



ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ (Θ)

Χασάπης Δημήτριος
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΕ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



4. Μαγνητικό πεδίο

Το **μαγνητικό πεδίο** αποτελεί την δεύτερη μορφή εμφάνισης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (Η πρώτη είναι το ηλεκτρικό πεδίο).

Η δημιουργία του μαγνητικού πεδίου είναι αποτέλεσμα της *κίνησης* ηλεκτρικών φορτίων, ενώ το ηλεκτρικό απλώς της παρουσίας τους.

Το γεγονός αυτό εξηγεί την ιδιότητα του μαγνητικού πεδίου να επηρεάζει την κινητική κατάσταση φορτισμένων και κινουμένων σωματιδίων ή σωμάτων, ακριβώς μέσω αλληλεπίδρασης με το γύρω απ' αυτά υπάρχον μαγνητικό πεδίο. Στην περίπτωση των μονίμων μαγνητών ή γενικότερα μαγνητισμένων σωμάτων τα ρεύματα, τα οποία δημιουργούν το πεδίο, είναι αποτέλεσμα της κίνησης των ηλεκτρονίων γύρω από τους θετικά φορτισμένους πυρήνες, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 5.

4.1 Ένταση του μαγνητικού πεδίου. Δύναμη Lorentz

Η δύναμη, η οποία ασκείται σε κινούμενο φορτίο q , το οποίο βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου, καλείται **δύναμη Lorentz** (στην ελληνική βιβλιογραφία συνήθως **δύναμη Laplace**) και προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}] \quad \rightarrow \quad F = qvB \sin(\vec{v}, \vec{B}) \quad [4.1]$$

όπου \vec{F} = **δύναμη Lorentz** (Laplace)

\vec{v} = ταχύτητα του φορτίου q

\vec{B} = **ένταση του μαγνητικού πεδίου** (παλαιότερα **μαγνητική επαγωγή**)

Από την σχέση [4.1], η οποία ευρέθη κατόπιν *πειραματικών μετρήσεων*, προκύπτει:

α) Η δύναμη Lorentz είναι κάθετη και προς την ταχύτητα του φορτίου και προς την ένταση του πεδίου.

β) Όταν το φορτίο κινείται παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο δεν ασκείται δύναμη Lorentz επ' αυτού. (αν $\vec{v} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \sin(\vec{v}, \vec{B}) = 0$)

γ) Η δύναμη Lorentz γίνεται μέγιστη ($F = F_{max} = qvB$), όταν το φορτίο κινείται κάθετα προς την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

Η **φορά της δύναμης Lorentz** προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του διανυσματικού γινομένου: αν τοποθετήσουμε δεξιόστροφο κοχλία κάθετα στο επίπεδο των διανυσμάτων \vec{v} και \vec{B} και τον στρέψουμε από το πρώτο προς το δεύτερο, τότε ο κοχλίας θα προχωρήσει κατά την φορά της \vec{F} , εφόσον το φορτίο q είναι θετικό, διαφορετικά κατά την αντίθετη. Επειδή λοιπόν η μαγνητική δύναμη (Lorentz) είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα, το έργο της είναι μηδέν. Άρα

το **στατικό** μαγνητικό πεδίο δεν μπορεί να μεταβάλλει, την κινητική ενέργεια ενός κινούμενου φορτίου.

Η **μονάδα της μαγνητικής έντασης** προσδιορίζεται από την σχέση [4.1] και στο σύστημα SI καλείται **T(esla)**.

Όταν ένα φορτίο q κινείται συγχρόνως μέσα σε χώρο ηλεκτρικού πεδίου εντάσεως \vec{E} και

μαγνητικού πεδίου εντάσεως \vec{B} , δέχεται την επίδραση συνισταμένης δύναμης

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]) \quad [4.2]$$

4.2 Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές και η ροή τους

Όσον αφορά στην σημασία και στον τρόπο σχεδιασμού των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου ισχύουν όσα αναφέραμε για τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου στο κεφάλαιο 1.4 με την εξής διαφορά: Στην περίπτωση ενός ηλεκτρικού πεδίου μπορούμε να απομονώσουμε περιοχές του χώρου, από τις οποίες πηγάζουν (π.χ. την περιοχή στην οποία βρίσκεται ένα πρωτόνιο) ή στις οποίες καταλήγουν δυναμικές γραμμές. Στις περιοχές αυτές βρίσκονται τα θετικά και αρνητικά φορτία αντίστοιχα. Αντιθέτως

οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές δεν έχουν αρχή και τέλος: είναι κλειστές.

Ακόμη και στην περίπτωση των μονίμων μαγνητών, τα άκρα των οποίων χαρακτηρίζονται από μια πύκνωση των μαγνητικών δυναμικών γραμμών και ονομάζονται **πόλοι**, δεν έχουμε κάτι αντίστοιχο προς τα ηλεκτρικά φορτία. Άλλωστε οι πόλοι εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη:

δεν υπάρχουν «μαγνητικά φορτία» αλλά μαγνητικά δίπολα.

Οι πόλοι ενός μαγνήτη χαρακτηρίζονται αυθαίρετα σαν **βόρειος** και **νότιος**. Οι ονομασίες αυτές προέκυψαν από το γεγονός, ότι οι πόλοι μιας μαγνητικής βελόνης, όταν αυτή ισορροπεί από μόνη της, βρίσκονται επί ευθείας, η οποία δείχνει περίπου σε κατεύθυνση Βορρά - Νότου.

Η **μαγνητική ροή** Φ μέσω μιας προσανατολισμένης επιφάνειας \vec{S} ορίζεται σε πλήρη αντιστοιχία προς την ηλεκτρική ροή (βλ. §1.5):

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot \cos(\vec{B}, d\vec{S}) \cdot dS \rightarrow \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cos(\vec{B}, d\vec{S}) dS \quad [4.3]$$

Μονάδα μέτρησης της μαγνητικής ροής στο SI είναι το **Weber**: $[\Phi] = [B][S] = T \cdot m^2 \equiv Wb$

Λόγω της ανυπαρξίας μαγνητικών μονοπόλων, κάθε κλειστή επιφάνεια θα περιλαμβάνει τον ίδιο αριθμό βορείων και νοτίων πόλων, με αποτέλεσμα τον μηδενισμό της συνολικής μαγνητικής ροής μέσω οιασδήποτε κλειστής επιφάνειας:

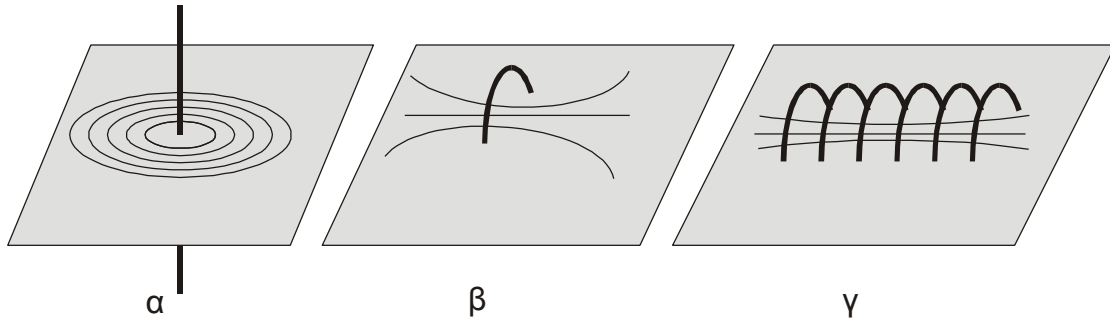
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad [4.4]$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί ουσιαστικά το αντίστοιχο του νόμου του Gauss για τον ηλεκτρισμό (βλ. §2.9γ) και είναι μια από τις τέσσερις θεμελιώδεις εξισώσεις του Maxwell. Αντικατοπτρίζει δε την ανυπαρξία μαγνητικών φορτίων (μονοπόλων). Σημειωτέον ότι η σύγχρονη Φυσική ερευνά (ανεπιτυχώς βέβαια μέχρι στιγμής) για την ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων, η οποία θα εξηγούσε π.χ. την κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου και θα διευκόλυνε την ενοποίηση των υπαρχόντων στην φύση δυνάμεων.

Η μορφή των μαγνητικών γραμμών μπορεί να αισθητοποιηθεί με την βοήθεια ρινισμάτων σιδήρου, τοποθετημένων επί επίπεδης πλάκας από μη αγωγίμο υλικό (π.χ. χαρτόνι), τοποθετημένης εντός του υπό μελέτη μαγνητικό πεδίο. Με τον τρόπο αυτό θα βλέπαμε (βλ. σχ.

4.1), ότι

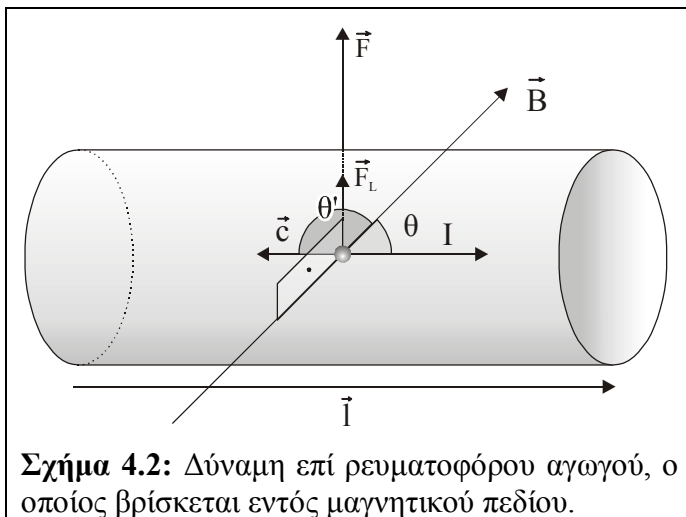
- ✓ οι μαγνητικές γραμμές ενός ευθυγράμμου, ρευματοφόρου αγωγού (καλωδίου) είναι ομόκεντροι κύκλοι, κάθετοι προς τον άξονα του αγωγού και με κέντρο τον αγωγό,
- ✓ οι μαγνητικές γραμμές ενός κυκλικού αγωγού είναι όμοιες με εκείνες ενός μικρού, ευθυγράμμου μαγνήτη, ο οποίος είναι τοποθετημένος στο κέντρο του κυκλικού αγωγού και κατά μήκος του άξονα του,
- ✓ οι μαγνητικές γραμμές ενός μακρού σωληνοειδούς είναι ίδιες με εκείνες ενός ευθύγραμμου μαγνήτη.



Σχήμα 4.1: Μαγνητικές δυναμικές γραμμές α) ενός ευθυγράμμου, ρευματοφόρου αγωγού, β) ενός κυκλικού αγωγού και γ) ενός σωληνοειδούς.

4.3 Δύναμη μαγνητικού πεδίου επί ρευματοφόρου αγωγού

Όταν ένας ρευματοφόρος αγωγός βρεθεί εντός μαγνητικού πεδίου, δέχεται την επίδραση μαγνητικής δύναμης, η οποία είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων Lorentz, οι οποίες ασκούνται επί των κινουμένων φορτίων. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την δύναμη για την περίπτωση ενός ευθυγράμμου αγωγού μήκους l , ο οποίος διαρρέεται από συνεχές ρεύμα έντασης I και βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης \vec{B} :



Σχήμα 4.2: Δύναμη επί ρευματοφόρου αγωγού, ο οποίος βρίσκεται εντός μαγνητικού πεδίου.

Σε κάθε ελεύθερο ηλεκτρόνιο ασκείται η δύναμη Lorentz

$$F_L = e \cdot c \cdot B \cdot \eta \mu \theta \quad \{1\}$$

όπου c = ταχύτητα μεταθέσεως των ελευθέρων ηλεκτρονίων.

Η δύναμη αυτή είναι κατά τα γνωστά κάθετη προς την διεύθυνση μετάθεσης των ελευθέρων ηλεκτρονίων, η οποία συμπίπτει με εκείνη του άξονα του αγωγού. Επειδή όμως τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να εγκαταλείψουν τα τοιχώματα του αγωγού, μεταβιβάζουν την δύναμη αυτή επί των τοιχωμάτων.

Αν $v = S \cdot l$ είναι ο όγκος του αγωγού (όπου S = διατομή και l = μήκος του αγωγού) και n η αριθμητική πυκνότητα των ελευθέρων ηλεκτρονίων (= ελεύθερα ηλεκτρόνια ανά μονάδα όγκου), τότε εντός του αγωγού περιέχονται $n \cdot v$ ηλεκτρόνια, οπότε επί των τοιχωμάτων ασκεί-

4.4.1Ο νόμος του Ampere και οι εφαρμογές του

ται η συνισταμένη δύναμη

$$F = F_L^{(1)}(nv) = ecB\eta\mu\theta'(nv) = e \cdot n \cdot c \cdot v \cdot B\eta\mu\theta' \stackrel{\substack{en=dq/dv \\ c=dI/dt}}{=} \frac{dq}{dv} \frac{dl}{dt} v B\eta\mu\theta' \stackrel{v=SI}{=} \frac{dq}{dv} \frac{dl}{dt} SI B\eta\mu\theta' =$$

$$\stackrel{dl \cdot S = dv}{=} \frac{dq}{dv} \frac{dv}{dt} l B\eta\mu\theta' = \frac{dq}{dt} l B\eta\mu\theta' \stackrel{\substack{dq/dt=I \\ \eta\mu\theta'=\eta\mu\theta}}{\Rightarrow} \boxed{F = IlB\eta\mu\theta \rightarrow \vec{F} = I[\vec{l} \times \vec{B}]} \quad [4.5]$$

Δύναμη επί ευθυγράμμου αγωγού μήκους l , ο οποίος διαρρέεται από συνεχές ρεύμα έντασης I και βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης \vec{B} . (Η Διεύθυνση του διανύσματος \vec{l} συμπίπτει με εκείνη του άξονα του αγωγού, ενώ η φορά του με την συμβατική φορά του ρεύματος).

Σε περίπτωση μη ευθυγράμμου αγωγού η σχέση [4.5] ισχύει κατ' αρχήν για κάθε στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}$ του αγωγού, οπότε με ολοκλήρωση υπολογίζεται η συνολική επί του αγωγού ασκούμενη δύναμη. Σημειωτέον ότι στην περίπτωση αυτή δεν είναι απαραίτητο να πρόκειται για ομογενές μαγνητικό πεδίο.

4.4 Υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου ρευματοφόρων αγωγών

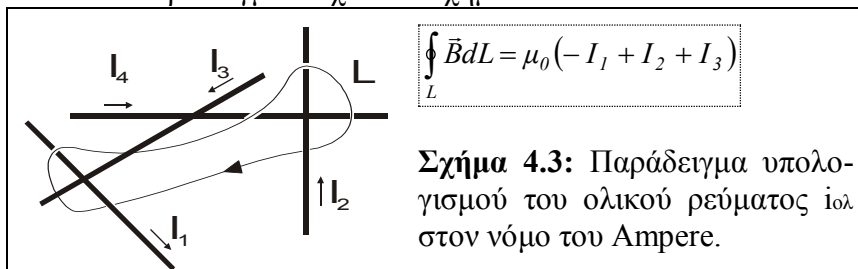
4.4.1 Ο νόμος του Ampere και οι εφαρμογές του

Η σχέση μεταξύ του ρεύματος, το οποίο διαρρέει έναν ρευματοφόρο αγωγό, και της έντασης του γύρω από τον αγωγό δημιουργούμενου μαγνητικού πεδίου δίδεται από τον ακόλουθο «νόμο του Ampere», ο οποίος αποτελεί προϊόν του πειράματος και της επιστημονικής διαίσθησης:

νόμος του Ampere:
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} \equiv \oint_L B \cos(\vec{B}, d\vec{l}) dl = \mu_0 i_{ολ} \quad [4.6]$$

όπου $\mu_0 = \text{μαγνητική διαπερατότητα του κενού} = 4\pi 10^{-7} \text{ WbA}^{-1}\text{m}^{-1}$

$i_{ολ}$ είναι το **συνολικό ρεύμα**, το οποίο περικλείεται από την **τυχαία κλειστή διαδρομή L** . Συγκεκριμένα στην περίπτωση που η διαδρομή περικλείει περισσότερα του ενός ρεύματα, το $i_{ολ}$ ισούται με το αλγεβρικό τους άθροισμα, το οποίο υπολογίζεται θεωρώντας θετικά τα ρεύματα εκείνα, των οποίων το μαγνητικό πεδίο έχει την ίδια φορά, με την φορά κατά την οποία διατρέχουμε την κλειστή καμπύλη L . Ένα απλό παράδειγμα δείχνει το σχήμα 4.3.



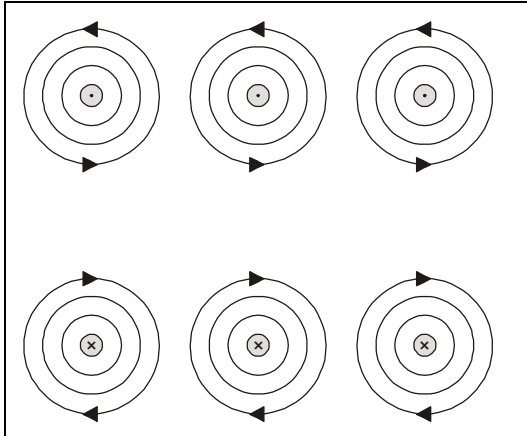
Σχήμα 4.3: Παράδειγμα υπολογισμού του ολικού ρεύματος $i_{ολ}$ στον νόμο του Ampere.

Όσον αφορά στην **φορά του μαγνητικού πεδίου ενός ρευματοφόρου αγωγού**, αυτή υπολογίζεται πρακτικά ως εξής: Όταν «πιάσουμε» τον αγωγό με το δεξί μας χέρι, έτσι ώστε ο

αντίχειρας να δείχνει την (συμβατική) φορά του ρεύματος, τότε τα δάκτυλα τυλίγονται γύρω από τον αγωγό κατά την φορά των κλειστών μαγνητικών δυναμικών γραμμών.

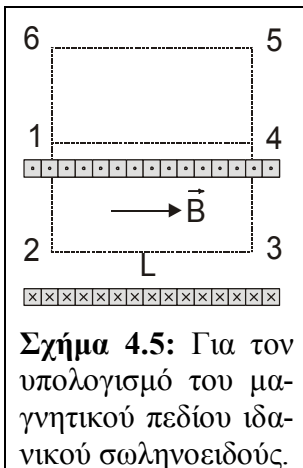
Ο νόμος του Ampere αντιστοιχεί στον νόμο του Gauss (βλ. 1.6) και έχει αντίστοιχες εφαρμογές:

α) Υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου (ιδανικού) σωληνοειδούς: Σαν *σωληνοειδές* ορίζεται κάθε σπειροειδώς διαμορφωμένος αγωγός, του οποίου οι *ισαπέχουσες* σπείρες έχουν κοινό άξονα και ίδια ακτίνα.



Σχήμα 4.4: Μαγνητικό πεδίο των σπειρών σωληνοειδούς σε τομή. Για την φορά του ρεύματος χρησιμοποιούνται τα καθιερωμένα πλέον σύμβολα: \odot = «βγαίνει από την σελίδα» και \otimes = «μπαίνει στην σελίδα».

Το μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων, τα οποία δημιουργούνται από τις σπείρες του. Όπως - πολύ απλοποιημένα - φαίνεται στο σχήμα 4.4, τα μαγνητικά πεδία των μεμονωμένων σπειρών τείνουν να εξουδετερωθούν στον χώρο μεταξύ και εκτός των σπειρών, ενώ ενισχύονται στο εσωτερικό του σωληνοειδούς. Η τάση αυτή γίνεται εντονότερη όσο αυξάνεται το μήκος του σωληνοειδούς και ελαττώνεται η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σπειρών. Στην περίπτωση ενός *ιδανικού σωληνοειδούς* (άπειρο μήκος και τετραγωνική διατομή κυκλικών σπειρών, επαπτόμενων μεταξύ τους - ένα τέτοιο σωληνοειδές ισοδυναμεί με λεπτό κυλινδρικό φύλλο απείρου μήκους) η ένταση του πεδίου στο εξωτερικό του σωληνοειδούς είναι αμελητέα (μηδενική αν θέλουμε να είμαστε απόλυτα ακριβείς, βλ. παρακάτω) σε σχέση με εκείνη στο εσωτερικό του, όπου



Σχήμα 4.5: Για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου ιδανικού σωληνοειδούς.

(λόγω συμμετρίας) επικρατεί ένα ομογενές και παράλληλο προς τον άξονα του σωληνοειδούς μαγνητικό πεδίο (βλ. σχ.4.5). Το **μαγνητικό πεδίο ενός πραγματικού σωληνοειδούς** πλησιάζει τόσο περισσότερο εκείνο ενός ιδανικού σωληνοειδούς, όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος του σε σχέση με την διάμετρο του, και όσο περισσότερο περιορίζομαστε στην κεντρική περιοχή του σωληνοειδούς, μακριά από τα άκρα του. Στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης ο παρακάτω υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου ιδανικού σωληνοειδούς ισχύει και για την κεντρική περιοχή ενός πραγματικού σωληνοειδούς «μεγάλου» μήκους.

Ο νόμος του Ampere για την διαδρομή $L \equiv [1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1]$ του σχήματος 4.5 μας δίνει:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i_{ολ} \quad \{1\}$$

Το πρώτο και τρίτο ολοκλήρωμα μηδενίζονται, επειδή κατά τις διαδρομές 1→2 και 3→4 η ένταση \vec{B} είναι πάντα κάθετη προς το στοιχείο μετατόπισης $d\vec{l}$.

Το τέταρτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, επειδή καθ' όλο το μήκος της διαδρομής 4→1 η έντα-

ση του πεδίου είναι μηδενική. (Αν η ένταση ήταν μη μηδενική, τότε η τιμή του τέταρτου ολοκληρώματος θα έπρεπε να είναι ίση και αντίθετη με εκείνη του αντιστοίχου ολοκληρώματος κατά μήκος οιασδήποτε διαδρομής παράλληλης προς την $4 \rightarrow 1$, όπως π.χ. η $5 \rightarrow 6$ στο σχήμα 4.5. Αυτό θα ήταν απαραίτητο επειδή για μια διαδρομή, ευρισκόμενη εξ ολοκλήρου εκτός του σωληνοειδούς - όπως π.χ. η $[1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6]$, το $i_{ολ}$, είναι μηδέν, οπότε μηδέν θα πρέπει να μας δίνει και το άθροισμα των τεσσάρων ολοκληρωμάτων.)

Μετά τον μηδενισμό των τριών αυτών ολοκληρωμάτων η {1} γράφεται:

$$\int_2^3 \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i_{ολ} \Rightarrow \int_0^h B \cos \theta dl = \mu_0 i_{ολ} \stackrel{B=\sigma a \theta}{\Rightarrow} Bh = \mu_0 i_{ολ} \quad \{2\}$$

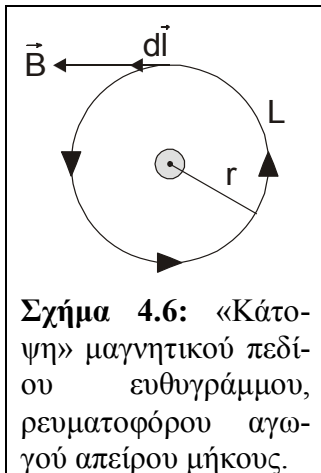
Το ολικό ρεύμα ισούται προφανώς με τον αριθμό των σπειρών, τις οποίες περικλείει η επιλεγείσα διαδρομή, επί το ρεύμα i , το οποίο διαρρέει το σωληνοειδές: $i_{ολ} = [\text{αριθμός σπειρών}] i = (nh) i$, όπου $n = \text{αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους}$.

Αντικαθιστούμε στην {2} και παίρνουμε για την

ένταση μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ιδανικού σωληνοειδούς $B = \mu_0 n i$ [4.7]

Η παραπάνω σχέση αντικατοπτρίζει το γεγονός, ότι το μαγνητικό πεδίο ιδανικού σωληνοειδούς στον εντός των σπειρών ευρισκόμενο χώρο είναι ομογενές και μάλιστα ανεξάρτητο από την διάμετρο των σπειρών.

β) Υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου ευθυγράμμου, ρευματοφόρου αγωγού, πολύ μεγάλου (απείρου) μήκους: Λόγω συμμετρίας, οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου ευθυγράμμου, ρευματοφόρου αγωγού απείρου μήκους είναι κυκλικές με κέντρο τον αγωγό, καθ' όλο δε το μήκος μιας δυναμικής γραμμής (βλ. σχ. 4.6) η ένταση του πεδίου έχει σταθερή τιμή. Τα παραπάνω ισχύουν προσεγγιστικά και για έναν ευθύγραμμο αγωγό πεπερασμένου μήκους, σε σημεία τα οποία βρίσκονται κοντά στον άξονα του αγωγού και μακριά από τα άκρα του.



Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere επιλέγοντας ως κλειστή διαδρομή L μια δυναμική γραμμή ακτίνας r , οπότε έχουμε:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint B \cos \theta dl \stackrel{B=\sigma a \theta}{=} B \oint dl = B(2\pi r) \stackrel{\text{Ampere}}{=} \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad [4.8]$$

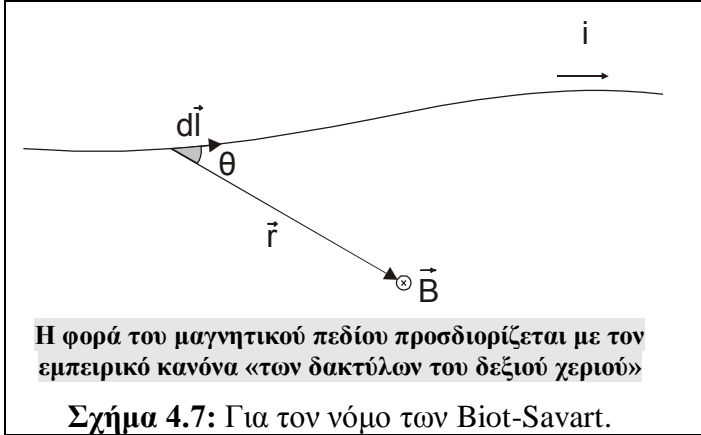
4.4.2 Ο νόμος των Biot και Savart και οι εφαρμογές του

Ο νόμος του Ampere [4.6] μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της έντασης \vec{B} του μαγνητικού πεδίου μόνο σε περιπτώσεις *συμμετρικής* κατανομής ρεύματος, οπότε ο υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι εύκολος.

Σε περιπτώσεις *τυχαίας* κατανομής ρεύματος ο υπολογισμός της έντασης \vec{B} μπορεί να γίνει με την βοήθεια του νόμου των Biot - Savart, ο οποίος είναι καταστάλαγμα πειραματικών

μετρήσεων και διατυπώνεται ως εξής:

Κάθε στοιχειώδες τμήμα $d\vec{l}$ (βλ. σχ. 4.7) ενός γραμμικού ρευματοφόρου αγωγού τυχαίας μορφής δημιουργεί σε θέση \vec{r} ένα στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο έντασης $d\vec{B}$, η οποία δίδεται από τη σχέση:



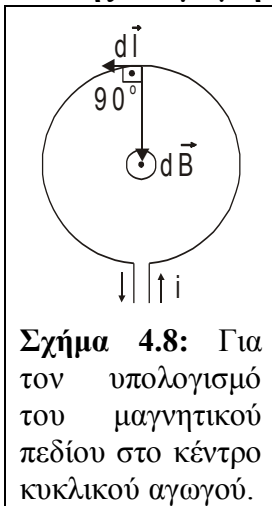
νόμος των Biot - Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \rightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dl$$

[4.9]

Η ολική ένταση \vec{B} στο σημείο P υπολογίζεται με ολοκλήρωση ($\vec{B} = \int d\vec{B}$), η οποία εκτείνεται σε όλη την κατανομή ρεύματος.

Παράδειγμα: Υπολογισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο κυκλικού αγωγού ακτίνας r (βλ. σχ. 4.8.):



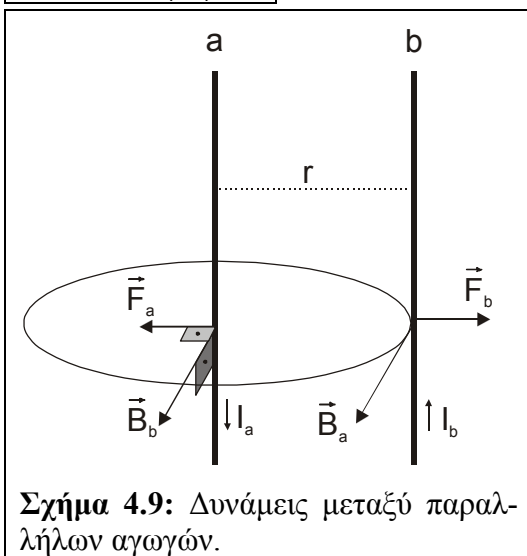
$$\text{Biot - Savart: } B = \int dB \stackrel{r=\sigma a \theta, \sin \theta = l = \sigma a \theta}{=} \frac{\mu_0 i}{4\pi} - \frac{l}{r^2} \int_0^{2\pi r} dl \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2r}$$

[4.10]

(Η φορά του πεδίου προκύπτει κατά τα γνωστά με την βοήθεια του εμπειρικού κανόνα των δακτύλων του δεξιού χεριού, βλ. §4.4.1).

4.5 Περιπτώσεις δυνάμεων ασκουμένων από μαγνητικά πεδία. Εφαρμογές

α) Δυνάμεις μεταξύ παράλληλων ρευματοφόρων αγωγών πολύ μεγάλου μήκους (το μήκος τους πρέπει, να είναι πολύ μεγαλύτερο από την μεταξύ τους απόσταση).



Έστω δύο παράλληλοι αγωγοί a και b, ευρισκόμενοι σε απόσταση r (βλ. σχ. 4.9) μεταξύ τους, η οποία είναι πολύ μικρότερη από το μήκος l των δύο αγωγών, και διαρρεόμενοι από ρεύμα έντασης I_a και I_b αντίστοιχα. Έκαστος των δύο αγωγών δέχεται την επίδραση του μαγνητικού πεδίου του άλλου, η οποία συνεπάγεται την δράση δύναμης επ αυτού. Σύμφωνα με το αξίωμα δράσης - αντίδρασης οι δύο ασκούμενες επί των αγωγών (εξ αιτίας των ίδιων τους μαγνητικών πεδίων) δυνάμεις θα είναι ίσες και αντίθετες. Για τον λόγο αυτό θα υπολογίσουμε την μια εκ των δύο έστω την \vec{F}_a , την ασκούμενη επί του αγωγού a εξ αιτίας του πεδίου του αγωγού b:

Σύμφωνα με την σχέση [4.5] το μέτρο της δύναμης

αυτής θα είναι $F_a = I_a l B_b$ {1}

όπου B_b είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου του αγωγού b στην θέση του αγωγού a. Σύμφωνα με την σχέση [4.8] θα είναι:

$$B_b = \frac{\mu_0 I_b}{2\pi r} \quad \{ 2 \}$$

Αντικαθιστούμε την {2} στην {1} και παίρνουμε: $F = \frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi r}$ [4.11]

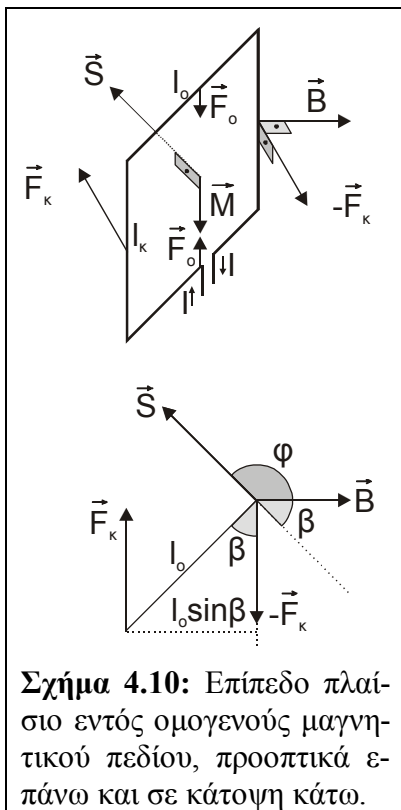
(δύναμη μεταξύ παραλλήλων αγωγών πολύ μεγάλου μήκους)

Σημειωτέον ότι η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται για τον ορισμό του Ampere, μιας εκ των θεμελιωδών μονάδων του Διεθνούς Συστήματος.

Η φορά των δυνάμεων και των εντάσεων (βλ. σχ. 4.9) προσδιορίζεται κατά τα γνωστό με την βοήθεια των εμπειρικών κανόνων του δεξιόστροφου κοχλία (βλ. 4.1) και του δεξιού χεριού (βλ. 4.4.1) αντίστοιχα. Εύκολα δε διαπιστώνουμε ότι

δύο παράλληλοι, ρευματοφόροι αγωγοί με αντίρροπα ρεύματα απωθούνται, ενώ με ομόρροπα έλκονται.

β) Ροπή επί ρευματοφόρου πλαισίου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου: Όταν ρευματοφόρο επίπεδο πλαίσιο βρεθεί εντός (ομογενούς) μαγνητικού πεδίου, τότε επί των τεσσάρων πλευρών του αναπτύσσονται οι γνωστές μας πλέον μαγνητικές δυνάμεις. Εάν (χάρin απλότητας) ο άξονας του πλαισίου είναι κατακόρυφος και το πεδίο οριζόντιο (βλ. σχ. 4.10), τότε οι δύο επί των οριζοντίων πλευρών του πλαισίου δρώσες δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες (με μέτρο $F_0 = I_0 B \sin \alpha$) οπότε αλληλοεξουδετερώνονται, αντιθέτως οι επί των κατακόρυφων πλευρών του πλαισίου δρώσες δυνάμεις (μέτρου $F_k = I_k B$) αποτελούν ζεύγος δυνάμεων, με αποτέλεσμα την δράση μηχανικής ροπής \vec{M} επί του πλαισίου. Το μέτρο της εν λόγω ροπής είναι:



Σχήμα 4.10: Επίπεδο πλαίσιο εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου, προοπτικά επάνω και σε κάτοψη κάτω.

$$M = F_k (l_0 \sin \beta) \stackrel{\text{αντικαθιστούμε την } F_k}{=} I_l B (l_0 \sin \beta) = I B l_k l_0 \sin \beta \stackrel{l_k l_0 = S}{\Rightarrow} \beta + \varphi = 180^\circ \Rightarrow \eta \mu \beta = \eta \mu \varphi$$

$$M = IBS \sin \varphi \text{ ή διανυσματικά } \vec{M} = I [\vec{S} \times \vec{B}] \quad [4.12]$$

όπου \vec{S} είναι το γνωστό μας «επιφανειακό διάνυσμα», κάθετο επί του πλαισίου και με φορά προσδιοριζόμενη από εκείνη του ρεύματος με την βοήθεια δεξιόστροφου κοχλίου.

Όπως φαίνεται από την σχέση [4.12], η μηχανική ροπή \vec{M} μηδενίζεται, όταν το διάνυσμα \vec{S} γίνει παράλληλο, άρα το πλαίσιο κάθετο προς το πεδίο. Ένα ρευματοφόρο πλαίσιο συμπεριφέρεται δηλαδή σαν ένα **μαγνητικό δίπολο**. Επειδή δε η μηχανική ροπή \vec{M} (και επομένως και τάση προς προσανατολισμό) καθορίζονται από το διανυσματικό μέγεθος: $\vec{M}^* \equiv I\vec{S}$, το οποίο σύμφωνα με την σχέση [4.12] ισούται με την ανά μονάδα πεδίου αναπτυσσόμενη μηχανική ροπή, εισάγουμε το εν λόγω μέγεθος και το ονομάζουμε **μαγνητική διπολική ροπή**.

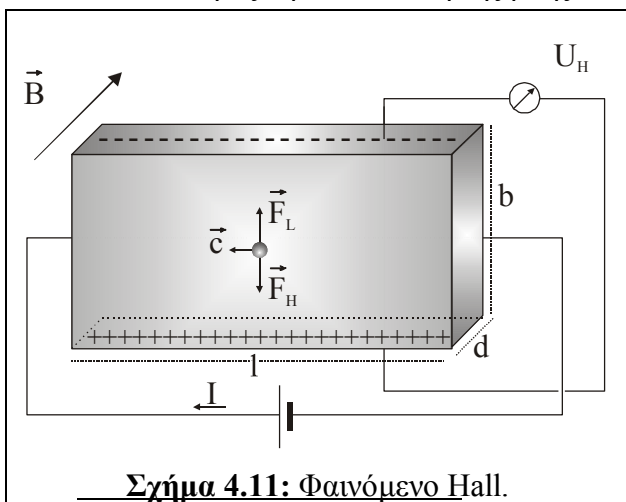
Συνοψίζοντας γράφουμε:

μαγνητική διπολική ροπή επιπέδου βρόγχου τοχαίου¹ σχήματος: $\vec{M}^* = I\vec{S}$ [4.13]

μηχανική ροπή επί επιπέδου βρόγχου εντός ομογενούς μαγν. πεδίου: $\vec{M} = [\vec{M}^* \times \vec{B}]$

Το φαινόμενο της δράσης μηχανικής ροπής επί ρευματοφόρου πλαισίου εντός μαγνητικού πεδίου βρίσκει **εφαρμογή** σε πολλά όργανα μέτρησης, όπως αμπερόμετρα (βλ. κεφ. 3.3) και βολτόμετρα. Επιπλέον αποτελεί την **αρχή λειτουργίας των ηλεκτροκινητήρων**.

γ) Φαινόμενο Hall καλείται το φαινόμενο της εμφάνισης ηλεκτρικής τάσεως U_H , (**τάση Hall**) κάθετα προς την διεύθυνση της ροής του ρεύματος εντός μεταλλικής ταινίας, όταν αυτή



Σχήμα 4.11: Φαινόμενο Hall.

βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο (βλ. σχ. 4.11) Η εν λόγω τάση αναπτύσσεται εξ αιτίας του διαχωρισμού των φορέων φορτίου, ο οποίος είναι αποτέλεσμα της μετακίνησης των ελευθέρων ηλεκτρονίων κάτω από την επίδραση της δύναμης Lorentz - προς την μια πλευρά του αγωγού, οπότε προκαλείται περίσσεια θετικών ιόντων στην απέναντι.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός, ότι η δύναμη Lorentz θα έχει την ίδια φορά (στην περίπτωση του σχήματος 4.11 προς τα επάνω), είτε οι φορείς του ρεύματος είναι θετι-

¹ Η κάπως απαιτητική μαθηματικώς γενίκευση περιέχεται στο βιβλίο “Μαθήματα Φυσικής Πανεπιστημίου Burkley”, 2^{ος} τόμος, Εργαστήρια Φυσικής Ε.Μ.Π. 1984.

κοί, οπότε κινούνται κατά την συμβατική φορά του ρεύματος, είτε αρνητικοί, οπότε κινούνται αντίθετα. Έτσι **το φαινόμενο Hall μας επιτρέπει, να διαπιστώσουμε το είδος των φορέων** και όχι μόνο, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω.

Ο διαχωρισμός των φορτίων έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία ενός νέου ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της μεταλλικής πλάκας, έντασης $E_H = U_H / b$, όπου b το «ύψος» (βλ. σχ. 4.11) της ορθογωνικής (υποτίθεται από d και στο εξής) πλάκας (Υποθέτουμε σιωπηλά, ότι το εν λόγω ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές, πράγμα το οποίο ισχύει για μικρό ύψος b μακριά από τα άκρα της πλάκας). Εξ αιτίας του πεδίου αυτού ασκείται επί των ηλεκτρονίων ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_H = -e\vec{E}_H$. Έτσι ο διαχωρισμός των φορτίων εξ αιτίας της δύναμης Lorentz, $\vec{F}_L = -e[\vec{c} \times \vec{B}]$, συνεχίζεται μόνον έως ότου οι δύο αυτές δυνάμεις γίνουν ίσες και αντίθετες, οπότε αποκαθίσταται δυναμική ισορροπία:

$$eE_H = ecB \quad \{1\} \quad (\text{Πήραμε υπόψη, ότι η ταχύτητα μεταθέσεως } c \text{ είναι, κάθετη προς την ένταση του μαγνητικού πεδίου.)}$$

Στο κεφάλαιο 4.3 είχαμε χρησιμοποιήσει τις σχέσεις $en = dq/dv$ και $c = dl/dt$, όπου n =αριθμός φορέων ανά μονάδα όγκου $dv = Sdl = (bd)dl$, η γνωστή μας αριθμητική πυκνότητα των φορέων φορτίου. (d = «βάθος» της ορθογωνικής μεταλλικής πλάκας, βλ. σχ.4.11). Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$enc = \frac{dq}{dv} \frac{dl}{dt} = I \frac{dl}{dv} = I \frac{dl}{(bd)dl} = \frac{I}{bd} \Rightarrow c = \frac{I}{bdne} \quad \{2\}. \quad \text{Αντικατάσταση στην } \{1\} \text{ δίδει:}$$

$$E_H = cB = \frac{I}{bdne} B \Leftrightarrow \frac{U_H}{b} = \frac{I}{bdne} B \Rightarrow \boxed{U_H = R_H \frac{IB}{d}} \quad [4.14]$$

όπου $\boxed{R_H = \frac{1}{ne}}$:**σταθερά Hall**, ένα χαρακτηριστικό για το μέταλλο μέγεθος, η μέτρηση του οποίου **επιτρέπει τον προσδιορισμό της πυκνότητας των φορέων φορτίου.**

Πέραν του προσδιορισμού της αριθμητικής πυκνότητας και του πρόσημου των φορέων φορτίου το φαινόμενο Hall βρίσκει συνεχώς αυξανόμενη εφαρμογή στην **μέτρηση της έντασης των μαγνητικών πεδίων.**

δ) Άλλες εφαρμογές δυνάμεων από μαγνητικά πεδία: Στις οθόνες τηλεοράσεων εκμεταλλευόμαστε την **εκτροπή δέσμης ηλεκτρονίων** μέσω του μαγνητικού πεδίου σωληνοειδών.

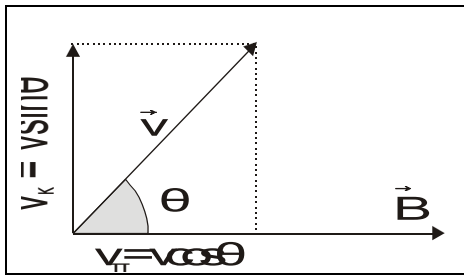
Σε πολλούς από τους **επιταχυντές ιόντων και ηλεκτρονίων**, οι οποίοι χρησιμοποιούνται στην Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων, η επιτάχυνση των σωματιδίων σε πολύ υψηλές ταχύτητες γίνεται με την βοήθεια ηλεκτρικών πεδίων. Οι απαιτούμενες όμως προς τον σκοπό αυτό τροχιές έχουν πολύ μεγάλο μήκος, οπότε συχνά «κάμπτονται» σε σπειροειδείς με την βοήθεια μαγνητικών πεδίων, καθέτων προς το επίπεδο της τροχιάς. Οι εν λόγω επιταχυντές παύουν να είναι **γραμμικοί** και χαρακτηρίζονται διεθνώς -προς τιμήν της απέραντης ελληνικής γλώσσας, την οποία εμείς οι Νεοέλληνες πασχίζουμε να εξαφανίσουμε! - ως **κύκλωτρα**.

Μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία κατάλληλης μορφής και ισχύος επιτρέπουν την σύγκλιση και απόκλιση ηλεκτρονικών ακτίνων, λειτουργούν δηλαδή ως **ηλεκτρικοί** και **μαγνητικοί**

φακοί και βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στην **κατασκευή οπτοηλεκτρονικών οργάνων**, το γνωστότερο των οποίων είναι ο παλμογράφος δέσμης ηλεκτρονίων και το σημαντικότερο το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο, μέσω του οποίου πετυχαίνουμε μεγεθύνσεις ασύγκριτα μεγαλύτερες από εκείνες των οπτικών μικροσκοπίων.

Παράδειγμα

Παράδειγμα 4.5.1: Να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά της τροχιάς ηλεκτρονίου, το οποίο εισέρχεται με σταθερή, αρχική ταχύτητα v μέσα σε σταθερό, ομογενές μαγνητικό πεδίο.



Όπως γνωρίζουμε, η δύναμη Lorentz \vec{F}_L είναι κάθετη στο επίπεδο, το οποίο ορίζουν η ταχύτητα \vec{v} και το μαγνητικό πεδίο \vec{B} , και το μέτρο της δίδεται από την σχέση

$$F_L = evB\eta\mu\theta \quad \{1\}$$

Αν αναλύσουμε την ταχύτητα του ηλεκτρονίου σε μια παράλληλη και μια κάθετη προς το πεδίο συνιστώσα, \vec{v}_π και \vec{v}_κ αντίστοιχα, τότε σύμφωνα με την σχέση {1} η παράλληλη προς το πεδίο κίνηση (συνιστώσα) δεν εγείρει την επίδραση μαγνητικής δύναμης ($\eta\mu 0 = 0 \rightarrow F_L^\pi = 0$), οπότε το ηλεκτρόνιο κινείται κατά την διεύθυνση του πεδίου με σταθερή ταχύτητα

$$v_\pi = v\sigma\nu\theta = \sigma\alpha\theta. \quad \{2\}$$

Αντιθέτως, η κάθετη ($\rightarrow \eta\mu 90=1$) προς το πεδίο κίνηση (συνιστώσα) προκαλεί την δράση μαγνητικής δύναμης, κάθετης προς το επίπεδο (\vec{v}, \vec{B}) και με μέτρο

$$F_L^\kappa = ev_\kappa B \quad \{3\}.$$

Η δύναμη αυτή λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη F_κ και αναγκάζει το ηλεκτρόνιο να διαγράφει κυκλική τροχιά, κάθετη προς την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

Η ακτίνα r της κυκλικής αυτής τροχιάς υπολογίζεται από την ισότητα $F_L^\kappa \stackrel{!}{=} F_\kappa \Rightarrow$

$$\Rightarrow ev_\kappa B \stackrel{!}{=} \frac{mv_\kappa^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv_\kappa}{eB} \Rightarrow r = \frac{m\nu\eta\mu\theta}{eB} \quad \{4\}, \text{ όπου } m \text{ η μάζα του ηλεκτρονίου.}$$

Η γωνιακή ταχύτητα ω θα είναι: $\omega = \frac{v_\kappa}{r} \stackrel{\{4\}}{=} \frac{\nu\eta\mu\theta}{\frac{m\nu\eta\mu\theta}{eB}} \Rightarrow \omega = \frac{eB}{m} \quad \{5\}$

Η συχνότητα ν και η περίοδος T υπολογίζονται άμεσα: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \stackrel{\{5\}}{=} \frac{eB}{2\pi m} \quad \{6\}$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει, ότι η περίοδος είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα του ηλεκτρονίου, ενώ η ακτίνα είναι ανάλογη προς αυτήν.

Επειδή το ηλεκτρόνιο κινείται συγχρόνως και κατά την διεύθυνση του πεδίου με (σταθε-

ρή όπως είδαμε) ταχύτητα v_{π} , η συνισταμένη κίνηση θα είναι ελικοειδής, με άξονα το μαγνητικό πεδίο. Το **βήμα της έλικας** (= η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σπειρών), P , θα είναι ίσο με την απόσταση, την οποία διατρέχει το ηλεκτρόνιο κατά την διεύθυνση του πεδίου μέσα στον χρόνο μιας περιόδου:

$$P = v_{\pi} T = v \sin \theta T \Rightarrow P = \frac{2\pi m}{eB} v \sin \theta \quad \{7\}$$

Όπως είναι προφανές, οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν και στην περίπτωση άλλου φορτισμένου σωματιδίου, αρκεί να αντικαταστήσουμε την αντίστοιχη μάζα και φορτίο.

4.5 Ηλεκτρομαγνητική επαγωγή

Ως **ηλεκτρομαγνητική επαγωγή** χαρακτηρίζεται το φαινόμενο της εμφάνισης ΗΕΔ στα άκρα ενός αγωγού σαν συνέπεια της μεταβολής της μαγνητικής ροής μέσω της επιφάνειας, η οποία περιορίζεται, από τον αγωγό γεωγραφικά ή/και χρονικά.

Την τιμή της παραπάνω, **επαγωγικής** καλούμενης **ηλεκτρεγερτικής δύναμης** $E_{\epsilon\pi}$ δίνει ο παρακάτω

Νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday

Η επαγωγική ΗΕΔ $E_{\epsilon\pi}$, η οποία αναπτύσσεται στα άκρα ενός αγωγού, ισούται (κατ' απόλυτη τιμή) με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής Φ μέσω της επιφάνειας, την οποία περιορίζει ο αγωγός γεωγραφικά ή/και χρονικά:

$$E_{\epsilon\pi} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad [4.14]$$

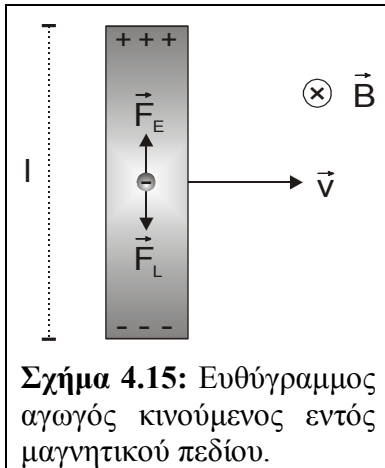
Παρατήρηση: α) Το αρνητικό πρόσημο ερμηνεύεται από τον λεγόμενο **κανόνα του Lenz**, ο οποίος αποτελεί συνέπεια της διατήρησης της ενέργειας, και σύμφωνα με τον οποίο

η επαγωγική ΗΕΔ έχει τέτοια φορά, ώστε τα **επαγωγικά ρεύματα**, τα οποία τείνει να προκαλέσει (ή και προκαλεί στην περίπτωση κλειστού αγωγού), να προσπαθούν (μέσω του δικού τους μαγνητικού πεδίου) να αναιρέσουν την αυτά προκαλέσασα μεταβολή της μαγνητικής ροής.

β) Ο παραπάνω νόμος του Faraday αποτελεί καταστάλαγμα πειραμάτων του (1831), κατά τα οποία παρατήρησε την εμφάνιση βραχύβιων, επαγωγικών ρευμάτων σε έναν κλειστό αγωγίμο βρόγχο, όταν 1^ο) μεταβαλλόταν το ρεύμα σ' έναν γειτονικό, ακίνητο βρόγχο, 2^ο) μετακινούνταν ο γειτονικός βρόγχος, ενώ παρέμενε σταθερό το ρεύμα που τον διέρρεε και 3^ο) εισαγόταν στον, ή εξαγόταν από τον βρόγχο ένας ραβδόμορφος μαγνήτης.

γ) Η μεταβολή της μαγνητικής ροής μπορεί να προκαλείται από οιοδήποτε αίτιο, όπως μέσω παραμόρφωσης ή/και μετακίνησης του αγωγού εντός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου ή/και μεταβολής του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η ολική παράγωγος $d\Phi/dt$ στην σχέση [4.14] παίρνει υπόψη της όλα αυτά τα αίτια. Αυτό γίνεται περισσότερο κατανοητό με τα ακόλουθα **παραδείγματα**:

γ1) Ευθύγραμμος αγωγός κινούμενος με σταθερή ταχύτητα v εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης B και κάθετα προς τις μαγνητικές γραμμές:



Σχήμα 4.15: Ευθύγραμμος αγωγός κινούμενος εντός μαγνητικού πεδίου.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να εξηγήσουμε την εμφάνιση ΗΕΔ με την βοήθεια της δύναμης Lorentz. Συγκεκριμένα, μαζί με τον αγωγό κινούνται προφανώς και τα εντός αυτού ευρισκόμενα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την δράση δύναμης Lorentz επί των ελευθέρων ηλεκτρονίων, της οποίας η φορά φαίνεται στο σχήμα 4.15 ενώ η τιμή της δίδεται από την σχέση

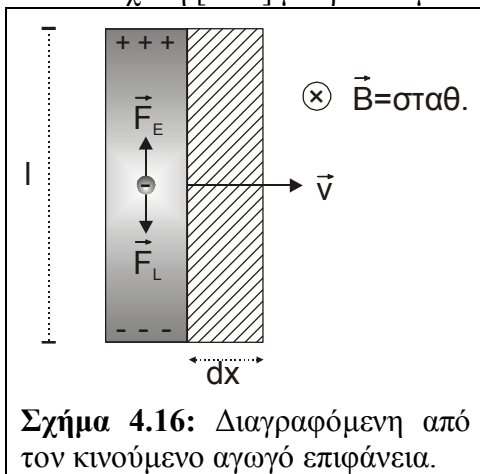
$$F_L = evB \{1\}$$

Κάτω από την επίδραση της δύναμης αυτής επέρχεται μετακίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων με αποτέλεσμα την εμφάνιση τάσης εξ επαγωγής στα άκρα του αγωγού, η οποία μεγαλώνει με την «πάροδο» του χρόνου (το φαινόμενο ολοκληρώνεται πρακτικώς ακαριαία!), έως ότου η ασκούμενη εξ αιτίας του δημιουργούμενου από τον διαχωρισμό των φορτίων ηλεκτρικό πεδίο δύναμη \vec{F}_E γίνει ίση (και αντίθετη) προς την δύναμη Lorentz:

(δυναμική) ισορροπία: $\vec{F}_E = -\vec{F}_L \Rightarrow F_E = F_L \Leftrightarrow e \underset{\text{ένταση πεδίου}}{E} = evB \Rightarrow E = vB \Rightarrow \frac{E_{επ}}{l} = vB \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{επ} = vBl \quad [4.15]$$

Η σχέση [4.15] μπορεί να μετασχηματισθεί ως εξής:

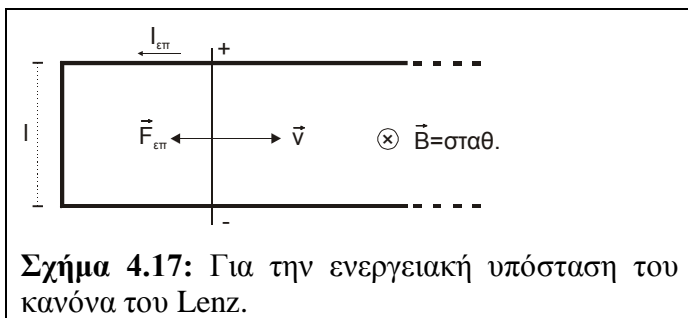


Σχήμα 4.16: Διαγραφόμενη από τον κινούμενο αγωγό επιφάνεια.

$$E_{επ} = vBl = \frac{v=dx/dt}{dt} dx Bl = \frac{dS}{dt} B \Rightarrow E_{επ} = (-) \frac{d\Phi}{dt} \{2\}$$

όπου dS είναι η από τον κινούμενο αγωγό μέσα σε χρόνο dt διαγραφόμενη επιφάνεια και $d\Phi$ η μέσω αυτής διερχόμενη μαγνητική ροή (βλ. σχ.4.16).

Με την σχέση {2} ξαναπαίρνουμε (εκτός του αρνητικού πρόσημου το οποίο ρυθμίζεται από τον κανόνα του Lenz, την σημασία του οποίου θα δούμε ευθύς παρακάτω) την γενική σχέση υπολογισμού της επαγωγικής τάσης ([4.14]).



Σχήμα 4.17: Για την ενεργειακή υπόσταση του κανόνα του Lenz.

Στην περίπτωση που ο κινούμενος αγωγός αποτελεί την κινητή πλευρά ενός ακινήτου πλαισίου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η ΗΕΔ εξ επαγωγής δημιουργεί επαγωγικό ρεύμα έντασεως $I_{επ}$. Η ροή του επαγωγικού ρεύματος έχει σαν αποτέλεσμα την δράση επί του κινουμένου αγωγού δύναμης

$$F_{επ} = I_{επ} Bl \quad \{3\}$$

Στα πλαίσια του κανόνα του Lenz η δύναμη αυτή έχει φορά *αντίθετη* προς την φορά κινήσεως

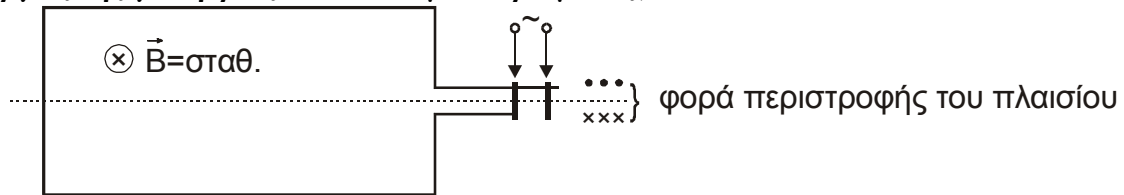
του αγωγού, αντιστέκεται δηλαδή στην κίνηση του αγωγού, η οποία είναι και η γενεσιουργός αιτία της ΗΕΔ εξ επαγωγής και κατά συνέπεια και του επαγωγικού ρεύματος. Ο κανόνας του Lenz είναι απαραίτητος προκειμένου να εξυπηρετηθεί η διατήρηση της ενέργειας:

Συγκεκριμένα, προκειμένου να διατηρηθεί η ταχύτητα του αγωγού σταθερή πρέπει να ασκήσουμε επ' αυτού δύναμη \vec{F} ίση και αντίθετη με την μαγνητική δύναμη $\vec{F}_{επ}$. Η πρώτη δύναμη, θα παράγει έργο ίσο με εκείνο, το οποίο καταναλώνει η δεύτερη. Το έργο αυτό είναι

$$dW = F_{επ} dx = I_{επ} B dx \stackrel{dx=vdt}{=} I_{επ} B v dt \stackrel{[4.15] \rightarrow E_{επ}=Blv}{\Rightarrow} dW = I_{επ} E_{επ} dt \quad \{4\}$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι το έργο της δύναμης \vec{F} , η οποία διατηρεί σταθερή την ταχύτητα του κινούμενου αγωγού, ισούται με την ηλεκτρική ενέργεια του κυκλώματος. Εάν δεν αναπληρώσουμε την κινητική ενέργεια, την οποία καταναλώνει η ανθιστάμενη μαγνητική δύναμη $\vec{F}_{επ}$, η ταχύτητα του αγωγού θα μειώνεται συνεχώς, έως ότου μηδενισθεί. Όλη η κινητική ενέργεια, την οποία κατείχε αρχικά αγωγός, θα έχει τότε μετατραπεί μέσω του έργου της $\vec{F}_{επ}$ σε ηλεκτρική και τελικά σε θερμότητα, μέσω του γνωστού μας φαινομένου Joule.

γ2) Επίπεδο πλαίσιο, περιστρεφόμενο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης \mathbf{B} , γύρω από τον κάθετο προς τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές άξονα του (βλ. σχ. 4.18): (Η εν λόγω διάταξη αποτελεί ουσιαστικά την *αρχή λειτουργίας της γεννήτριας εναλλασσόμενου ρεύματος*).



Σχήμα 4.18: Επίπεδο πλαίσιο περιστρεφόμενο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου.

Η επαγωγική τάση $E_{επ}$, η οποία αναπτύσσεται στα άκρα του πλαισίου, μπορεί και πάλι να εξηγηθεί ως αποτέλεσμα της δράσης της δύναμης Lorentz επί των κινουμένων, ελευθέρων ηλεκτρονίων του πλαισίου. Ο υπολογισμός της είναι όμως πολύ απλούστερος, αν χρησιμοποιηθεί απ' ευθείας ο νόμος του Faraday:

$$E_{επ} = (-) \frac{d\Phi}{dt} \stackrel{B=\text{σταθ.}}{=} (-) \frac{d(BS \cos \theta)}{dt} \stackrel{B \& S = \text{χρονικώς αμετέβλητα}}{=} (-) BS \frac{d \cos \theta}{dt} \stackrel{\theta=\omega t}{=} (-) BS \frac{d \cos \omega t}{dt} = (-) BS (-\omega \sin(\omega t))$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{επ} = BS\omega \sin(\omega t)} \quad [4.16]$$

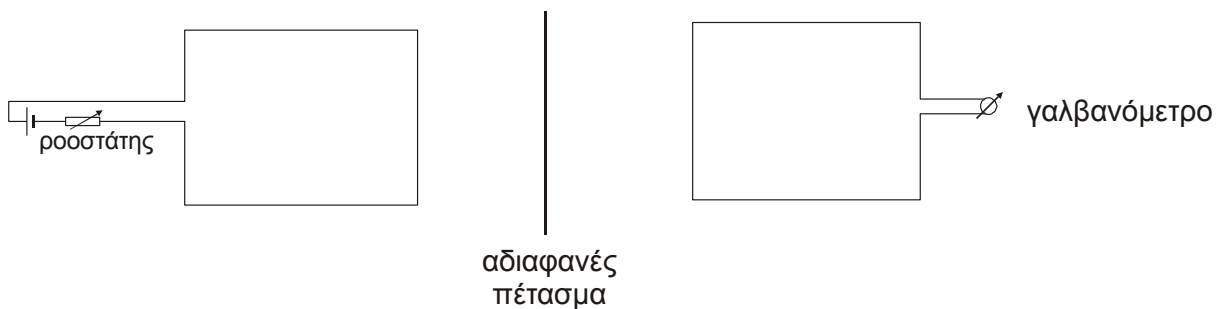
Στην περίπτωση που το πλαίσιο είναι κλειστό, διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα τέτοιας φοράς, ώστε -σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz- να δρα επί του πλαισίου ζεύγος μαγνητικών δυνάμεων, το οποίο αντιστέκεται στην περιστροφή του πλαισίου. (Όποιος έχει κάνει ποδήλατο με δυναμό, ένοιωσε την δράση του ζεύγους αυτού!). Η υπερνίκηση των εν λόγω μαγνητικών δυνάμεων απαιτεί την προσφορά έργου, το οποίο τελικά και μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια. Με άλλα λόγια, οι γεννήτριες ηλεκτρικού ρεύματος δεν «γεννούν» ρεύμα εκ του

μηδενός, αλλά το παράγουν δαπανώντας άλλες μορφές ενέργειας, όπως άλλωστε απαιτεί και η παγκόσμια αρχή διατηρήσεως της ενέργειας.

γ3) Χρονικώς μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία: Στις δύο παραπάνω περιπτώσεις η εμφάνιση επαγωγικής τάσεως ήταν αποτέλεσμα της σχετικής κίνησης μαγνητών και αγωγών. Αυτό όμως δεν σημαίνει, ότι ο αποφασιστικός παράγων είναι η κίνηση, αλλά - όπως μεγαλοφυώς συνειδητοποίησε ο Faraday - η μέσω αυτής προκαλούμενη μεταβολή της μαγνητικής ροής.

Μεταβολή της μαγνητικής ροής μπορούμε να έχουμε κάλλιστα και στην περίπτωση ακινητών αγωγών: αρκεί να μεταβάλλεται χρονικώς το μαγνητικό πεδίο, εντός του οποίου ευρίσκονται. Το παρακάτω παράδειγμα θα μας πείσει εξάλλου, ότι δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ της κατ' αυτόν τον τρόπο προκαλούμενης μεταβολής της μαγνητικής ροής και εκείνης μέσω σχετικής κίνησης:

Ας υποθέσουμε, ότι διαθέτουμε δύο πλαίσια, εκ των οποίων το ένα διαρρέεται από ρεύμα, ενώ το άλλο είναι συνδεδεμένο με ένα γαλβανόμετρο (βλ. σχ. 4.19). Μεταξύ των δύο πλαισίων παρεμβάλλεται αδιαφανές υφασμάτινο πέτασμα, έτσι ώστε έκαστο των πλαισίων να μην μπορεί να «δευ», τι κάνει το άλλο. Μεταβάλλουμε τώρα την μέσω του πλαισίου 2 διερχόμενη μαγνητική ροή μετακινώντας το πλαίσιο 1, οπότε το γαλβανόμετρο μας δείχνει την διέλευση (του επαγωγικού) ρεύματος, το οποίο οφείλεται στην εμφάνιση της επαγωγικής τάσεως. Στην συνέχεια επαναφέρουμε το πλαίσιο 1 στην αρχική του θέση και - χωρίς να το μετακινούμε - μεταβάλλουμε μέσω του ροοστάτη την ένταση του ρεύματος κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η μέσω του πλαισίου 2 διερχόμενη μαγνητική ροή να μεταβάλλεται με τον ίδιο ακριβώς ρυθμό, όπως και προηγουμένως. Όπως είναι προφανές, το πλαίσιο 2 δεν μπορεί να αντιληφθεί, αν η εν λόγω μεταβολή της μαγνητικής ροής οφείλεται στην κίνηση του πλαισίου 1 ή στην μεταβολή του αυτό διαρρέοντος ρεύματος. Έτσι στα άκρα του αναπτύσσεται η ίδια επαγωγική τάση, όπως και προηγουμένως, πράγμα το οποίο επιβεβαιώνει το ρεύμα, το οποίο μας δείχνει το γαλβανόμετρο.



Σχήμα 4.19: Για την κατάδειξη της καθοριστικής σημασίας του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής στο φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό, ότι

επαγωγική ΗΕΔ εμφανίζεται σαν συνέχεια της μεταβολής της μαγνητικής ροής, άσχετα με το αίτιο που την προκαλεί.

Ενώ τώρα στην περίπτωση που η μαγνητική ροή μεταβάλλεται εξ αιτίας της σχετικής κίνησης αγωγών και μαγνητών, η εναγόμενη ΗΕΔ μπορεί να ερμηνευτεί ως το μακροσκοπικό αποτέλεσμα της δράσης της δυνάμεως Lorentz επί των ελευθέρων ηλεκτρονίων, η εμφάνιση

της στην περίπτωση ακινησίας, λόγω μεταβολής του μαγνητικού πεδίου, μας αναγκάζει να δεχτούμε την εμφάνιση (εξ επαγωγής) ηλεκτρικού πεδίου έντασης \vec{E} :

Γύρω από κάθε χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο επάγεται ένα ηλεκτρικό πεδίο.

Το επαγόμενο αυτό ηλεκτρικό πεδίο διαφέρει σημαντικά από τα γνωστά μας ηλεκτροστατικά πεδία. Η γενεσιουργός του αιτία δεν είναι κάποια φορτία αλλά κάποιο μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Εξ αιτίας της ιδιαιτερότητας αυτής

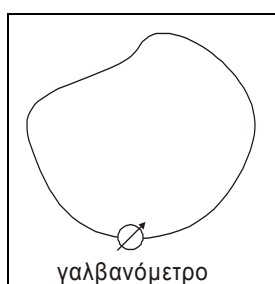
τα επαγόμενα ηλεκτρικά πεδία είναι πεδία μη συντηρητικά και έχουν κλειστές δυναμικές γραμμές,

ενώ τα ηλεκτροστατικά πεδία είναι, όπως είδαμε, πεδία συντηρητικά και οι δυναμικές τους γραμμές πηγάζουν από θετικά και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία.

Η επαγωγή ηλεκτρικού πεδίου γύρω από ένα χρονικώς μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο βρίσκεται **σημαντικότερη εφαρμογή** στον τομέα των επιταχυντών στοιχειωδών σωματιδίων και συγκεκριμένα ηλεκτρονίων σε πολύ υψηλές ταχύτητες ($\geq 0,999986c$, όπου c η ταχύτητα του φωτός). Ο προς τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμενος επιταχυντής καλείται **βήτατρο**, επειδή τα ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια καλούνται -για ιστορικούς λόγους- και **σωματίδια βήτα**. Τα ηλεκτρόνια υψηλής (κινητικής) ενέργειας χρησιμοποιούνται κυρίως για την παραγωγή λίαν διεισδυτικών (υψηλοσύχων) ακτινών X, οι οποίες χρησιμοποιούνται τόσο στην Ιατρική (ακτινοθεραπεία) όσο και στην Βιομηχανία.

Ο νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday είναι τόσο σημαντικός, ώστε (ελαφρώς γενικευμένος από τον Maxwell) αποτελεί μια από τις τέσσερις θεμελιώδεις εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού.

4.5.1 Ο νόμος της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής ως μία από τις εξισώσεις του Maxwell (μ.ο.γ.ε!)



Σχήμα 4.20:
Κλειστός βρόγχος εντός χρονικώς μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου.

Ας θεωρήσουμε έναν κλειστό αγωγίμο βρόγχο τυχαίου σχήματος, ο οποίος ευρίσκεται εντός ενός χρονικώς μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου. Ακόμη και αν ο βρόγχος είναι ακίνητος (σε σχέση προς το μαγνητικό πεδίο) θα παρατηρήσουμε (π.χ. με την βοήθεια γαλβανόμετρου, βλ. σχ. 4.20), ότι διαρρέεται από ρεύμα. Αυτό σημαίνει, ότι στα «άκρα» του εμφανίζεται ΗΕΔ εξ επαγωγής, η οποία σύμφωνα με τον νόμο του Faraday είναι:

$$E_{\text{επ}} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \{1\}$$

Στην παραπάνω σχέση το Φ παριστάνει την μέσω του βρόγχου διερχόμενη μαγνητική ροή, η οποία θα δίδεται από την σχέση [4.3]:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \{2\}$$

Η μεταβολή $d\Phi / dt$ της μαγνητικής ροής οφείλεται στην συγκεκριμένη περίπτωση στην χρο-

νική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου \vec{B} :

$$d\Phi / dt = d\left(\oint \vec{B} d\vec{S}\right) / dt \stackrel{\text{εδώ}}{=} \oint (\partial \vec{B} / \partial t) d\vec{S} \quad \{3\}.$$

Η μετακίνηση των φορέων φορτίου εντός του αγώγιμου βρόγχου οφείλεται, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στην δράση ενός εξ επαγωγής εμφανιζομένου ηλεκτρικού πεδίου έντασης \vec{E} . Το πεδίο αυτό προσφέρει κατά τα γνωστά ανά μονάδα φορτίου έργο ίσο με $\int \vec{E} d\vec{l}$. Το έργο αυτό έχει εξ ορισμού διαστάσεις ΗΕΔ, και για κάθε κλειστή διαδρομή είναι ίσο με $\oint \vec{E} d\vec{l}$. Το ολοκλήρωμα αυτό όχι μόνο δεν είναι ίσο με μηδέν, όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου λόγω της συντηρητικότητάς του, αλλά ισούται σύμφωνα με τον νόμο του Faraday {1} με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής μέσω του βρόγχου. Παίρνοντας λοιπόν υπόψη και την εξίσωση {3} γράφουμε:

$$E_{\text{επ}} = \oint \vec{E} d\vec{l} = -\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad \{4\}$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω σχέση δίδει την **ΗΕΔ εξ επαγωγής στα άκρα ακινήτου βρόγχου**, ο οποίος ευρίσκεται **εντός χρονικώς μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου**.

Προκειμένου να γενικεύσουμε την σχέση {4} και για την περίπτωση κινουμένου (σε σχέση πάντα προς το μαγνητικό πεδίο) βρόγχου, θεωρούμε κατ' αρχήν την περίπτωση ευθυγράμμου αγωγού, ο οποίος κινείται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου (βλ. 4.6.γ1). Όπως είδαμε, η εμφάνιση ΗΕΔ εξ επαγωγής στα άκρα του εν λόγω αγωγού αποδίδεται στην δράση της δύναμης Lorentz $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ επί των κινουμένων ελευθέρων ηλεκτρονίων του αγωγού. Η δράση της δύναμews αυτής είναι προφανώς ισοδύναμη με την εμφάνιση ηλεκτρικού πεδίου εντάσεως $\vec{E} = \vec{F}_L / q = [\vec{v} \times \vec{B}]$ στο εσωτερικό του κινουμένου αγωγού. Το ηλεκτρικό αυτό πεδίο προσφέρει σε οιονδήποτε φορέα φορτίου μετακινηθεί κάτω από την δράση του έργο $W = q \int_0^l \vec{E} d\vec{l}$, όπου l το μήκος του ευθυγράμμου αγωγού, το οποίο είναι και το μήκος κατά το οποίο και δρα το εξ επαγωγής ηλεκτρικό πεδίο. Το έργο αυτό, ανά μονάδα φορτίου αναγόμε- νο, έχει διαστάσεις ΗΕΔ, η οποία δεν είναι άλλη από την γνωστή μας (βλ. 4.6.γ1) **ΗΕΔ εξ επαγωγής**:

$$E_{\text{επ}} = \frac{W}{q} = \int_0^l \vec{E} d\vec{l} = \int_0^l [\vec{v} \times \vec{B}] d\vec{l} \quad \{5\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \vec{v} = \text{σταθ.} \\ \vec{B} = \text{ομογενές} \\ = vB \sin \theta, \text{ όπου } \theta \text{ η γωνία μεταξύ } \vec{v} \text{ και } \vec{B}. \\ \left(\text{Ξαναπαίρνουμε δηλαδή την σχέση [4.15].} \right) \end{array} \right)$$

Η σχέση {5} ισχύει ακόμη και στην περίπτωση αγωγού τυχαίου σχήματος, κινουμένου εντός χρονικώς αμετάβλητου, μη ομογενούς μαγνητικού πεδίου, όπως προκύπτει από το ακόλουθο σκεπτικό:

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον αγωγό αποτελούμενο από απειροστά (και άρα ευθύγραμμα) τμήματα $d\vec{l}$, στα άκρα έκαστου των οποίων εμφανίζεται η στοιχειώδης

ΗΕΔ $dE_{επ} = \vec{E}d\vec{l} = [\vec{v} \times \vec{B}]d\vec{l}$, όπου \vec{E} είναι η ένταση του εξ επαγωγής ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του συγκεκριμένου στοιχείου $d\vec{l}$, \vec{v} η ταχύτητα του στοιχείου και \vec{B} το μαγνητικό πεδίο στην θέση του συγκεκριμένου στοιχείου. Η ΗΕΔ στα άκρα του αγωγού συνολικά, θα υπολογίζεται προσθέτοντας (\rightarrow ολοκληρώνοντας) τις στοιχειώδεις ΗΕΔs κατά μήκος του αγωγού:

$$E_{επ} = \int dE_{επ} = \int_0^l \vec{E}d\vec{l} = \int_0^l [\vec{v} \times \vec{B}]d\vec{l} \quad \{6\}$$

Σημειώνουμε, ότι η παραπάνω σχέση δίδει την **ΗΕΔ εξ επαγωγής στα άκρα** (ανοιχτού) **αγωγού, τυχαίου σχήματος, κινούμενου εντός μη ομογενούς, χρονικώς αμετάβλητου μαγνητικού πεδίου**. Η σχέση δε αυτή θα ισχύει ακόμη και στην ακραία περίπτωση που τα άκρα του αγωγού συμπίπτουν, όταν δηλαδή ο αγωγός είναι ένας κλειστός βρόγχος:

$$E_{επ} = \oint dE_{επ} = \oint \vec{E}d\vec{l} = \oint [\vec{v} \times \vec{B}]d\vec{l} \quad \{7\}$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει λοιπόν να υπολογίζουμε την **ΗΕΔ εξ επαγωγής στα «άκρα» κινούμενου βρόγχου, εντός χρονικώς αμετάβλητου μαγνητικού πεδίου**.

Στην γενική περίπτωση κατά την οποία έχουμε και **χρονικώς μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο**, θα πρέπει να προσθέσουμε τις κατά τις σχέσεις {7} και {4} επαγόμενες ΗΕΔs:

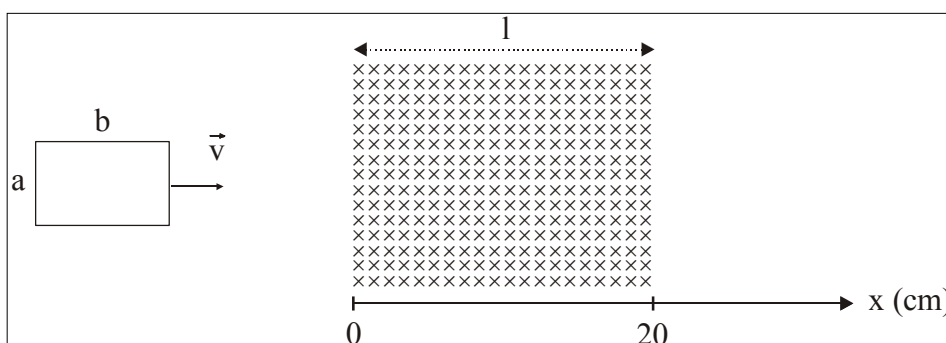
$$E_{επ} = \oint \vec{E}d\vec{l} = -\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \oint [\vec{v} \times \vec{B}]d\vec{l} \Rightarrow \oint \vec{E}d\vec{l} - \oint [\vec{v} \times \vec{B}]d\vec{l} = -\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint (\vec{E} - [\vec{v} \times \vec{B}])d\vec{l} = -\oint \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}} \quad [4.17]$$

Η σχέση αυτή, η οποία αποτελεί ουσιαστικά την επαναδιατύπωση του νόμου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday, είναι μια από τις θεμελιώδεις εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού: **η δεύτερη από τις εξισώσεις του Maxwell**. Σημειωτέον ότι \vec{E} είναι η ένταση του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου για έναν με την ταχύτητα \vec{v} ως προς το μαγνητικό πεδίο \vec{B} κινούμενο παρατηρητή.

Παράδειγματα

Παράδειγμα 4.6.1: Ορθογώνιο πλαίσιο, κινούμενο με σταθερή ταχύτητα v εισέρχεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης B , το οποίο εκτείνεται εντός τετραγωνικής περιοχής πλευράς l . Οι πλευρές του πλαισίου είναι a και b (μικρότερα l). Ζητείται ο προσδιορισμός της μέσω του πλαισίου διερχόμενης μαγνητικής ροής καθώς και της επαγόμενης ΗΕΔ, και η γραφική παράσταση των δύο αυτών μεγεθών συναρτήσει της θέσεως του πλαισίου θεωρώντας ότι $l=20\text{cm}$, $a=2\text{cm}$, $b=3\text{cm}$, $B=1,5\text{T}$ και $v=2\text{m/s}$.



Λύση:

Παίρνοντας υπό-

ψη ότι το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές και πάντα κάθετο προς το πλαίσιο, έχουμε για την μέσω αυτού διερχόμενη μαγνητική ροή Φ :

$$\Phi = BS = Bac \quad \{1\}$$

όπου c το εντός του μαγνητικού πεδίου ευρισκόμενο τμήμα της πλευράς b (βλ. σχήμα) του πλαισίου.

Σύμφωνα με την σχέση $\{1\}$ και τα δεδομένα του προβλήματος, η μέσω του πλαισίου διερχόμενη μαγνητική ροή παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

$\Phi =$	$\mathbf{0}$ όταν $c=0$ δηλαδή το πλαίσιο βρίσκεται εκτός μαγνητικού πεδίου: $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ και $\mathbf{x} \geq (\mathbf{l} + \mathbf{b})$
	$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ όταν ολόκληρο το πλαίσιο βρίσκεται εντός του πεδίου: $\mathbf{b} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{l}$
	$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ κατά την είσοδο: $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
	$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} [\mathbf{b} - (\mathbf{x} - \mathbf{l})]$ κατά την έξοδο: $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq (\mathbf{l} + \mathbf{b})$

Σημειωτέον ότι το x παριστάνει την συντεταγμένη της *μετωπικής* πλευράς του πλαισίου. (Για τους πολύ σχολαστικούς και προς αποφυγή παρεξηγήσεων λόγω του υποτιθέμενου αμελητέου πάχους των πλευρών του πλαισίου, όταν το $x=0$ θεωρούμε ότι το πλαίσιο βρίσκεται ακόμη εκτός του μαγνητικού πεδίου).

Η επαγόμενη ΗΕΔ θα παίρνει επομένως (σύμφωνα με τον νόμο [4.14] του Faraday: $E_{επ} = -d\Phi / dt$) τις ακόλουθες τιμές:

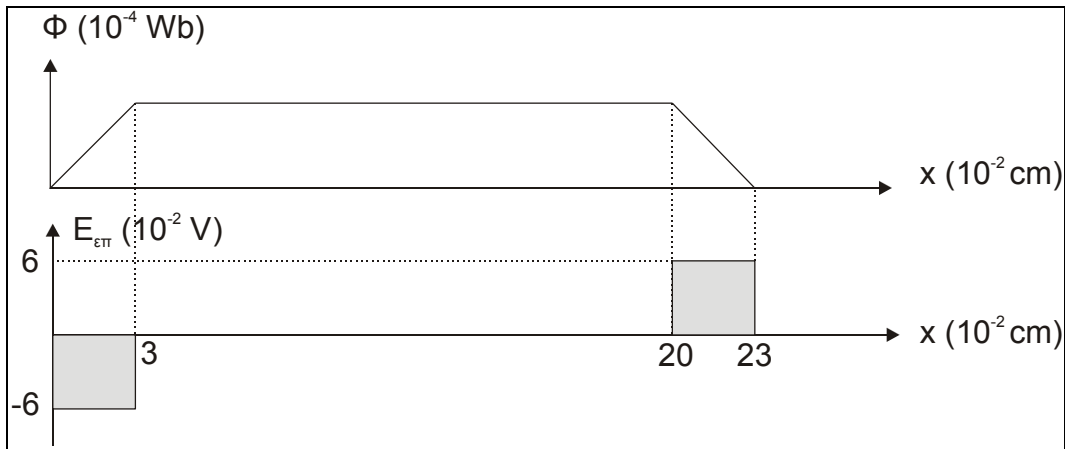
$E_{επ} =$	$\mathbf{0}$ όταν $c=0$ δηλαδή το πλαίσιο βρίσκεται εκτός μαγνητικού πεδίου: $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ και $\mathbf{x} > (\mathbf{l} + \mathbf{b})$
	$\mathbf{0}$ όταν ολόκληρο το πλαίσιο βρίσκεται εντός του πεδίου: $\mathbf{b} < \mathbf{x} \leq \mathbf{l}$
	$-\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} (dx/dt) = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ κατά την είσοδο: $\mathbf{0} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
	$-\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} \cdot d[\mathbf{b} - (\mathbf{x} - \mathbf{l})]/dt = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ κατά την έξοδο: $\mathbf{l} < \mathbf{x} \leq (\mathbf{l} + \mathbf{b})$

Αν αντικαταστήσουμε τα αριθμητικά δεδομένα στις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$\Phi =$	$\mathbf{0}$ όταν $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ και $\mathbf{x} \geq \mathbf{23\ cm}$
	$1,5\text{T} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 3 \cdot 10^{-12}\ \text{m} = \mathbf{9 \cdot 10^{-4}\ Wb}$ όταν $\mathbf{3 \cdot 10^{-12}\ m} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{20 \cdot 10^{-12}\ m}$
	$1,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{3 \cdot 10^{-2} \cdot x\ Wb}$ κατά την είσοδο: $\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{3 \cdot 10^{-12}\ m}$
	$1,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} [3 \cdot 10^{-2} - (\mathbf{x} - \mathbf{20 \cdot 10^{-12}})]$ κατά την έξοδο: $\mathbf{20 \cdot 10^{-12}\ m} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{23 \cdot 10^{-12}\ m}$

$E_{επ} =$	$\mathbf{0}$ όταν $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ και $\mathbf{x} > \mathbf{23\ cm}$
	$\mathbf{0}$ όταν $\mathbf{3 \cdot 10^{-12}\ m} < \mathbf{x} \leq \mathbf{20 \cdot 10^{-12}\ m}$
	$-1,5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2\text{m/s} = -\mathbf{6 \cdot 10^{-2}\ V}$ κατά την είσοδο: $\mathbf{0} < \mathbf{x} \leq \mathbf{3 \cdot 10^{-12}\ m}$
	$+\mathbf{6 \cdot 10^{-2}\ V}$ κατά την έξοδο: $\mathbf{20 \cdot 10^{-12}\ m} < \mathbf{x} \leq \mathbf{23 \cdot 10^{-12}\ m}$

Η μεταβολή της ροής και της επαγόμενης ΗΕΔ συναρτήσει της βάσεως του πλαισίου αποδίδονται γραφικά στο ακόλουθο διάγραμμα



Παράδειγμα 4.6.2: Σωληνοειδές με 2000 σπείρες ακτίνας 0,1 m στρέφεται γύρω από άξονα κάθετο προς τις δυναμικές γραμμές του γήινου μαγνητικού πεδίου με συχνότητα 30 Hz. Ζητείται η μέγιστη επαγόμενη ΗΕΔ, αν η ένταση του πεδίου ισούται με $5 \cdot 10^{-5}$ T.

Λύση:

Η στα άκρα του σωληνοειδούς επαγόμενη ΗΕΔ δίδεται από την σχέση [4.16]:

$$E_{\varepsilon\pi} = NBS\omega \sin(\omega t) \quad \{1\}.$$

N είναι ο αριθμός των σπειρών του σωληνοειδούς, με τον οποίο και πολλαπλασιάσαμε την σχέση [4.16], λόγω του ότι είχε υπολογισθεί, για μια σπείρα.

Σύμφωνα με την σχέση {1} η μέγιστη τιμή της $E_{\varepsilon\pi}$ θα αναπτύσσεται, όταν $\sin(\omega t) = 1$ και θα είναι:

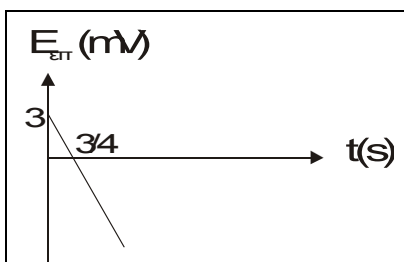
$$E_{\varepsilon\pi}^{\max} = NBS\omega = NB(\pi r^2) 2\pi\nu = 2000 \cdot 5 \cdot 10^{-5} (3,14 \cdot 0,1^2) 2 \cdot 3,14 \cdot 30 \Rightarrow E_{\varepsilon\pi}^{\max} = 0,59V$$

Παράδειγμα 4.6.3: Η μαγνητική ροή μέσω του πλαισίου, το οποίο εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση: $\Phi = 2t^2 - 3t + 3mWb$ {1}. Ζητείται η γραφική παράσταση της επαγόμενης ΗΕΔ συναρτήσει του χρόνου.

Λύση:

Η ΗΕΔ δίδεται από το νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday:

$$E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(2t^2 - 3t + 3) = -(2 \cdot 2t - 3) \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = -4t + 3mV$$



Η εξάρτηση της ΗΕΔ από τον χρόνο αποδίδεται γραφικά στο διπλανό διάγραμμα:

Σημειώνουμε, ότι το επαγωγικό ρεύμα θα διαρρέει το πλαίσιο αντίστροφα προς την φορά των δεικτών του ρολογιού, προσπαθώντας σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz να αναιρέσει το αίτιο που το προκαλεί.

4.5.2 Εφαρμογές του φαινομένου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής

Το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής βρίσκει ευρύτατες εφαρμογές στην τεχνολογία, οι σπουδαιότερες από τις οποίες περιγράφονται εν συντομία στην συνέχεια.

α) Δινορρεύματα: Τα μέσω ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής στο εσωτερικό συμπαγών αγωγών εμφανιζόμενα ρεύματα, καλούνται *ρεύματα Foucault ή δινορρεύματα*, το τελευταίο επειδή συχνά είναι κυκλικά. Η φορά τους προσδιορίζεται από τον κανόνα του Lenz. Η εμφάνιση των δινορρευμάτων συνεπάγεται την μετατροπή ενέργειας σε θερμότητα μέσω του φαινομένου Joule. Η εν λόγω ενέργεια προέρχεται είτε από την μηχανική ενέργεια, η οποία δαπανάται για την κίνηση του αγωγού, είτε - στην περίπτωση ακινήτων αγωγών εντός χρονικώς μεταβαλλόμενων μαγνητικών πεδίων - από την ηλεκτρική, η οποία απαιτείται για την δημιουργία των χρονικώς μεταβαλλόμενων μαγνητικών πεδίων. Στην δεύτερη περίπτωση η παραγόμενη θερμική ισχύς είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της συχνότητας του μαγνητικού πεδίου. Για τον λόγο αυτό στους λεγόμενους *ηλεκτρομαγνητικούς φούρνους* χρησιμοποιούνται για την δημιουργία του μαγνητικού πεδίου υψηλόσυχα ρεύματα, ώστε να παράγεται μεγάλη θερμική ισχύς.

Προκειμένου να περιοριστούν οι ενεργειακές απώλειες μέσω δινορρευμάτων κατασκευάζουμε τα μαγνητιζόμενα στοιχεία των διαφόρων συσκευών (π.χ. τους πυρήνες των μετασχηματιστών) *φυλλωτά* και διατάσσουμε τα μεμονωμένα φύλλα *παράλληλα* προς τις μαγνητικές γραμμές.

β) Δυναμικά μικρόφωνα: Χρησιμοποιούνται για την μετατροπή ηχητικών ταλαντώσεων (ήχων) σε ηλεκτρικές. Αυτό επιτυγχάνεται π.χ. με την βοήθεια λεπτού ταινιωτού αγωγού, ο οποίος ταλαντώνεται κάτω από την επίδραση της πίεσης των ηχητικών κυμάτων μεταξύ των πόλων ενός μονίμου μαγνήτη. Έτσι η επαγομένη ΗΕΔ μεταβάλλεται στον ρυθμό του ήχου.

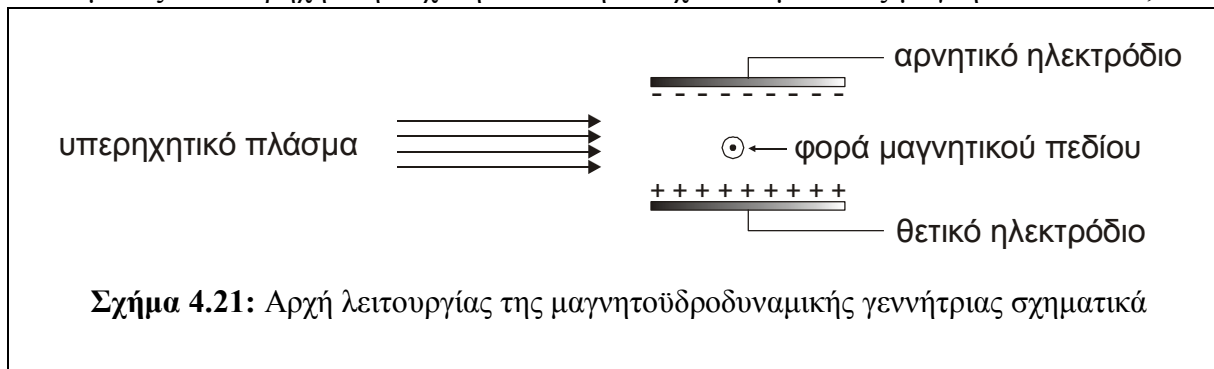
γ) Ηλεκτρομαγνητικοί μεταποιητές: Χρησιμοποιούνται για την μετατροπή μηχανικών μεγεθών, (π.χ. δυνάμεων, ταχυτήτων, επιταχύνσεων) σε ηλεκτρικές τάσεις. Η λειτουργία τους είναι παρόμοια με εκείνη των δυναμικών μικροφώνων: κάτω από την επίδραση του προς μέτρηση μηχανικού μεγέθους έχουμε την μετακίνηση ενός αγωγού (συνήθως πρόκειται για σωληνοειδές προς αύξηση της ευαισθησίας) εντός στατικού μαγνητικού πεδίου, οπότε στα άκρα του εμφανίζεται ΗΕΔ εξ επαγωγής, η τιμή της οποίας είναι ανάλογη προς το μηχανικό μέγεθος.

δ) Μαγνητοϋδροδυναμικά φαινόμενα: Το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής εμφανίζεται φυσικά και στην περίπτωση ρευστών αγωγών, δηλαδή στην περίπτωση αγωγίμων υγρών και αερίων, και επηρεάζει σημαντικά τα χαρακτηριστικά ροής και τις επιμέρους ιδιότητές τους. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση πολλών και σπουδαίων φαινομένων, με την μελέτη των οποίων ασχολείται ένας ιδιαίτερος επιστημονικός κλάδος, η *Μαγνητοϋδροδυναμική*. Για παράδειγμα, η ροή ενός αγωγίμου υγρού εντός μαγνητικού πεδίου εγείρει την δράση της δύναμης Lorentz επί των κινουμένων ιόντων με αποτέλεσμα την αύξηση του συντελεστού ιξώδους του υγρού. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται την αύξηση της απαιτούμενης βαθμίδας πίεσεως για την διατήρηση της ροής.

Εξάλλου η διάδοση του ήχου εντός ακινήτων ρευστών, διαρρεομένων από ρεύμα και ευρισκομένων εντός μαγνητικού πεδίου, γίνεται αρκετά πολύπλοκη, λόγω του γεγονότος ότι στην ήδη επικρατούσα υδροστατική πίεση προστίθεται και η πίεση, η οποία δημιουργείται από την δύναμη Lorentz.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η μελέτη της συμπεριφορά του εντός μαγνητικού πεδίου ευρισκομένου πλάσματος (Ως **πλάσμα** χαρακτηρίζεται η κατάσταση εκείνη της ύλης, η οποία προκύπτει αν θερμάνουμε ένα αέριο σε τόσο υψηλές θερμοκρασίες, ώστε να ιονισθεί μέρος των ατόμων του. Ανάλογα δε με το βαθμό ιονισμού διακρίνουμε **ασθενώς, μετρίως και ολικώς ιονισμένο πλάσμα**, όταν ο βαθμός ιονισμού είναι μικρότερος του 1%, όταν ανέρχεται σε μερικά %, και όταν πλησιάζει το 100% αντιστοίχως.).

Στο φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής στην περίπτωση ταχέως κινουμένου πλάσματος στηρίζεται η λειτουργία της λεγόμενης **μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD) γεννήτριας ηλεκτρικής ενέργειας**. Με την βοήθεια καταλλήλου ακροφυσίου επιταχύνουμε δέσμη πλάσματος σε υπερηχητική ταχύτητα και την διοχετεύουμε εντός μαγνητικού πεδίου, το ο-



ποίο δημιουργείται με την βοήθεια υπεραγώγιμων ηλεκτρομαγνητών, προκειμένου να έχει μεγάλη ένταση. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετη προς την διεύθυνση ροής (βλ. σχ. 4.21). Παράλληλα δε προς το επίπεδο τους τοποθετείται ζεύγος ηλεκτροδίων, προς τα οποία και εκτρέπονται τα ηλεκτρόνια και θετικά ιόντα του πλάσματος, τα μεν πρώτα προς το επάνω τα δε δεύτερα προς το κάτω ηλεκτρόδιο, εξ αιτίας της δύναμης Lorentz.

Μέσω της MHD - γεννήτριας έχουμε απ' ευθείας μετατροπή κινητικής σε ηλεκτρική ενέργεια, χωρίς την χρήση κινουμένων μηχανικών μερών, όπως συμβαίνει στις συμβατικές ηλεκτρογεννήτριες (βλ. στην συνέχεια). Για θερμοκρασίες περί τους 3000 K ο βαθμός αποδόσεως της MHD - γεννήτριας ανέρχεται σε 0.5 ~ 0,6, είναι δηλαδή ιδιαίτερα υψηλός.

Σημειωτέον ότι η αρχή λειτουργίας της MHD - γεννήτριας βρίσκει εφαρμογή και στην μέτρηση της **ταχύτητας ροής** του πλάσματος και αγωγίμων ρευστών γενικώς.

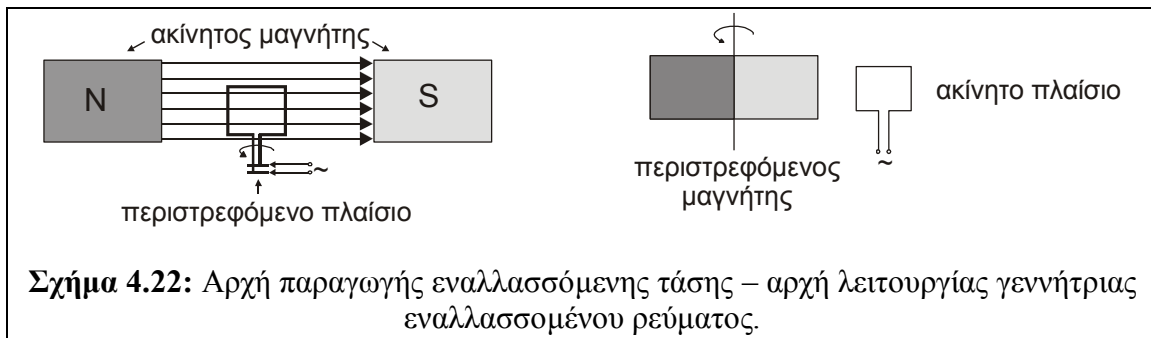
Η λειτουργία της MHD - γεννήτριας μπορεί να αντιστραφεί: Εφαρμόζοντας μια συνεχή τάση επί των ηλεκτροδίων, αντιθέτου πόλωσης με πριν, προκαλούμε εντός του πλάσματος ένα κάθετο προς την διεύθυνση ροής ρεύμα, αντιθέτου φοράς από εκείνο στην MHD - γεννήτρια. Το ρεύμα αυτό εγείρει την δράση δύναμης Lorentz, η οποία επιταχύνει τα φορτισμένα σωματίδια του πλάσματος σε ταχύτητες πολύ μεγαλύτερες από την αρχική. Με τον τρόπο αυτό πετυχαίνουμε ταχύτητες σωματιδίων σημαντικά μεγαλύτερες από εκείνες μέσω καύσεως στους πυραυλοκινητήρες, ανοίγοντας έτσι νέες προοπτικές στην **κίνηση διαστημοπλοίων**.

ε) Γεννήτριες εναλλασσόμενου και συνεχούς ρεύματος: Αποτελούν την πιο διαδεδομένη και προς στιγμήν σημαντικότερη εφαρμογή του φαινομένου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, μια και με την βοήθειά τους παράγεται το σύνολο σχεδόν της ηλεκτρικής ενέργειας σε παγκόσμια κλίμακα. Η αντιστροφή εξάλλου της λειτουργίας τους αντιστοιχεί σ' εκείνη του **ηλεκτροκινητήρα**. Ας πάρουμε όμως τα πράγματα με την σειρά.

Εναλλασσόμενη καλείται η **τάση**, της οποίας η τιμή και φορά (δηλ. το πρόσημο) είναι

περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Η εναλλασσόμενη δε τάση της οποίας η τιμή είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου καλείται **αρμονική**.

Η παραγωγή εναλλασσόμενης τάσης στηρίζεται στο φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής: Αν η μαγνητική ροή, η οποία διαρρέει βρόγχο ή σωληνοειδές μεταβάλλεται περιοδικά με τον χρόνο, τότε και η επαγόμενη ΗΕΔ (τάση) θα είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου, χωρίς βέβαια οι δύο συναρτήσεις να έχουν την ίδια ακριβώς χρονική εξάρτηση. Την περιοδική μεταβολή της μαγνητικής ροής για συχνότητες μικρότερες του ενός kHz μπορούμε να την πετύχουμε με τους δύο τρόπους, οι οποίοι αποδίδονται παρακάτω σχηματικά.



Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις επάγεται *εναλλασσόμενη τάση*, εφόσον η γωνιακή ταχύτητα είναι *περιοδική* συνάρτηση του χρόνου. Στην ειδική δε περίπτωση που η **γωνιακή ταχύτητα** είναι **σταθερή**, η εναλλασσόμενη τάση είναι **αρμονική**, όπως θα δούμε ευθύς αμέσως για την περίπτωση περιστρεφόμενου πλαισίου εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου:

Η ροή Φ μέσω του πλαισίου δίδεται από την σχέση $\Phi = BS \cos \varphi$ {1},

όπου S το εμβαδόν του πλαισίου και φ η γωνία ανάμεσα στην ένταση του μαγνητικού πεδίου και την κάθετη επί του πλαισίου.

Αν το πλαίσιο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , έτσι ώστε η κάθετη επί του πλαισίου να διαγράφει εντός χρόνου t γωνία φ , θα ισχύει η σχέση $\omega = \varphi/t$ {2},

Αντικαθιστώντας την {2} στην {1} παίρνουμε για την μαγνητική ροή Φ την ακόλουθη έκφραση:

$$\Phi = BS \cos \omega t \quad \{3\}$$

Η επαγωγική τάση u στα άκρα του πλαισίου θα είναι σύμφωνα με τον νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής [4.14]:

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[BS \cos \omega t] = -[-\omega BS \sin \omega t] \Rightarrow \boxed{u = U_0 \sin \omega t} : \text{αρμονική τάση} \quad [4.18]$$

όπου $U_0 = \text{πλάτος τάσεως}$

$$\omega t = \text{φάση}$$

$$\omega = \text{κυκλική συχνότητα (της αρμονικής τάσεως)}$$

Πολλές φορές αντί της κυκλικής συχνότητας ω προτιμάται η **συχνότητα ν** ή η **περίοδος T** . Μεταξύ των τριών αυτών μεγεθών ισχύουν οι γνωστές σχέσεις: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T$ {4}, με την βοήθεια των οποίων παίρνουμε τις ισοδύναμες με την [4.18] εκφράσεις

$$u = U_0 \sin(2\pi vt) = U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad [4.18\alpha]$$

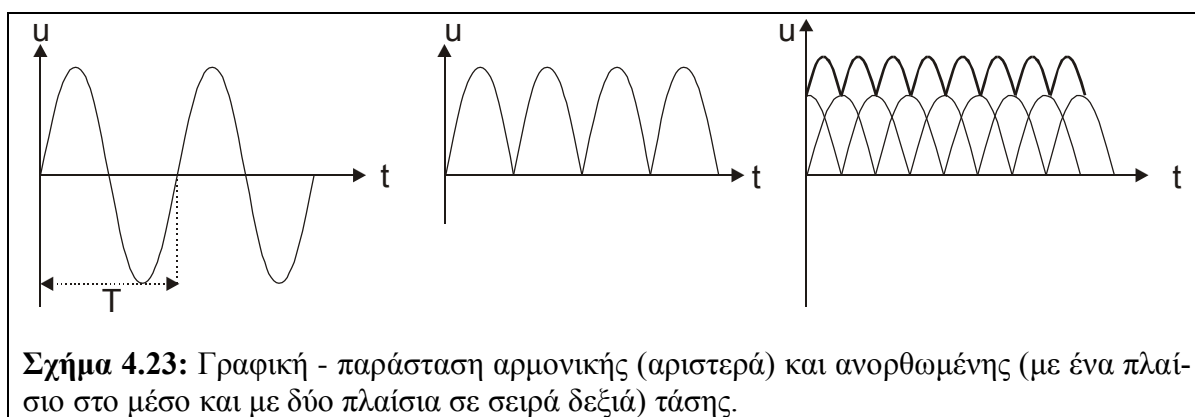
Ξαναθυμίζουμε, ότι

η συχνότητα ισούται με τον αριθμό των περιστροφών του πλαισίου στην μονάδα του χρόνου.

η περίοδος ισούται με τον χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση μιας πλήρους περιστροφής.

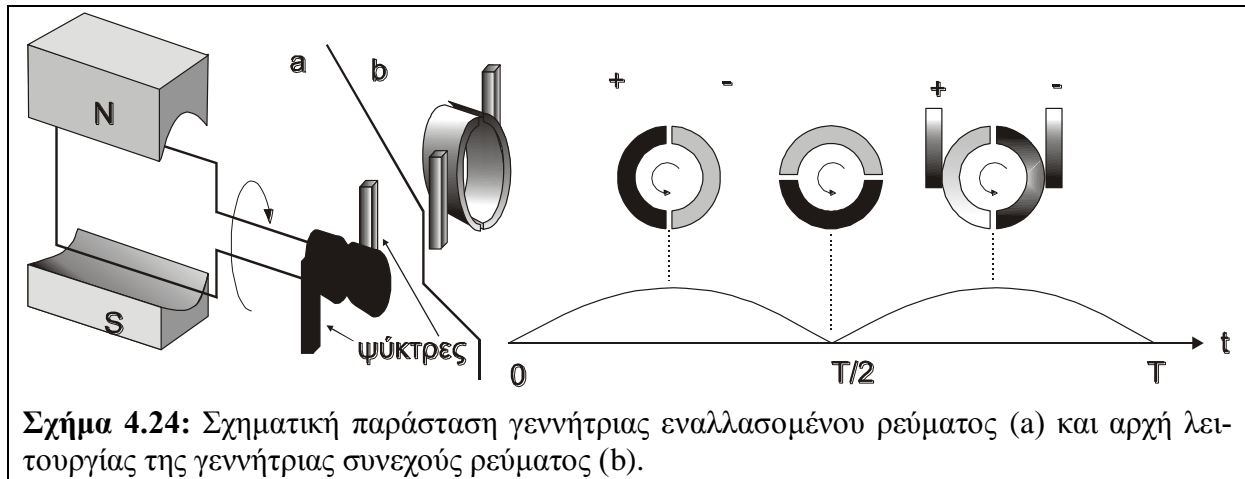
Σημειωτέον, ότι τα ευρωπαϊκά δίκτυα εναλλασσομένου ρεύματος έχουν συχνότητα 50 Hz (άρα περίοδο 0.02 s) ενώ τα αμερικανικά 60 Hz.

Στο σχήμα 4.23 αποδίδεται γραφικά το λεγόμενο *χρονοδιάγραμμα* της αρμονικής τάσης, δηλαδή η γραφική της παράσταση συναρτήσεως του χρόνου.



Σχήμα 4.23: Γραφική - παράσταση αρμονικής (αριστερά) και ανορθωμένης (με ένα πλαίσιο στο μέσο και με δύο πλαίσια σε σειρά δεξιά) τάσης.

Τα άκρα του περιστρεφόμενου πλαισίου (ή σωληνοειδούς) μιας γεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος καταλήγουν σε δύο μαζί με το πλαίσιο περιστρεφόμενους δακτυλίους (βλ. σχ. 4.24a). Επί των δακτυλίων εφάπτονται δύο κατάλληλα διαμορφωμένα τεμάχια (συνήθως από άνθρακα), τα οποία καλούνται *ψηήκτρες*, και τα οποία συνδέονται με το εξωτερικό κύκλωμα, το οποίο τροφοδοτεί η γεννήτρια. Αν οι δύο αυτοί δακτύλιοι αντικατασταθούν με δύο μονωμένους μεταξύ τους ημιδακτυλίους (βλ. σχ. 4.24b), τότε η παρά των ψηκτρών παραλαμβανόμενη τάση παύει να είναι εναλλασσόμενη, και μετατρέπεται σε *παλλόμενη «συνεχή»*, η μορφή της οποίας φαίνεται στο μέσον του σχήματος 4.23. **Η ανόρθωση** αυτή της εναλλασσόμενης τάσης οφείλεται στο γεγονός, ότι η πόλωση έκαστου ημιδακτυλίου αλλάζει κάθε μισή στροφή (κάθε ημιπερίοδο), τότε ακριβώς που ο δακτύλιος αλλάζει και ψηήκτρα. Έτσι έκαστη ψηήκτρα βρίσκεται πάντα σε επαφή με δακτύλιο συγκεκριμένης πόλωσης και είναι πάντα θετική ή αρνητική. Βλέπουμε λοιπόν, ότι το σύστημα των δύο μονωμένων ημιδακτυλίων λειτουργεί ως *ανορθωτής* και αποτελεί την απλούστερη δυνατή μορφή ενός *συλλέκτη*.



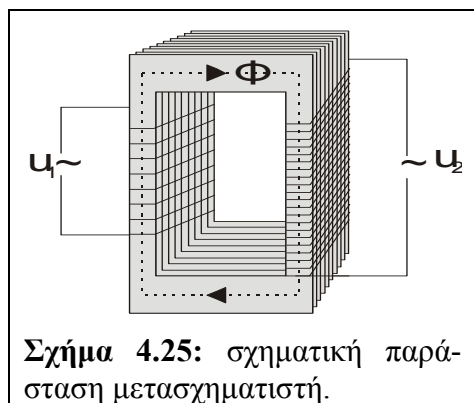
Σχήμα 4.24: Σχηματική παράσταση γεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος (a) και αρχή λειτουργίας της γεννήτριας συνεχούς ρεύματος (b).

Προκειμένου να εξομαλύνουμε την από την γεννήτρια με ένα πλαίσιο και συλλέκτη εκ δύο ημιδακτυλιδίων παραγόμενη τάση, χρησιμοποιούμε στην πράξη γεννήτριες με πολλά πλαίσια, τα οποία καταλήγουν σε συλλέκτη με κυλινδρική μορφή και διηρημένο σε πολλούς τομείς, μονωμένους μεταξύ τους. Τα πλαίσια είναι συνδεδεμένα με κατάλληλο τρόπο σε σειρά, έτσι ώστε στις ψήκτρες να παραλαμβάνεται το άθροισμα των μερικών τάσεων, οι οποίες επάγονται στα μεμονωμένα πλαίσια. (Ο ακριβής τρόπος σύνδεσης υπόκειται σε κανόνες, οι οποίοι αναλύονται μόνο σε υπερεξειδικευμένα εγχειρίδια, στα οποία και παραπέμπουμε κάθε ενδιαφερόμενο αναγνώστη). Στο σχήμα 4.23 (δεξιά) φαίνεται η παραλαμβανόμενη παρά των ψηκτρών τάση για την υποθετική περίπτωση δύο καθέτων μεταξύ τους πλαισίων. Η αποδιδόμενη τάση u ισούται ανά πάσα στιγμή με το άθροισμα των μερικών, ανορθωμένων τάσεων u_1 και u_2 , οι οποίες έχουν διαφορά φάσεως κατά $\pi/2$, οπότε η δεύτερη υστερεί της πρώτης κατά $T/4$.

Το μαγνητικό πεδίο, εντός του οποίου περιστρέφεται το επαγωγικό πλαίσιο, δεν είναι απαραίτητο να δημιουργείται με την βοήθεια μονίμου μαγνήτη, αλλά μπορεί κάλλιστα να χρησιμοποιηθεί ένας ηλεκτρομαγνήτης. Στην περίπτωση αυτή ο ηλεκτρομαγνήτης (σωληνοειδές με πυρήνα από μαλακό σίδηρο) μπορεί να τροφοδοτείται με ρεύμα από την ίδια την γεννήτρια: Με το που αρχίζει το πλαίσιο να περιστρέφεται, εμφανίζεται στα άκρα του επαγωγική τάση λόγω της (έστω και ασθενούς) μένουσας μαγνήτισης του πυρήνα του σωληνοειδούς. Το ρεύμα, το οποίο διαρρέει εξ αιτίας της τάσης αυτής το σωληνοειδές, ενισχύει το μαγνητικό πεδίο και έτσι και την επαγωγική τάση, κ.ο.κ., μέχρι που επιτυγχάνεται η τελική τάση της γεννήτριας (**δυναμοηλεκτρική αρχή του Siemens**).

ζ) Ηλεκτροκινητήρες: Η λειτουργία τους στηρίζεται στην αντιστροφή της αρχής λειτουργίας των γεννητριών εναλλασσομένου και συνεχούς ρεύματος: Αν εφαρμόσουμε σε ένα εντός μαγνητικού πεδίου ευρισκόμενο πλαίσιο εναλλασσόμενη (ή - με την παρεμβολή συλλέκτου-συνεχή) τάση, τότε το πλαίσιο περιστρέφεται κάτω από την επίδραση της ροπής, η οποία αναπτύσσεται εξ αιτίας των δυνάμεων Lorentz (βλ. κεφ.4.5β).

η) Μετασχηματιστές: Ένας μετασχηματιστής αποτελείται από δύο (χάρην απλότητας στην πράξη μπορεί να είναι και περισσότερα) σωληνοειδή με διαφορετικό αριθμό σπειρών, τα οποία είναι μαγνητικά συζευγμένα μέσω κλειστού πυρήνα (βλ. σχ. 4.25) από μαγνητικά μαλακό (δηλαδή χωρίς ουσιαστική *μένουσα* μαγνήτιση για περιορισμό της *μαγνητικής υστέρησης*, βλ. κεφ. 6) σιδηρομαγνητικό υλικό.



Οι μετασχηματιστές χρησιμοποιούνται για τον μετασχηματισμό εναλλασσομένων τάσεων ή και ηλεκτρικών παλμών.

Η λειτουργία των μετασχηματιστών στηρίζεται στο φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής: Στο *πρωτεύον σωληνοειδές* εφαρμόζεται η προς μετασχηματισμό τάση u_1 . Το πρωτεύον σωληνοειδές διαρρέεται τότε από εναλλασσόμενο ρεύμα έντασης i_1 , το οποίο δημιουργεί ένα περιοδικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πυρήνα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη από την μια τάσεως $u_{επ1}$ από *αντεπαγωγή* (= η ανάπτυξη ΗΕΔ εξ επαγωγής, η οποία οφείλεται στην μεταβολή του μαγνητικού πεδίου του ίδιου του αγωγού, βλ. §4.6.3) στο πρωτεύον σωληνοειδές και από την άλλη μιας τάσεως u_2 από *αμοιβαία* (όπως χαρακτηρίζεται, βλ. §4.6.5) *επαγωγή* στο *δευτερεύον σωληνοειδές*.

$$\text{Οι επαγωγικές αυτές τάσεις είναι: } u_{επ1} = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{και} \quad u_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad \{1\}$$

όπου N_1 και N_2 είναι ο αριθμός των σπειρών του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος σωληνοειδούς αντίστοιχα.

Στην περίπτωση ενός *ιδανικού* μετασχηματιστή δεν έχουμε σκέδαση μαγνητικής ροής, όπως δεν έχουμε και φαινόμενα μαγνητικής υστέρησης, οπότε ο ρυθμός μεταβολής $d\Phi/dt$ της μαγνητικής ροής ανά σπείρα είναι ο ίδιος και για τα δύο σωληνοειδή. Διαιρώντας λοιπόν κατά μέλη τις σχέσεις {1} παίρνουμε:

$$\frac{u_2}{u_{επ1}} = \frac{N_2}{N_1} \Leftrightarrow u_2 = u_{επ1} \frac{N_2}{N_1} \quad \{2\}$$

Ο 2^{ος} κανόνας του Kirchhoff για το πρωτεύον κύκλωμα δίδει εξάλλου: $u_1 + u_{επ1} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_1 = -u_{επ1} \quad \{3\}.$$

Αντικαθιστώντας στην {2} παίρνουμε:

$$\frac{u_2}{u_1} = \left(-\right) \frac{N_2}{N_1} \quad [4.19]$$

Σημειώνουμε ότι u_1 , είναι η τάση με την οποία *τροφοδοτείται* το πρωτεύον σωληνοειδές και u_2 η τάση η οποία αναπτύσσεται στα άκρα του δευτερεύοντος σωληνοειδούς εξ αιτίας του φαινομένου της αμοιβαίας επαγωγής. Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση δείχνει, ότι οι δύο αυτές τάσεις βρίσκονται σε φάση, έχουν δηλαδή ίσες αλλά αντίθετες τιμές.

Ο λόγος N_1/N_2 του αριθμού των σπειρών του πρωτεύοντος προς του αριθμού των σπειρών του δευτερεύοντος σωληνοειδούς καλείται *λόγος μετασχηματισμού*. Από την σχέση [4.19] είναι δε φανερό, ότι όταν το δευτερεύον σωληνοειδές έχει περισσότερες σπείρες, τότε

ο μετασχηματιστής ανυψώνει την τάση και καλείται *μετασχηματιστής ανυψώσεως* ($N_2 > N_1$). Στην αντίθετη περίπτωση ο μετασχηματιστής υποβιβάζει την τάση και καλείται *μετασχηματιστής υποβιβασμού* ($N_2 < N_1$).

Στην περίπτωση ενός ιδανικού μετασχηματιστή δεν έχουμε ενεργειακές απώλειες (γεγονός το οποίο ισχύει με αρκετή προσέγγιση και για τους πραγματικούς μετασχηματιστές), οπότε η (στιγμιαία) ισχύς p_1 , του πρωτεύοντος θα ισούται με εκείνη (p_2) του δευτερεύοντος κυκλώματος: $p_1 = p_2$

$$u_1 i_1 = u_2 i_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = (-) \frac{N_2}{N_1} \quad [4.20]$$

Σημειωτέον ότι στην πράξη οι διαφορές φάσεως (βλ. κεφ.5) μεταξύ έντασης και τάσης είναι και για τα δύο κυκλώματα περίπου οι ίδιες. Έτσι ο λόγος (i_1 / i_2) των στιγμιαίων εντάσεων ισούται με τον λόγο (I_{01}/I_{02}) των αντιστοιχών πλατών καθώς και τον λόγο (I_1/I_2) των αντιστοιχών ενεργών τιμών (βλ. κεφ.5).

Στην περίπτωση ενός *πραγματικού* μετασχηματιστή δεν ισχύει η ισότητα της ισχύος του πρωτεύοντος κυκλώματος με εκείνη του δευτερεύοντος, για τους ακόλουθους κυρίως λόγους:

- 1) Η μαγνητική ροή του δευτερεύοντος σωληνοειδούς είναι ασθενέστερη λόγω μαγνητικής σκέδασης.
- 2) Η ωμική αντίσταση των δύο σωληνοειδών δεν είναι αμελητέα, γεγονός το οποίο συνεπάγεται την μετατροπή μέρος της ηλεκτρικής σε θερμική ισχύ, μέσω του γνωστού μας φαινομένου Joule.
- 3) Απώλειες ισχύος έχουμε επίσης λόγω φαινομένων μαγνητικής υστέρησης στον πυρήνα του μαλακού σιδήρου, στον οποίο αναπτύσσονται και δινορρεύματα παρά την φυλλωτή του κατασκευής, η οποία βέβαια τα περιορίζει σημαντικά, όταν η συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης δεν ξεπερνά τα 50kHz.

Θα πρέπει βέβαια να τονίσουμε, ότι οι παραπάνω απώλειες είναι σχετικά περιορισμένες, γεγονός το οποίο σε συνδυασμό με την απλή σχετικά κατασκευή των μετασχηματιστών οδήγησε στην επικράτηση του εναλλασσόμενου ρεύματος έναντι του συνεχούς: Η παραγόμενη στις μονάδες παραγωγής εναλλασσόμενη τάση των 6~20 kV μετασχηματίζεται σε 50~400 kV, ώστε κατά την μεταφορά της ηλεκτρικής ισχύος στους τόπους κατανάλωσης να έχουμε κατά το δυνατόν μικρότερες απώλειες. (Για συγκεκριμένη ηλεκτρική ισχύ, υψηλή τάση συνεπάγεται μικρή ένταση του ρεύματος, το τετράγωνο της οποίας καθορίζει τις θερμικές απώλειες συνέπεια του φαινομένου Joule) Στους τόπους κατανάλωσης η τάση υποβιβάζεται στην τιμή των 380 V και 220 V με την βοήθεια μετασχηματιστών υποβιβασμού τάσεως. Αντιθέτως στην περίπτωση συνεχούς ρεύματος δεν έχουμε αντιστοιχούς αποδοτικούς τρόπους αυξομείωσης της τάσεως.

4.5.3 Αυτεπαγωγή

Αυτεπαγωγή καλείται το φαινόμενο της εμφάνισης ΗΕΔ εξ επαγωγής στα άκρα ενός αγωγού εξ αιτίας της μεταβολής του ρεύματος (άρα και του αντιστοιχού μαγνητικού πεδίου) που τον διαρρέει.

Η αυτεπαγωγή αποτελεί ειδική περίπτωση του φαινομένου της επαγωγής και οφείλεται

στην μεταβολή μαγνητικής ροής μέσω της επιφάνειας, την οποία περικλείει (χρονικά ή γεωγραφικά) ο αγωγός, και η οποία οφείλεται στην μεταβολή του μαγνητικού πεδίου του ίδιου του αγωγού.

Το φαινόμενο της αυτεπαγωγής είναι ιδιαίτερα έντονο στην περίπτωση ενός σωληνοειδούς, εξ αιτίας της μεγάλης εντάσεως του μαγνητικού του πεδίου καθώς και της μεγάλης επιφάνειας (= συνολική επιφάνεια όλων των σπειρών του σωληνοειδούς), η οποία διαρρέεται απ' αυτό. Συγκεκριμένα η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό ενός ιδανικού (μήκος πολύ μεγαλύτερο από την διάμετρο του) σωληνοειδούς δίδεται ως γνωστόν από την σχέση ([4.7]):

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i, \text{ όπου } l \text{ το μήκος και } N \text{ ο αριθμός σπειρών του σωληνοειδούς.}$$

$$\begin{aligned} \text{Η ολική μαγνητική ροή } \Phi_{ολ} \text{ μέσω των } N \text{ σπειρών του σωληνοειδούς είναι } \Phi_{ολ} &= N \Phi_{σπείρας} = \\ &= N(BS) = N \left(\mu_0 \frac{N}{l} i S \right) \Rightarrow \Phi_{ολ} = \mu_0 \frac{N^2}{l} i S \end{aligned} \quad \{2\}$$

Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή θα υπολογίζεται από τον νόμο ([4.14]) του Faraday:

$$E_{αεπ} = - \frac{d\Phi_{ολ}}{dt} = - \frac{d}{dt} \left[\mu_0 \frac{N^2}{l} Si \right] \Rightarrow \boxed{E_{αεπ} = - \underbrace{\mu_0 \frac{N^2}{l} S}_{\text{ισχύει μόνο για σωληνοειδή!}} \frac{di}{dt} \equiv -L \frac{di}{dt}} \quad [4.21]$$

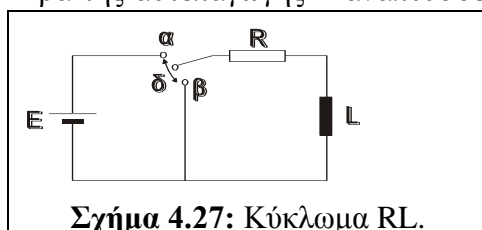
Η σταθερά αναλογίας L καλείται **συντελεστής αυτεπαγωγής** (ή απλώς **αυτεπαγωγή**) του αγωγού και εξαρτάται από την γεωμετρία του αγωγού και από το υλικό που περιβάλλεται, απ' αυτόν. Στο Διεθνές Σύστημα μονάδων S.I. **μονάδα μέτρησης του L** είναι το **Vs/A** και καλείται **H(enry)**.



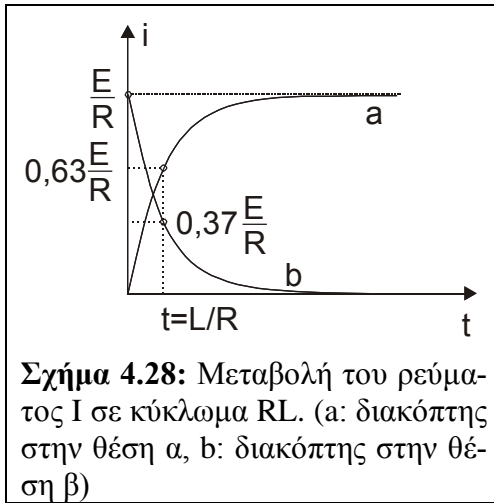
Αγωγοί χωρίς αυτεπαγωγή: Αγωγοί χωρίς αυτεπαγωγή κατασκευάζονται μέσω **δίμητης περιτύλιξης** (βλ. σχ. 4.26). κατά την οποία εκμεταλλευόμαστε το γεγονός, ότι τα μαγνητικά πεδία δύο παραλλήλων αγωγών, οι οποίοι διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, αλληλοεξουδετερώνονται. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζονται επί παραδείγματι οι σπείρες πυρακτώσεως των ηλεκτρονικών λυχνιών.

4.5.4 Επίδραση αυτεπαγωγής στο ρεύμα κυκλώματος LR

Όταν ο διακόπτης δ μετακινηθεί προς την *θέση α*, τότε στα άκρα της αυτεπαγωγής L αναπτύσσεται ΗΕΔ από αυτεπαγωγή, μέτρου $L di / dt$, η οποία σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz έχει πολικότητα αντίθετη προς εκείνη της πηγής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ένταση του ρεύματος να μην αποκτά αμέσως την οριακή της τιμή E/R , αλλά έτσι όπως προκύπτει από τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff:



$$E - L \frac{di}{dt} = iR \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \quad \{1\} \rightarrow \boxed{i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})} \quad [4.22]$$



Σημειωτέον, ότι η {1} είναι μια συνήθης μη ομογενής διαφορική εξίσωση, πρώτης τάξεως και πρώτου βαθμού. Η επίλυση της γίνεται με την μέθοδο που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 3.5.8, παίρνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη ($t = 0 \rightarrow i = 0$). Η εξάρτηση της έντασης του ρεύματος από τον χρόνο αποδίδεται γραφικά στο σχήμα 4.28.

Αν ο διακόπτης μετακινηθεί προς την θέση β, τότε η {1} παίρνει την μορφή:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \rightarrow \boxed{i = \frac{E}{R}e^{-Rt/L}} \quad [4.22]$$

Ο χρόνος $t = L/R$ είναι η χαρακτηριστική **σταθερή χρόνου** του κυκλώματος. Πρόκειται ως γνωστόν (βλ. κεφ.3.5.8) για τον χρόνο, εντός του οποίου η ένταση έχει πάρει 63% της τελικής της τιμής E/R (διακόπτης θέση α) ή έχει απολέσει το 63% της αρχικής της τιμής E/R (διακόπτης θέση β). Σημειωτέον ότι **οι οριακές τιμές επιτυγχάνονται σε ποσοστό 99% μέσα σε πέντε σταθερές χρόνου.**

4.5.5 Αμοιβαία επαγωγή

Δύο αγωγοί, οι οποίοι ευρίσκονται ο ένας τόσο πλησίον του άλλου, ώστε να «αλληλοισθάνονται» τις ενδεχόμενες μεταβολές των μαγνητικών τους πεδίων, χαρακτηρίζονται ως **μαγνητικά συζευγμένοι**.

Κάθε μεταβολή του ρεύματος ενός εκ των δύο μαγνητικώς συζευγμένων αγωγών επάγει - μέσω της αντίστοιχης μεταβολής του μαγνητικού του πεδίου, εντός του οποίου βρίσκεται ο συζευγμένος αγωγός, - ΗΕΔ $E_{αμ.επ}$, η οποία δίδεται από την ακόλουθη, ημιεμπειρική σχέση:

$$\boxed{E_{αμ.επ} = -\Lambda \frac{di}{dt}} \quad [4.23]$$

Ο συντελεστής Λ καλείται **συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής** και εξαρτάται από την γεωμετρία (σχήμα και διαστάσεις) των συζευγμένων αγωγών, την σχετική τους θέση καθώς και τις μαγνητικές ιδιότητες του περιβάλλοντος μέσου. Όπως δε και ο συντελεστής αυτεπαγωγής μετράται σε Henry.

4.6 Ενέργεια και πυκνότητα ενέργειας μαγνητικού πεδίου

Αν πολλαπλασιάσουμε τις τάσεις στα άκρα της πηγής της αντίστασης και της αυτεπαγωγής του κυκλώματος του σχήματος 4.27 με την στιγμιαία τιμή i της έντασης του ρεύματος, παίρνουμε:

$$i \left(E - L \frac{di}{dt} = iR \right) \rightarrow Ei = i^2 R + Li \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \underbrace{Ei}_{\substack{\text{προσφερόμενη} \\ \text{από την πηγή} \\ \text{ηλεκτρική ισχύς}}} = \underbrace{i^2 R}_{\text{θερμική ισχύς}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \quad \{1\}$$

ισχύς η οποία δαπανάται για την μεταβολή του μαγνητικού πεδίου του σωληνοειδούς

Η εξίσωση αυτή αποτελεί άμεση διατύπωση της αρχής διατήρησης της ενέργειας για την περίπτωση κυκλώματος, αποτελούμενου από πηγή, ωμική αντίσταση και αυτεπαγωγή: Η στιγμιαία ισχύς (Ei), η οποία προσφέρεται από την πηγή σε μια τυχαία χρονική στιγμή, μετατρέπεται κατά ένα μέρος ίσο με ($i^2 R$) σε θερμική ισχύ εξ αιτίας του φαινομένου Joule στην αντίσταση R , και κατά ένα δεύτερο μέρος σε «μαγνητική ισχύ» $d[Li^2/2]/dt$. Εφόσον δε η ισχύς ισούται εξ ορισμού με τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας, από τα παραπάνω συνάγεται, ότι η **ενέργεια του μαγνητικού πεδίου** ενός **σωληνοειδούς**, συντελεστή L , το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης i , δίδεται από την σχέση:

$$\boxed{W_\mu = \frac{1}{2} Li^2} \quad [4.24]$$

Η ενέργεια αυτή επαναδιοχετεύεται στο κύκλωμα κατά την αποσύνδεση του μαγνητικού πεδίου, η οποία επέρχεται όταν αποσυνδέσουμε το σωληνοειδές από την πηγή.

Το μαγνητικό πεδίο ενός (μακρού) σωληνοειδούς (βλ. κεφ. 4.4.1α) είναι ομογενές και περιορισμένο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς. Έτσι η πυκνότητα ενέργειας w_μ του μαγνητικού πεδίου ενός σωληνοειδούς (όπως και κάθε *ομογενούς* μαγνητικού πεδίου) υπολογίζεται διαιρώντας την συνολική ενέργεια του πεδίου δια του όγκου v , εντός του οποίου περιορίζεται το πεδίο. Αν λοιπόν l είναι το μήκος του σωληνοειδούς, S το εμβαδόν των σπειρών και N ο αριθμός τους, έχουμε:

$$w_\mu = \frac{W_\mu}{v} \stackrel{[4.24]}{=} \frac{\frac{1}{2} Li^2}{v=Sl} \stackrel{[4.21]}{=} \frac{\frac{1}{2} \left(\mu_0 \frac{N^2}{l} S \right) i^2}{Sl} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l^2} i^2 \stackrel{[4.7]: B=\mu_0 \frac{N}{l} i}{\Rightarrow} \boxed{w_\mu = \frac{B^2}{2\mu_0}} \quad \{1\}$$

Η σχέση $\{1\}$ ισχύει και στην γενική περίπτωση *μη ομογενούς* μαγνητικού πεδίου, μόνο που τότε η πυκνότητα ενέργειας w_μ μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, εξ αιτίας της αντιστοίχου μεταβολής της έντασης του πεδίου:

πυκνότητα ενέργειας μαγνητικού πεδίου:
$$\boxed{w_\mu = \frac{dW_\mu}{dv} = \frac{B^2}{2\mu_0}} \quad [4.25]$$