Τίτλος Μαθήματος

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ - ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ

Καθηγητής Δρ.Δ.Σαγρής

ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Συστήματα Παραγωγής - Ρομποτική

Διδάσκων

Δημήτριος Σαγρής

(Δρ. Μηχανολόγος Μηχανικός)

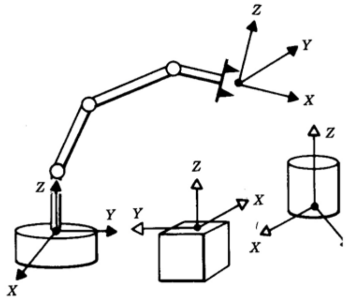
Κινηματική ανάλυση με χρήση ΣΣ στο χώρο

Περιγραφή στερεού σώματος στον χώρο

Θέση αντικειμένων:
-Ρομποτικών Συνδέσμων, κομματιών, Εργαλείων

Προσδιορίζονται από:
-Συστήματα Συντεταγμένων

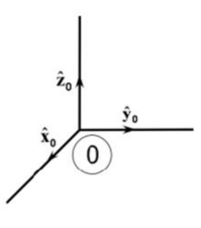
Το ρομπότ απαιτεί την γνώση εσωτερικής και εξωτερικής πληροφορίας (που βρίσκεται αυτό καθώς και τα αντικείμενα γύρω του).

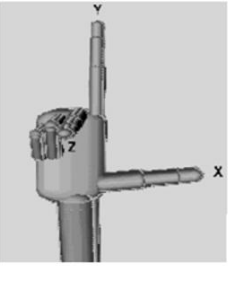


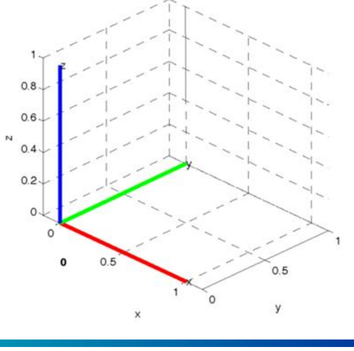
Περιγραφή στερεού σώματος στον χώρο

Θέση και προσανατολισμός αντικειμένων: Επισυνάπτουμε ένα πλαίσιο συντεταγμένων

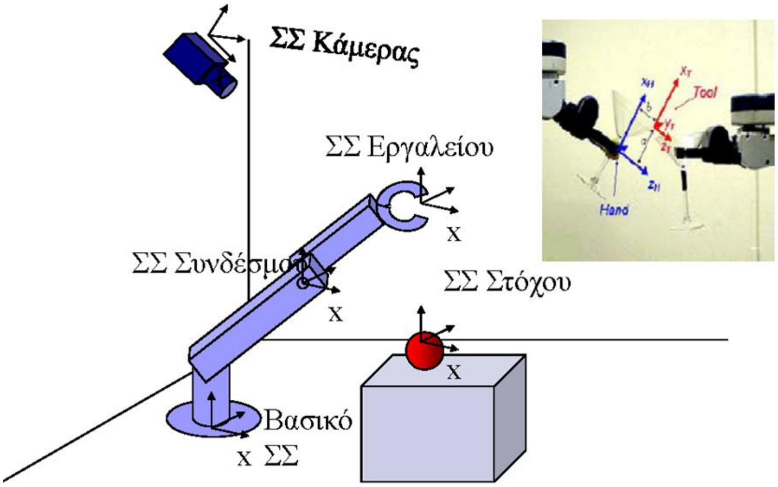
Ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (ΣΣ) (ή σύστημα αναφοράς, ή πλαίσιο αναφοράς) αποτελείται από τρία μοναδιαία διανύσματα $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$ με κοινή αρχή το σημείο O.





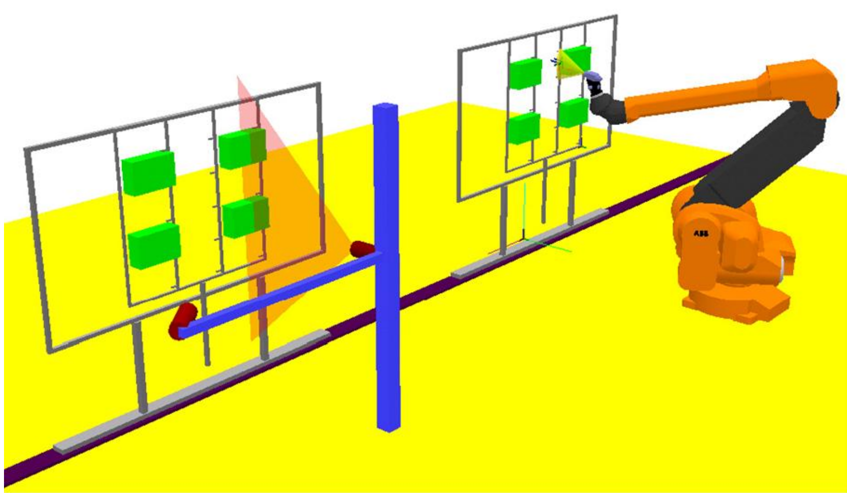


Βασικά πλαίσια



©2014

Παράδειγμα θέσης και προσανατολισμού



©2014

Διάνυσμα θέσεως στο σύστημα i

$$p_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]^t$$

Σχετική θέση συστημάτων στο σύστημα j

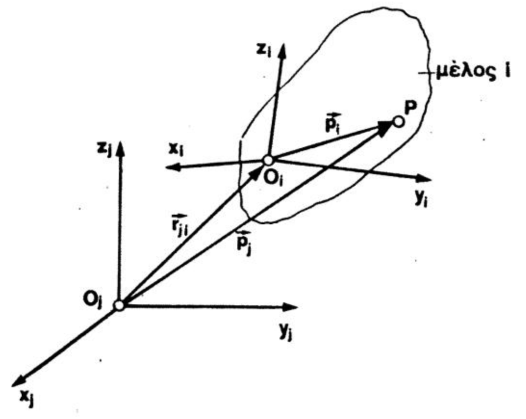
$$r_{ji} = [x_o \quad y_o \quad z_o]^t$$

Διάνυσμα θέσεως στο σύστημα j

$$p_j = [x_j \quad y_j \quad z_j]^t$$

$$x_j = x_o + a_{11}x_i + a_{12}y_i + a_{13}z_i$$
$$y_j = y_o + a_{21}x_i + a_{22}y_i + a_{23}z_i$$
$$z_j = z_o + a_{31}x_i + a_{32}y_i + a_{33}z_i$$

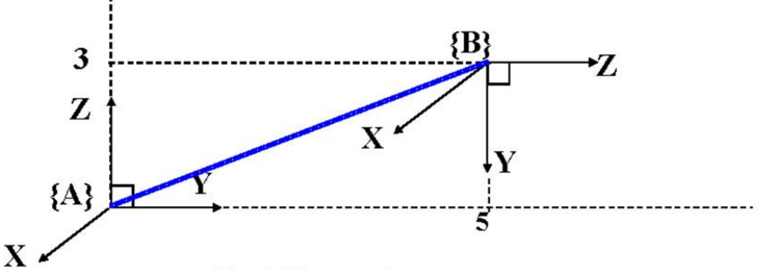
Όπου:
a_{mn} (m,n=1,2,3)=cos(θ)
με 1Ξx, 2Ξy, 3Ξz



Σχήμα C7

Κινηματική ανάλυση μηχανισμών
Διάνυσμα θέσεως

Ποια είναι η απόσταση της αρχής του πλαισίου {B} από το πλαίσιο {A};



Επιλέξτε απάντηση

A: 5.9161 B: 1.7321 C: 4.2426 D: 5.8310

Σχήμα C8

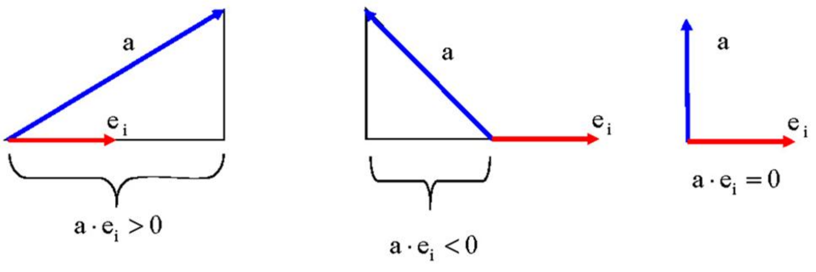
Περιγραφή στερεού σώματος στο χώρο

Εσωτερικό γινόμενο ανύσματος με μοναδιαίο άνυσμα

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad e_i,\ i = x, y, z \qquad e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εσωτερικό γινόμενο $a \cdot e_i = e_i \cdot a$ **=?**

ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ
Εκφράζει την προβολή του **a** πάνω στο μοναδιαίο άνυσμα $\mathbf{e}_i$



Υπολογισμός εσωτερικού γινομένου

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad e_i,\ i = x, y, z \qquad e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a \cdot e_x = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} e_x = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_x$$

$$a \cdot e_z = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} e_z = a_z$$

$$a \cdot e_y = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} e_y = a_y$$

$$\boxed{a \cdot e_i = \|a\| \|e_i\| \cos(\widehat{a, e_i})}$$

Σχετική Στροφή Συστημάτων Συντεταγμένων στο χώρο

Σε μητρωική μορφή:

$$p_j = r_{ji} + R p_i$$

όπου:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_j x_i) & \cos(x_j y_i) & \cos(x_j z_i) \\ \cos(y_j x_i) & \cos(y_j y_i) & \cos(y_j z_i) \\ \cos(z_j x_i) & \cos(z_j y_i) & \cos(z_j z_i) \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} \quad \vec{o} \quad \vec{a}$$

Για τα στοιχεία του R ισχύουν:

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0 \qquad (\vec{n}\cdot\vec{o} = 0)$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0 \qquad (\vec{o}\cdot\vec{a} = 0)$$

$$a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0 \qquad (\vec{a}\cdot\vec{n} = 0)$$

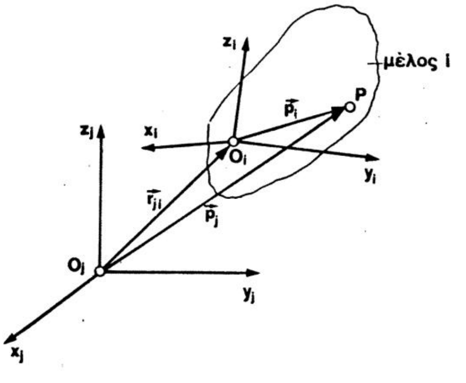
$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \qquad (|\vec{n}| = 1)$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \qquad (|\vec{o}| = 1)$$

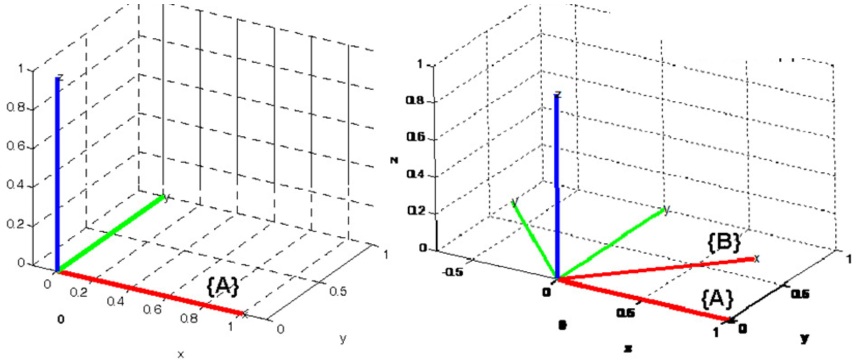
$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \qquad (|\vec{a}| = 1)$$

Αν R δεξιόστροφο σύστημα: det(R) = 1

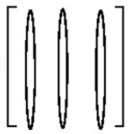
Αν R αριστερόστροφο σύστημα: det(R) = -1



Κινηματική ανάλυση μηχανισμών
Μητρώο θέσεως

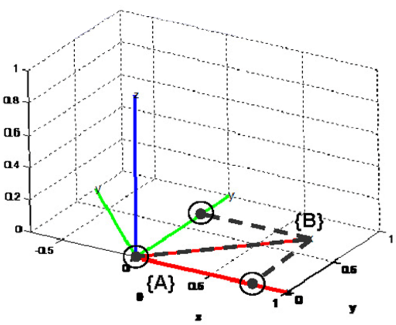


Για να περιγράψουμε τον προσανατολισμό του **{B}** ως προς το **{A}** πρέπει να βρούμε τον **πίνακα στροφής R_{AB}**

$R_{AB} =$ 

ΠΡΟΣΟΧΗ
Τα σημεία δεν έχουν προσανατολισμό

Περιγραφή προσανατολισμού



Η πρώτη στήλη του **R_{AB}** εκφράζει πως προβάλλεται το μοναδιαίο άνυσμα e_{Bx} του πλαισίου **{B}** στους μοναδιαίους άξονες e_{Ax}, e_{Ay}, e_{Az} του **{A}**

Η δεύτερη στήλη του **R_{AB}** εκφράζει πως προβάλλεται το μοναδιαίο άνυσμα e_{By} του πλαισίου **{B}** στους μοναδιαίους άξονες e_{Ax}, e_{Ay}, e_{Az} του **{A}**

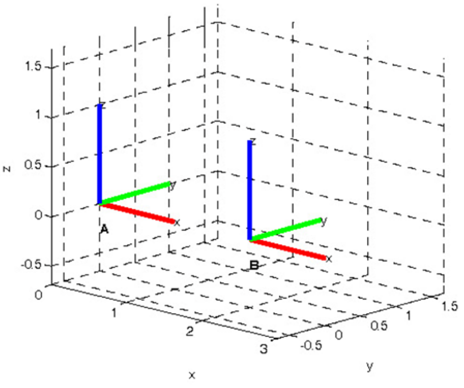
Η τρίτη στήλη του **R_{AB}** εκφράζει πως προβάλλεται το μοναδιαίο άνυσμα e_{Bz} του πλαισίου **{B}** στους μοναδιαίους άξονες e_{Ax}, e_{Ay}, e_{Az} του **{A}**

Οι τρις στήλες αποτελούν μοναδιαία ανύσματα και συνθέτουν έναν (3x3) πίνακα στροφής

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Τελικά ο πίνακα στροφής **R_{AB}** περιγράφει τον προσανατολισμό του **{B}** ως προς το **{A}**

Πίνακας στροφής που συσχετίζει δύο πλαίσια συντεταγμένων με παράλληλους άξονες

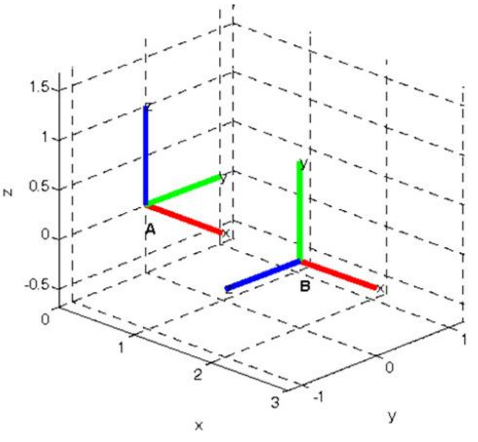


$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3x3}$$

Όταν ο πίνακας στροφής είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_{3x3} τότε τα πλαίσια συντεταγμένων που συσχετίζει έχουν τον ίδιο προσανατολισμό

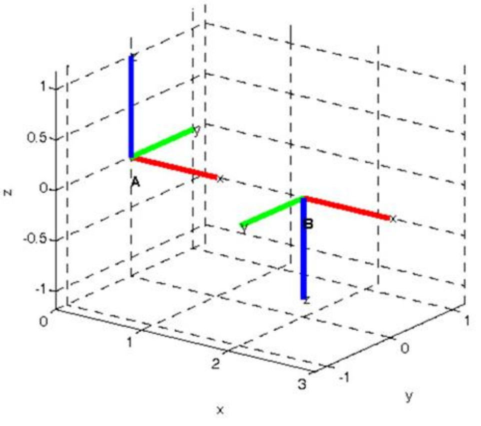
Πίνακας στροφής που συσχετίζει δύο πλαίσια συντεταγμένων με παράλληλους άξονες



$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας στροφής που συσχετίζει δύο πλαίσια συντεταγμένων με παράλληλους άξονες



$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τους πίνακες στροφής; Δηλαδή, $R_{AB}R_{CD} = R_{CD}R_{AB}$

Όπου R_{AB}, R_{CD} **αποτελούν πίνακες στροφής**

Επιλέξτε απάντηση

A: Ναι

B: Όχι

Ποιος από τους παρακάτω πίνακες είναι ένας πίνακας στροφής

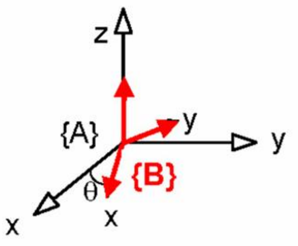
A: $R_{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

C: $\boxed{R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$

B: $R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1.2 & 0 \end{bmatrix}$

D: $R_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Βασικές στροφές



$$Rot(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}$$

$$Rot(y,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}$$

$$Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(i,\theta)^{-1} = Rot(i,-\theta) \quad i = x, y, z$$

Σύνθεση στροφών

- R1*R2 δεν είναι το ίδιο με R2*R1
- Στροφή γύρω από το σταθερό πλαίσιο:
  Πολλαπλασιασμός από αριστερά
- Στροφή γύρω από το στρεφόμενο πλαίσιο
  Πολλαπλασιασμός από δεξιά

Θεωρήστε την παρακάτω ακολουθία στροφών :

1. Στροφή κατά γωνία φ γύρω από τον άξονα-x του πλαισίου βάσης.
2. Στροφή κατά γωνία ψ γύρω από τον άξονα-z του πλαισίου βάσης.
3. Στροφή κατά γωνία θ γύρω από τον τρέχοντα άξονα-x.

Ποιο γινόμενο πινάκων αντιστοιχεί στον τελικό πίνακα στροφής των παραπάνω **διαδοχικών** στροφών;

Επιλέξτε απάντηση

A: $\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)$

B: $\boxed{\mathrm{Rot}(z,\psi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\theta)}$

C: $\mathrm{Rot}(z,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\theta)$

D: $\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)$

Θεωρήστε την παρακάτω ακολουθία στροφών :

1. Στροφή κατά γωνία φ γύρω από τον άξονα-x του πλαισίου βάσης.
2. Στροφή κατά γωνία θ γύρω από τον τρέχοντα άξονα-z.
3. Στροφή κατά γωνία ψ γύρω από τον τρέχοντα άξονα-x.
4. Στροφή κατά γωνία α γύρω από τον άξονα-z του πλαισίου της βάσης.

Ποιο γινόμενο πινάκων αντιστοιχεί στον τελικό πίνακα στροφής των παραπάνω **διαδοχικών** στροφών;

Επιλέξτε απάντηση

A: $\mathrm{Rot}(z,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\alpha)\cdot\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)$

B: $\boxed{\mathrm{Rot}(z,\alpha)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)}$

C: $\mathrm{Rot}(z,\psi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\alpha)$

D: $\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(z,\alpha)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)$

Περισσότερα για τις στροφές

- Η στροφή ενός ΣΣ μπορεί να αντιστοιχηθεί σε ένα πίνακα στροφής
- Ο πίνακας στροφής έχει 9 στοιχεία
- Ο πίνακας στροφής μπορεί να παραμετροποιηθεί με διάφορους τρόπους:
  - Γωνίες Roll, Pitch, Yaw
  - Γωνίες Euler
  - Με άλλους τρόπους

Ομογενή Μητρώα Μετασχηματισμού

Σχετική θέση και στροφή Συστημάτων Συντεταγμένων στο χώρο

©2014

Ομογενές διάνυσμα θέσεως στο σύστημα i

$$p_i = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1]^t$$

Ομογενές διάνυσμα θέσεως στο σύστημα j

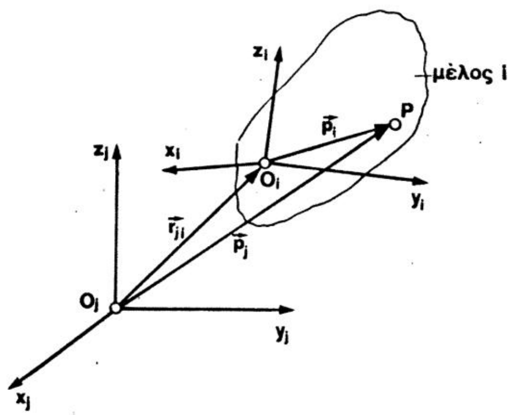
$$p_j = [x_j \quad y_j \quad z_j \quad 1]^t$$

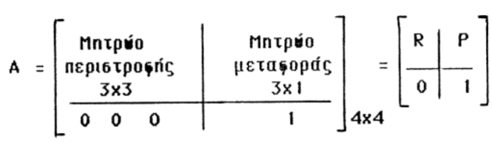
Τότε, σε μητρωική μορφή:

$$p_j = Ap_i \Rightarrow p_j = A_j^i p_i$$

όπου:

$$A_j^i = \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_o \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_o \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \vec{n} \quad \vec{o} \quad \vec{a} \quad \vec{p} \end{array}$$





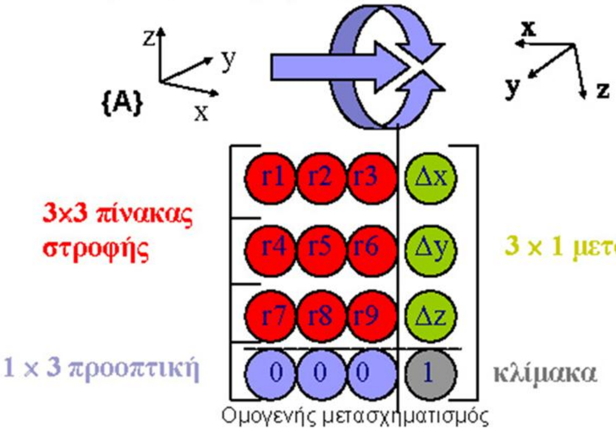
©2014

Κινηματική ανάλυση μηχανισμών
Ομογενές μητρώο θέσεως

Περιγραφή πλαισίου

- Πλαίσιο: 4 Ανύσματα
  1 *(θέση)* + 3 *(πίνακας στροφής)*

$\{B\} = (p_{ab}, R_{ab})$



©2014

Ποιος από τους παρακάτω πίνακες είναι ένας ομογενής μετασχηματισμός

Επιλέξτε απάντηση

$$A: \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 12.5 \\ 0 & 2 & 0 & 2.54 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B: \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 2.4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3.2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{C: \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 12.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2.54 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

©2014

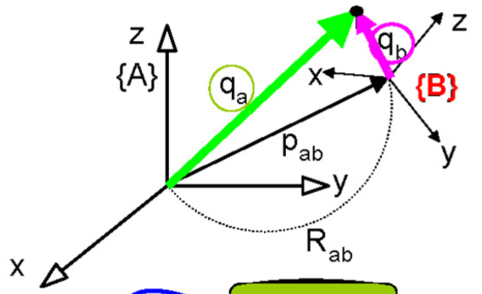
Ομογενής Μετασχηματισμός για τον μετασχηματισμό συντεταγμένων

$q_b = [x_b \quad y_b \quad z_b]^T$

$q_a = [x_a \quad y_a \quad z_a]^T$

$$q_a = p_{ab} + R_{ab} q_b$$

Η πρόσθεση ανυσμάτων πρέπει να γίνεται στο ίδιο ΣΣ



Αντικαθίσταται από την περισσότερο παραστατική εξίσωση:

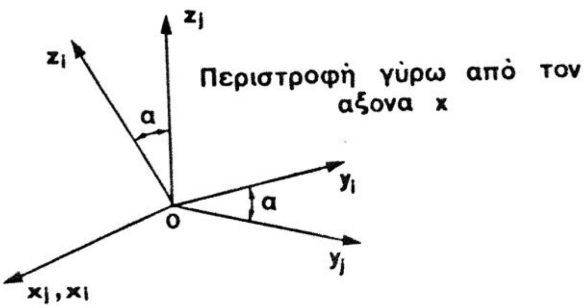
$$\begin{bmatrix} q_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{q_a = g_{ab} q_b}$$

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

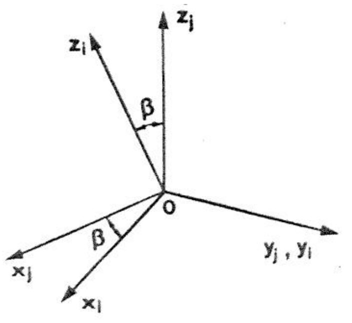
$$q_a, q_b \in \Re^4$$

Κινηματική ανάλυση μηχανισμών
Ομογενές μητρώο θέσεως



$$A(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στοιχειώδη ομογενή μητρώα περιστροφής
Α(x,α)

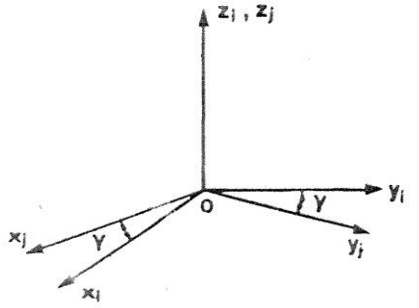


Περιστροφή γύρω από τον άξονα y

$$A(y,\beta)=\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σχήμα C31

Στοιχειώδη ομογενή μητρώα περιστροφής
A(y,β)



Περιστροφή γύρω από τον άξονα z

$$A(z,\gamma)=\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σχήμα C32

Στοιχειώδη ομογενή μητρώα περιστροφής
A(z,γ)

$$A(x_0,y_0,z_0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & x_0\\ 0 & 1 & 0 & y_0\\ 0 & 0 & 1 & z_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

$$A(a,b,c)\cdot A(z,k)\neq A(z,k)\cdot A(a,b,c)$$

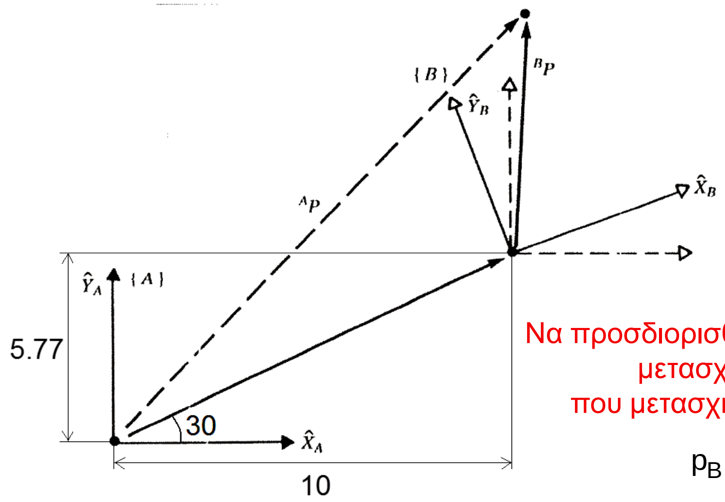
$$A(x,a)\cdot A(y,b)\neq A(y,b)\cdot A(x,a)$$

$$A(a,b,c)\cdot A(z,k)\cdot A(d,e,f)\neq A(z,k)\cdot A(a,b,c)\cdot A(d,e,f)$$

$$A(a,b,c)\cdot A(z,k)\cdot A(d,e,f)\neq A(a,b,c)\cdot A(d,e,f)\cdot A(z,k)$$

Σχήμα C33

Στοιχειώδες ομογενές μητρώο μετατόπισης
$A(x_o,y_o,z_o)$



Να προσδιορισθεί το ομογενές μητρώο μετασχηματισμού A_A^B
που μετασχηματίζει το P_B σε P_A.

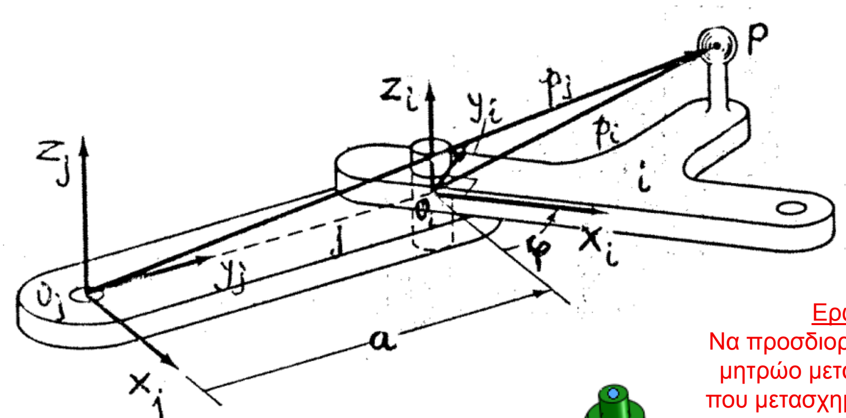
$$p_B=\begin{bmatrix}3 & 7 & 0\end{bmatrix}^t$$

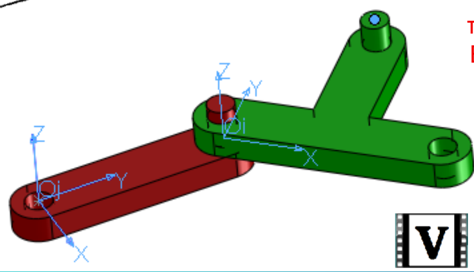
$$A_A^B=A(x,y,z)\cdot A(z,\phi)=?$$

$$A_A^B=A(z,\phi)\cdot A(x,y,z)=?$$

Σχήμα C34

ΑΣΚΗΣΗ 2η
Συντεταγμένες σημείου ως προς ορισμένο σύστημα,
με χρήση ομογενών μητρώων μετασχηματισμού



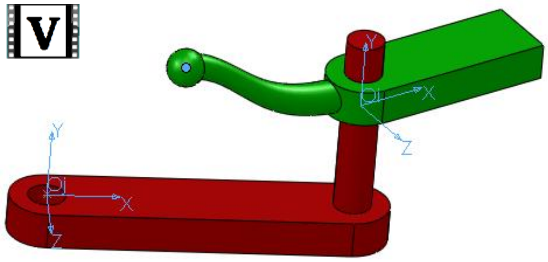


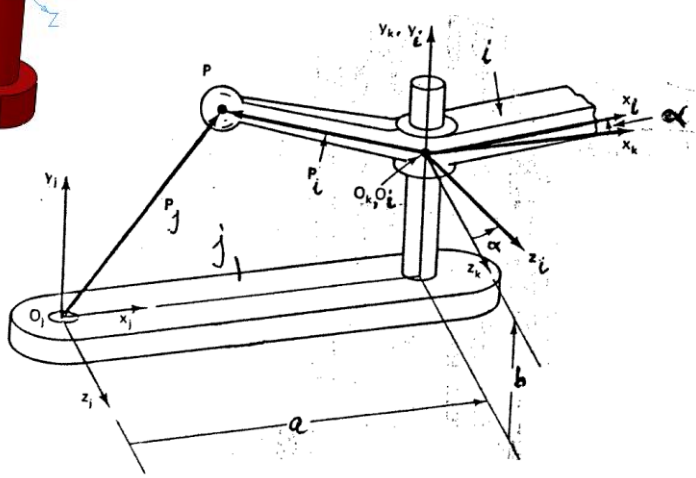
<u>Ερώτημα α</u>
Να προσδιορισθεί το ομογενές μητρώο μετασχηματισμού A_j^i που μετασχηματίζει το Pi σε Pj. Εν συνεχεία να γίνει εφαρμογή για τα εξής δεδομένα:

$$p_i = [4 \quad 5 \quad 2]^t$$

$$\phi = 45^o \qquad a = 7$$

<u>Απάντηση:</u>



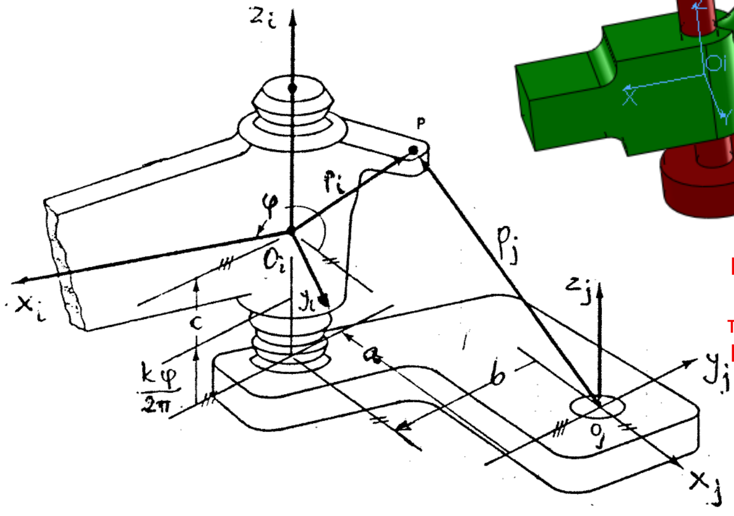


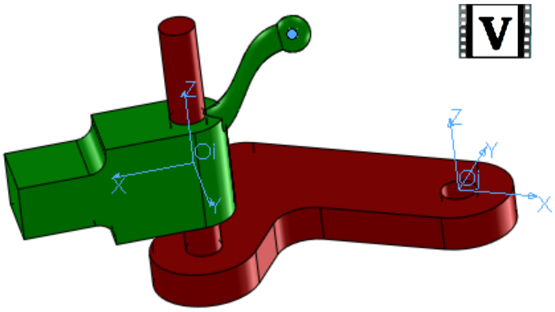
<u>Ερώτημα β</u>
Να προσδιορισθεί το ομογενές μητρώο μετασχηματισμού A_j^i που μετασχηματίζει το Pi σε Pj. Εν συνεχεία να γίνει εφαρμογή για τα εξής δεδομένα:

$$p_i = [-5 \quad 2 \quad -1]^t$$

$$a = 8, \ b = 3 \quad \alpha = 30^o$$

<u>Απάντηση:</u>





Ερώτημα γ

Να προσδιορισθεί το ομογενές μητρώο μετασχηματισμού A_j^i που μετασχηματίζει το Pi σε Pj. Εν συνεχεία να γίνει εφαρμογή για τα εξής δεδομένα:

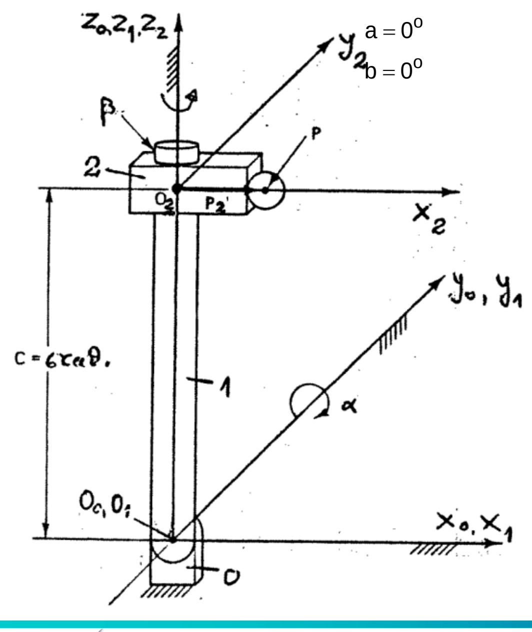
$$p_i = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}^t$$

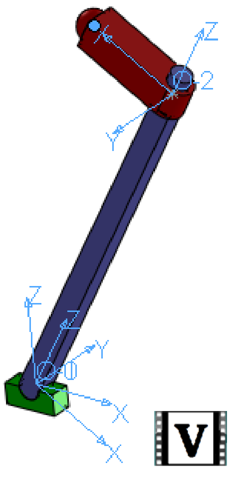
$$\phi = 240^o \quad a = -6 \quad c = 2 \quad b = -4 \quad k = 2$$

Απάντηση:

$a = 0^o$

$b = 0^o$





Ερώτημα δ

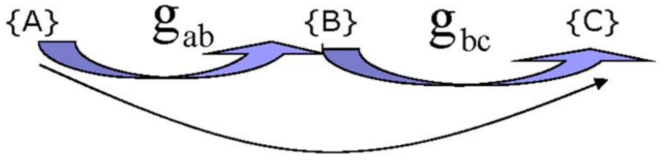
Να προσδιορισθεί το ομογενές μητρώο μετασχηματισμού A_j^i που μετασχηματίζει το P_2 σε P_0. Εν συνεχεία να γίνει εφαρμογή για τα εξής δεδομένα:

$$p_2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$a = 30^o,\ b = 180^o,\ c = 36$$

Απάντηση:

Σύνθεση Ομογενών Μετασχηματισμών



$$g_{ac} = g_{ab} g_{bc}$$

$$g_{ac} = \cancel{g_{ab}}\cancel{g_{bc}} = \begin{bmatrix} R_{ab}R_{bc} & R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Ομογενείς μετασχηματισμοί μεταφοράς και στροφής

Γενική μορφή ομογενούς μετασχηματισμού

$$g = \begin{bmatrix} R & p \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow g = g_p g_r$$

$$g_p = \begin{bmatrix} I_3 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ **Μεταφορά**

$$g_r = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ **Στροφή**

Σύνθεση Ομογενών Μετασχηματισμών

- **g1*g2 δεν είναι το ίδιο με g2*g1**
- **Στροφή ή μετακίνηση γύρω από το σταθερό πλαίσιο:**
  Πολλαπλασιασμός από αριστερά
- **Στροφή ή μετακίνηση γύρω από το κινούμενο πλαίσιο:**
  Πολλαπλασιασμός από δεξιά

Παράδειγμα

Ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού H, αναπαριστά μια περιστροφή γύρω από τον x-άξονα κατά α μοίρες, μια μετατόπιση κατά b μονάδες κατά μήκος του τρέχοντος x-άξονα, μια μετατόπιση κατά d μονάδες κατά μήκος του τρέχοντος z-άξονα και μια περιστροφή γύρω από τον τρέχων z-άξονα κατά θ μοίρες

$$H = Rot_{x,\alpha} Trans_{x,b} Trans_{z,d} Rot_{z,\theta}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & b \\ C\alpha S\theta & C\alpha C\theta & -S\alpha & -S\alpha d \\ S\alpha S\theta & S\alpha C\theta & C\alpha & C\alpha d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντιστροφή ομογενούς μητρώου μετασχηματισμού

Εάν ένα ομογενές μητρώο μετασχηματισμού είναι: $A_j^i = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

τότε ως αντίστροφό του ορίζεται το: A_i^j

και ισχύει ότι: $A_i^j = \left(A_j^i\right)^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Σχήμα C43

Αντίστροφος ομογενής μετασχηματισμός

$$A_j^i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & x_1 & 2 \\ 0 & 0 & x_2 & 1 \\ 0 & -1 & x_3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ερωτήματα:

Α) Να προσδιορισθεί το ομογενές μητρώο μετασχηματισμού A_j^i.

Β) Να προσδιορισθεί το αντίστροφο μητρώο μετασχηματισμού A_i^j.

Γ) Να γίνει γραφική αναπαράσταση της σχετικής θέσης των συστημάτων (i) και (j).

Σχήμα C44

ΑΣΚΗΣΗ 3η
Ομογενή μητρώα μετασχηματισμού
και ιδιότητές τους

Ένας σταθμός εργασίας βιομηχανικού ρομπότ παρακολουθείται από μια κάμερα σε σταθερή θέση στο χώρο (βλέπε σχήμα). Η κάμερα βλέπει το σύστημα συντεταγμένων του πλαισίου του ρομπότ και επίσης ένα αντικείμενο (κύβο) το οποίο χειρίζεται το ρομπότ.

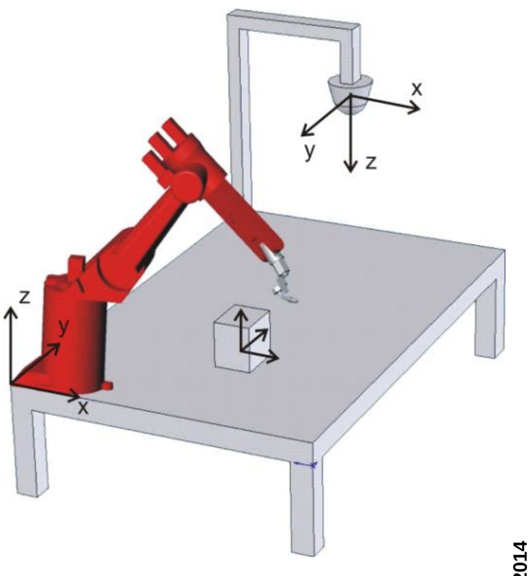
Αν στο κέντρο του κύβου ορίζεται ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων, η θέση και ο προσανατολισμός του **κύβου ως προς την κάμερα** μπορεί να εκφραστεί με ένα ομογενές μητρώο μετασχηματισμού $\mathbf{T_1}$.

Η θέση και ο προσανατολισμός του συστήματος συντεταγμένων του πλαισίου του **ρομπότ ως προς την κάμερα** εκφράζεται με το ομογενές μητρώο μετασχηματισμού $\mathbf{T_2}$.

Προσδιορίστε τη θέση του κέντρου του κύβου και τον προσανατολισμό του συστήματος συντεταγμένων του κύβου ως προς το πλαίσιο του ρομπότ.

Δίδονται:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

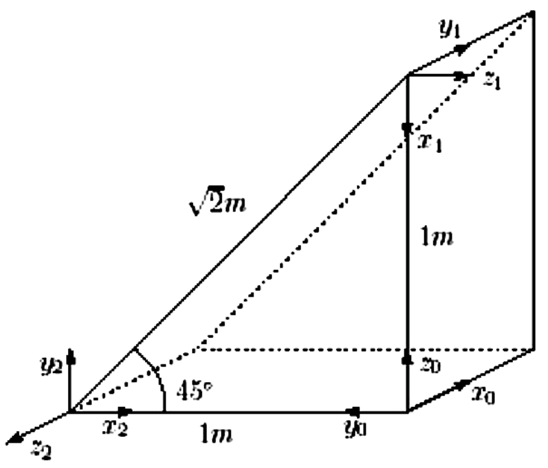


Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Συστήματα Παραγωγής
Ρομποτική
Δρ. Σαγρής Δημήτριος

ΑΣΚΗΣΗ 4η
Εφαρμογή ομογενών μητρώων μετασχηματισμού σε χώρο εργασίας ρομποτικού βραχίονα

Σχήμα C45

Να υπολογισθούν τα ομογενή μητρώα μετασχηματισμού A_0^1, A_0^2 , A_1^2 μεταξύ των πλαισίων 0, 1 και 2 και να αποδειχθεί ότι: $A_0^2 = A_0^1 \ A_1^2$



Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Συστήματα Παραγωγής
Ρομποτική
Δρ. Σαγρής Δημήτριος

ΑΣΚΗΣΗ 5η
Εφαρμογή ομογενών μητρώων μετασχηματισμού

Σχήμα C46