξισώσεις (Maxwell) της Ηλεκτροστατικής:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \{1\}: \text{συντηρητικότητα του ηλεκτροστατικού πεδίου (βλ. κεφ. 1.7)}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q \quad \{2\}: \text{νόμος του Gauss παρουσία ύλης (βλ. [2.21])}$$

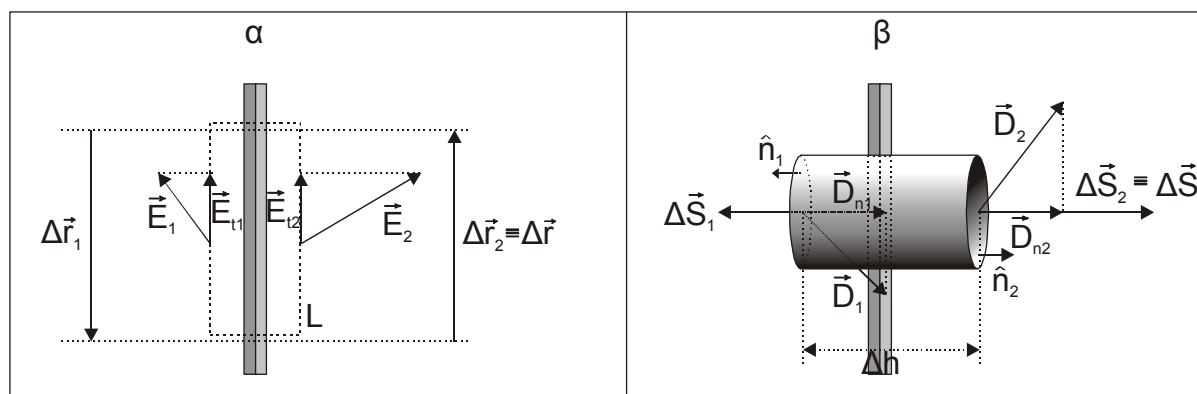
Για την αξιολόγηση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος {1} επιλέγουμε την καμπύλη L σύμφωνα με το σχήμα 2.19α: Οι παράλληλες προς την διαχωριστική επιφάνεια πλευρές έχουν μήκος Δr , τέτοιο ώστε οι συνιστώσες \vec{E}_{it} να είναι σταθερές. Οι κάθετες εξάλλου πλευρές τείνουν προς το μηδέν, οπότε δεν συμβάλλουν στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Η φορά τέλος της καμπύλης L συμπίπτει με εκείνη της \vec{E}_{2t} . Τότε έχουμε:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = (\vec{E}_{1t} \cdot \Delta \vec{r}_1) + (\vec{E}_{2t} \cdot \Delta \vec{r}_2) = (\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t}) \Delta \vec{r} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}}$$

Για την αξιολόγηση του επιφανειακού ολοκληρώματος {2} επιλέγουμε την κυλινδρική επιφάνεια του σχήματος [2.19β]: Οι παράλληλες προς την διαχωριστική επιφάνεια βάσεις έχουν εμβαδόν ΔS , τέτοιο ώστε οι συνιστώσες \vec{D}_{in} να είναι σταθερές καθ' όλη τους την έκταση. Το ύψος Δh εξάλλου του κυλίνδρου τείνει προς το μηδέν, οπότε η πλευρική επιφάνεια δεν συμβάλλει στο παραπάνω ολοκλήρωμα, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_S \vec{D} d\vec{S} &= (\vec{D}_{1n} \cdot \Delta \vec{S}_1) + (\vec{D}_{2n} \cdot \Delta \vec{S}_2) = (\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n}) \Delta \vec{S} \stackrel{\Delta \vec{S} = \hat{n} \Delta S}{=} (\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n}) \hat{n} \Delta S \stackrel{\{2\}}{=} \Delta Q \Rightarrow (\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n}) \hat{n} = \\ &= \frac{\Delta Q}{\Delta S} \equiv \sigma \Rightarrow \boxed{\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} = \sigma} \quad (\text{Το πρόσημο του } D_{in} \text{ με βάση τη φορά του } \hat{n}) \end{aligned}$$

Αν $\sigma = 0$, έχουμε την ίδια περίπτωση με την {1}, οπότε $\vec{D}_{2n} = \vec{D}_{1n}$.



Σχήμα 2.19 : Για την απόδειξη των συνοριακών συνθηκών της Ηλεκτροστατικής.

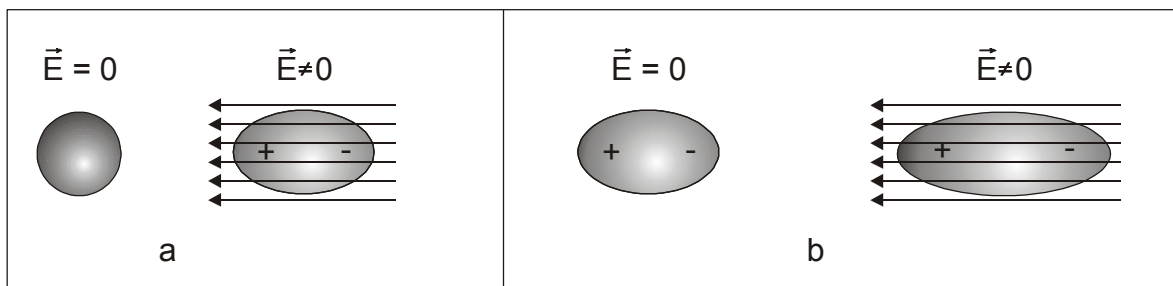
Οι συνοριακές συνθήκες της Ηλεκτροστατικής συμβάλλουν σημαντικά στην επίλυση πολλών προβλημάτων, τα οποία σχετίζονται με τον προσδιορισμό του πεδίου ενός συστήματος αγωγών ή/και διηλεκτρικών.

2.10 Μηχανισμοί της διηλεκτρικής πόλωσης

Η πόλωση ενός διηλεκτρικού υπό την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου οφείλεται κυρίως στους ακόλουθους δύο μηχανισμούς:

1°) **Πόλωση από μετατόπιση (ή εξ επαγωγής):** Τα ηλεκτρικώς φορτισμένα σωματίδια - ηλεκτρόνια και πρωτόνια-, από τα οποία αποτελούνται τα άτομα και τα μόρια, δεν είναι απόλυτα στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους. Όταν λοιπόν δεχτούν την επίδραση ενός εξωτερικού πεδίου, μετακινούνται, τα μεν ηλεκτρόνια αντίθετα προς -, οι δε δετικοί πυρήνες κατά την φορά του πεδίου. Η μετατόπιση τους αυτή, αν και μικρή σε σχέση με τις ατομικές διαστάσεις,

έχει σαν αποτέλεσμα, την εμφάνιση διπολικής ροπής στα μη πολικά άτομα και μόρια, και την αύξηση της ήδη υπάρχουσας στα πολικά μόρια (βλ. σχ. 2.20).



Σχήμα 2.20: Πόλωση από μετατόπιση a) μη πολικών, b) πολικών μορίων.

Η επαγόμενη διπολική ροπή \vec{p} ενός ατόμου είναι - για όχι πολύ ισχυρά πεδία - ανάλογη προς την ένταση τους:

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E} \quad [2.29]$$

Ο συντελεστής α ονομάζεται **ατομική πολωσιμότητα**, είναι ανεξάρτητος από την θερμοκρασία και χαρακτηριστικός για το συγκεκριμένο άτομο. Στον Πίνακα Π 2.11.1 περιέχονται οι πειραματικά προσδιορισμένες ατομικές πολωσιμότητες ορισμένων ατόμων.

Πίνακας 2.11.1: Ατομικές πολωσιμότητες									
Στοιχείο:	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	A	K
α (10^{-30} m^3)	8,24	2,60	146,8	112,9	19,2	5,08	338,8	20,3	429,2

Όποιος κάνει τον κόπο να ασχοληθεί με την θέση των παραπάνω στοιχείων στον Περιοδικό Πίνακα, θα βγάλει χρήσιμα συμπεράσματα. Εμείς επισημαίνουμε απλώς την «ακαμνία» των ευγενών αερίων He και Ne.

Η επαγόμενη διπολική ροπή ενός μορίου είναι στην γενική περίπτωση τανυστής 2^{ου} μεγέθους, γεγονός το οποίο συνδέεται με τον μειωμένο βαθμό συμμετρίας των μορίων έναντι εκείνου των ατόμων (Το μόριο του CO₂ για παράδειγμα έχει σχήμα πούρου). Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα \vec{p} και \vec{E} δεν έχουν πάντα την ίδια διεύθυνση. Σημειωτέον ότι ο τανυστής της πολωσιμότητας έχει τα ίδια μαθηματικά χαρακτηριστικά με εκείνον της διηλεκτρικής επιδεκτικότητας (βλ. σχήμα 2.11).

2^ο) **Πόλωση από προσανατολισμό:** Όπως εξηγήσαμε στο τέλος του κεφαλαίου 2.7, ορισμένα μόρια -τα λεγόμενα πολικά - έχουν μόνιμη διπολική ροπή, η οποία πηγάζει από την ασύμμετρη τους εσωτερική δομή (Το γεγονός αυτό επιτρέπει τους Χημικούς να εξάγουν πολύτιμα συμπεράσματα για την μοριακή δομή, μέσω σύγκρισης των πειραματικά μετρούμενων διπολικών ροπών με τις για υποθετικά μοντέλα υπολογισμένες!). Αυτό βέβαια δεν σημαίνει, ότι τα αντίστοιχα πολικά διηλεκτρικά έχουν - ελλείψει εξωτερικού πεδίου- μη μηδενική διηλεκτρική πόλωση: Λόγω της θερμικής κίνησης των μορίων οι διπολικές τους ροπές είναι προσανατολισμένες στατιστικά, με αποτέλεσμα η συνολική διπολική ροπή κάθε μεγάλου αριθμού μορίων να ισούται με μηδέν. Υπό την δράση όμως ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου ασκείται επί των μοριακών διπόλων μηχανική ροπή, η οποία τείνει να τα προσανατολίσει (βλ. κεφ. 2.7) κατά την διεύθυνση του. Ο προσανατολισμός δεν είναι τέλειος αλλά μερικός,

αυξάνεται δε με αυξανόμενη ένταση του πεδίου και ελαττούμενη θερμοκρασία. Η κατ' αυτό τον τρόπο δημιουργούμενη διηλεκτρική πόλωση καλείται **πόλωση από προσανατολισμό**.

Ενώ η πόλωση από μετατόπιση παίρνει την τελική της τιμή πρακτικά αμέσως μετά την δράση του επάγοντος αυτήν πεδίου, ο προσανατολισμός των μοριακών διπόλων απαιτεί κάποιον μετρήσιμο χρόνο για να ολοκληρωθεί. Ο χρόνος αυτός αυξάνεται με τον συντελεστή ιξώδους του διηλεκτρικού, και απειρίζεται στην περίπτωση των στερεών. Με άλλα λόγια πόλωση από προσανατολισμό παρατηρείται μόνο στα ρευστά. Η παραπάνω καθυστέρηση στον προσανατολισμό των μορίων χαρακτηρίζεται ως **διηλεκτρική υστέρηση** και είναι η πηγή των πολύ σπουδαιών τεχνικά **διηλεκτρικών απωλειών**: Τα διηλεκτρικά πυκνωτών εναλλασσόμενου ρεύματος πρέπει να εμφανίζουν κατά το δυνατόν μικρή διηλεκτρική υστέρηση.

3^ο) Ιοντική πόλωση: Παρατηρείται στα κρυσταλλικά εκείνα διηλεκτρικά, τα οποία σχηματίζουν *ιοντικούς* κρυστάλλους, όπως π.χ. NaCl και CsCl. Είναι δε αποτέλεσμα της μετακίνησης των μεν θετικών ιόντων κατά την διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου, των δε αρνητικών αντίθετα προς αυτήν.

2.10.1 Πόλωση χωρίς την επίδραση του εξωτερικού πεδίου. Πιεζοηλεκτρισμός

Τόσο η πόλωση από μετατόπιση όσο και εκείνη από προσανατολισμό προκαλούνται - όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο - από την επίδραση κάποιου εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου. Ορισμένοι τώρα *ιοντικοί* κρύσταλλοι, στους οποίους τα συμμετέχοντα ιόντα είναι ασύμμετρα διατεταγμένα, έτσι ώστε ο αριθμός ή/και οι αποστάσεις των ιόντων που περιβάλλουν κάποιο ιόν διαφορετικού είδους να διαφέρει από ιόν σε ιόν, εμφανίζουν **το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού**: Μηχανική παραμόρφωση (θλίψη, ελκυσμός ή στρέψη) των παραπάνω κρυστάλλων σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση ετερόνυμων, ηλεκτρικών, επιφανειακών φορτίων, εξ αιτίας της εμφάνισης ή μεταβολής της ήδη υπάρχουσας διπολικής ροπής. Ιδιαίτερα έντονο εμφανίζουν το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού ο *χαλαζίας* και η *τουρμαλίνη*.

Εφαρμογές: 1^η) Πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι χρησιμοποιούνται ευρύτατα σαν **ηλεκτρομηχανικοί μεταποιητές** στην Τεχνολογία Μετρήσεων: Οι - μέσω πίεσης, ελκυσμού και στρέψης του κρυστάλλου αναπτυσσόμενες - πιεζοηλεκτρικές τάσεις είναι ευθέως ανάλογες προς το μέγεθος των παραπάνω αιτιών. Μέτρηση των *ηλεκτρικών* αυτών τάσεων επιτρέπει κατά συνέπεια τον προσδιορισμό των αντιστοίχων *μηχανικών* μεγεθών. Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η μέθοδος αυτή στην περίπτωση βραχύχρονων και ευμετάβλητων δυνάμεων και πιέσεων, όπως για παράδειγμα τέτοιων που οφείλονται σε εκρήξεις ή ταλαντώσεις. Ένα άλλο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η δυνατότητα τοποθέτησης του κρυστάλλου σε δυσπρόσιτες περιοχές (π.χ. κοντά στο σημείο έκρηξης) και μεταφοράς των ηλεκτρικών μετρήσεων (π.χ. μέσω καλωδίων) σε μεγάλες αποστάσεις (π.χ. σε κάποιο ασφαλές παρατηρητήριο).

2^η) **Πιεζοηλεκτρικοί μηχανισμοί ανάφλεξης αερίων μειγμάτων** δεν χρησιμοποιούνται μόνο στους *πιεζοηλεκτρικούς αναπτήρες*, αλλά και στις μηχανές εσωτερικής καύσεως πολλών πλοιαρίων, χλοοκοπτών κ.λ.π.

3^η) **Κρυσταλλικά μικρόφωνα και βελόνες γραμμοφώνου:** Στα μεν πρώτα έχουμε μετατροπή των ηχητικών κυμάτων (~ αυξομειώσεις πίεσης) , στις δε δεύτερες της πίεσης που ασκείται από την κίνηση της βελόνης - καθώς αυτή ανιχνεύει την επιφάνεια του δίσκου-, σε αντίστοιχα μεταβαλλόμενες πιεζοηλεκτρικές τάσεις.

Το αντίστροφο προς τον πιεζοηλεκτρισμό φαινόμενο έγκειται στην μεταβολή των δια-

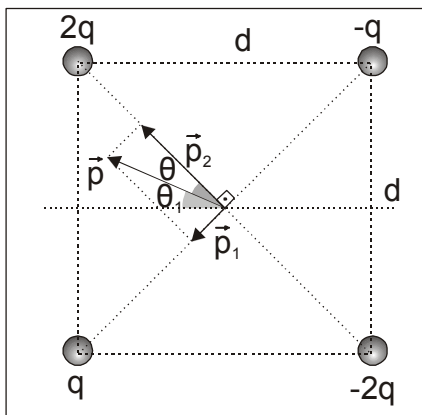
στάσεων ενός πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου υπό την επίδραση ηλεκτρικής τάσεως, και καλείται **ηλεκτροσυστολή**.

Εφαρμογές: 1^η) Αν εφαρμόσουμε στα άκρα ενός πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου εναλλασσόμενη τάση, ο κρύσταλλος εκτελεί εξαναγκασμένη μηχανική ταλάντωση. Το φαινόμενο αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περιοχή υψηλών συχνοτήτων μια και αποτελεί ουσιαστικά τον μοναδικό μηχανισμό δημιουργίας μηχανικών ταλαντώσεων. Πρακτική αξιοποίηση έχουμε στο **μεγάφωνα υψηλών συχνοτήτων** (10 ~ 16 kHz) και κυρίως στην **δημιουργία υπερήχων** ($\nu > 16$ kHz).

2^η) Από τα σπουδαιότερα πιεζοηλεκτρικά υλικά είναι ο **χαλαζίας (quartz)**. Χρησιμοποιείται στην πράξη με την μορφή παραλληλεπίπεδων ή κυλίνδρων, οι οποίοι έχουν κοπεί σε συγκεκριμένες γωνίες ως προς τους κρυσταλλογραφικούς άξονες του αρχικού κρυστάλλου. Με τον τρόπο αυτό πετυχαίνουμε πολύ μικρούς θερμικούς συντελεστές (μέχρι 10^{-8} K^{-1}) της συχνότητας των μηχανικών ταλαντώσεων, τις οποίες εκτελεί ο χαλαζίας εξ αιτίας του φαινομένου της ηλεκτροσυστολής, όταν διεγερθεί κατάλληλα. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την πολύ μικρή απόσβεση των παραπάνω ταλαντώσεων οδήγησε στην κατασκευή των μεγάλης ακρίβειας ωρολογίων χαλαζία.

Παράδειγματα

Παράδειγμα Σ 2.1: Να υπολογισθεί η διπολική ροπή της κατανομής φορτίου του σχήματος Π.Σ.2.1.1.



Σχήμα Π.Σ. 2.1.1:

Λύση:

Στην εν λόγω κατανομή διακρίνουμε τα δύο δίπολα ($-q \rightarrow 2q$) και ($-q \rightarrow q$), τα οποία έχουν αντίστοιχα τις διπολικές ροπές \vec{p}_1 και \vec{p}_2 . Η φορά τους φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ενώ τα μέτρα τους δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$p_1 = q(d\sqrt{2}) \quad \{1\}$$

$$p_2 = 2q(d\sqrt{2}) = 2p_1 \quad \{2\}$$

($d\sqrt{2}$ είναι το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου, όπως προκύπτει από τον Πυθαγόρα).

Η συνολική διπολική ροπή \vec{p} προσδιορίζεται - ως προς το μέτρο της και την διεύθυνσή της - από τις γνωστές μας σχέσεις:

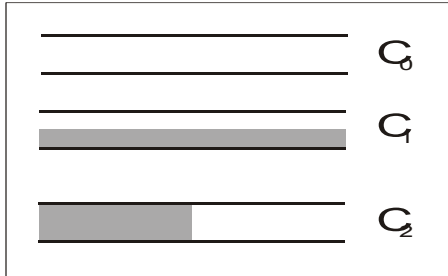
$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \stackrel{\{2\}}{=} \sqrt{p_1^2 + (2p_1)^2} = \sqrt{5p_1^2} \Rightarrow p = \sqrt{5}p_1 = \sqrt{10}dq$$

$$\tan \theta = \frac{p_1}{p_2} \stackrel{\{2\}}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26,565^\circ \stackrel{\text{σχήμα}}{\Rightarrow} \theta_1 = (45 - \theta) = 18,435^\circ$$

Παράδειγμα Σ.2.2: Οι τρεις επίπεδοι πυκνωτές του σχήματος Π.Σ.2.2.1 έχουν την ίδια από-

σταση και επιφάνεια οπλισμών, ενώ οι χωρητικότητές τους είναι C_0, C_1 και C_2 αντίστοιχα. Ο πρώτος πυκνωτής έχει κενό μεταξύ των οπλισμών του, ενώ οι δύο άλλοι είναι μισογεμισμένοι με διηλεκτρικό διηλεκτρικού αριθμού ϵ_r . Αν είναι γνωστή η χωρητικότητα του πρώτου, να υπολογιστούν οι χωρητικότητες των δύο άλλων. (Η επίδραση των άκρων θεωρείται αμελητέα)

Λύση:

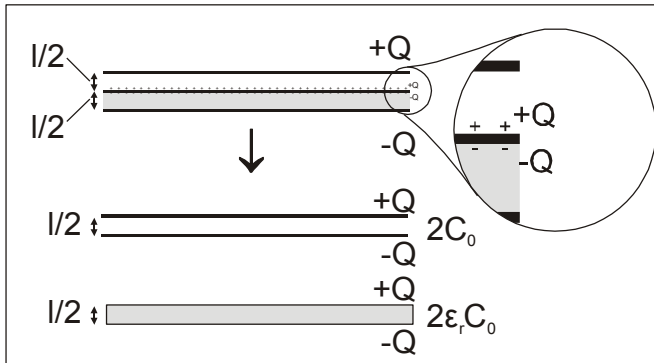


Σχήμα Π.Σ.2.2.1

Υπολογισμός της χωρητικότητας C_1 : Σύμφωνα με την εξίσωση ([2.2α]: $C=Q/V$) ορισμού, η χωρητικότητα ενός πυκνωτή εξαρτάται από το φορτίο Q των οπλισμών του και την μεταξύ τους επικρατούσα τάση V . Είναι δε προφανές, ότι ούτε το φορτίο ούτε η τάση του πυκνωτή C_1 μεταβάλλεται, αν μεταξύ του κενού και του διηλεκτρικού του παρεμβληθεί τρίτος οπλισμός, όπως φαίνεται στο σχήμα Π.Σ.2.2.2:

Το φορτίο παραμένει αμετάβλητο, μια και ο τρίτος οπλισμός δεν συνδέεται με τους δύο αρχικούς οπλισμούς του πυκνωτή, ώστε να λάβει χώρα ανταλλαγή φορτίων.

Η τάση παραμένει αμετάβλητη μια και το πεδίο στο εσωτερικό του τρίτου οπλισμού είναι μηδέν (αγωγός σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας!). Μηδενικό είναι εξάλλου και το πεδίο, το οποίο οφείλεται στα επαγωγικά, ίσα και αντίθετα, επιφανειακά φορτία του τρίτου οπλισμού, μια και το πεδίο της μιας του πλευράς εξουδετερώνεται από εκείνο της άλλης.



Σχήμα Π.Σ.2.2.2

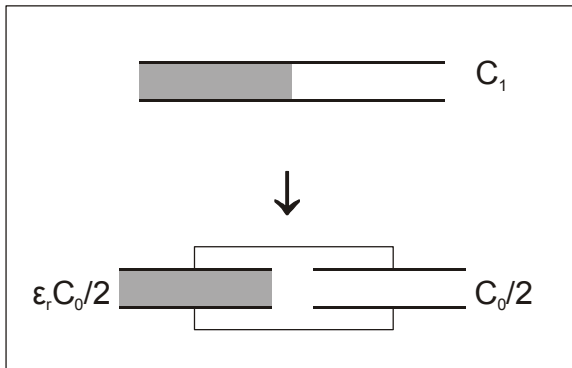
Η παρεμβολή του τρίτου οπλισμού δεν μεταβάλλει κατά συνέπεια την χωρητικότητα C_1 του δευτέρου πυκνωτή. Ο πυκνωτής όμως του σχήματος Π. Σ. 2.2.2 είναι ισοδύναμος με δύο επίπεδους πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά, οι οποίοι έχουν την ίδια επιφάνεια, την μισή όμως απόσταση οπλισμών με τον πυκνωτή C_0 . Επιπλέον ο ένας περιέχει και διηλεκτρικό.

Σύμφωνα λοιπόν με την σχέση [2.4], κατά την οποία η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή είναι ανάλογη προς την απόσταση των οπλισμών του. οι δύο πυκνωτές έχουν - κατ' αρχήν - χωρητικότητα $2C_0$. Εξ αιτίας όμως του διηλεκτρικού, η χωρητικότητα του δευτέρου εξ αυτών αυξημένη κατά τον παράγοντα ϵ_r . Επομένως

ο πυκνωτής C_1 είναι ισοδύναμος με δύο πυκνωτές, χωρητικότητας $2C_0$ και $2\epsilon_r C_0$, συνδεδεμένους σε σειρά.

Αυτό σημαίνει, ότι η χωρητικότητα του C_1 θα ισούται με την ολική χωρητικότητα των δύο παραπάνω πυκνωτών, η οποία υπολογίζεται από την σχέση [2.8]:

$$\frac{I}{C_1} = \frac{I}{2C_0} + \frac{I}{2\varepsilon_r C_0} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r C_0} \Rightarrow C_1 = \frac{2\varepsilon_r C_0}{\varepsilon_r + 1}$$



Σχήμα Π.Σ.2.2.2

Υπολογισμός της χωρητικότητας C_2 :

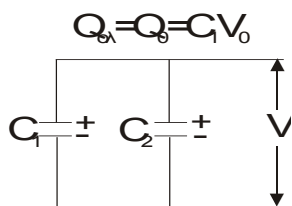
Σύμφωνα με το σχήμα Π.Σ.2.2.3 ο πυκνωτής C_2 είναι ισοδύναμος με δύο πυκνωτές συνδεδεμένους παράλληλα, οι οποίοι έχουν την ίδια απόσταση, την μισή όμως επιφάνεια οπλισμών με τον πυκνωτή C_0 . Επιπλέον ο ένας περιέχει και *διηλεκτρικό*. Σύμφωνα και πάλι με την σχέση [2.4], κατά την οποία η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή είναι ανάλογη προς την επιφάνεια των οπλισμών του, οι δύο πυκνωτές έχουν - κατ' αρχήν - χωρητικότητα $C_0/2$. Εξ αιτίας όμως του διηλεκτρικού, η χωρητικότητα του δεύτερου εξ αυτών είναι αυξημένη κατά τον παράγοντα ε_r . Επομένως ο πυκνωτής C_2 είναι, ισοδύναμος με δύο πυκνωτές, χωρητικότητας $C_0/2$ και $\varepsilon_r C_0/2$ συνδεδεμένους σε παράλληλα.

Η ολική χωρητικότητα C_2 των δύο αυτών πυκνωτών είναι (βλ.[2.27]):

$$C_2 = (C_0 / 2) + (\varepsilon_r C_0 / 2) \Rightarrow C_2 = \frac{1 + \varepsilon_r}{2} C_0$$

Παράδειγμα Π.Σ.2.2.3: Πυκνωτής χωρητικότητας $C_1 = 1000 \mu\text{F}$ φορτίζεται, έτσι ώστε η τάση μεταξύ των οπλισμών του να ισούται με 30 V. Στην συνέχεια απομονώνεται από το κύκλωμα φορτίσεως και συνδέεται παράλληλα με πυκνωτή άγνωστης χωρητικότητας C_2 , οπότε η τάση στους ακροδέκτες του πέφτει στα 20 V. Ζητείται η χωρητικότητα C_2 .

Λύση:



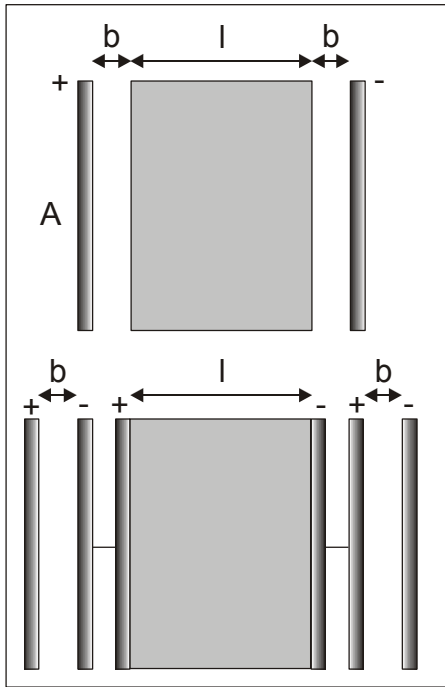
Η ολική χωρητικότητα C των δύο παράλληλα συνδεδεμένων πυκνωτών θα ισούται, ως γνωστόν, με το άθροισμα των δύο χωρητικότητων C_1 και C_2

$$C = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = C - C_1 \stackrel{C=Q/V}{\Rightarrow} C_2 = \frac{Q}{V} - C_1 \quad \{1\}$$

Το ολικό φορτίο Q είναι ίσο με το αρχικό φορτίο Q_0 του πυκνωτή C_1 , το οποίο έχει απλώς ανακατανομηθεί στους δύο πυκνωτές. Έτσι η {1} γράφεται:

$$C_2 = \frac{Q_0}{V} - C_1 \stackrel{Q_0=C_1V_0}{\Rightarrow} C_2 = \frac{C_1V_0}{V} - C_1 \Rightarrow C_2 = C_1 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) = C_1 \left(\frac{30}{20} - 1 \right) \Rightarrow C_2 = 0,5C_1 = 500\mu\text{F}$$

Παράδειγμα Σ.2.2.4: Να υπολογισθεί η χωρητικότητα του επίπεδου πυκνωτή του σχήματος Π.Σ.2.2.4.



Σχήμα Π.Σ.2.2.4: Επίπεδος πυκνωτής με διηλεκτρικό και κενό (επάνω), ισοδύναμος πυκνωτής (κάτω).

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{2b + \frac{l}{\epsilon_r}}$$

Λύση:

Σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στο παράδειγμα Σ.2.2.2, ο πυκνωτής του διπλανού σχήματος ισοδυναμεί με τρεις επιμέρους πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά, οι οποίοι έχουν την ίδια επιφάνεια (A), διαφορετικές όμως αποστάσεις οπλισμών: b , l και b αντίστοιχα. Επιπλέον ο ένας εξ αυτών περιέχει και διηλεκτρικό. Αν λοιπόν συμβολίσουμε με C_b , C_l και C_b τις χωρητικότητές τους θα ισχύει:

$$C_b = \epsilon_0 \frac{A}{b}, \quad C_l = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{l} \quad \{1\}$$

(Οι παραπάνω σχέσεις προέκυψαν από την [2.4], η οποία προσδιορίζει την χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή χωρίς διηλεκτρικό. Στην δεύτερη πήραμε επιπλέον υπόψη την [2.14], σύμφωνα με την οποία η παρεμβολή διηλεκτρικού αυξάνει την χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή κατά τον διηλεκτρικό αριθμό ϵ_r).

Η χωρητικότητα C του αρχικού πυκνωτή ισούται κατά συνέπεια με την ολική χωρητικότητα των τριών παραπάνω πυκνωτών:

$$C = C_{ολ} \rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_b} + \frac{1}{C_l} + \frac{1}{C_b} = \frac{2}{C_b} + \frac{1}{C_l} = \frac{2b}{\epsilon_0 A} + \frac{l}{\epsilon_0 \epsilon_r A} = \frac{2b\epsilon_r + l}{\epsilon_0 \epsilon_r A} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{2b\epsilon_r + l}$$