

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

**ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ - ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ

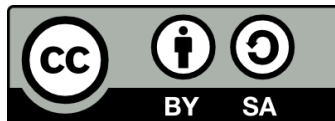
Καθηγητής Δρ.Δ.Σαγρής

ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015



Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Το έργο αυτό αδειοδοτείται από την Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές Άδεια. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.el>.

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Για το τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν: Νόμος Ημιτόνων.

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

Νόμος Συνημιτόνων. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\alpha\gamma \cos B$$

$$\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta \cos \Gamma$$

Άθροισμα n όρων αριθ. προόδου: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\omega]$

Άθροισμα n όρων γεωμ. προόδου: $S_n = \frac{a_1(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1} \quad \lambda \neq 1$

Άθροισμα απείρων όρων γεωμ. προόδου: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - \lambda} \quad | \lambda | < 1$

Κανόνες Vietta

Εάν πολυώνυμο $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ και με ρίζες $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, p_n$ τότε για τις ρίζες ισχύουν:

$$S_1 = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1} + p_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_1 p_n + p_2 p_3 + \dots + p_2 p_n + \dots + p_{n-1} p_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$S_3 = p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + \dots + p_1 p_2 p_n + p_2 p_3 p_4 + p_2 p_3 p_5 + \dots + p_2 p_3 p_n + \dots + p_{n-2} p_{n-1} p_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$S_n = p_1 p_2 p_3 \dots p_{n-1} p_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$\eta\mu x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\sigma\upsilon\nu x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΟΞΩΝ

$$\eta\mu(a \pm b) = \eta\mu a \sigma\upsilon\nu b \pm \sigma\upsilon\nu a \eta\mu b$$

$$\sigma\upsilon\nu(a \pm b) = \sigma\upsilon\nu a \sigma\upsilon\nu b \mp \eta\mu a \eta\mu b$$

$$\epsilon\phi(a \pm b) = \frac{\epsilon\phi a \pm \epsilon\phi b}{1 \mp \epsilon\phi a \epsilon\phi b}$$

$$\sigma\phi(a \pm b) = \frac{\sigma\phi a \sigma\phi b \mp 1}{\sigma\phi b \pm \sigma\phi a}$$

ΤΥΠΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΟΥ ΤΟΞΟΥ

$$\eta\mu 2a = 2\eta\mu a \sigma\upsilon\nu a$$

$$\sigma\upsilon\nu 2a = \sigma\upsilon\nu^2 a - \eta\mu^2 a = 2\sigma\upsilon\nu^2 a - 1 = 1 - 2\eta\mu^2 a$$

$$\epsilon\phi 2a = \frac{2\epsilon\phi a}{1 - \epsilon\phi^2 a}$$

$$\sigma\phi 2a = \frac{\sigma\phi^2 a - 1}{2\sigma\phi a}$$

ΤΥΠΟΙ ΤΡΙΠΛΑΣΙΟΥ ΤΟΞΟΥ

$$\begin{aligned} \eta\mu 3a &= 3\eta\mu a - 4\eta\mu^3 a \\ \sigma\upsilon\nu 3a &= 4\sigma\upsilon\nu^3 a - 3\sigma\upsilon\nu a \end{aligned}$$

ΤΥΠΟΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΜΙΣΟΥ ΤΟΞΟΥ

$$\begin{aligned} \eta\mu 2a &= \frac{2\epsilon\phi a}{1 + \epsilon\phi^2 a} \\ \sigma\upsilon\nu 2a &= \frac{1 - \epsilon\phi^2 a}{1 + \epsilon\phi^2 a} \end{aligned}$$

ΤΥΠΟΙ ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΥ

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu^2 a &= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2a}{2} \\ \eta\mu^2 a &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2a}{2} \\ \epsilon\phi^2 a &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2a}{1 + \sigma\upsilon\nu 2a} \end{aligned}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Από άθροισμα σε γινόμενο

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{B-A}{2}$$

$$\epsilon\phi A \pm \epsilon\phi B = \frac{\eta\mu(A \pm B)}{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B}$$

$$\sigma\phi A \pm \sigma\phi B = \frac{\eta\mu(B \pm A)}{\eta\mu A \eta\mu B}$$

Από γινόμενο σε άθροισμα

$$\begin{aligned} 2\eta\mu A \eta\mu B &= \sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B) \\ 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B &= \sigma\upsilon\nu(A+B) + \sigma\upsilon\nu(A-B) \\ 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B &= \eta\mu(A+B) + \eta\mu(A-B) \end{aligned}$$

ΤΡΙΓΩΝ. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

	$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\epsilon\phi x$	$\sigma\phi x$
$\eta\mu x$	$\eta\mu x$	$\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\frac{\epsilon\phi x}{\pm\sqrt{1+\epsilon\phi^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\sigma\phi^2 x}}$
$\sigma\upsilon\nu x$	$\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\epsilon\phi^2 x}}$	$\frac{\sigma\phi x}{\pm\sqrt{1+\sigma\phi^2 x}}$
$\epsilon\phi x$	$\frac{\eta\mu x}{\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\sigma\upsilon\nu x}$	$\epsilon\phi x$	$\frac{1}{\sigma\phi x}$
$\sigma\phi x$	$\frac{\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}{\eta\mu x}$	$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}$	$\frac{1}{\epsilon\phi x}$	$\sigma\phi x$

ΒΑΣΙΚΑ ΤΟΞΑ

Μοίρες	Ακτίνα	$\eta\mu$	$\sigma\upsilon\nu$	$\epsilon\phi$	$\sigma\phi$
0	0	0	1	0	-
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	-1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0
120	$2\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135	$3\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
180	π	0	-1	0	-
270	$3\pi/2$	-1	0	-	0
360	2π	0	1	0	-

ΕΙΔΙΚΑ ΤΟΞΑ

1. Αντίθετα ($\omega, -\omega$): Ίδια $\sigma\upsilon\nu$ και τα άλλα αντίθετα
2. Παραπληρωματικά ($\omega, \pi-\omega$): Ίδιο $\eta\mu$ και τα άλλα αντίθετα
3. Συμπληρωματικά ($\omega, \frac{\pi}{2}-\omega$): Εναλλάσσουν
4. Διφύροντα κατά π ($\omega, \pi+\omega$): Ίδιες $\epsilon\phi, \sigma\phi$ και τα άλλα αντίθετα

ΤΡΙΓΩΝ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta \Rightarrow x = 2k\pi + \theta \text{ ή } x = (2k+1)\pi - \theta$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow x = 2k\pi \pm \theta$$

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta \Rightarrow x = k\pi + \theta$$

$$\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Rightarrow x = k\pi + \theta \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

$$\eta\mu x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\eta\mu x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$