ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ Ι

κ. ΣΟΦΙΑΛΙΔΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

5.1 ΠΕΔΙΟ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ – (α)

Στην παρούσα διάλεξη θα ασχοληθούμε με την κίνηση των ρευστών, χωρίς να μας ενδιαφέρει η αιτία της κίνησης (οι δυνάμεις), δηλαδή θα μελετήσουμε την ***κινηματική*** των ρευστών. Η κίνηση των ρευστών, δηλαδή η ροή, προκαλείται από τις παραμικρές διατμητικές τάσεις σε κάποιο σημείο του ρευστού ή/και τη διαφορά στις ορθές τάσεις (πίεση) μεταξύ δύο σημείων του ρευστού.

Η ροή συνεπάγεται τη μακροσκοπική κίνηση μεγάλου αριθμού μορίων ρευστού από ένα σημείο του χώρου σε κάποιο άλλο ως συνάρτηση του χρόνου. Βέβαια, όπως αναφέρθηκε στην 1^{η} διάλεξη, δεν μελετάμε την κίνηση κάθε μορίου, αλλά με την υπόθεση του συνεχούς μέσου θεωρούμε ότι το ρευστό αποτελείται από *σωματίδια ρευστού* (που περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό μορίων) που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και με το περιβάλλον. Η ροή λοιπόν περιγράφεται από την *ταχύτητα* και την *επιτάχυνση* των σωματιδίων αυτών.

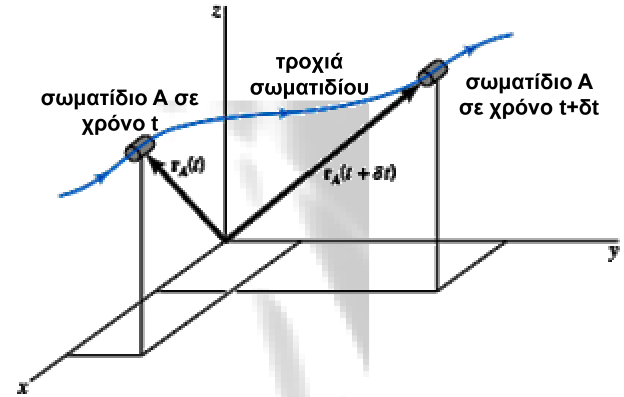
Τα μικροσκοπικά σωματίδια ρευστού είναι πυκνά συσσωρευμένα μεταξύ τους (όπως συνεπάγεται η θεώρηση του συνεχούς μέσου), άρα για κάθε χρονική στιγμή η περιγραφή των ιδιοτήτων του ρευστού (π.χ. πυκνότητα) ή των παραμέτρων της ροής (π.χ. ταχύτητα) είναι συνάρτηση της θέσης των σωματιδίων στο χώρο. Ό καθορισμός μέσω της θέσης στο χώρο ονομάζεται *περιγραφή πεδίου*. Φυσικά ο πλήρης καθορισμός δεν εξαρτάται μόνο από τη θέση στο χώρο, διότι με την πάροδο του χρόνου μπορεί να έχουμε μεταβολή στο ίδιο σημείο. Συνεπώς η πλήρης περιγραφή μίας ιδιότητας/παραμέτρου γίνεται τόσο στο χώρο, όσο και στο χρόνο. Π.χ. η θερμοκρασία, T, είναι μία συνάρτηση της μορφής $\boldsymbol{T=T(x,y,z,t)}$.

Μία συνάρτηση με ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η ***ταχύτητα*** του ρευστού:

$$\vec{U} = u(x,y,z,t)\vec{i} + \upsilon(x,y,z,t)\vec{j} + w(x,y,z,t)\vec{k}$$

όπου u, υ και w είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας στις αντίστοιχες διευθύνσεις, x, y και z ενός καρτεσιανού (έστω) συστήματος συντεταγμένων, ενώ $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$ τα μοναδιαία ανύσματα των αξόνων στις διευθύνσεις x, y και z, αντίστοιχα.

Όπως είναι γνωστό, η ταχύτητα ενός σώματος ορίζεται ως ο *ρυθμός μεταβολής του ανύσματος θέσης*, όπως φαίνεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας. Το άνυσμα θέσης $\vec{r}_A$, καθώς το σωματίδιο κινείται, είναι συνάρτηση του χρόνου και η χρονική του παράγωγος είναι η ταχύτητα του σωματιδίου $d\vec{r}_A/dt = \vec{U}_A$ και εφόσον θεωρήσουμε την ταχύτητα για όλα τα σωματίδια, έχουμε τη συνάρτηση της ταχύτητας της ροής $\vec{U} = \vec{U}(x,y,z,t)$.



Εφόσον η ταχύτητα είναι άνυσμα, έχει μέτρο και διεύθυνση. Το μέτρο είναι $U = |\vec{U}| = \sqrt{u^2 + \upsilon^2 + w^2}$. Η μεταβολή του μέτρου ή/και της διεύθυνσης της ταχύτητας συνιστά την ***επιτάχυνση*** του σωματιδίου του ρευστού (δηλαδή της ροής).

5.1.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΡΟΩΝ ΚΑΤΑ EULER & LAGRANGE

Υπάρχουν δύο μέθοδοι ανάλυσης στη ρευστοδυναμική. Η πρώτη βασίζεται στην αρχή του πεδίου που μόλις παρουσιάστηκε και είναι αυτή κατά ***Euler***. Στη μέθοδο αυτή το πεδίο ροής περιγράφεται πλήρως μέσω της έκφρασης όλων των παραμέτρων ως συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου και έτσι παίρνουμε πληροφορίες για το τι ισχύει για τη ροή σε συγκεκριμένα σημεία του χώρου καθώς το ρευστό ρέει διαμέσου αυτών.

Η δεύτερη, αυτή κατά ***Lagrange***, στηρίζεται στην παρακολούθηση συγκεκριμένων σωματιδίων ρευστού καθώς αυτά κινούνται, περιγράφοντας τη μεταβολή των παραμέτρων της ροής πάνω στα σωματίδια αυτά συναρτήσει του χρόνου. Δηλαδή τα σωματίδια είναι "μαρκαρισμένα" και οι ιδιότητές τους υπολογίζονται καθώς αυτά κινούνται.

Συνήθως στη Μηχανική Ρευστών χρησιμοποιείται η προσέγγιση του Euler, αν και υπάρχουν περιπτώσεις όπου βολεύει η προσέγγιση με τη μέθοδο κατά Lagrange. Βέβαια και οι δύο μέθοδοι είναι ισοδύναμες και εφόσον υπάρχει αρκετή πληροφορία σε μία από τις δύο, μπορούμε να την μετατρέψουμε στην άλλη.

5.1.2 ΜΟΝΟ–, ΔΙΣ– & ΤΡΙΣ–ΔΙΑΣΤΑΤΗ ΡΟΗ

Η ροή των ρευστών είναι γενικά ***τρισδιάστατη***, δηλαδή το άνυσμα της ταχύτητας αναλύεται σε τρεις μη–μηδενικές συνιστώσες (σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων). Όμως, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η συνιστώσα της ταχύτητας ή η παράγωγός της ως προς μία διεύθυνση είναι μηδενική, οπότε η ροή είναι ***δισδιάστατη*** (π.χ. η ροή σε έναν πολύ πλατύ αγωγό στο μεγαλύτερο μέρος του μπορεί να θεωρηθεί ως διασδιάστατη με μηδενική συνιστώσα αυτή κατά το πλάτος του αγωγού). Επίσης, υπάρχουν περιπτώσεις, όπου και σε μία δεύτερη διεύθυνση η αντίστοιχη συνιστώσα της ταχύτητας ή η παράγωγός της είναι μηδενική, οπότε η ροή θεωρείται ως ***μονοδιάστατη*** (π.χ. η ροή σε κυκλικό αγωγό, όπου αντί της τοπικής ταχύτητας χρησιμοποιούμε τη μέση ταχύτητα στη διατομή).

5.1.3 ΜΟΝΙΜΗ & ΜΗ–ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ

Στα προηγούμενα υποθέσαμε μόνιμη ροή, δηλαδή ότι η ταχύτητα δε μεταβάλλεται με το χρόνο, $\partial\vec{U}/\partial t = 0$. Στην πραγματικότητα βέβαια η ταχύτητα μεταβάλλεται με το χρόνο, άρα η ροή είναι μη–μόνιμη, αλλά υπό ορισμένες προϋποθέσεις μπορούμε να απλοποιήσουμε την ανάλυση. Οι μη–μόνιμες ροές χωρίζονται στις: (α) **περιοδικές**, (β) **μη–περιοδικές**, (γ) **εντελώς τυχαίες**. Παραδείγματα για την (α) αποτελούν οι ροές μέσα σε μία στροβιλομηχανή, για τη (β) το κλείσιμο μίας βάνας και το υδραυλικό πλήγμα που ενδεχομένως προκαλεί, ενώ για τη (γ) η τυρβώδης ροή εν γένει. Και στις τρεις περιπτώσεις, υπάρχει η δυνατότητα (υπό προϋποθέσεις) να θεωρηθούν ως μόνιμες εφόσον η χρονική κλίμακα που εξετάζουμε το πρόβλημα είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τις χρονικές κλίμακες της ροής, κάνουμε δηλαδή μία ολοκλήρωση στο χρόνο και αντί της στιγμιαίας χρησιμοποιούμε τη μέση (χρονικά) τιμή της ταχύτητας.

Τονίζεται ότι η έννοια της μόνιμης ή μη ροής αναφέρεται στο ίδιο σημείο του χώρου, δηλαδή κατά τη θεώρηση του Euler. Σε μία μόνιμη ροή εάν συγκρίνουμε την ταχύτητα σε δύο διαφορετικές θέσεις θεώρηση κατά Lagrange) τότε γενικά αυτές δεν θα είναι ίσες (βλ. εφαρμογές του νόμου του Bernoulli).

5.1.4 ΡΟΪΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ,ΙΝΩΔΕΙΣ ΦΛΕΒΕΣ & ΡΟΪΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ

Οι **ροϊκές γραμμές** (streamlines), οι **ινώδεις φλέβες** (streaklines) και οι **ροϊκές τροχιές** (pathlines) είναι τρόποι απεικόνισης της ροής. Οι πρώτες συνήθως χρησιμοποιούνται κατά την αναλυτική/υπολογιστική μελέτη, ενώ οι υπόλοιπες κατά την πειραματική προσέγγιση.

➢ Οι *ροϊκές γραμμές* είναι οι γραμμές στις οποίες σε κάθε σημείο το άνυσμα της ταχύτητας του ρευστού είναι εφαπτόμενο. Εάν η ροή είναι μόνιμη, οι ροϊκές γραμμές παραμένουν σταθερές σε σχήμα και θέση, ενώ σε μη–μόνιμη ροή αυτό δεν ισχύει. Η αναλυτική έκφραση των ροϊκών γραμμών εξάγεται από την ολοκλήρωση των εφαπτόμενων ευθειών στο πεδίο ταχύτητας, άρα για δισδιάστατη ροή η κλίση των ροϊκών γραμμών πρέπει να ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει το άνυσμα της ταχύτητας με τον άξονα x: $\mathbf{d}y/\mathbf{d}x=\upsilon/u$, οπότε εάν γνωρίζουμε το πεδίο της ταχύτητας συναρτήσει των συντεταγμένων x και y, μπορούμε να εξάγουμε με ολοκλήρωση τις ροϊκές γραμμές.

➢ Οι *ινώδεις φλέβες* δημιουργούνται από την ένωση όλων των σωματιδίων ρευστού που κάποτε πέρασαν από ένα κοινό σημείο. Εργαστηριακά μπορούν να εξαχθούν από διαδοχικές χρονικά φωτογραφίες σεσημασμένων σωματιδίων που περνούν από το ίδιο σημείο. Επίσης μπορούν να δημιουργηθούν άμεσα από την έγχυση σε σταθερό σημείο της ροής ενός ιχνηθέτη (tracer), π.χ. μελάνη σε νερό.

➢ Οι *ροϊκές τροχιές* δημιουργούνται όταν ενωθούν όλα τα σημεία από τα οποία έχει περάσει ένα συγκεκριμένο σωματίδιο ρευστού. Η ροϊκές τροχιές αντιστοιχούν πλήρως σε προσέγγιση κατά Lagrange.

Εφόσον η ροή είναι μόνιμη, η τροχιά ενός σωματιδίου ρευστού θα είναι η ίδια ακριβώς με τις τροχιές και άλλων σωματιδίων που έχουν περάσει από το ίδιο σημείο εκκίνησης, δηλαδή θα ταυτίζεται με όλες τις αντίστοιχες ινώδεις φλέβες. Οι τελευταίες θα είναι σε κάθε σημείο εφαπτόμενες της ταχύτητας της ροής, η οποία δεν αλλάζει λόγω μονιμότητας της ροής, άρα θα ταυτίζονται πάντοτε με τις ροϊκές γραμμές. **Συνεπώς για μόνιμη ροή οι ροϊκές γραμμές, οι ινώδεις φλέβες και οι ροϊκές τροχιές ταυτίζονται.**

Για την περιγραφή της ροής, όπως είδαμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε την προσέγγιση κατά Euler είτε κατά Lagrange. Και στις δύο όμως περιπτώσεις για να εφαρμόσουμε το 2ο Νόμο της Κίνησης του Newton, $\vec{F} = m\vec{\alpha}$, πρέπει να είμαστε σε θέση να περιγράψουμε κατάλληλα το άνυσμα της επιτάχυνσης, $\vec{\alpha}$. Για την, όχι τόσο συχνή, περίπτωση της περιγραφής κατά Lagrange, ακολουθούμε τα ίδια βήματα όπως στην κινηματική των στερεών σωμάτων και η επιτάχυνση είναι συνάρτηση του χρόνου, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$. Στην κατά Euler μέθοδο, η επιτάχυνση, όπως η ταχύτητα, αποτελεί μία μεταβλητή πεδίου, οπότε είναι συνάρτηση και του χώρου, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(x, y, z, t)$.

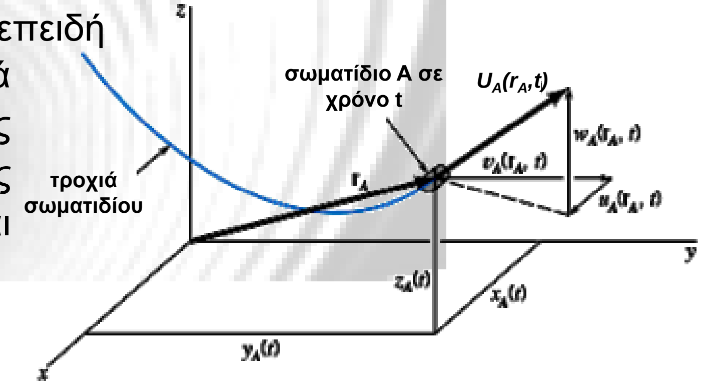
Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου ρευστού ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας. Για μη–μόνιμη ροή, η ταχύτητα σε συγκεκριμένο σημείο του χώρου μεταβάλλεται με το χρόνο, προκαλώντας έτσι ένα μέρος της επιτάχυνσης. Όμως, σε μόνιμη ή μη–μόνιμη ροή, επιτάχυνση προκαλείτε και από τη μεταβολή της ταχύτητας από σημείο σε σημείο, δηλαδή στο χώρο (βλ. σχέση Bernoulli).

5.2.1 Η ΥΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο ρευστού που κινείται με ταχύτητα U_A, η οποία είναι γενικά συνάρτηση της θέσης του σωματιδίου και του χρόνου: $\vec{U}_A = \vec{U}_A(r_A, t) = \vec{U}_A\left[x_A(t), y_A(t), z_A(t), t\right]$

όπου $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, και $z_A = z_A(t)$ ορίζουν τη θέση του κινούμενου σωματιδίου. Λόγω ορισμού, η επιτάχυνση ισούται με τη χρονική μεταβολή της ταχύτητας, αλλά επειδή αυτή είναι συνάρτηση τόσο της θέσης όσο και του χρόνου, τελικά η επιτάχυνση μπορεί να προέρχεται τόσο λόγω μεταβολής της ταχύτητας στο χρόνο όσο και στο χώρο και λόγω της συζευγμένης διαφόρισης, η επιτάχυνση του σωματιδίου γράφεται ως:

$$\vec{\alpha}_A = \frac{d\vec{U}_A}{dt} = \frac{\partial \vec{U}_A}{\partial t} + \frac{\partial \vec{U}_A}{\partial x}\frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial \vec{U}_A}{\partial y}\frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial \vec{U}_A}{\partial z}\frac{dz_A}{dt}$$



Επειδή όμως οι συνιστώσες της ταχύτητας του σωματιδίου δίνονται από τις σχέσεις: $u_A = dx_A/dt$, $\upsilon_A = dy_A/dt$ και $w_A = dz_A/dt$, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\vec{\alpha}_A = \frac{\partial \vec{U}_A}{\partial t} + u_A \frac{\partial \vec{U}_A}{\partial x} + \upsilon_A \frac{\partial \vec{U}_A}{\partial y} + w_A \frac{\partial \vec{U}_A}{\partial z}$$

και μπορεί να επεκταθεί για κάθε σωματίδιο, άρα μπορούμε να απορρίψουμε το δείκτη Α και να γράψουμε:

$$\vec{\alpha} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{U}}{\partial z}$$

το οποίο αποτελεί γραφή σε ανυσματική μορφή. Σε βαθμωτή γραφή μπορεί να αναλυθεί ως (όπου α_x, α_y και α_z είναι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης:

$$\alpha_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\alpha_y = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \upsilon}{\partial z}$$

$$\alpha_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται συνήθως σε συντομογραφία: $\vec{\alpha} = \frac{D\vec{U}}{Dt}$

όπου ο τελεστής ***D( )/Dt*** ονομάζεται **υλική ή ολική παράγωγος** και αναλύεται ως:

$$\frac{D(\ )}{Dt} \equiv \frac{\partial(\ )}{\partial t} + u \frac{\partial(\ )}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial(\ )}{\partial y} + w \frac{\partial(\ )}{\partial z}$$

και επίσης γράφεται σε ανυσματικό συμβολισμό ως: $\frac{D(\ )}{Dt} \equiv \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \vec{U} \bullet \nabla(\ )$, όπου ∇=διαφορικός τελεστής:

$$\nabla(\ ) \equiv \frac{\partial(\ )}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(\ )}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(\ )}{\partial z}\vec{k}$$

Η υλική παράγωγος είναι πολύ χρήσιμη στη μηχανική ρευστών και δε χρησιμοποιείται μόνο για την έκφραση της επιτάχυνσης. Η υλική παράγωγος οποιασδήποτε μεταβλητής (ανυσματικής ή βαθμωτής) εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της με το χρόνο για ένα συγκεκριμένο σωματίδιο ρευστού (προσέγγιση Lagrange). Για παράδειγμα μπορούμε να εφαρμόσουμε την υλική παράγωγο για τη θερμοκρασία ***T=T(x,y,z,t)***:

$$\frac{DT}{Dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{U}\bullet\nabla T$$

Αυτό που χρειάζεται για τον υπολογισμό της είναι μία μεταβλητή πεδίου ***Φ=Φ(x,y,z,t)*** και ο ρυθμός με τον οποίο το σωματίδιο κινείται μέσα στο πεδίο αυτό, δηλαδή η ταχύτητα $\vec{U}=\vec{U}(x,y,z,t)$

5.2.2 ΜΗ–ΜΟΝΙΜΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ

Από τον ορισμό της υλικής παραγώγου (§5.7) φαίνεται ότι αυτή περιλαμβάνει δύο ειδών παραγώγους: (α) τη *χρονική*, ***∂( )/∂t***, και τις *χωρικές*, ***∂( )/∂x***, ***∂( )/∂y***, ***∂( )/∂z***. Η παράγωγος ως προς το χρόνο ονομάζεται και **τοπική παράγωγος**, διότι αντιπροσωπεύει τις μεταβολές λόγω μη–μονιμότητας της ροής στο ίδιο σημείο του χώρου. Συνεπώς, η επιτάχυνση $\partial\vec{U}/\partial t$ ονομάζεται και τοπική επιτάχυνση. Για μόνιμη ροή η τοπική παράγωγος είναι μηδενική και από φυσική άποψη σημαίνει ότι <u>δεν υπάρχει μεταβολή με το χρόνο για το ίδιο σημείο του χώρου</u>.

5.2.3 ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ

Το κομμάτι της υλικής παραγώγου που περιέχει τις χωρικές παραγώγους, ονομάζεται **παράγωγος συναγωγής**, διότι εκφράζει τη μεταβολή της όποιας μεταβλητής στο χώρο λαμβάνοντας υπόψη και την ταχύτητα της ροής. Από φυσική άποψη η παράγωγος αυτή εκφράζει το <u>ρυθμό μεταβολής λόγω διαφορετικής τιμής της μεταβλητής από σημείο σε σημείο κατά την κίνηση των σωματιδίων του ρευστού</u>. Η παράγωγος συναγωγής μπορεί να μην είναι μηδενική σε μόνιμη και μη–μόνιμη ροή. Συνεπώς η επιτάχυνση $\vec{U}\bullet\nabla\vec{U}$ ονομάζεται επιτάχυνση συναγωγής.

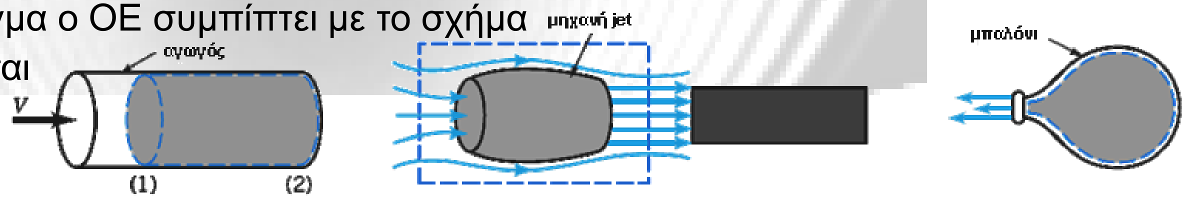
Στη $2^{η}$ διάλεξη αναφερθήκαμε συνοπτικά στις έννοιες του **συστήματος** και του **όγκου ελέγχου**.

➢ Το <u>σύστημα</u> (Σ) αποτελείται από μία *συγκεκριμένη ποσότητα μάζας*, η οποία μπορεί να μετακινείται, να ρέει και να αλληλεπιδρά με το περιβάλλον. Ενώ η μάζα παραμένει συγκεκριμένη, το σχήμα και το μέγεθος του Σ μπορεί να αλλάζουν (π.χ.: ο αέρας μέσα σε κύλινδρο ΜΕΚ, η βενζίνη σε ένα ντεπόζιτο αυτοκινήτου που κινείται).

➢ Ο <u>όγκος ελέγχου</u> (ΟΕ) είναι ένα *συγκεκριμένο τμήμα του χώρου* μέσω του οποίου ρέει ρευστό. Ο ΟΕ μπορεί να είναι ακίνητος και σταθερού σχήματος, αλλά επίσης μπορεί να κινείται ή/και να παραμορφώνεται. (π.χ.: ο χώρος που καταλαμβάνει μια αντλία, ο χώρος της μηχανής ενός κινούμενου αεροσκάφους, ο χώρος του κυλίνδρου μίας ΜΕΚ μέσω του οποίου ρέει το μίγμα–βενζίνης).

Στη φυσική, η μελέτη της κίνησης των σωμάτων, προϋποθέτει την απομόνωσή τους από το περιβάλλον, αντικαθιστώντας όμως την παρουσία του με ισοδύναμες επιδράσεις του πάνω στο σώμα (π.χ. δυνάμεις). Για στερεά σώματα το Σ είναι το πλέον κατάλληλο, όμως για τη ροή ρευστών ο ΟΕ προσφέρει περισσότερα πλεονεκτήματα, διότι τις περισσότερες φορές μας ενδιαφέρει η επίδραση της ροής στο περιβάλλον της (π.χ. στα τοιχώματα μίας κατασκευής), άρα δε βοηθάει η μελέτη μίας συγκεκριμένης ποσότητας ρευστού (σύστημα) αλλά ένας συγκεκριμένος χώρος απ' όπου ρέει το ρευστό (όγκος ελέγχου).

Στο σχήμα φαίνονται 3 παραδείγματα όγκων ελέγχου, οι επιφάνειες των οποίων παριστάνονται με γαλάζιες διακεκομμένες γραμμές. Στο $1^{ο}$ ρευστό ρέει μέσα σε σωλήνα και ο ΟΕ είναι σταθερός και απαραμόρφωτος και εκτείνεται μέχρι τα τοιχώματα του αγωγού μεταξύ των διατομών (1) και (2). Στο $2^{ο}$ παράδειγμα ο ΟΕ περικλείει πλήρως μία μηχανή αεροσκάφους, άρα είναι απαραμόρφωτος αλλά κινείται μαζί με το αεροσκάφος. Τέλος στο $3^{ο}$ παράδειγμα ο ΟΕ συμπίπτει με το σχήμα του μπαλονιού, άρα παραμορφώνεται όσο ο αέρας ρέει εκτός του ΟΕ και το μπαλόνι μικραίνει σε όγκο.



Άλλοτε μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει σε μία συγκεκριμένη ποσότητα ρευστού, ενώ άλλες φορές στη ροή σε μία συγκεκριμένη θέση. Άρα πρέπει να εκφράσουμε τους νόμους της ρευστομηχανικής χρησιμοποιώντας και τις δυο έννοιες (Σ και ΟΕ), ώστε να μπορούμε να "μεταπηδούμε" από τη μία μέθοδο στην άλλη. Αυτό μας το προσφέρει το **θεώρημα μεταφοράς Reynolds**.

Έστω ***B*** οποιαδήποτε φυσική παράμετρος της ροής (ταχύτητα, ορμή, θερμοκρασία, μάζα, επιτάχυνση, κ.λπ.), η οποία μπορεί να είναι βαθμωτό μέγεθος ή άνυσμα, ενώ ***b*** είναι η ποσότητα του ***B*** ανά μονάδα μάζας, ***m***, δηλαδή: $B=bm$. Παραδείγματα: (α) <u>Μάζα</u>: $B=m$, άρα $b=1$, (β) <u>Κινητική ενέργεια</u>: $B=mU^2/2$, άρα $b=U^2/2$, (γ) <u>Ορμή</u>: $B=m\vec{U}$, άρα $b=\vec{U}$.

Στη θερμοδυναμική είχαμε ονομάσει τη μεταβλητή ***B*** ως **εκτατική**, ενώ τη ***b*** ως **εντατική**. Η συνολική ποσότητα της μεταβλητής ***B*** που περιέχει ένα Σ είναι B_Σ και υπολογίζεται εάν αθροίσουμε τις επιμέρους ποσότητες που περιέχει κάθε σωματίδιο ρευστού όγκου δV και μάζας $\rho\delta V$, που είναι $\delta B=\rho b\delta V$:

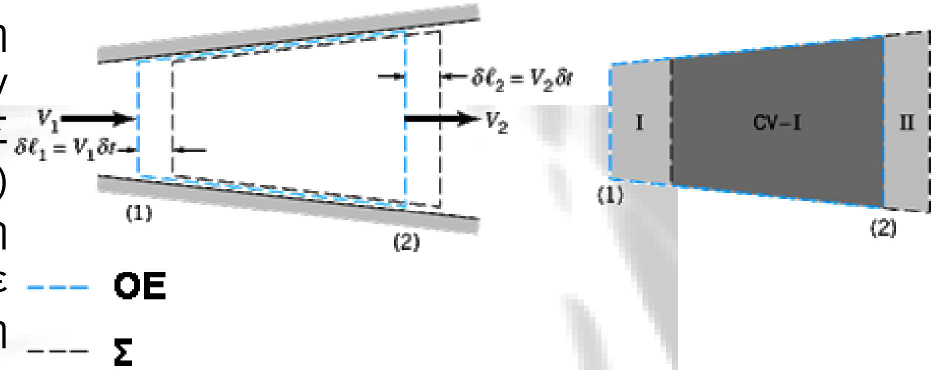
$$B_\Sigma = \lim_{\delta V \to 0} \sum_i b_i \left(\rho_i \delta V_i\right) = \int_\Sigma \rho b dV$$

Οι περισσότεροι νόμοι της ρευστοδυναμικής περιλαμβάνουν τη χρονική μεταβολή εκτατικών μεταβλητών (π.χ. το ρυθμό μεταβολής της ορμής, της μάζας, της ενέργειας, κ.λπ.), που οδηγεί στις παρακάτω σχέσεις, τόσο για ένα Σ όσο και για την περίπτωση ενός ΟΕ:

$$\frac{dB_\Sigma}{dt} = \frac{d\left(\int_\Sigma \rho b dV\right)}{dt} \qquad \frac{dB_{OE}}{dt} = \frac{d\left(\int_{OE} \rho b dV\right)}{dt}$$

Οι δύο αυτές σχέσεις φαίνονται όμοιες, αλλά δεν είναι στην πραγματικότητα, ούτε από φυσική ερμηνεία ούτε μαθηματικά (η μαθηματική διαφορά οφείλεται στα διαφορετικά όρια ολοκλήρωσης). Ακόμη και στην περίπτωση όπου στιγμιαία το Σ και ο ΟΕ συμπίπτουν στο χώρο, τα μεγέθη dB_Σ/dt και dB_{OE}/dt δεν είναι απαραίτητα ίσα. ***Το θεώρημα μεταφοράς Reynolds δίνει τη σχέση για το ρυθμό μεταβολής μίας <u>εκτατικής μεταβλητής ενός Σ και ενός ΟΕ, δηλαδή τη σχέση μεταξύ των δύο παραπάνω εκφράσεων</u>***.

Έστω ένα Σ και ένας ΟΕ που συμπίπτουν τη χρονική στιγμή *t* και εκτείνονται μεταξύ των διατομών (1) και (2) του αγωγού. Μετά από δ*t* το Σ θα έχει μετακινηθεί, κατά $\delta l_1=U_1\delta t$ στη διατομή (1) και $\delta l_2=U_2\delta t$ στη διατομή (2). Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα είναι ομοιόμορφη και κάθετη σε κάθε διατομή του αγωγού. Στην περίπτωση του ΟΕ η εισροή ρευστού μεταξύ των χρονικών στιγμών *t* και



και *t*+δ*t* δίνεται από τον όγκο Ι, ενώ η εκροή από τον ΙΙ, ενώ ο ίδιος ο ΟΕ είναι ο CV. Άρα **Σ=CV** τη χρονική στιγμή *t*, ενώ τη χρονική στιγμή *t*+δ*t* είναι **Σ=(CV–I)+II**. Επειδή το *B* είναι εκτατική μεταβλητή, ισχύουν οι εξής σχέσεις: $B_\Sigma(t)=B_{OE}(t)$ και $B_\Sigma(t+\delta t)=B_{OE}(t+\delta t)-B_I(t+\delta t)+B_{II}(t+\delta t)$. Συνεπώς η μεταβολή της ποσότητας B_Σ κατά το διάστημα δ*t*, διαιρεμένη με το διάστημα αυτό είναι:

$$\frac{\delta B_\Sigma}{\delta t}=\frac{B_\Sigma(t+\delta t)-B_\Sigma(t)}{\delta t}=\frac{B_{OE}(t+\delta t)-B_I(t+\delta t)+B_{II}(t+\delta t)-B_\Sigma(t)}{\delta t}$$

και επειδή $B_\Sigma(t)=B_{OE}(t)$ τότε:

$$\frac{\delta B_\Sigma}{\delta t}=\frac{B_{OE}(t+\delta t)-B_{OE}(t)}{\delta t}-\frac{B_I(t+\delta t)}{\delta t}+\frac{B_{II}(t+\delta t)}{\delta t}$$

Για δ*t*→0, το 1ο μέλος ισούται με DB_Σ/Dt (χρησιμοποιείται εδώ η υλική παράγωγος, ακριβώς διότι το Σ ανήκει στη θεώρηση κατά Lagrange. Για δ*t*→0, ο 1ος όρος του 2ου μέλους (που αφορά τον ΟΕ, δηλαδή θεώρηση κατά Euler) δίνει ότι:

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{B_{OE}(t+\delta t)-B_{OE}(t)}{\delta t}=\frac{\partial B_{OE}}{\partial t}=\frac{\partial \int_{OE}\rho b dV}{\partial t}$$

Επίσης οι άλλοι δύο όροι γράφονται ως:

$$\dot{B}_{out} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{B_{II}(t+\delta t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{(\rho_2 b_2)(\delta V_{II})}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\rho_2 b_2 A_2 U_2 \delta t}{\delta t} = \rho_2 b_2 A_2 U_2$$

$$\dot{B}_{in} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{B_I(t+\delta t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{(\rho_1 b_1)(\delta V_I)}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\rho_1 b_1 A_1 U_1 \delta t}{\delta t} = \rho_1 b_1 A_1 U_1$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{D B_\Sigma}{Dt} = \frac{\partial B_{OE}}{\partial t} + \dot{B}_{out} - \dot{B}_{in} = \frac{\partial B_{OE}}{\partial t} + \rho_2 b_2 A_2 U_2 - \rho_1 b_1 A_1 U_1$$

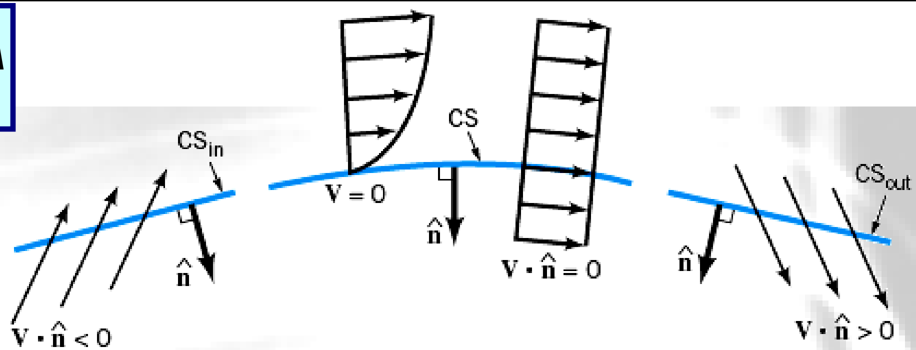
Η σχέση αυτή αποτελεί την έκφραση του θεωρήματος μεταφοράς Reynolds σύμφωνα με τις παραδοχές που έγιναν και είναι: **(α)** υπάρχει μία είσοδος και μία έξοδος του ρευστού, **(β)** οι διάφορες μεταβλητές (ταχύτητα, πυκνότητα και b) έχουν ομοιόμορφη τιμή στις διατομές (1) και (2) και **(γ)** η ταχύτητα είναι κάθετη στις διατομές εισόδου και εξόδου. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι ο ρυθμός μεταβολής ενός εκτατικού μεγέθους δεν είναι ο ίδιος για το Σ και τον ΟΕ, διότι δεν είναι απαραίτητα ίσες οι ποσότητες $\boldsymbol{\rho_1 b_1 A_1 U_1}$ και $\boldsymbol{\rho_2 b_2 A_2 U_2}$. Αυτή αποτελεί μία απλοποιημένη και ειδική μορφή της γενικότερης μορφής του θεωρήματος για **ακίνητο, απαραμόρφωτο ΟΕ**:

$$\boxed{\frac{D B_\Sigma}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b \vec{U} \bullet \vec{n} dA}$$

όπου CV είναι ο ΟΕ, ενώ CS τα όριά του (σύνορα με το περιβάλλον), $\vec{n}$=κάθετο άνυσμα στην οριακή επιφάνεια CS, **d*A***=στοιχειώδες εμβαδόν της οριακής επιφάνειας και **d*V***=στοιχειώδης όγκος του ΟΕ.

Το 1ο μέλος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής οποιουδήποτε εκτατικού μεγέθους (μάζα, ορμή, ενέργεια). Ο 1ος όρος του 2ου μέλους εκφράζει τη μεταβολή στο χρόνο του μεγέθους *B* που συμβαίνει μέσα στον ΟΕ, ενώ ο 2ος όρος εκφράζει τη συνολική ροή του μεγέθους *B* διαμέσου των ορίων του ΟΕ, η οποία είναι θετική όταν εξέρχεται του ΟΕ και αρνητική όταν εισέρχεται, ενώ μηδενίζεται όταν είναι μηδενική η ταχύτητα ή η τιμή της μεταβλητής B, είτε όταν η ταχύτητα είναι παράλληλη με την οριακή επιφάνεια (δες σχήμα στην §5.13).

$$\frac{DB_\Sigma}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b \vec{U} \bullet \vec{n} dA$$



5.4.1 ΜΟΝΙΜΑ & ΜΗ–ΜΟΝΙΜΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ

Σε περίπτωση όπου η ροή είναι **μόνιμη**, ο 1ος όρος στο 2ο μέλος του θεωρήματος μεταφοράς είναι μηδενικός και τότε η σχέση γράφεται ως $\frac{DB_\Sigma}{Dt} = \int_{CS} \rho b \vec{U} \bullet \vec{n} dA$, οπότε για να υπάρξει μεταβολή του Β στο Σ, δηλ. να είναι μη–μηδενικό το 1ο μέλος της εξίσωσης, πρέπει να υπάρχει διαφορά στο σύνολο των ροών του Β από τα όρια του ΟΕ, η οποία εκφράζεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα του 2ου όρου.

Εάν το Β είναι η **μάζα**, τότε για μόνιμη ροή και το 1ο μέλος είναι μηδενικό, λόγω της αρχής διατήρησης της μάζας, το οποίο συνεπάγεται ότι και ο 2ος όρος είναι μηδενικός, εκφράζοντας τη γνωστή αρχή ότι σε έναν ΟΕ το σύνολο των εισροών μάζας μέσα στον ΟΕ ισούνται με το σύνολο των εκροών μάζας από τον ΟΕ. Το ίδιο συμβαίνει και με την **ενέργεια**, η οποία επίσης πρέπει να διατηρείται σε έναν ΟΕ.

Εάν το Β είναι η **ορμή**, δεν είναι απαραίτητο να είναι μηδενικό το 1ο μέλος σε ένα Σ, διότι δεν απαιτείται η διατήρηση της ορμής (δηλαδή η τιμή της να είναι σταθερή). Για την ακρίβεια, ο 2ος Νόμος του Newton δηλώνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής σε έναν Σ ισούται με τη συνολική δύναμη που ασκείται στο Σ από το περιβάλλον του. Άρα σε αυτήν την περίπτωση ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στο Σ που εκφράζεται από το 1ο μέλος, θα είναι ίσος με τον 2ο όρο που εκφράζει τη συνολική ροή ορμής από την οριακή επιφάνεια του ΟΕ.

Για μόνιμη ροή η τιμή του Β στον ΟΕ δε μεταβάλλεται με το χρόνο. Η τιμή του Β στο Σ μεταβάλλεται ή δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, ανάλογα με το εάν η συνολική ροή του Β μέσα στο ή έξω από τον ΟΕ (μέσω της οριακής του επιφάνειας) είναι μηδενική ή όχι, αντίστοιχα.

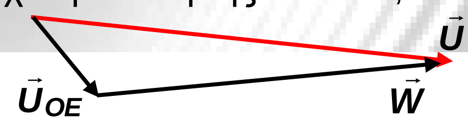
Σε περίπτωση όπου η ροή είναι **μη–μόνιμη**, γενικά όλοι οι όροι στην εξίσωση του θεωρήματος μεταφοράς είναι μη–μηδενικοί. Εάν μελετήσουμε το θεώρημα από τη θέση του ΟΕ, τότε η τιμή του Β στο Σ μπορεί να μεταβληθεί εάν υπάρχει μεταβολή στο χρόνο της ποσότητας Β του ΟΕ (1ος όρος) ή/και επειδή υπάρχει μη–μηδενική συνολικά ροή του Β από τα όρια του ΟΕ (2ος όρος).

Υπάρχει μία ειδική περίπτωση μη-μόνιμης κατάσταση, όπου η συνολική ροή του Β εντός του ΟΕ ισούται (σε κάθε χρονική στιγμή) με τη συνολική ροή εκτός του ΟΕ, δηλαδή $\int_{CS} \rho b\vec{U}\bullet\vec{n}dA = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η μεταβολή του Β στο χρόνο στο Σ (1ο μέλος) ισούται με τη μεταβολή του Β στο χρόνο στον ΟΕ (2ος όρος).

5.4.2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΙΑ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥΣ ΟΕ

Το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds εκφράστηκε μέχρι στιγμής για την περίπτωση ακίνητου και απαραμόρφωτου ΟΕ. Στη γενικότερη περίπτωση ο ΟΕ μπορεί να κινείται (με ή χωρίς επιτάχυνση) και να αλλάζει σχήμα. Μία μεγάλη κατηγορία προβλημάτων περιγράφεται με ΟΕ οι οποίοι δεν παραμορφώνονται και κινούνται με σταθερή ταχύτητα, $\vec{U}_{OE}$. Τέτοια παραδείγματα είναι η ροή σε στροβιλομηχανές σε λειτουργία με σταθερό αριθμό στροφών, όπου δηλαδή ο ΟΕ του ρευστού περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα μαζί με τα πτερύγια της μηχανής (π.χ. ενός στροβίλου). Στη γενική θεώρηση μίας τέτοιας περίπτωσης η ταχύτητα του ρευστού, $\vec{U}$, μέσα στον ΟΕ δεν είναι η ίδια με την ταχύτητα κίνησης του ΟΕ, οπότε ορίζεται η σχετική ταχύτητα, $\vec{W}$, ως: $\vec{U} = \vec{W} + \vec{U}_{OE}$.

Σημειώνεται ότι η σχέση αυτή δεν είναι αλγεβρική αλλά ανυσματική (βλ. σχήμα).



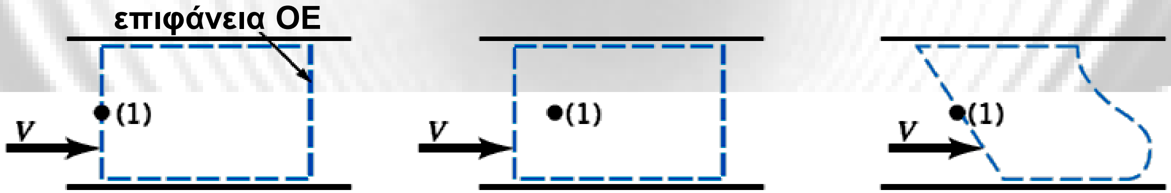
Το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds μπορεί να εξαχθεί με τον ίδιο τρόπο για την περίπτωση **κινούμενου με σταθερή ταχύτητα** και **απαραμόρφωτου ΟΕ** και είναι:

$$\frac{DB_\Sigma}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho b dV + \int_{CS} \rho b \vec{W} \bullet \vec{n} dA$$

5.4.3 ΕΠΙΛΟΓΗ ΟΕ

Οποιοσδήποτε όγκος στο χώρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ΟΕ στην ανάλυση ενός ρευστοδυναμικού προβλήματος. Ό ΟΕ μπορεί να έχει πεπερασμένο μέγεθος, ή απείρως μικρό. Η επιλογή του ΟΕ δεν επηρεάζει την ανάλυση ως προς το αποτέλεσμά της, αλλά πολύ συχνά τη διευκολύνει σημαντικά. Δηλαδή δεν υπάρχουν λανθασμένοι ΟΕ, απλά κάποιοι είναι πολύ καλύτεροι.

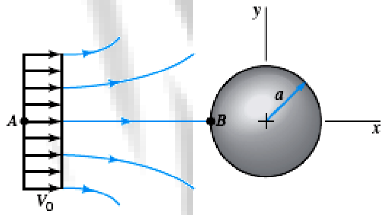
Η μελέτη ενός προβλήματος ροής, συνήθως περιλαμβάνει τον υπολογισμό ενός μεγέθους (πίεση, ταχύτητα, δύναμη, κ.λπ.) σε μία θέση (σημείο, διατομή αγωγού, επιφάνεια σώματος κ.λπ.). Είναι σκόπιμο η θέση αυτή να βρίσκεται **πάνω στην (οριακή) επιφάνεια του ΟΕ**, όπως δείχνει το πρώτο σχήμα, και όχι "θαμμένη" κάπου εσωτερικά στον ΟΕ όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα. Με τον τρόπο αυτό η άγνωστη τιμή που ψάχνουμε θα εμφανιστεί αυτόματα στο 2ο όρο του 2ου μέλους του θεωρήματος (επιφανειακό ολοκλήρωμα). Επίσης είναι θεμιτό οι επιφάνειες του ΟΕ στις εισόδους και εξόδους της ροής να είναι κάθετες στην ταχύτητα, ώστε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{U} \bullet \vec{n} = U\cos\theta$ να υπολογίζεται εύκολα διότι θα είναι θ=0° ή 180°, δηλαδή cosθ=1. Άρα πάλι προτιμούμε τον ΟΕ του πρώτου σχήματος από αυτόν του τρίτου σχήματος.



1. Το πεδίο ταχύτητας μίας ροής δίνεται από τη σχέση $\vec{U} = (U_o/\ell)(x\vec{i} - y\vec{j})$, όπου U_o και ℓ είναι σταθερές, ενώ x και y είναι οι συντεταγμένες του καρτεσιανού συστήματος και $\vec{i}$, $\vec{j}$ τα μοναδιαία ανύσματα στις διευθύνσεις x και y, αντίστοιχα. *Σε ποια θέση του πεδίου το μέτρο της ταχύτητας ισούται με U_o? Σχεδιάστε στο 1ο τεταρτημόριο (x>0, y>0) του πεδίου ταχύτητας, χρησιμοποιώντας βέλη με μήκος που να αντιστοιχεί στο μέτρο της ταχύτητας.* **$x^2+y^2=\ell^2$**.

2. Για την προηγούμενη άσκηση, *σχεδιάστε πάλι στο ίδιο τεταρτημόριο τις ροϊκές γραμμές*.

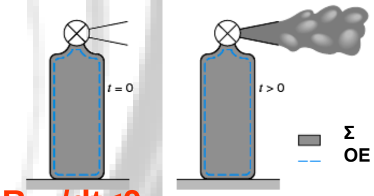
3. Για την ασυμπίεστη, άτριβη ροή γύρω από σφαίρα ακτίνας α, η ταχύτητα πάνω στη ροϊκή γραμμή ΑΒ δίνεται από τη σχέση: $\vec{U} = u(x)\vec{i} = U_o\left(1+\dfrac{\alpha^3}{x^3}\right)\vec{i}$ όπου U_o είναι η τιμή της ταχύτητας μακριά από τη σφαίρα.



Να υπολογίσετε την κατανομή της επιτάχυνσης πάνω στην ίδια ροϊκή γραμμή. **$-0.610U_o^2/\alpha$**.

4. *Υπολογίστε το πεδίο της επιτάχυνσης για το πεδίο ταχύτητας της άσκησης 1.* **$U_o^2/\ell^2(x^2+y^2)^{1/2}$**.

5. Ο πυροσβεστήρας του σχήματος αρχικά είναι κλειστός, ενώ μετά τη χρονική στιγμή t=0, αρχίζει να ψεκάζει πυροσβεστικό υγρό. *Σχολιάστε τη διαφορά μεταξύ των εκφράσεων dB_Σ/dt και dB_{OE}/dt, εάν το Β αντιπροσωπεύει τη μάζα.* **$dB_\Sigma/dt=0$, $dB_{OE}/dt<0$.**



6. Γράψτε το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds για τη ροή της άσκησης 5, θεωρώντας πάλι το Β ως τη μάζα του ρευστού (άρα b=1).

7. Το πεδίο ταχύτητας μίας ροής δίνεται από τη σχέση $\vec{U} = (3y+2)\vec{i} + (x-8)\vec{j} + 5z\vec{k}$ [ft/s], όπου τα x, y και z είναι σε [ft]. *Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητα στην αρχή των συντεταγμένων (x=y=z=0) και πάνω στον άξονα y (x=z=0).* **$(9y^2+12y+68)^{1/2}$**

8. Το πεδίο ταχύτητας μίας ροής δίνεται από τη σχέση $\vec{U} = \dfrac{20y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \dfrac{20x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$ [ft/s], όπου τα x και y είναι σε [ft]. *Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητα πάνω στον άξονα x και πάνω στον άξονα y. Ποια γωνία σχηματίζει το άνυσμα της ταχύτητας με τον άξονα x στα σημεία (0,5), (5,5) και (5,0)?* **-90^o, -45^o, 0^o**

9. Σε πεδίο ροής η συνιστώσα της ταχύτητας κατά x είναι $u=x-y$, ενώ η συνιστώσα κατά y είναι $\upsilon=x^2y-8$. *Υπολογίστε τη θέση τυχόν σημείων ανακοπής, δηλαδή εκεί όπου το μέτρο της ταχύτητας μηδενίζεται.* **x=y=2**

10. *Αποδείξτε ότι σε πεδίο ροής όπου η συνιστώσα της ταχύτητας κατά x είναι $u=c(x^2-y^2)$ και η συνιστώσα κατά y είναι $\upsilon=-2cxy$ (c είναι σταθερά) οι ροϊκές γραμμές περιγράφονται από τη σχέση $x^2y-y^3/3$=σταθερό. Σε ποια σημεία οι ροϊκές γραμμές είναι παράλληλες με τον άξονα y? Σε ποια σημεία η ροή είναι στάσιμη?*

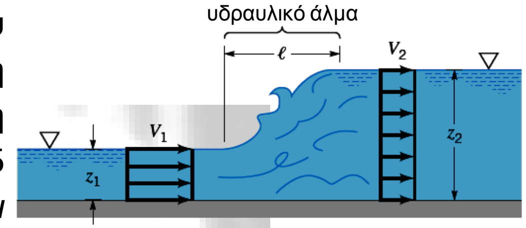
11. Πεδίο ταχύτητας δίνεται από τις σχέσεις $u=cx^2$ και $\upsilon=cy^2$, όπου c είναι σταθερά. *Υπολογίστε τις συνιστώσες της επιτάχυνσης κατά τους άξονες x και y* και σε ποιο σημείο η επιτάχυνση μηδενίζεται.

12. Ένα τρισδιάστατο πεδίο ροής δίνεται από τις σχέσεις $u=x^2$, $\upsilon=-2xy$, $w=x+y$. Υ*πολογίστε το άνυσμα της επιτάχυνσης*.

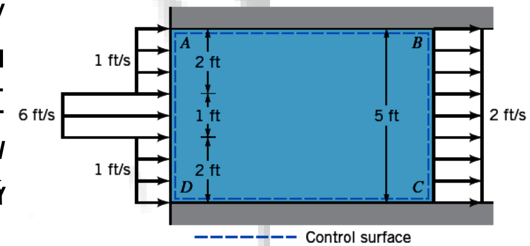
13. Νερό ρέει μέσα σε αγωγό σταθερής διαμέτρου με ομοιόμορφη ταχύτητα που δίνεται από $\vec{U} = (8/t+5)\vec{j}$ [m/s], όπου ο χρόνος t είναι σε [s]. *Υπολογίστε την επιτάχυνση στις χρονικές στιγμές t=1, 2 και 10 [s].*

14. Όταν ανοίγει μία βάνα η ταχύτητα του νερού μέσα σε έναν συγκεκριμένο αγωγό δίνεται από τις σχέσεις $u=10(1-e^{-t})$, $\upsilon=0$, $w=0$ [ft/s] και ο χρόνος t είναι σε [s]. *Υπολογίστε τη μέγιστη ταχύτητα και επιτάχυνση του ρευστού.*

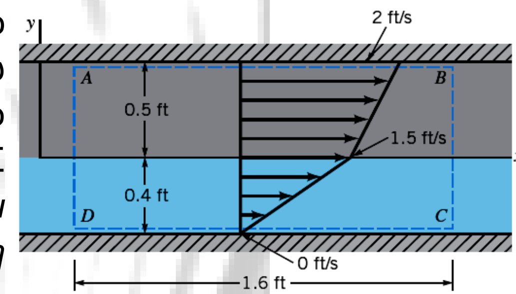
15. Υδραυλικό άλμα ονομάζεται η ξαφνική ανύψωση της στάθμης ενός υγρού που ρέει σε ανοικτό αγωγό (π.χ. κοίτη ποταμού). Σε μία σχετικά μικρή απόσταση ℓ το βάθος αλλάζει από z_1 σε z_2 με μία αντίστοιχη αλλαγή ταχυτήτων από U_1 σε U_2. Εάν U_1=1.20 [m/s] και U_2=3.0 [m/s] και ℓ=0.05 [m], *υπολογίστε τη μέση επιτάχυνση του ρευστού καθώς αυτό ρέει διαμέσου του υδραυλικού άλματος*.



16. Νερό ρέει σε κανάλι πλάτους 5 [ft] και βάθους 1 [ft]. Η ροή στην είσοδο δεν είναι ομοιόμορφη και είναι 6 [ft/s] στο κέντρο και 1 [ft/s] στα άκρα, ενώ είναι ομοιόμορφη και ίση με 2 [ft/s] στην έξοδο. Ο ΟΕ ABCD συμπίπτει με το Σ κατά τη χρονική στιγμή t=0. *Σχεδιάστε το Σ τη χρονική στιγμή t=0.5 [s] και υπολογίστε την ποσότητα νερού που εισήλθε και εξήλθε από τον ΟΕ κατά τη χρονική περίοδο, Δt=0÷0.5 [s].*



17. Δύο υγρά με διαφορετικές πυκνότητες και ιξώδη ρέουν μεταξύ δύο παράλληλων πλακών, η κάτω εκ των οποίων είναι ακίνητη ενώ η πάνω κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 [ft/s]. Η κατανομή της ταχύτητας στα δύο υγρά είναι γραμμική και δίνεται στο σχήμα. Ο ΟΕ ABCD συμπίπτει με το Σ κατά τη χρονική στιγμή t=0. *Σχεδιάστε το Σ τη χρονική στιγμή t=0.1 [s] και υπολογίστε την ποσότητα που εισήλθε και εξήλθε από τον ΟΕ κατά τη χρονική περίοδο, Δt=0÷0.1 [s].*



18. Νερό πιέζεται στη σύριγγα και εξέρχεται με ταχύτητα 5 [m/s], ενώ το έμβολο κινείται με 0.03 [m/s]. Ο παραμορφούμενος ΟΕ συμπίπτει με το εσωτερικό της σύριγγας μέχρι και το στόμιο εξόδου, ενώ το Σ είναι το νερό κατά τη χρονική στιγμή t=0. *Σχεδιάστε το Σ τη χρονική στιγμή t=0.5 [s].*