ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ Ι

κ. ΣΟΦΙΑΛΙΔΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.

- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

4.1 Επιταχυνση Στοιχειου Ρευστου: 2ος Νομος Newton – (α)

Μελετήσαμε στην υδροστατική τις δυνάμεις που ασκούνται σε ακίνητο ρευστό. Γενικά όμως τα ρευστά κινούνται (ροή). Την παρούσα διάλεξη θα εξετάσουμε μερικές τυπικές περιπτώσεις κίνησης ρευστών με έναν απλοποιημένο τρόπο.

Ο νόμος που διέπει την κίνηση των ρευστών είναι ο 2ος Νόμος της Κίνησης του Newton, $\vec{F} = m\vec{\alpha}$, όπως εφαρμόζεται σε ένα στοιχειώδες σωματίδιο ρευστού. Στο τέλος της ανάλυσης θα καταλήξουμε στην διάσημη εξίσωση Bernoulli, η οποία αν και βασίζεται σε αρκετές παραδοχές, μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε έναν μεγάλο αριθμό περιπτώσεων ροής. Πρέπει όμως να δοθεί μεγάλη σημασία και προσοχή στις παραδοχές αυτές, διότι όσο σωστά χρησιμοποιείται η εξίσωση Bernoulli, άλλο τόσο χρησιμοποιείται με λανθασμένο τρόπο.

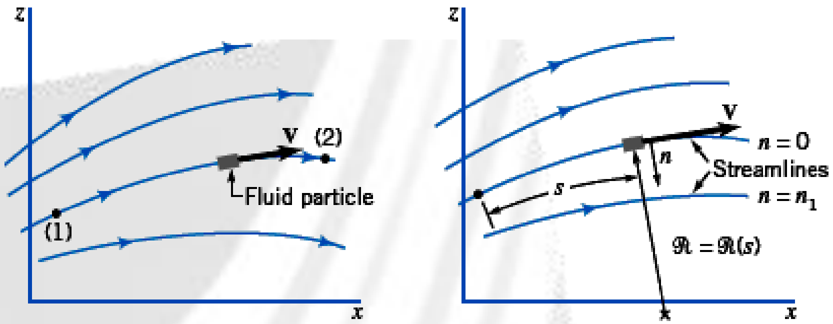
Εάν λοιπόν θεωρήσουμε ένα σωματίδιο ρευστού, το οποίο κινείται στο χώρο, αυτό μπορεί να επιταχύνεται ή να επιβραδύνεται κατά την πορεία του. Η συνισταμένη δύναμή που ασκείται πάνω του καθορίζει την επιτάχυνσή/επιβράδυνσή του σύμφωνα με τη σχέση: $\vec{F} = m\vec{\alpha}$

Θα θεωρήσουμε ότι οι ***δυνάμεις τριβής είναι αμελητέες***, δηλαδή ότι το ρευστό μας έχει μηδενικό ιξώδες. Αν και η παραδοχή αυτή είναι λανθασμένη, εν τούτοις υπάρχουν περιπτώσεις όπου ισχύει σε ικανοποιητικό βαθμό, λόγω του μικρού λόγου των δυνάμεων τριβής ως προς άλλες δυνάμεις (συνήθως δυνάμεις βαρύτητας ή/και πίεσης). Υποθέτουμε λοιπόν ότι οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο προέρχονται μόνο από τη βαρύτητα και την πίεση:

$$\vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_P = m\vec{\alpha}$$

Η μελέτη επίσης απαιτεί τον ορισμό ενός κατάλληλου Συστήματος Συντεταγμένων (Σ.Σ.). Επειδή η κίνηση είναι γενικά τρισδιάστατη (3D) και μη μόνιμη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα Σ.Σ. από τα διαθέσιμα, όπως το *καρτεσιανό* (x,y,z,t), το *κυλινδρικό* (r,θ,z,t) και το *σφαιρικό* (r,θ,φ,t). Επιλέγουμε αυτό που ταιριάζει καλύτερα με τη γεωμετρία του προβλήματος.

Χωρίς να χαθεί η γενικότητα της ανάλυσης, στην παρούσα διάλεξη θα αναλύσουμε την κίνηση στο επίπεδο x–z, δηλαδή τη δισδιάστατη (2D) ροή και θα καταλήξουμε στις 2D εξισώσεις Euler (άτριβης ροής).



Στο παρακάτω σχήμα παριστάνεται η ροή ρευστού με την απεικόνιση της πορείας ενός σωματιδίου που περνάει από τα σημεία 1 και 2. Σε κάθε σημείο της πορείας του σωματιδίου, αυτό έχει μία ταχύτητα $\vec{U}$, όχι απαραίτητα σταθερή σε μέτρο και δ/νση. Για **μόνιμη ροή**, οι τροχιές αυτές είναι σταθερές στο χώρο και ονομάζονται *ροϊκές γραμμές* και η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη σε κάθε σημείο τους. Τα γειτονικά σωματίδια του ρευστού ακολουθούν άλλες τροχιές, οι οποίες δεν είναι απαραίτητα παράλληλες μεταξύ τους. Στη γενική περίπτωση του σχήματος, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε ένα Σ.Σ., (n,s), που να ακολουθεί τη γεωμετρία των ροϊκών γραμμών, δηλαδή η μία δ/νση (n) να είναι κάθετη στις γραμμές και η άλλη (s) να είναι εφαπτόμενη. Η αρχή του συστήματος είναι σε ένα αυθαίρετο σημείο της ροϊκής γραμμής, που απέχει απόσταση s από το σωματίδιο κατά μήκος της γραμμής.
Επειδή η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της ροϊκής γραμμής (**U_s=U, U_n=0**), ισχύει ότι: ***U*=d*s*/d*t***.
Επίσης από τον ορισμό της επιτάχυνσης (κατά την κίνηση): $\vec{\alpha} = d\vec{U}/dt$. Η επιτάχυνση μπορεί να αναλυθεί στις αντίστοιχες συνιστώσες του Σ.Σ. που χρησιμοποιούμε: $\vec{\alpha} = \alpha_s \vec{s} + \alpha_n \vec{n}$
Η συνιστώσα της επιτάχυνσης στη **δ/νση των ροϊκών γραμμών, α_s,** προκύπτει από την αλλαγή της ταχύτητας κατά μήκος των γραμμών, δηλαδή επειδή ***U*=*U*(*s*)**. Άρα (χρησιμοποιώντας αλλαγής διαφορικού): **$\alpha_s = dU/dt = (dU/ds)(ds/dt) = U(dU/ds)$**.
Η **κεντρομόλος επιτάχυνση, α_n**, εξαρτάται από το μέτρο της ταχύτητας και την ακτίνα καμπυλότητας των γραμμών ροής: **$\alpha_n = U^2/R$**, όπου η ακτίνα καμπυλότητας, R, είναι και αυτή συνάρτηση της θέσης πάνω στη γραμμή ροής, ***R*=*R*(*s*)**. Εάν η ακτίνα είναι άπειρου μέτρου, τότε οι ροϊκές γραμμές είναι ευθείες.
Γενικά οι δύο συνιστώσες δεν είναι μηδενικές, διότι αφενός η ταχύτητα, αφετέρου η ακτίνα καμπυλότητας είναι συναρτήσεις της θέσης στη ροϊκή γραμμή.

Η εφαπτομενική και η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης (κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής) οφείλονται στη δράση μία συνισταμένης δύναμης. Η συνιστώσες αυτής της δύναμης προέρχονται από την πίεση και τη βαρύτητα.

Α. Κατά μήκος της ροϊκής γραμμής

$\Sigma\delta F_s=\delta m\alpha_s=\delta mU(dU/ds)=\rho\delta VU(dU/ds)$ **(1)**

(όπου $\delta V=\delta s\delta n\delta y$=στοιχειώδης όγκος)

$\delta W_s=-\delta W\sin\theta=-\gamma\delta V\sin\theta$ **(2)**

$\delta F_{ps}=-(p+\delta p_s)\delta n\delta y+(p-\delta p_s)\delta n\delta y=-2\delta p_s\delta n\delta y$ **(3)**

όμως από το ανάπτυγμα Taylor, είναι:

$\delta p_s\approx(\partial p/\partial s)(\delta s/2)$ οπότε η (3) γίνεται:

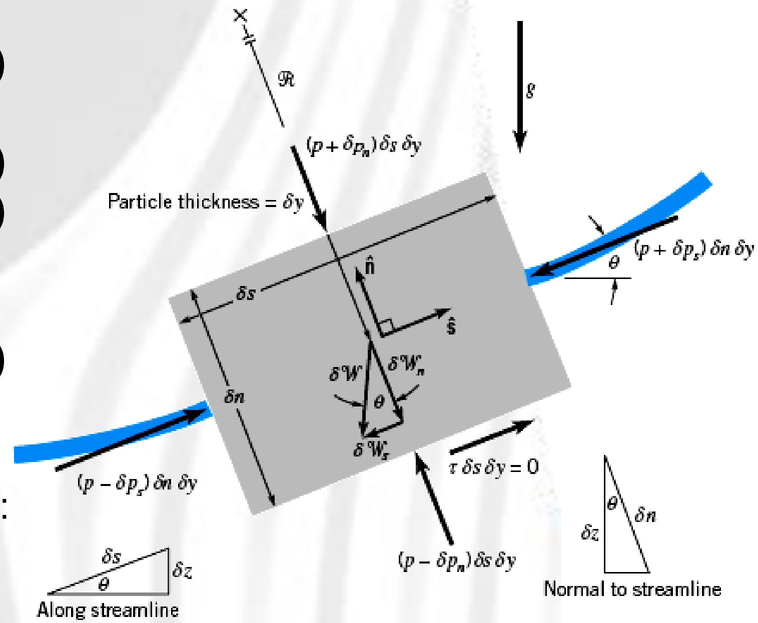
$\delta F_{ps}=-(\partial p/\partial s)\delta n\delta y\delta s=-(\partial p/\partial s)\delta V$ **(4)**

Δηλαδή η σχέση αυτή δηλώνει ότι δεν παίζει ρόλο το μέτρο της πίεσης, αλλά η διαφορά (κλίση) της πίεσης.

Εάν λοιπόν εξισώσουμε την (1) με το άθροισμα των (2) και (4):

$\delta F_s=\delta W_s+\delta F_{ps}\Rightarrow\rho\delta VU(dU/ds)=(-\gamma\sin\theta-\partial p/\partial s)\delta V$

και εάν απαλείψουμε το δV: $\boxed{-\gamma\sin\theta-\dfrac{\partial p}{\partial s}=\rho U\dfrac{\partial U}{\partial s}=\rho\alpha_s}$ **(5)**



Εδώ λοιπόν αποδεικνύεται ότι στα ανοικτά συστήματα, σημασία δεν έχει η μάζα (όπως έχει στα κλειστά) αλλά η μάζα ανά μονάδα όγκου, δηλαδή η πυκνότητα. Η φυσική ερμηνεία της παραπάνω σχέσης είναι ότι *η αλλαγή στην ταχύτητα που συμβαίνει στο ρευστό πάνω σε μία γραμμή ροής, οφείλεται σε συνδυασμό της κλίσης της πίεσης κατά μήκος της ροής και του βάρους του ρευστού*.

Στην υδροστατική, το 2ο μέλος (επιτάχυνση) είναι μηδενικό, οπότε εάν επεξεργαστούμε το 1ο μέλος, αντικαθιστώντας και τη δ/νση s με την κατακόρυφη y, παίρνουμε το γνωστό: $\boldsymbol{\delta p=-\gamma\delta y=-\rho g\delta y}$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι **sin*θ*=dz/ds**: $\boxed{-\gamma\dfrac{dz}{ds}-\dfrac{dp}{ds}=\dfrac{1}{2}\rho\dfrac{d\left(U^2\right)}{ds}}$ ή $\boxed{dp+\dfrac{1}{2}\rho d\left(U^2\right)+\gamma dz=0}$ και εφόσον ολοκληρώσουμε: $\boxed{\displaystyle\int\frac{dp}{\rho}+\frac{1}{2}U^2+gz=C}$, όπου C είναι η σταθερά ολοκλήρωσης που ορίζεται από την τιμή της συνάρτησης σε κάποιο σημείο της ροικής γραμμής. Η σχέση αυτή αποτελεί την εξίσωση **Euler** για 2D ροή. Εάν επιπλέον η πυκνότητα είναι σταθερή, δηλαδή η ροή είναι ασυμπίεστη και η πυκνότητα δεν παρουσιάζει θερμοκρασιακές μεταβολές: $\boxed{p+\dfrac{1}{2}\rho U^2+\gamma z=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}}$

Η παραπάνω σχέση είναι η ***εξίσωση Bernoulli*** και βασίζεται στις εξής παραδοχές: **(α)** ***άτριβη*** ροή, **(β)** ***μόνιμη*** ροή, **(γ)** ***ασυμπίεστη*** ροή (ρ=σταθερό) και **(δ)** ***ισχύει μόνο κατά μήκος μίας γραμμής ροής***.

Β. Κάθετα στη ροϊκή γραμμή

$\Sigma\delta F_n=\delta m a_n=\delta m(U^2/R)=\rho\delta V(U^2/R)$ (1)

(όπου $\delta V=\delta s\delta n\delta y$=στοιχειώδης όγκος)

$\delta W_n=-\delta W\cos\theta=-\gamma\delta V\cos\theta$ (2)

$\delta F_{pn}=-(p+\delta p_n)\delta s\delta y+(p-\delta p_n)\delta s\delta y=-2\delta p_n\delta s\delta y=$ (από Taylor **$\delta p_n\approx(\partial p/\partial n)(\delta n/2)$**)

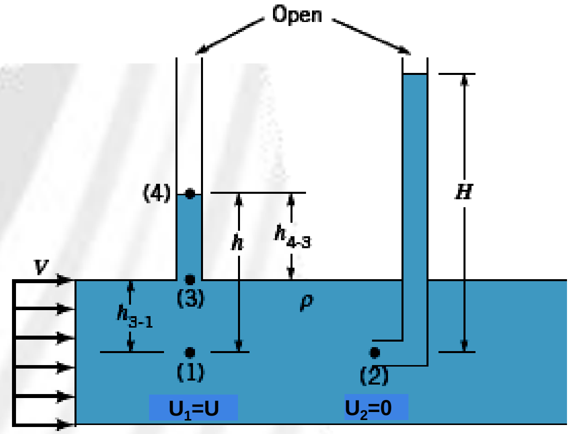
$=-(\partial p/\partial n)\delta n\delta s\delta y=-(\partial p/\partial n)\delta V$ (3)

Άρα: **$\delta F_n=\delta W_n+\delta F_{pn}\Rightarrow\rho\delta V(U^2/R)=(-\gamma\cos\theta-\partial p/\partial n)\delta V$** και επειδή **cos*θ*=dz/dn**: $\boxed{-\gamma\dfrac{dz}{dn}-\dfrac{\partial p}{\partial n}=\dfrac{\rho U^2}{R}}$ ή $\boxed{p+\rho\displaystyle\int\frac{U^2}{R}dn+\gamma z=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}}$ ***με τις ίδιες τέσσερις παραδοχές που παρουσιάστηκαν παραπάνω***.

Η φυσική ερμηνεία είναι ότι *η αλλαγή της δ/νσης της ροής οφείλεται σε συνδυασμό της επίδρασης των δυνάμεων πίεσης και βάρους που ασκούνται κάθετα στη ροϊκή γραμμή*. Για αμελητέα βαρύτητα (π.χ. αέρια) σχέση δηλώνει ότι με αύξηση της απόστασης από το κέντρο καμπυλότητας η πίεση αυξάνει (κυκλώνας).

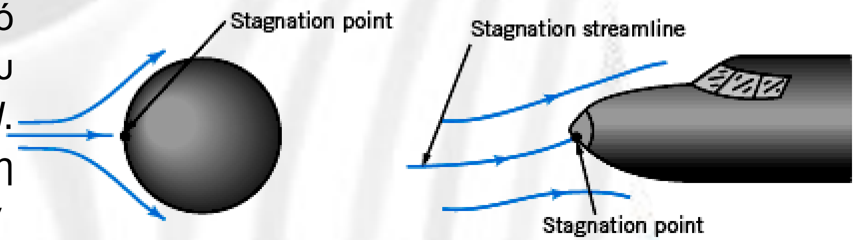
4.3 Στατική, Δυναμική, Αποκοπής & Ολική Πίεση

Η εξίσωση του Bernoulli που παρουσιάστηκε στη §4.5 έχει μονάδες πίεσης [N/m^2] και δηλώνει τη μετατροπή της πίεσης μεταξύ των διαφόρων μορφών της.



Ο 1ος όρος είναι η <u>θερμοδυναμική πίεση</u>, *p*, η οποία μπορεί να μετρηθεί όταν κινούμαστε μαζί με το ρευστό και για το λόγο αυτό ονομάζεται ***<u>στατική πίεση</u>***. Άλλη μέθοδος για τη μέτρηση της στατικής πίεσης είναι να τοποθετήσουμε το πιεσόμετρο σε θέση όπου το ρευστό δεν ρέει, π.χ. στη θέση (3) του σχήματος ($p_1=\gamma h_{3-1}+p_3=\gamma h_{3-1}+\gamma h_{4-3}=\gamma h$).

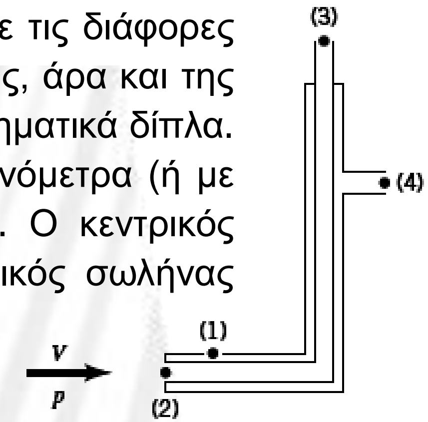
Ο 2ος όρος ονομάζεται ***<u>δυναμική πίεση</u>***, διότι προέρχεται από την ακινητοποίηση του ρευστού από ταχύτητα *U*. Αυτό συμβαίνει στο σημείο (2) όπου η αρχική ταχύτητα U_1 του ρευστού έχει μηδενιστεί και η πίεση εκεί ισούται με γH. Το σημείο (2) ονομάζεται *<u>σημείο ανακοπής</u>* και η πίεση εκεί ***<u>πίεση ανακοπής</u>***. Η πίεση ανακοπής ισούται (εάν εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli) με: $\boldsymbol{p_2=p_1+(1/2)\rho U_1^2}$ και είναι πάντα μεγαλύτερη της στατικής πίεσης στα σημεία της ροϊκής γραμμής όπου το ρευστό είναι σε κίνηση. Αποδεικνύεται ότι σε κάθε σώμα που βρίσκεται μέσα σε ροή ρευστού υπάρχει ένα σημείο ανακοπής στο οποίο καταλήγει μία ροϊκή γραμμή ανακοπής.



Τέλος, ο 3ος όρος είναι η ***<u>υδροστατική πίεση</u>*** και εκφράζει ουσιαστικά την αλλαγή πίεσης λόγω μεταβολής της δυναμικής ενέργειας (υψομετρικής θέσης).

Το άθροισμα όλων των όρων ονομάζεται ***<u>ολική πίεση</u>***, η οποία διατηρείται σταθερή κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής για άτριβη, μόνιμη και ασυμπίεστη ροή. Όταν οι διαφορές υδροστατικής πίεσης είναι αμελητέες, η ολική πίεση ισούται με το άθροισμα στατικής και δυναμικής πίεσης, δηλαδή με την πίεση ανακοπής.

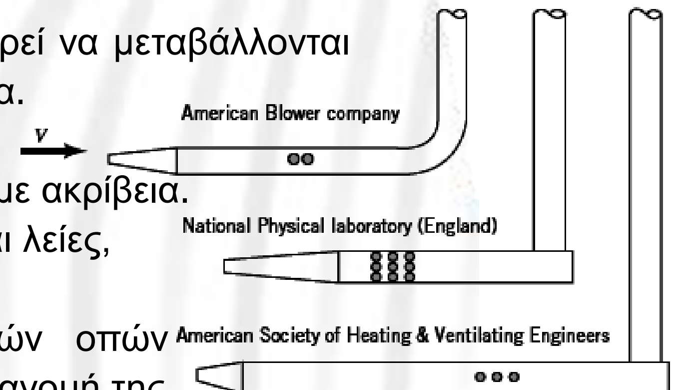
4.4 ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΜΕ ΣΩΛΗΝΑ PITOT–STATIC



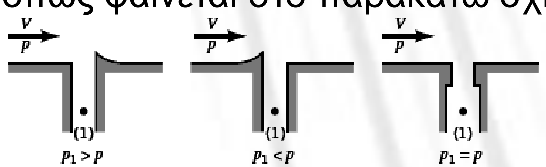
Η εξίσωση του Bernoulli, καθώς εκφράζει τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας με τις διάφορες μορφές πίεσης, ουσιαστικά οδηγεί σε έναν έμμεσο τρόπο μέτρησης της ταχύτητας, άρα και της παροχής. Αυτό βρίσκει εφαρμογή στον σωλήνα Pitot–static, ο οποίος φαίνεται σχηματικά δίπλα. Αποτελείται από δύο ομοαξονικούς σωλήνες, συνδεδεμένους με διαφορετικά μανόμετρα (ή με ένα διαφορικό), έτσι ώστε να μπορεί να μετρηθεί η διαφορά πίεσης (p_3–p_4). Ο κεντρικός σωλήνας μετράει την ***πίεση ανακοπής (ολική)***: $p_3=p_2=p+(1/2)\rho U^2$. Ο εξωτερικός σωλήνας αποτελείται από αρκετές μικρές οπές σε κατάλληλη απόσταση από την άκρη του σωλήνα, έτσι ώστε να μετρούν τη ***στατική πίεση***, άρα (εφόσον η υδροστατική πίεση μεταξύ (1) και (4) είναι αμελητέα): $p_4=p_1=p$.

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε: $U=\sqrt{2\left(p_3-p_4\right)/\rho}$

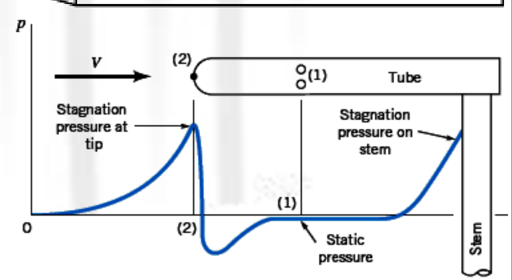
Η πραγματική μορφή και διαστάσεις του σωλήνα Pitot–static μπορεί να μεταβάλλονται ανάλογα με το πεδίο εφαρμογής, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Αν και ο σωλήνας Pitot–static είναι ένας εύχρηστος και οικονομικός τρόπος για τη μέτρηση της ταχύτητας, πρέπει η πίεση να μετράται με ακρίβεια. Σε περίπτωση όπου οι οπές μέτρησης της στατικής πίεσης δεν είναι λείες, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η μέτρηση περιέχει σφάλμα.



Επίσης η θέση των πλευρικών οπών πρέπει να είναι σωστή διότι η κατανομή της πίεσης στα τοιχώματα ενός σώματος μέσα στη ροή μεταβάλλεται μεταξύ της πίεσης ανακοπής (στο σημείο ανακοπής) έως και μικρότερη της στατικής πίεσης στη ροή, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν και η γωνιακή απόκλιση του σωλήνα από την ταχύτητα της ροής δίνει σφάλμα, όταν η γωνία είναι 12÷20° το σφάλμα είναι μικρότερο του 1%.

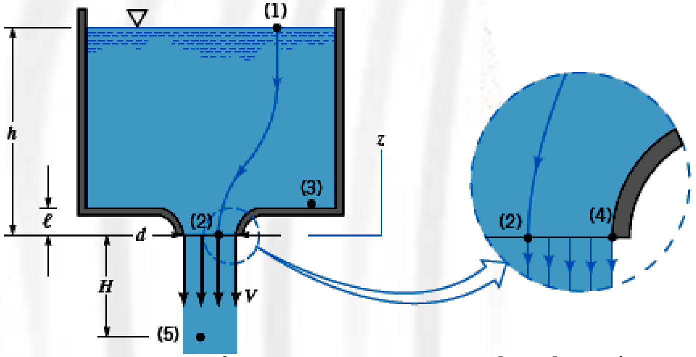


Η εξίσωση του Bernoulli, για ασυμπίεστη, μόνιμη και άτριβη ροή μεταξύ δύο σημείων, 1 και 2, της ίδια ροϊκής γραμμής, γράφεται $p_1 + (1/2)\rho U_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + (1/2)\rho U_2^2 + \gamma z_2$ και μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε από τις έξι μεταβλητές που εμφανίζονται, εφόσον γνωρίζουμε τις υπόλοιπες πέντε. Βοηθητικά πολλές φορές χρησιμοποιούμε και την αρχή διατήρησης της μάζας (***εξίσωση συνέχειας***) σε μονοδιάστατη μορφή:

$$\boxed{\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_2 A_2}$$

όπου $\dot{m}_1, \dot{m}_2$=μαζική παροχή [kg s^{-1}], ρ_1, ρ_2=πυκνότητα [kg m^{-3}], U_1, U_2=ταχύτητα [m s^{-1}], A_1, A_2=διατομή [m^2], στις θέσεις 1 και 2. Η σχέση αυτή δεν αφορά δύο σημεία της ροής πάνω στην ίδια ροϊκή γραμμή, αλλά δύο διατομές της ροής, δηλαδή οι τιμές της ταχύτητας είναι οι μέσες τιμές στις δύο διατομές και η παραδοχή της ίδιας ροϊκής γραμμής επεκτείνεται σε ολόκληρη τη διατομή, εφόσον σε κάθε σημείο της διατομής 1 αντιστοιχεί ένα σημείο της διατομής 2.

1. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΦΛΕΒΕΣ (FREE JETS)



Ένα από τα παλαιότερα προβλήματα είναι ο υπολογισμός της ταχύτητας εκροής μεγάλης ανοικτής δεξαμενής. Η ροή του ρευστού περνάει μέσα από ***ακροφύσιο*** (nozzle), το οποίο προκαλεί την επιτάχυνσή της (λόγω στένωσης της διατομής). Η εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 (ελεύθερη επιφάνεια) και 2 (έξοδος ακροφυσίου) δίνει ότι:

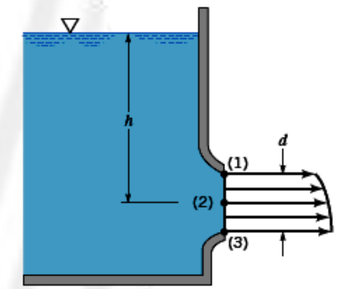
$$\gamma h = (1/2)\rho U^2$$

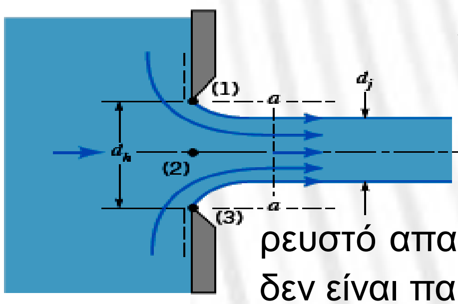
όπου h=(z_1–z_2), U_1≈0 (επειδή η δεξαμενή είναι μεγάλη), U_2=U και p_1=p_4=p_α (p_α=ατμοσφαιρική πίεση) και από το 2ο Νόμο του Newton κάθετα στις ροϊκές γραμμές (§4.5): $-\gamma(dz/dn) - (dp/dn) = (\rho U^2/R)$ για ευθύγραμμες ροϊκές γραμμές (R=∞) και επειδή στην ίδια οριζόντιο dz/dn=0, τότε και dp/dn=0, δηλαδή p_2=p_4, άρα και p_1=p_2. Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα: *όλη η δυναμική ενέργεια στο σημείο 1 μετατρέπεται σε κινητική στο 2*.

$$\boxed{U = \sqrt{2\frac{\gamma h}{\rho}} = \sqrt{2gh}}$$

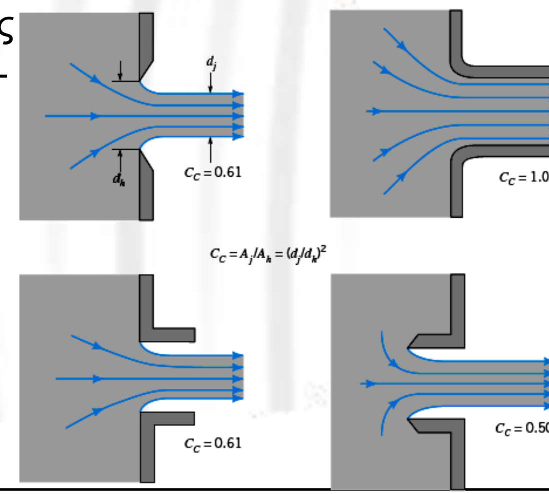
Στο σημείο 5, πιο κάτω από το στόμιο του ακροφυσίου, η εξίσωση του Bernoulli δίνει ότι: $\boxed{U = \sqrt{2g(h+H)}}$ δηλαδή η ταχύτητα αυξάνεται. Όμως από τη σχέση διατήρησης της μάζας (§4.8) συνεπάγεται ότι η διάμετρος της φλέβας συνεχώς μειώνεται, φαινόμενο που όντως παρατηρείται στην πράξη (π.χ. βρύση).

Την περίπτωση της οριζόντιας φλέβας του διπλανού σχήματος, η ταχύτητα εξόδου στο σημείο 2 είναι λίγο μεγαλύτερη από ότι στο 1 και λίγο μικρότερη από ότι στο 3, λόγω της υψομετρικής τους διαφοράς. Εάν όμως $d \ll h$, τότε η ταχύτητα στο κέντρο του ακροφυσίου μπορεί να θεωρηθεί μία πολύ καλή προσέγγιση της μέσης ταχύτητας στη διατομή εξόδου.





Όταν η διαμόρφωση της εξόδου δεν είναι ομαλή αλλά οξεία, τότε το ρευστό δυσκολεύεται να "στρίψει" απότομα κατά 90° και η διατομή της φλέβας, d_j, είναι μικρότερη από τη διάμετρο του στομίου, d_h. Το φαινόμενο ονομάζεται ***vena contracta*** και οφείλεται στο γεγονός ότι για την απότομη στροφή 90° (R=0) το ρευστό απαιτεί άπειρη κλίση πίεσης και οι ροϊκές γραμμές δεν είναι παράλληλες. Στην πραγματικότητα η ροή ακολουθεί καμπυλότητα $0<R<\infty$ και η πίεση κάθετα στις γραμμές ροής δεν είναι ομοιόμορφη παρά μόνο στο σημείο όπου εμφανίζεται η vena contracta, όπου βέβαια οι ροϊκές γραμμές είναι παράλληλες. Η εμφάνιση και η θέση της vena contracta εξαρτάται από τη γεωμετρία του στομίου εξόδου. Μερικά παραδείγματα δίνονται στα παράπλευρα σχήματα, όπου επίσης αναγράφεται και ο συντελεστής διαστολής, $\boldsymbol{C_c=A_j/A_h}$, όπου A_h και A_j είναι οι διατομές εξόδου και της vena contracta, αντίστοιχα.

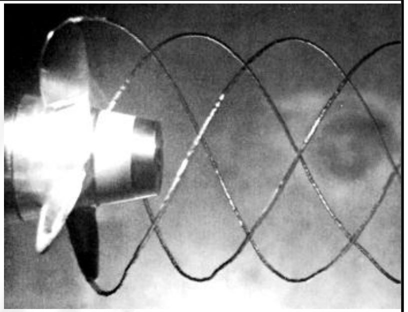


2. ΡΟΗ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

Σε περίπτωση όπου η ροή περιορίζεται μέσα σε κάποιο αγωγό, δεν γνωρίζουμε γενικά τη στατική πίεση, διότι δεν υπάρχει άμεση επικοινωνία με την ατμόσφαιρα. Τέτοιου είδους ροές είναι μέσα σε αγωγούς με κυμαινόμενη διατομή, σε διαχύτες, ακροφύσια, κ.λπ., όπου η τιμή της ταχύτητας μεταβάλλεται λόγω αλλαγής της διαθέσιμης επιφάνειας ροής. Όπως προαναφέρθηκε (§4.8) σε αυτές τις περιπτώσεις μαζί με την εξίσωση του Bernoulli χρησιμοποιείται και η εξίσωση της συνέχειας: $\boxed{\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_2 A_2}$ η οποία εκφράζει τη διατήρηση της μάζας, δηλαδή ότι η μαζική παροχή είναι η ίδια σε κάθε διατομή για μόνιμη ροή. Επειδή όμως η εξίσωση Bernoulli προϋποθέτει και ασυμπίεστη ροή (*ρ*=σταθερό), προκύπτει ότι είναι ίδια και η ογκομετρική παροχή, ***Q***, σε κάθε διατομή: $\boxed{Q_1 = Q_2 \Rightarrow U_1 A_1 = U_2 A_2}$
Σημειώνεται ότι η μαζική και η ογκομετρική παροχή συνδέονται μέσω της πυκνότητας: $\boxed{\dot{m} = \rho Q}$. Η σχέση αυτή αποτελεί την εξίσωση της συνέχειας για ασυμπίεστη ροή.

3. ΣΥΜΠΙΕΣΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΠΗΛΑΙΩΣΗ

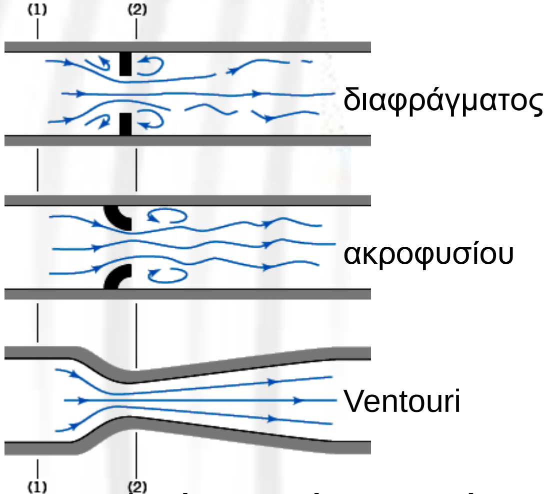
Ο νόμος του Bernoulli δηλώνει ότι (για μηδενική μεταβολή της υψομετρικής στάθμης), όταν αυξάνει η ταχύτητα μειώνεται η πίεση (π.χ. άντωση σε αεροτομή). Επειδή λοιπόν η μεταβολή της ταχύτητας μπορεί να είναι σημαντική, αντίστοιχη είναι και μεταβολή της πίεσης. Στην περίπτωση αύξησης της πίεσης και εφόσον το ρευστό είναι αέριο, μπορεί να εμφανιστούν φαινόμενα συμπιεστότητας. Για μείωση της πίεσης και εφόσον πρόκειται για υγρό, εάν αυτή πέσει κάτω από την πίεση ατμών, p_v (η οποία είναι ιδιότητα των υγρών και εξαρτάται από τη θερμοκρασία), τότε προκαλείται βρασμός (αλλαγή φάσης από υγρή σε αέρια) χωρίς απαραίτητη αύξηση θερμοκρασίας και ονομάζεται ***σπηλαίωση*** (cavitation). Παράδειγμα αποτελεί το λάστιχο κήπου όταν του περιορίζουμε πολύ τη διατομή εξόδου, ο συριστικός θόρυβος που προκαλείται οφείλεται στις φυσαλίδες που δημιουργούνται. Όταν αργότερα (κατάντη της ροής) η πίεση ανέλθει πάνω από την p_v, τότε οι φυσαλίδες σπάζουν βίαια και το αέριο υγροποιείται πάλι προκαλώντας όμως τρομακτικές τιμές της πίεσης στην περιοχή των φυσαλίδων (έως 690 [MPa]=6900 [bar]) που μπορεί να προκαλέσουν φθορά ή ακόμη και θραύση εξαρτημάτων (π.χ. πτερωτή αντλίας ή προπέλας πλοίου, μέρη βανών, κ.λπ.). Στο σχήμα φαίνεται η δημιουργία ρεύματος φυσαλίδων στην άκρη (tip) προπέλας πλοίου, λόγω της υψηλής περιστροφής της, το οποίο κατευθύνεται κατάντη της προπέλας χωρίς να προσκρούει σε στερεό όριο. Το φαινόμενο ονομάζεται tip cavitation.



4. ΡΟΟΜΕΤΡΑ

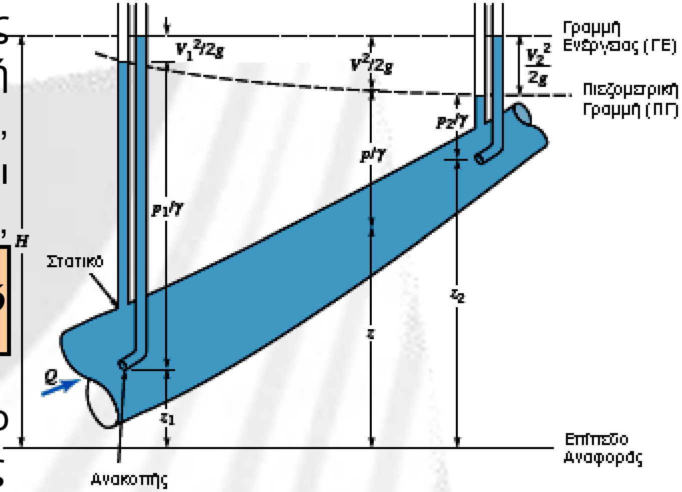
Υπάρχουν πολλές συσκευές μέτρησης της ταχύτητας ή της παροχής που βασίζονται στο νόμο του Bernoulli. Ο σωλήνας Pitot–static είναι μία από αυτές και μετρά τη σημειακή τιμή της ταχύτητας. Οι συσκευές του σχήματος μετρούν απευθείας την ογκομετρική παροχή σε κλειστούς αγωγούς και βασίζονται στην ίδια αρχή: *προκαλούν μία στένωση της διατομής που έχει ως αποτέλεσμα την επιτάχυνση της ροής, άρα την πτώση της στατικής πίεσης, την οποία και μετρούμε.*

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται τα ροόμετρα τύπου **διαφράγματος**, **ακροφυσίου** και **Ventouri**. Με την υπόθεση ότι δεν υπάρχουν απώλειες, για ασυμπίεστη και μόνιμη ροή, για την ίδια οριζόντια στάθμη ($z_1=z_2$), η εξίσωση Bernoulli γράφεται ως: $\boldsymbol{p_1+(1/2)\rho U_1^2=p_2+(1/2)\rho U_2^2}$ και εάν θεωρήσουμε ομοιόμορφη ροή (ή ισοδύναμα τις μέσες τιμές της ταχύτητας σε κάθε θέση), η εξίσωση της συνέχειας δίνει ότι: $\boldsymbol{Q=A_1U_1=A_2U_2}$, άρα η παραπάνω σχέση του Bernoulli γίνεται:



$$\boxed{Q=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho\left[1-(A_2/A_1)^2\right]}}}$$

Προφανώς, στην πραγματικότητα η παροχή μέσα από τα ροόμετρα είναι μικρότερη της θεωρητικής λόγω των απωλειών που δεν είναι δυνατό να εξαλειφθούν. Το ποσοστό των απωλειών κυμαίνεται από 1 έως και 40 [%] και εκφράζεται από τον συντελεστή του οργάνου C (=0.98 για απώλειες 2%, κ.ο.κ.).



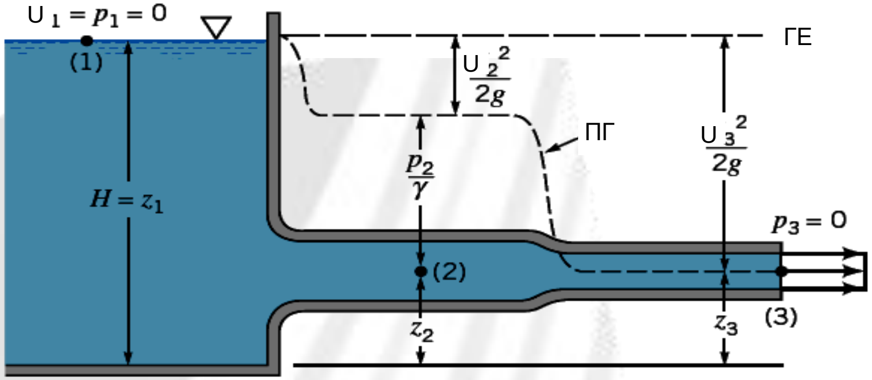
Η εξίσωση του Bernoulli αποτελεί ουσιαστικά την εξίσωση της διατήρησης της ενέργειας και εκφράζει, πάνω σε μία ροϊκή γραμμή, το χωρισμό της στις διάφορες μορφές της (δυναμική, εντατική και κινητική) για μόνιμη, άτριβη και ασυμπίεστη ροή. Είναι σκόπιμο να διαιρέσουμε την εξίσωση της (§4.5) με το ειδικό βάρος, *γ*, ώστε να εκφραστεί η ενέργεια ως **μανομετρικό ύψος** (head) και έχει μονάδες μήκους. Έχουμε λοιπόν τα μανομετρικά της πίεσης, της στάθμης και της ταχύτητας, ενώ το ολικό μανομετρικό, *H*, παραμένει σταθερό, κατά μήκος της ροϊκής γραμμής, όπως αντίστοιχα η ολική ενέργεια.

$$\boxed{\frac{p}{\gamma}+\frac{U^2}{2g}+z=H=\textit{σταθερό}}$$

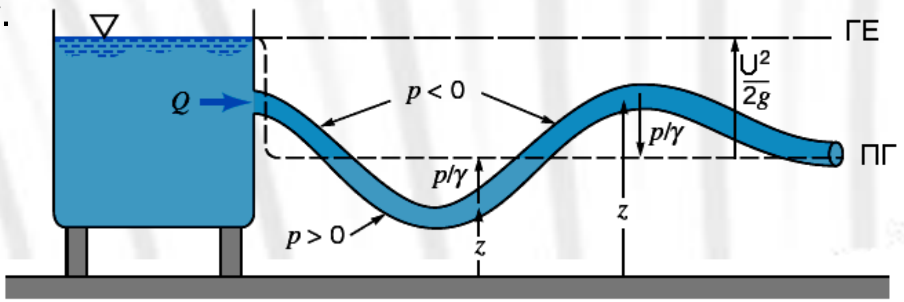
Ορίζουμε ως **Γραμμή Ενέργειας (ΓΕ)**, τη γραμμή κατά μήκος της ροής, η οποία εκφράζει σε κάθε θέση την ολική διαθέσιμη ενέργεια του ρευστού. Με βάση τις υποθέσεις που ισχύουν για την εξίσωση του Bernoulli, ιδιαίτερα αυτή της άτριβης ροής, η ΓΕ είναι μία ευθεία, οριζόντια γραμμή, η οποία φαίνεται στο σχήμα ως συνεχής γραμμή. Το ολικό μανομετρικό, *H*, το οποίο αντιστοιχεί στην ολική ενέργεια, μπορεί να μετρηθεί από έναν σωλήνα Pitot (το μέλος του Pitot–static που μετρά την πίεση ανακοπής) και να διαβαστεί απευθείας ως μανομετρικό ύψος στην κλίμακα του συνδεδεμένου μανομέτρου τύπου U. Το ολικό μανομετρικό, όπως η αντίστοιχη πίεση, ονομάζεται και μανομετρικό ανακοπής (stagnation).

Εάν συνδέσουμε στο σωλήνα ένα απλό πιεσόμετρο, η ένδειξη στον σωλήνα τύπου U θα μας δώσει απευθείας το άθροισμα της στατικής πίεσης και της στάθμης, $p/\gamma+z$, το οποίο ονομάζεται πιεζομετρικό ύψος και εάν χαράξουμε κατά μήκος της ροής τη γραμμή που εκφράζει την τιμή του, δημιουργείται η **Πιεζομετρική Γραμμή (ΠΓ)**, η οποία φαίνεται στο σχήμα ως διακεκομμένη γραμμή. **Η ΠΓ και βρίσκεται πάντοτε κάτω από τη ΓΕ και η διαφορά τους είναι το μανομετρικό της ταχύτητας $U^2/2g$.**

Στο διπλανό σχήμα παριστάνονται οι δύο γραμμές. Επειδή δεν υπάρχουν απώλειες τριβής, η ΓΕ είναι μία οριζόντια ευθεία που περνάει από τη στάθμη της δεξαμενής διότι στη θέση 1 το ολικό μανομετρικό ισούται με τη στάθμη, z_1, αφού p_1=U_1=0. Αντίθετα, η ΠΓ δεν είναι παντού οριζόντια, αφού η ταχύτητα της ροής μεταβάλλεται μέσα στη δεξαμενή μεταξύ του 0 και της τιμής U_2 και στη στένωση του αγωγού μεταξύ U_2 και U_3. Επίσης, στη θέση 3, επειδή η στατική πίεση είναι μηδενική (η σχετική τιμή της, δηλαδή η απόλυτη στατική πίεση ισούται με την ατμοσφαιρική), η ΠΓ ταυτίζεται με τη στάθμη z_3. Άρα η παράσταση της εξίσωσης της ενέργειας με τη μορφή μανομετρικού, δηλαδή σε κλίμακα μήκους, προσφέρει μία άμεση γραφική απεικόνιση της ενεργειακής στάθμης του ρευστού σε κάθε θέση της ροής, ιδιαίτερα σε σωληνογραμμές.



Όταν λοιπόν ο σωλήνας είναι κάτω από την ΠΓ, τότε η στατική του πίεση είναι θετική, δηλαδή μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής. Αντίθετα, εάν είναι πάνω από την ΠΓ, είναι αρνητική δηλαδή μικρότερη της ατμοσφαιρικής. Άρα η υπό κλίμακα παράσταση της σωληνογραμμής και της ΠΓ, προσφέρει έναν άμεσο τρόπο ανάγνωσης της στατικής πίεσης.



Όπως προαναφέρθηκε, η εξίσωση Bernoulli ισχύει υπό ορισμένες προϋποθέσεις: η ροή είναι **(α) άτριβη**, **(β) ασυμπίεστη**, **(γ) μόνιμη** και η εξίσωση ισχύει **επάνω στην ίδια ροϊκή γραμμή**. Παρακάτω σχολιάζονται συνοπτικά οι αποκλίσεις όταν δεν ισχύουν οι υποθέσεις αυτές. Εδικά η περίπτωση των απωλειών (τριβές), θα συζητηθεί λεπτομερώς σε επόμενη διάλεξη, άρα δεν αναφέρεται επί του παρόντος.

1. ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

Όταν οι διαφορές πίεσης είναι σημαντικές και το ρευστό είναι αέριο, τότε η υπόθεση της ασυμπίεστης ροής, δηλαδή της σταθερής πυκνότητας, δεν ισχύει. Ακόμη και εάν η ροή είναι ισοθερμοκρασιακή, η μεταβολή της πίεσης προκαλεί μεταβολές της πυκνότητας, με αποτέλεσμα η ολοκλήρωση της εξίσωσης στην §4.5 που οδήγησε στην εξίσωση του Bernoulli να μην είναι δυνατή, εκτός ειδικών περιπτώσεων. Δύο από αυτές είναι (οι υπόλοιπες τρεις υποθέσεις παραμένουν σε ισχύ):

- Ισοθερμοκρασιακή ροή ιδανικού αερίου ($\rho=p/RT$): $\dfrac{U_1^2}{2g} + z_1 + \dfrac{RT}{g}\ln\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right) = \dfrac{U_2^2}{2g} + z_2$
- Ισεντροπική ροή ιδανικού αερίου ($\rho=p/RT$): $\left(\dfrac{k}{k-1}\right)\dfrac{p_1}{\rho_1} + \dfrac{U_1^2}{2} + gz_1 = \left(\dfrac{k}{k-1}\right)\dfrac{p_2}{\rho_2} + \dfrac{U_2^2}{2} + gz_2$

όπου k=ο λόγος των ειδικών θερμοχωρητικοτήτων ($=C_p/C_v$) που είναι ίσος με 1.4 για τον αέρα. Παρατηρείται ότι εμφανίζεται ένας επιπλέον όρος την εξίσωση του Bernoulli για συμπιεστή ροή, όπως επίσης και ότι εμφανίζεται η τιμή της πυκνότητας στις θέσεις 1 και 2, επειδή δεν είναι πλέον σταθερή.

2. ΜΗ–ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ

Η υπόθεση ότι η ταχύτητα εξαρτάται μόνο από τη θέση πάνω στη ροϊκή γραμμή, $V=V(s)$, παύει να ισχύει σε μη–μόνιμη ροή και είναι συνάρτηση και του χρόνου, δηλαδή $V=V(s,t)$. Συνεπώς η επιτάχυνση, που ισούται με την παράγωγο της ταχύτητας (βλ. §4.3), έχει δύο μέρη, τη χωρική και τη χρονική επιτάχυνση: $\boldsymbol{\alpha_s=\partial V/\partial t+V\partial V/\partial s}$, αντί για $\boldsymbol{\alpha_s=V\partial V/\partial s}$ που ισχύει για μόνιμη ροή. Συνεπώς, ενώ για μόνιμη ροή η επιτάχυνση οφείλεται στην αλλαγή της ταχύτητας με τη θέση του σωματιδίου ρευστού, στη μη–μόνιμη ροή υπάρχει επιπρόσθετα επιτάχυνση λόγω της μεταβολής στο χρόνο της ταχύτητας στο ίδιο σημείο της ροϊκής γραμμής. Έτσι λοιπόν εάν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία (§4.3) οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} ds + dp + \frac{1}{2}\rho d(\boldsymbol{U}^2) + \gamma\, dz = 0$$

και εάν ολοκληρωθεί (για ασυμπίεστη ροή) μεταξύ των σημείων 1 και 2 της ίδια ροϊκής γραμμής:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{U}_1^2 + \gamma z_1 = \rho \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} ds + p_2 + \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{U}_2^2 + \gamma z_2$$

Η ολοκλήρωση του επιπλέον όρου είναι δύσκολη και μπορεί να γίνει αναλυτικά μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις όπου ισχύουν συγκεκριμένες συνθήκες. Πολλές φορές μπορούμε να υποθέσουμε "ψευδομόνιμη" ροή, δηλαδή να αντιμετωπίσουμε την όλη μη–μόνιμη ροή ως μία αλληλουχία μόνιμων ροών.

3. ΑΣΤΡΟΒΙΛΗ ΡΟΗ

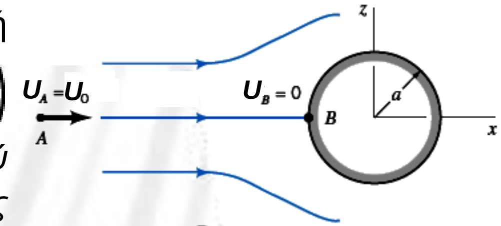
Μία βασική παραδοχή της εξίσωσης Bernoulli, είναι ότι ισχύει πάνω σε μία ροϊκή γραμμή, δηλαδή παράλληλα και όχι κάθετα στις γραμμές ροής. Αν και η τιμή της σταθεράς της εξίσωσης του Bernoulli είναι διαφορετική σε κάθε ροϊκή γραμμή, υπάρχουν (και μάλιστα συχνά) περιπτώσεις όπου έχει την ίδια τιμή. Αυτό συμβαίνει όταν η ροή έχει γενικά μία κατεύθυνση (π.χ. μέσα σε αγωγό) και τα σωματίδια του ρευστού δεν παρουσιάζουν περιστροφή κατά την κίνησή τους. Η περιστροφή εκφράζεται μαθηματικά από τη **στροβιλότητα**.

4. ΑΤΡΙΒΗ ΡΟΗ

Η τελευταία παραδοχή της απουσίας τριβών, άρα απωλειών ενέργειας, θα συζητηθεί διεξοδικά σε επόμενη διάλεξη. Η παραδοχή αυτή περιλαμβάνει και τις περιπτώσεις όπου παρουσιάζονται εξωτερικές πηγές (εκτός δηλαδή της δράσεως του ιξώδους) ή καταβόθρες ενέργειας (π.χ. αντλία) κατά την πορεία ενός σωματιδίου ρευστού πάνω στη ροϊκή γραμμή.

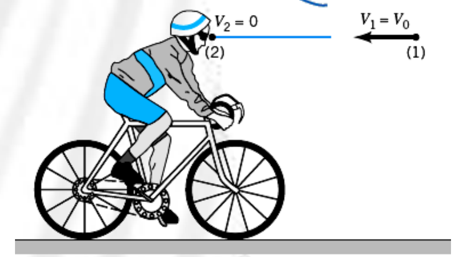
1. Η ταχύτητα της ασυμπίεστης, άτριβης, μόνιμης ροή πάνω σε οριζόντια ροϊκή γραμμή μπροστά από μία σφαίρα, δίνεται από τη σχέση:

$$U = U_0\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right)$$

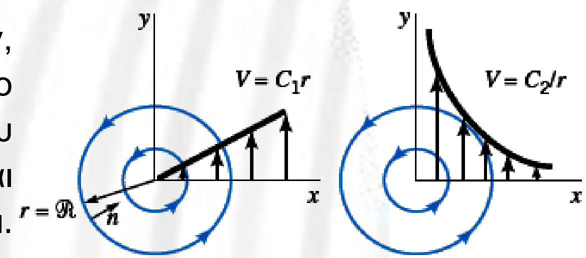


Υπολογίστε τη μεταβολή της πίεσης κατά μήκος της ροϊκής γραμμής μεταξύ ενός σημείου μακριά από τη σφαίρα (x_A=–∞ και U_A=U_0) και της επιφάνειας της σφαίρας (x_B=–α και U_B=0).

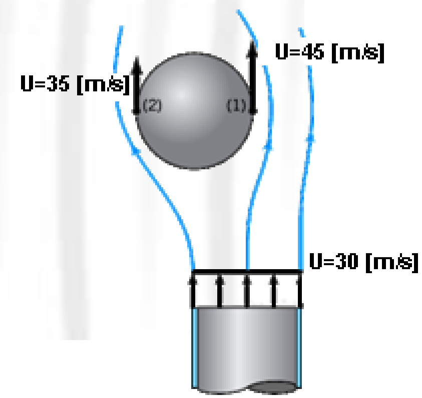
2. Ποδηλάτης κινείται με σταθερή ταχύτητα U_0. *Υπολογίστε τη διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων 1 και 2.* **(1/2)ρU_0^2**.



3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι ροϊκές γραμμές δύο μόνιμων, ασυμπίεστων, άτριβων και δισδιάστατων πεδίων ροής. Το πεδίο ταχύτητας του πρώτου είναι $U(r)=C_1 r$ και του δεύτερου $U(r)=C_2/r$, όπου r=ακτινική συντεταγμένη (σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων) και C_1, C_2 είναι σταθερές. Και στα δύο πεδία οι ροϊκές γραμμές είναι κύκλοι. *Υπολογίστε το πεδίο της πίεσης, p=p(r), με p=p_0 στο r=r_0.*

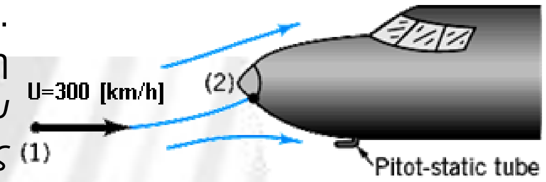


4. Δέσμη αέρα ταχύτητας 30 [m s^{-1}] ρέει ασύμμετρα γύρω από σφαίρα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Λόγω ασυμμετρίας, η ταχύτητα στη μία πλευρά της σφαίρας (σημείο 1) είναι μεγαλύτερη από ότι στην άλλη (σημείο 2). Ο αέρας έχει πυκνότητα ίση με 1.225 [kg m^{-3}]. *Υπολογίστε την διαφορά πίεσης (p_2–p_1), αγνοώντας τριβές και τη βαρύτητα.* **490 [Pa]**.

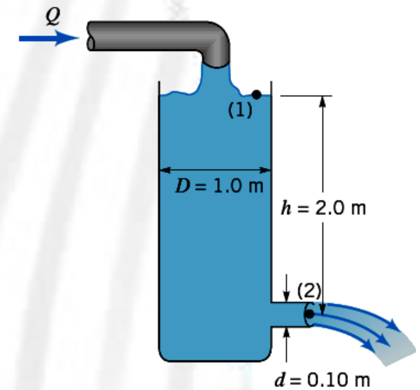


4.8 ΑΣΚΗΣΕΙΣ – (β)

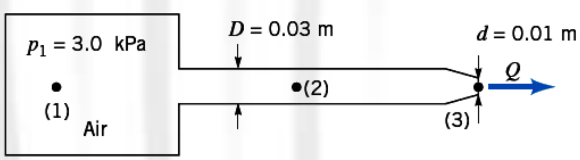
5. Αεροπλάνο κινείται με ταχύτητα 300 [km h^{-1}] σε υψόμετρο 10000 ποδών. Η πυκνότητα του αέρα σε αυτό το ύψος είναι 0.905 [kg m^{-3}], ενώ η ατμοσφαιρική πίεση είναι 69692 [Pa]. *Υπολογίστε την πίεση στη μύτη του αεροσκάφους (σημείο 2) και τη διαφορά πίεσης που δείχνει ο σωλήνας Pitot–static, ο οποίος βρίσκεται στο κάτω μέρος της ατράκτου*. **72834.36 [Pa], 3142.36 [Pa]**.



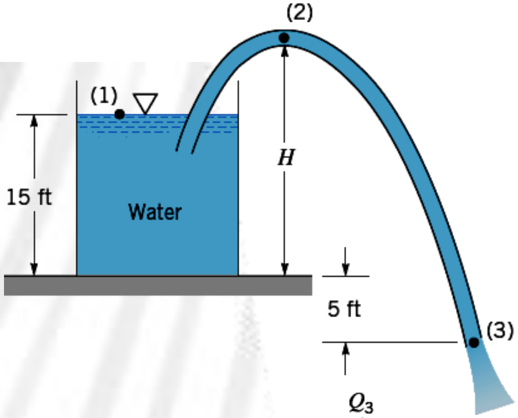
6. Από το κυλινδρικό δοχείο του σχήματος, διαμέτρου D=1.0 [m], εκρέει νερό από σωλήνα διαμέτρου d=0.1 [m]. *Ποια είναι η παροχή όγκου Q στον σωλήνα τροφοδοσίας στην κορυφή του δοχείου, ώστε η στάθμη να παραμένει σταθερή και ίση με h=2.0 [m]? Ποιος είναι ο λόγος των διαμέτρων (d/D) κάτω από τον οποίο το σφάλμα υπολογισμού της παροχής από την παράλειψη της κινητικής ενέργειας στο σημείο (1) είναι μικρότερο του 1[%]*. **0.0492 [m^3 s^{-1}], 0.3787**.



7. Αέρας ρέει σταθερά από μία δεξαμενή σταθερής σχετικής πίεσης 3.0 [kPa], από ακροφύσιο διαμέτρου d=0.01 [m], αφού πρώτα διαρρεύσει μέσω σωλήνα διαμέτρου D=0.03 [m]. Εάν οι συνθήκες στην έξοδο είναι p=101 [kPa] και θ=15 [^{o}C], *υπολογίστε τη μαζική παροχή και την πίεση στο σημείο 2*. **5.42×10^{-2} [kg s^{-1}], 2963 [Pa]**.



8. Νερό θερμοκρασίας 17 [^{o}C] αποχετεύεται από σιφόνι σταθερής διαμέτρου, όπως φαίνεται στο σχήμα. *Υπολογίστε τη μέγιστη ανύψωση, H, του σιφονιού για την οποία μπορεί να υπάρξει αποχέτευση του νερού χωρίς την εμφάνιση σπηλαίωσης.* Το τέλος του σιφονιού βρίσκεται 5 [ft] κάτω από τον πυθμένα της δεξαμενής, η οποία περιέχει νερό βάθους 15 [ft]. Η πίεση ατμών του νερού είναι 1767.12 και 2503.47 [Pa] για τους 15.55 και 21.11 [^{o}C]. **8.60 [m]**.



9. Σε αγωγό ρέει νερό, το οποίο διακλαδίζεται όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Εάν η παροχή εισόδου είναι Q_1=0.065 [m^3 s^{-1}] και η σχετική πίεση 350 [kPa], *(α) υπολογίστε την πίεση στις εξόδους 2 και 3, εάν από το στόμιο 2 εξέρχεται το 60 [%] της παροχής και (β) ποιες οι επιμέρους παροχές των δύο κλάδων εάν η πίεση στα σημεία 2 και 3 είναι η ίδια?* **(α) p_2=362419, p_3=359317 [Pa], (β) Q_2=0.0396, Q_3=0.0254 [m^3 s^{-1}]**.