ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ Ι

κ. ΣΟΦΙΑΛΙΔΗΣ

***ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ***

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

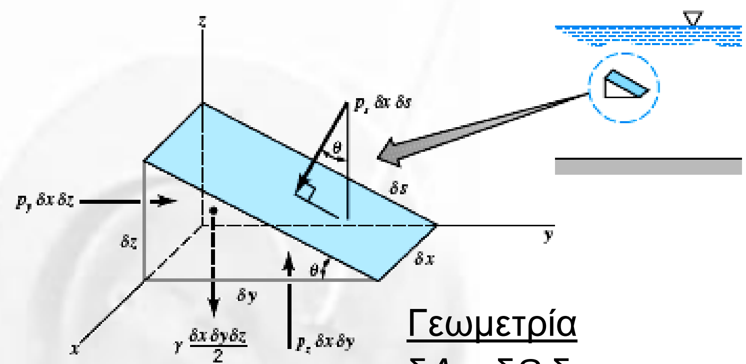
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Η Υδροστατική είναι ο κλάδος της Μηχανικής Ρευστών που μελετά τη στατική ισορροπία των ρευστών. Ισχύει τόσο για υγρά, όσο και για αέρια, όμως έχει πρακτική σημασία μόνο για τα υγρά.

Όταν το ρευστό είναι σε στατική ισορροπία, οι διατμητικές τάσεις που ασκούνται είναι μηδενικές, διαφορετικά το ρευστό θα έρεε. Έτσι, μόνο οι ορθές (κάθετες) τάσεις είναι μη μηδενικές:

$$\tau_{ij}=\begin{bmatrix}\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{xx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_{xx} & 0 & 0\\ 0 & \tau_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \tau_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p_x & 0 & 0\\ 0 & -p_x & 0\\ 0 & 0 & -p_x\end{bmatrix}$$




<u>Η ΠΙΕΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ</u>

Εφόσον το ρευστό ισορροπεί, η συνισταμένη δύναμη σε κάθε δ/νση είναι μηδενική.

<u>Δ/νση y</u>: $\Sigma Fy=0 \Rightarrow p_y(\delta A\sin\theta)-(p_s\sin\theta)\delta A=0 \Rightarrow \boxed{p_y=p_s}$

<u>Δ/νση z</u>: $\Sigma Fz=0 \Rightarrow p_z(\delta A\cos\theta)-(p_s\cos\theta)\delta A-B=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_z(\delta S\delta x\cos\theta)-(p_s\cos\theta)\delta S\delta x-(0.5\delta x\delta y\delta z)\rho g=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta S\delta x\cos\theta p_z-\delta S\delta x\cos\theta p_s-0.5\delta x(\delta S\cos\theta)(\delta S\sin\theta)\gamma=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_z-p_s-0.5\gamma\delta S\sin\theta=0$

Άρα όταν $\delta S\rightarrow 0$, τότε $\boxed{p_z=p_s}$, οπότε ισχύει συνολικά ότι: $\boxed{p_z=p_s=p_x=p_y}$

<u>Γεωμετρία</u>

$\delta A=\delta S\,\delta x$

$\delta y=\delta S\cos\theta$

$\delta z=\delta S\sin\theta$

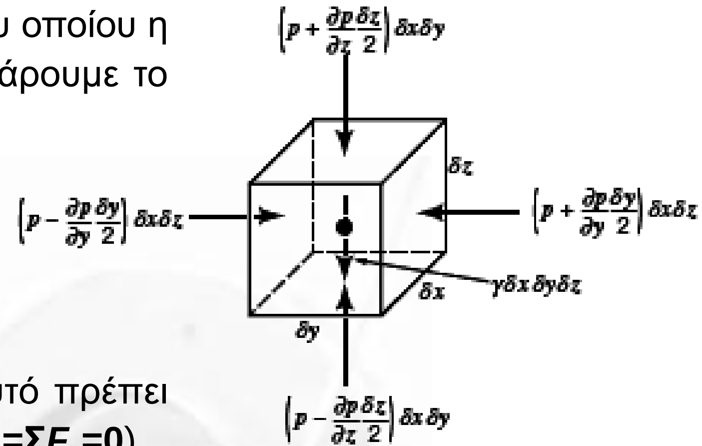
$V=\delta x\,(0.5\,\delta y\,\delta z)=$

$=0.5\,\delta x\,\delta y\,\delta z$

<u>Νόμος PASCAL</u>: Η πίεση σε ένα σημείο ($\delta S\rightarrow 0$) ενός ρευστού σε ακινησία ή κίνηση χωρίς όμως ύπαρξη διατμητικών δυνάμεων, είναι ανεξάρτητη της διεύθυνσης και έχει μοναδική τιμή.

# 3.2 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ ΜΕ ΤΟ ΒΑΘΟΣ






Έστω στοιχειώδης όγκος διαστάσεων δx, δy & δz, στο κέντρο του οποίου η πίεση είναι p. Η στοιχειώδης μεταβολή της πίεσης δίνεται εάν πάρουμε το ανάπτυγμα κατά σειρά Taylor και κρατήσουμε μόνο τον 1ο όρο, οπότε: $\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\,\delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\,\delta z$ ή $\delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\,\delta y\,\delta z$

και ομοίως: $\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z \qquad \delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\,\delta y\,\delta z$

Εάν πάρουμε το ισοζύγιο των δυνάμεων σε όλες τις δ/νσεις, αυτό πρέπει να είναι μηδενικό λόγω της στατικής ισορροπίας (**$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow \Sigma F_x=\Sigma F_y=\Sigma F_z=0$**).

**$\Sigma F_x=0 \Rightarrow \partial p/\partial x=0$**

**$\Sigma F_y=0 \Rightarrow \partial p/\partial y=0$**$(\partial p/\partial z)\delta x\delta y\delta z - \gamma\, \delta x\delta y\delta z =$

**$\Sigma F_z=0$** $\Rightarrow 0 \Rightarrow$ **$\partial p/\partial z - \gamma = 0$** ή ισοδύναμα:

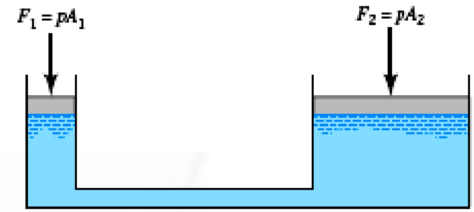
$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \text{ και } p+\rho g z=\text{σταθερό}$$

**1. Οι δύο πρώτες σχέσεις εκφράζουν το νόμο των συγκοινωνούντων δοχείων, δηλαδή ότι δύο σημεία που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και μπορούν να "επικοινωνήσουν" με μία ιδεατή γραμμή που περνάει από το ίδιο ρευστό ρευστού, έχουν την ίδια υδροστατική πίεση.**

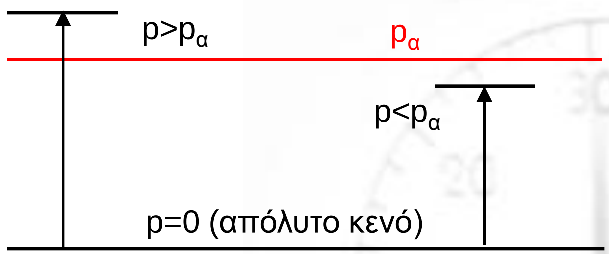
**2. Η τελευταία σχέση εκφράζει ότι η υδροστατική πίεση αυξάνει γραμμικά με το βάθος.**

Υδροστατική πίεση νοείται και για τα αέρια, όμως είναι αμελητέα διότι η πυκνότητα των αερίων είναι κατά τρεις τάξεις μεγέθους μικρότερη αυτής των υγρών. Παρόλα αυτά, για εφαρμογές με μεγάλα ύψη (π.χ. ατμοσφαιρικές ροές) πρέπει να ληφθεί υπόψη με ένα επιπλέον στοιχείο: η πυκνότητα είναι συνάρτηση της πίεσης: **$dp/\partial z= -\rho(p)g$**, άρα για τα ιδανικά αέρια, $\rho=p/(RT)$: **$dp/p= -g dz/(RT)$**, ενώ επίσης είναι και **$T(z)$**.

Σε ένα κλειστό σύστημα ρευστού η διαφορές πίεσης που προκαλούνται σε ένα σημείο μεταδίδονται σε όλο το σύστημα. Σε αυτή την αρχή βασίζονται οι υδραυλικές πρέσες: $\boldsymbol{p_1=p_2 \Rightarrow F_1/A_1=F_2/A_2}$ άρα $\boldsymbol{F_1=A_1F_2/A_2}$.




### ΟΡΙΣΜΟΙ – ΟΡΟΛΟΓΙΑ




Η **σχετική πίεση**, $\boldsymbol{p_g}$ (gauge pressure) είναι η διαφορά της απόλυτης πίεσης, $\boldsymbol{p}$, από την τιμή της ατμοσφαιρικής, $\boldsymbol{p_\alpha}$ που επικρατεί τοπικά. Η σχετική πίεση είναι ουσιαστική η πίεση που μας ενδιαφέρει από πρακτική άποψη και είναι αυτή την οποία μετρά η πλειονότητα των οργάνων (μανομέτρων). Σε περίπτωση όπου η απόλυτη είναι μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής ($\boldsymbol{p_g=p-p_\alpha>0}$) ονομάζεται **υπερπίεση**, αλλά συνήθως ονομάζεται απλά "πίεση" και για το λόγο αυτό χρειάζεται προσοχή για να μη γίνει παρανόηση. Σε περίπτωση που η απόλυτη πίεση είναι μικρότερη της ατμοσφαιρικής ($\boldsymbol{p_g=p-p_\alpha=p_{vac}<0}$) ονομάζεται **υποπίεση**, ή πίεση κενού.

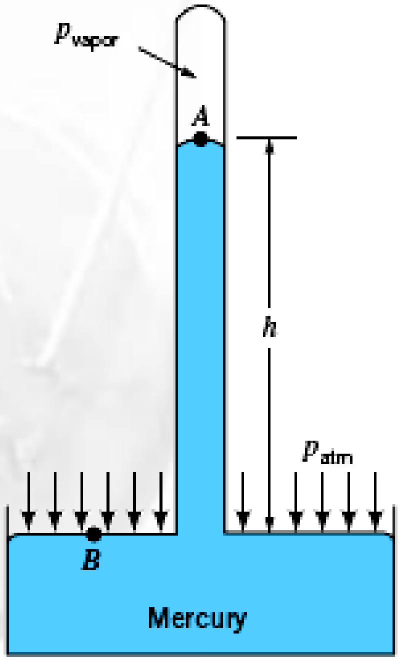
### ΜΟΝΑΔΕΣ

Μονάδα πίεσης στο S.I. είναι το **Pascal [Pa]** που είναι ίσο με 1 [N m$^{-2}$]. Η ατμοσφαιρική πίεση (σε κανονικές συνθήκες) είναι $p_\alpha$=101325 [Pa] και η τιμή αυτή ορίζει μία νέα μονάδα πίεσης, την **ατμόσφαιρα 1 [atm]**. Τέλος χρησιμοποιείται ευρέως (για πρακτικούς λόγους) η μονάδα 1 [bar] που ισούται με $10^5$ [Pa].

Πολλά όργανα (βαρόμετρα, μανόμετρα) μέτρησης της πίεσης βασίζονται στην υδροστατική μεταβολή της πίεσης σε ένα δοχείο που περιέχει ένα υγρό, μέσω της μέτρησης του ύψους μίας στήλης του υγρού αυτού.

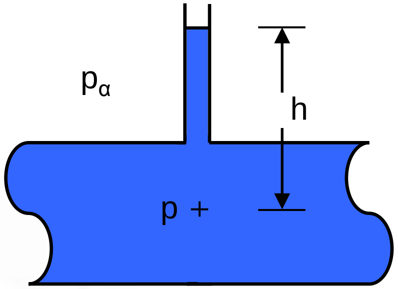
## 1. ΒΑΡΟΜΕΤΡΟ

Το βαρόμετρο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της απόλυτης ατμοσφαιρικής πίεσης. Ο πρώτος που το επινόησε ήταν ο ιταλός φυσικός **Torricelli**. Το βαρόμετρο φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Πρόκειται για έναν σωλήνα πληρωμένο με υδράργυρο ο οποίος ανατρέπεται μέσα σε μία λεκάνη με υδράργυρο. Τότε η διαφορά πίεσης μεταξύ της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας μέσα στο σωλήνα (σημείο Α) και της βάσης του σωλήνα ισούται (από τη σχέση στη §3.3) με: $\rho_{Hg}gh$, όπου $\rho_{Hg}$=πυκνότητα υδραργύρου και $h$=διαφορά σταθμών. Όμως τη τιμή της πίεσης στη βάση του σωλήνα ισούται με την τιμή στην ελεύθερη επιφάνεια της λεκάνης (σημείο Β), δηλαδή με την ατμοσφαιρική πίεση, $p_\alpha$. Η ισορροπία δυνάμεων της στήλης του υδραργύρου λέει ότι το βάρος της μαζί με τη δύναμη που προκαλεί η πίεση των ατμών του υδραργύρου, $p_{vap}$, μέσα στο σωλήνα, ισούται με την ατμοσφαιρική πίεση, $p_\alpha$: $p_\alpha=\rho_{Hg}gh+p_{vap}$.



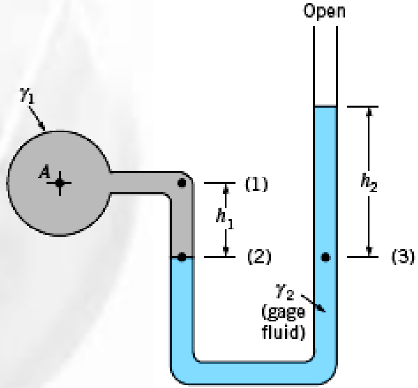

Όμως η πίεση ατμών του υδραργύρου είναι πολύ μικρή, άρα το πάνω μέρος του σωλήνα είναι πρακτικά κενό δηλαδή έχει μηδενική πίεση. Άρα: $p_\alpha=\rho_{Hg}gh$. Η πυκνότητα του υδραργύρου είναι περίπου 13600 [kg m$^{-3}$], οπότε η στάθμη για την κανονική ατμόσφαιρα είναι περίπου 76 [cm]. Εάν λοιπόν χρησιμοποιήσουμε νερό, η αντίστοιχη στάθμη είναι περίπου 10.33 [m] που είναι πρακτικά δύσκολο, ενώ το νερό έχει και μεγάλη πίεση ατμών, άρα η στάθμη θα απαιτεί διόρθωση κατά $p_{vap}$, η οποία εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

## 2. ΠΙΕΣΟΜΕΤΡΟ



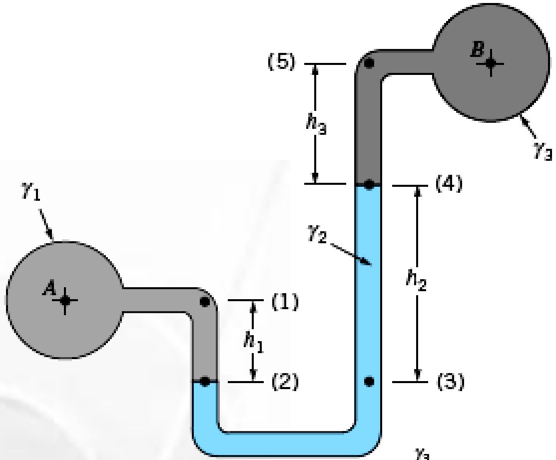

Το πιεσόμετρο είναι μία πολύ απλή και ακριβής συσκευή. Μπορεί να μετρήσει τη σχετική πίεση σε ένα ρευστό, $\boldsymbol{p_g=(p-p_\alpha)}$, με τη μέτρηση του ύψους της στήλης του ρευστού, $h$, διότι ισχύει: $\boldsymbol{p_g=\rho g h}$, όπου $\rho$=πυκνότητα του ρευστού. Όμως το όργανο αυτό δεν είναι πρακτικό για: (i) μεγάλες πιέσεις (απαιτείται μεγάλο ύψος μετρητικού σωλήνα), (ii) υποπιέσεις (θα υπάρξει εισροή αέρα μέσα στον αγωγό), (iii) ενώ πρέπει το πάχος του σωλήνα να είναι ικανά μεγάλο για να μην επηρεάζουν τη μέτρηση τα τριχοειδή φαινόμενα.

## 3. ΜΑΝΟΜΕΤΡΟ ΣΩΛΗΝΑ U




Για την υπέρβαση των παραπάνω δυσκολιών, συνήθως χρησιμοποιούμε το μανόμετρου σωλήνα U, το οποίο χρησιμοποιεί κατάλληλο υγρό (συνήθως νερό) για τη μέτρηση της πίεσης στο σημείο Α, δηλαδή δεν εξαρτάται κάθε φορά από την πυκνότητα του υγρού του οποίου μετράμε την πίεση. Για την εύρεση της πίεσης "προχωρούμε" από το ένα άκρο του συστήματος προς το άλλο και μπορούμε να "πηδήξουμε" απέναντι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο από σωλήνα σε σωλήνα, αρκεί τα δύο σημεία να συνδέονται με το ίδιο και συνεχές ρευστό. Δηλαδή: $\boldsymbol{p_A+\gamma_1 h_1-\gamma_2 h_2=0}$, δηλαδή $\boldsymbol{p_A=\gamma_2 h_2-\gamma_1 h_1}$ και στην περίπτωση που το μετρούμενο ρευστό είναι αέριο, η πίεση της στήλης του μπορεί να αγνοηθεί, δηλαδή: $\boldsymbol{p_A=\gamma_2 h_2}$. Στις παραπάνω σχέσεις υποθέσαμε ότι η πίεση στο ανοικτό άκρο είναι μηδέν, δηλαδή ότι η μετρούμενη πίεση $p_A$ είναι η απόλυτη πίεση. Εάν στο ανοικτό άκρο επικρατεί η ατμοσφαιρική πίεση, τότε η μετρούμενη $p_A$ είναι η σχετική πίεση. Το μεγάλο πλεονέκτημα του μανόμετρου σωλήνα U είναι ότι ανάλογα με τις αναμενόμενες προς μέτρηση πιέσεις μπορούμε να επιλέξουμε το κατάλληλο μετρητικό υγρό, ώστε να ταιριάξει με το διαθέσιμο ύψος του σωλήνα του.

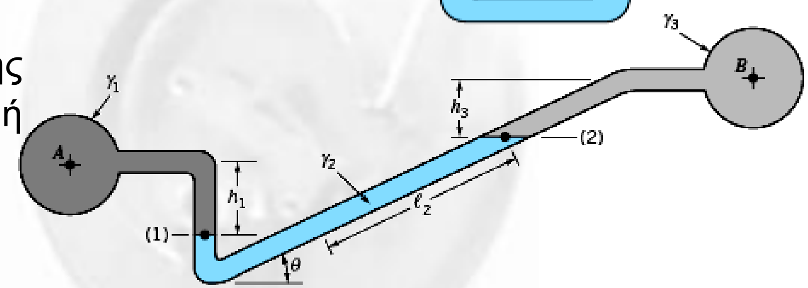
## 4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΜΑΝΟΜΕΤΡΟ ΣΩΛΗΝΑ U




Συχνά δεν μας ενδιαφέρει πίεση σε ένα σημείο, αλλά περισσότερο η διαφορική πίεση μεταξύ δυο σημείων. Αντί λοιπόν να μετρήσουμε τις δύο πιέσεις ξεχωριστά και μετά να τις αφαιρέσουμε, μπορούμε να μετρήσουμε άμεσα τη διαφορά τους με το διαφορικό μανόμετρο σωλήνα U. Στο μανόμετρο αυτό, τα δύο σημεία συνδέονται με τα δύο άκρα του, οπότε: $p_A+\gamma_1 h_1-\gamma_2 h_2-\gamma_3 h_3=p_B$, δηλαδή η διαφορά είναι:

$$p_A-p_B=\gamma_2 h_2+\gamma_3 h_3-\gamma_1 h_1$$

## 5. ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΜΑΝΟΜΕΤΡΟ ΣΩΛΗΝΑ U




Μικρές διαφορές πίεσης προκαλούν μικρή ανύψωση της στήλης του μανομέτρου, δυσχεραίνοντας την ακριβή ανάγνωση της ένδειξης. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται το κεκλιμένο μανόμετρο τύπου U του σχήματος, όπου:

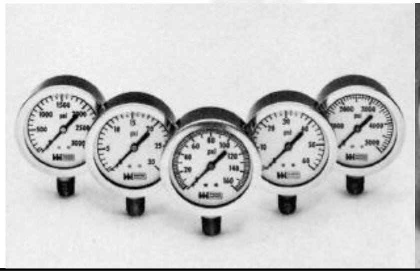
$$p_A+\gamma_1 h_1-\gamma_2 l_2 \sin\theta-\gamma_3 h_3=p_B$$

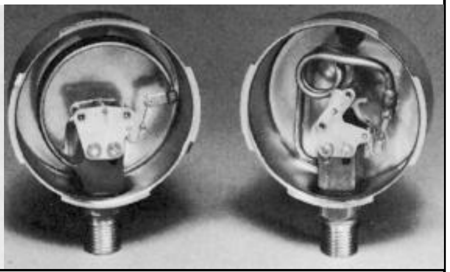
δηλαδή η διαφορά πίεσης είναι: $p_A-p_B=\gamma_2 l_2 \sin\theta+\gamma_3 h_3-\gamma_1 h_1$

Επειδή μικρές διαφορές πιέσεις έχουμε συνήθως σε αέρια, τότε η διαφορά είναι ίση με: $p_A-p_B=\gamma_2 l_2 \sin\theta$

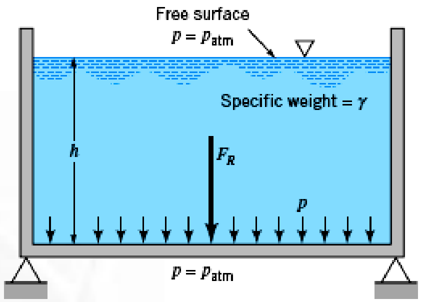
## 6. ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΜΑΝΟΜΕΤΡΑ (BOURDON)

Τα μανόμετρα αυτά βασίζονται στην ελαστική παραμόρφωση ελάσματος μορφής C (αριστερά) ή ελατηρίου (δεξιά) για τη μέτρηση μικρών/μεσαίων ή μεγάλων πιέσεων (>50 [bar]), αντίστοιχα.



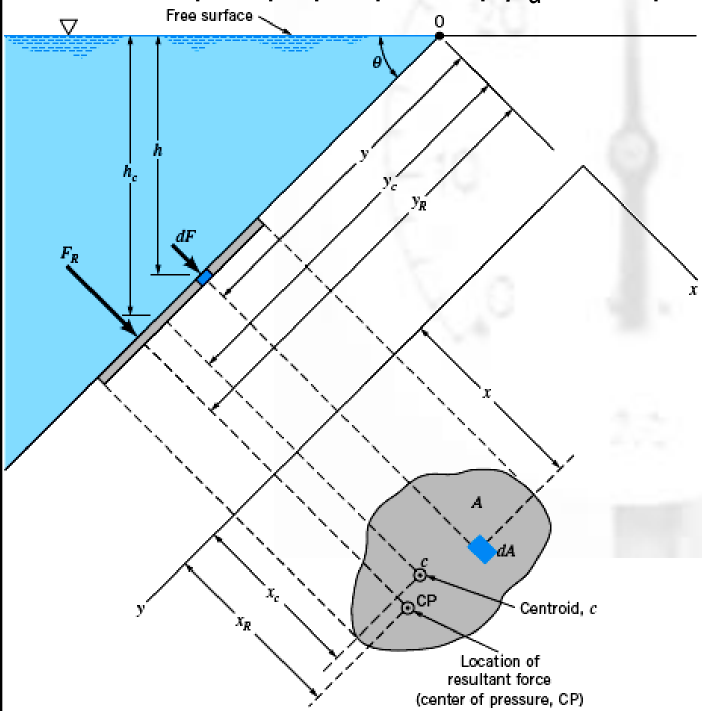


Ο υπολογισμός των υδροστατικών δυνάμεων που ενεργούν σε κατασκευές είναι απαραίτητος σε πολλές εφαρμογές, όπως δεξαμενές, φράγματα, κανάλια, πλοία, κ.λπ.




## 1. ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Για οριζόντια επιφάνεια (πυθμένα), ο υπολογισμός της δύναμης και του σημείου εφαρμογής της είναι εύκολος, διότι το σημείο εφαρμογής είναι το **γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας**, ενώ το μέτρο ισούται με: $\boldsymbol{F_R=pA=(p_\alpha+\rho g h)A}$, όπου $A$=εμβαδό πυθμένα [m$^2$]. Σε περίπτωση που από την άλλη πλευρά του πυθμένα ασκείται ατμοσφαιρική πίεση, $p_\alpha$, τότε η δύναμη είναι: $\boldsymbol{F_R=\rho g h A}$.




## 2. ΚΕΚΛΙΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Έστω επίπεδη επιφάνεια υπό γωνία θ ως προς την οριζόντια. Σε κάθε βάθος ***h*** η στοιχειώδης δύναμη **d*F*** που ασκείται κάθετα στη στοιχειώδη επιφάνεια **d*A*** είναι: **d*F*=*p*d*A*=*γh*d*A***. Για να βρεθεί η συνολική δύναμη λοιπόν πρέπει να ολοκληρωθεί η σχέση αυτή (***h*=*y*sin*θ***):

$$F_R = \int_A \gamma h \, dA = \int_A \gamma y \sin\theta \, dA$$

και για σταθερό θ και γ: $F_R = \gamma \sin\theta \int_A y \, dA$

Το ολοκλήρωμα είναι **η ροπή πρώτης τάξης της επιφάνειας A ως προς τον άξονα x**: $\int_A y \, dA = y_c A$

Όπου $\boldsymbol{y_c}$ είναι η απόσταση στη δ/νση *y* του γεωμετρικού κέντρου της επιφάνειας, *C*, από την αρχή των αξόνων *0*. Άρα η σχέση για τη δύναμη γράφεται ως: $F_R = \gamma A y_c \sin\theta$ ή πιο απλά: $\boxed{F_R = \gamma h_c A}$

όπου $h_c$ είναι η κατακόρυφη απόσταση του γεωμετρικού κέντρου από την ελεύθερη επιφάνεια. Παρατηρούμε ότι το μέτρο της δύναμης λόγω υδροστατικής πίεσης σε κεκλιμένη επίπεδη επιφάνεια δεν εξαρτάται από την κλίση της επιφάνειας. **Ουσιαστικά, η δύναμη ισούται με το γινόμενο της υδροστατικής πίεσης στο γεωμετρικό κέντρο επί όλο το εμβαδόν της βυθισμένης επιφάνειας και είναι κάθετη στην επιφάνεια** (εδώ υπάρχει η επίδραση της γωνίας κλίσης).

Το **κέντρο πίεσης**, *CP*, δε συμπίπτει ποτέ με το γεωμετρικό κέντρο και βρίσκεται πάντοτε σε μεγαλύτερο βάθος, διότι η πίεση αυξάνει συνεχώς με το βάθος. Για τον υπολογισμό του πρέπει να εξισωθούν οι ροπές (i) της συνισταμένης δύναμης και (ii) της κατανομής της δύναμης λόγω πίεσης αναφορικά με έναν αυθαίρετο άξονα περιστροφής. Για τον άξονα *x* αυτό μεταφράζεται στη σχέση:

$$F_R y_R = \int_A y dF \Rightarrow (\gamma A y_c \sin\theta) y_R = \int_A y p dA \Rightarrow A y_c \gamma \sin\theta\, y_R = \int_A y(\gamma h) dA \Rightarrow$$

$$A y_c \gamma \sin\theta\, y_R = \int_A y(\gamma y \sin\theta) dA \Rightarrow A y_c \gamma \sin\theta\, y_R = \gamma \sin\theta \int_A y^2 dA \Rightarrow y_R = \frac{\int_A y^2 dA}{A y_c} \Rightarrow y_R = \frac{I_x}{A y_c}$$

όπου το ολοκλήρωμα στον αριθμητή είναι **η ροπή δεύτερης τάξης της επιφάνειας *A* (ροπή αδράνειας) ως προς τον άξονα x.**

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων για να εκφράσουμε το $I_x$: $I_x = I_{xc} + A y_c^2$.
όπου $I_{xc}$ είναι η ροπή αδράνειας της επιφάνειας αναφορικά με έναν άξονα παράλληλο προς τον άξονα *x* που περνάει από το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας. Άρα το κέντρο πίεσης δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c}$$

Αποδεικνύεται λοιπόν ότι όντως το κέντρο πίεσης βρίσκεται χαμηλότερα από το γεωμετρικό κέντρο. Για επιφάνειες που βρίσκονται σε μεγάλο βάθος, $y_R \approx y_c$.

Εάν κάνουμε την ίδια ανάλυση για την εύρεση του $x_R$, τη συντεταγμένη του κέντρου πίεσης κατά τη δ/νση x, η εξίσωση των ροπών δίνει: $F_R x_R = \int_A \gamma \sin\theta\, xy\, dA$ και τελικά:

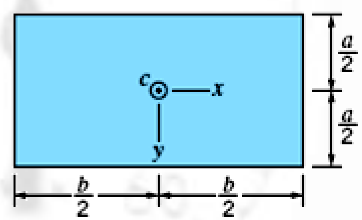
$$x_R = \frac{\int_A xy\, dA}{y_c A} = \frac{I_{xy}}{y_c A}$$

όπου όπου $I_{xy}$ είναι το γινόμενο της αδράνειας αναφορικά με τους άξονες *x* και *y*.

Πάλι από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων, ισχύει ότι $I_{xy}=I_{xyc}+Ax_cy_c$, όπου $I_{xyc}$ είναι το γινόμενο της αδράνειας αναφορικά με ένα σύστημα αξόνων που περνάει από το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας και δημιουργείται από απλή μετατόπιση του συστήματος x–y. Άρα η συντεταγμένη στη δ/νση x δίνεται από τη σχέση: $\boxed{x_R = \dfrac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c}$ και συμπίπτει με το $x_c$ εφόσον η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι επειδή $y_c=h_c/\sin\theta$ η απόσταση $y_c$ θα αυξηθεί είτε με αύξηση του βάθους, $h_c$, είτε με μείωση της γωνίας θ με περιστροφή για το ίδιο βάθος.

Στα κοινά γεωμετρικά σχήματα δίπλα, αναγράφονται οι ροπές αδράνειας για τον υπολογισμό του κέντρου πίεσης.

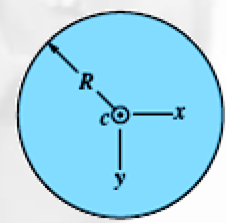



$A = ba$

$I_{xc} = \frac{1}{12}ba^3$

$I_{yc} = \frac{1}{12}ab^3$

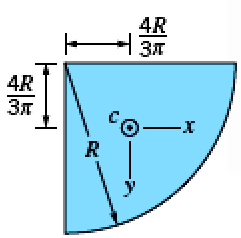
$I_{xyc} = 0$




$A = \pi R^2$

$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$

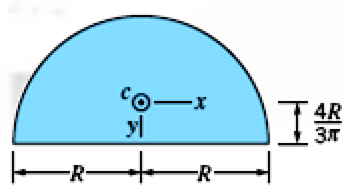
$I_{xyc} = 0$




$A = \frac{\pi R^2}{4}$

$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488R^4$

$I_{xyc} = -0.01647R^4$

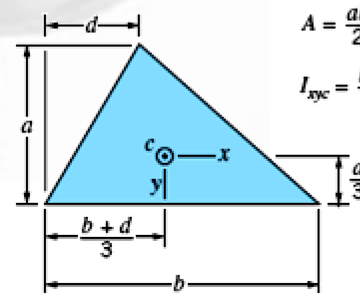



$A = \frac{\pi R^2}{2}$

$I_{xc} = 0.1098R^4$

$I_{yc} = 0.3927R^4$

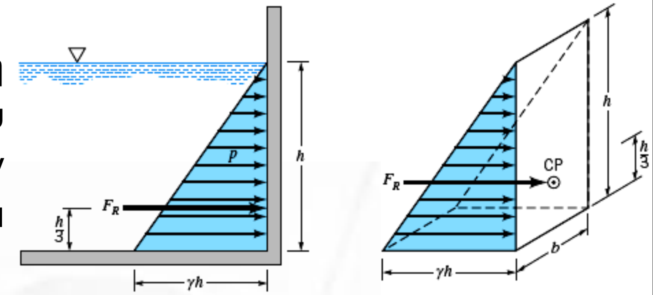
$I_{xyc} = 0$



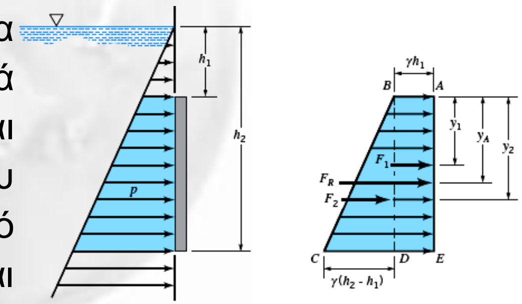

$A = \frac{ab}{2}$ $\quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$

$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b-2d)$

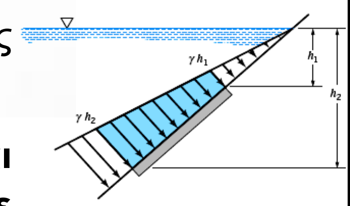
## ΠΡΙΣΜΑ ΠΙΕΣΗΣ




Σε αρκετές περιπτώσεις είναι βολικό να σχεδιάζουμε την κατανομή της πίεσης σε μία βυθισμένη επιφάνεια. Για τη δεξαμενή του σχήματος παριστάνεται η γραμμική κατανομή της πίεσης στην κατακόρυφη επιφάνειά της βάθους *h* και πλάτους *b*, η οποία είναι μηδενική στην ελεύθερη επιφάνεια και αυξάνει σύμφωνα με τη σχέση $p(y)=\gamma h(y)$. Δημιουργείται ένας πρισματικός όγκος με βάση την επιφάνεια και ύψος την πίεση. Από τον ορισμό της πίεσης ($p=F/A$) συνάγεται ότι ο όγκος του πρίσματος ισούται με την τιμή της δύναμης. Η δύναμη περνάει από το κέντρο βάρους του πρίσματος, το οποίο βρίσκεται στο μέσο του πλάτους και στο 1/3 του ύψους από τη βάση της επιφάνειας. Τα ίδια αποτελέσματα παίρνουμε με τις σχέσεις των §3.8–10.




Την ίδια γραφική μέθοδο μπορούμε να εφαρμόσουμε και όταν η επιφάνεια δεν εκτείνεται μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια. Τότε το πρίσμα έχει πλευρά τραπέζιο. Το μέτρο της δύναμης ισούται πάλι με τον όγκο του πρίσματος και το σημείο εφαρμογής περνάει από το κέντρο βάρος του. Ο υπολογισμός του μέτρου και του σημείου εφαρμογής της δύναμης γίνεται με τον καταμερισμό του πρίσματος σε δύο μέρη, ένα τριγωνικό και ένα ορθογωνικό: $F_R=F_1+F_2$ και $F_R y_A=F_1 y_1+F_2 y_2$, όπου τα $y_1$, $y_2$, $F_1$ και $F_2$, υπολογίζονται εύκολα.

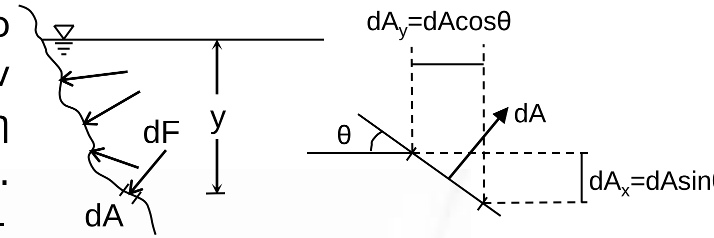



Για κεκλιμένες επιφάνειες, ισχύει ο γραφικός υπολογισμός με πρίσμα πίεσης, όμως στους υπολογισμούς υπεισέρχεται το βάθος και όχι το μήκος πάνω στην επιφάνεια.

**Σε περίπτωση μη παραλληλόγραμμου πλάτους της επιφάνειας, απαιτείται ολοκλήρωση για την εύρεση του όγκου και του κέντρου βάρους, οπότε χρησιμοποιούνται οι σχέσεις των §3.8–10, οι οποίες περιέχουν την ολοκλήρωση.**

# 3.6 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΥΓΡΩΝ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ





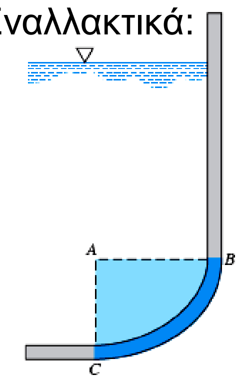

Ο υπολογισμός της δύναμης σε καμπύλες επιφάνειες, είναι πιο δύσκολος επειδή οι στοιχειώδεις δυνάμεις, d$F$, δεν έχουν παντού την ίδια δ/νση. Για να βρεθεί η συνισταμένη δύναμη πρέπει να ολοκληρώσουμε ξεχωριστά ως προς κάθε άξονα. Επειδή η πίεση είναι βαθμωτό μέγεθος, η προβολή d$F_x$ της δύναμης d$F$, στον άξονα $x$ ισούται με το γινόμενο της πίεσης, $p$, επί την προβολή d$A_x$ της επιφάνειας d$A$ στον άξονα $x$: $\mathbf{dF_x=pdA_x=p(dA\sin\theta)=\gamma y dA\sin\theta}$ και $\mathbf{dF_y=pdA_y=p(dA\cos\theta)=\gamma y dA\cos\theta}$ και με ολοκλήρωση βρίσκουμε τις συνισταμένες δυνάμεις στους δύο άξονες:

$$F_x=\gamma\int_A y\sin\theta dA=\gamma\int_{A_x} yd A_x \qquad \textbf{και} \qquad F_y=\gamma\int_A y\cos\theta dA=\gamma\int_{A_y} yd A_y=\gamma V_f$$

Δηλαδή:

- Η **<u>οριζόντια</u>** συνιστώσα της συνολικής δύναμης, $F_x$, έχει το ίδιο μέτρο και ασκείται στο ίδιο κέντρο πίεσης με τη δύναμη που ασκείται στην οριζόντια προβολή της καμπύλης επιφάνειας.
- Η **<u>κατακόρυφη</u>** συνιστώσα της συνολικής δύναμης, $F_y$, έχει το ίδιο μέτρο με το βάρος της κατακόρυφης στήλης υγρού που βρίσκεται άνω από την καμπύλη επιφάνεια και μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια και το κέντρο πίεσής της περνάει από το κέντρο βάρους της στήλης αυτής.

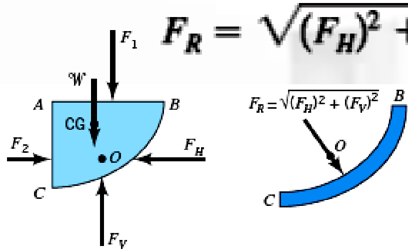
Εναλλακτικά:




$$F_H = F_2$$

$$F_V = F_1 + \mathcal{W}$$

$$F_R = \sqrt{(F_H)^2 + (F_V)^2}$$



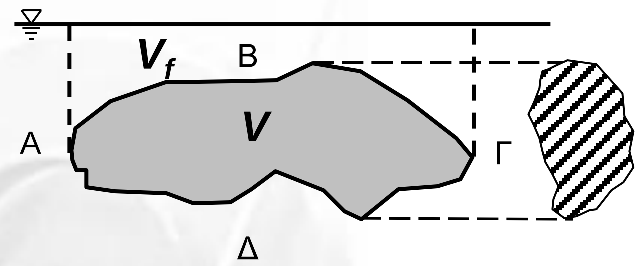

Το σημείο εφαρμογής της δύναμης είναι το σημείο Ο, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από το άθροισμα των ροπών γύρω από κατάλληλα επιλεγμένο άξονα.

Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε και τις δυνάμεις σε δοχεία πίεσης που περιέχουν πεπιεσμένα αέρια. Στην περίπτωση αυτή η υδροστατική πίεση είναι αμελητέα και η δύναμη ισούται με την προβολή της επιφάνειας επί την πίεση του δοχείου.

## ΑΝΩΣΗ – ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα βυθισμένο μερικώς ή ολικώς σε ένα υγρό. Η δύναμη αυτή προκαλείται από την υδροστατική πίεση, η οποία αυξάνει με το βάθος, συνεπώς επειδή οι δυνάμεις κάτω από το σώμα είναι μεγαλύτερες από αυτές πάνω από αυτό, η άνωση έχει κατακόρυφη δ/νση και φορά αντίθετη με τη βαρύτητα.

Έστω ότι το σώμα, τυχαίου γεωμετρικού σχήματος, είναι βυθισμένο σε υγρό και ισορροπεί. Η άνωση υπολογίζεται από το ισοζύγιο δυνάμεων σε καμπύλες επιφάνειες (§3.12) και ισούται με τη διαφορά της δύναμης που ασκείται στην καμπύλη επιφάνεια ΑΔΓ, $\rho g V_f$ και ΑΒΓ, $\rho g(V+V_f)$, αντίστοιχα, όπου $V$=όγκος σώματος και $V_f$=όγκος στήλης υγρού πάνω από το σώμα. Δηλαδή η άνωση είναι ίση με: $F_A=\rho g V=\gamma V$.



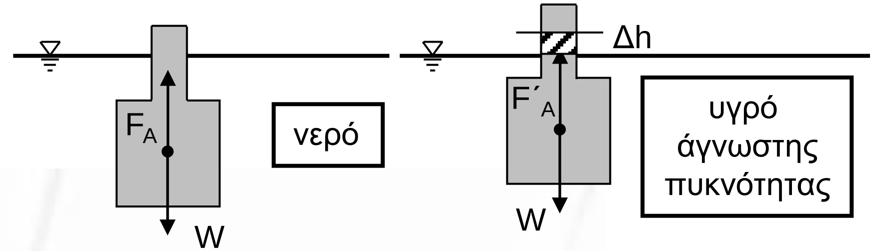

Οι οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στις επιφάνειες ΒΑΔ και ΒΓΔ, είναι ίσες και αντίθετες, δηλαδή αλληλοαναιρούνται, διότι ισούνται με την υδροστατική δύναμη που ασκείται στις κατακόρυφες προβολές τους, οι οποίες ταυτίζονται.

Το σημείο εφαρμογής της άνωσης είναι το γεωμετρικό κέντρο του σώματος και όχι απαραίτητα το κέντρο βάρος του. Εάν το σώμα αποτελείται από το ίδιο υλικό, δηλαδή είναι ομοιόμορφο, τότε το κέντρο άνωσης (γεωμετρικό κέντρο) ταυτίζεται με το κέντρο βάρους.

Εάν το σώμα βρίσκεται στη διαχωριστική γραμμή δύο υγρών, τότε η άνωση ισούται με: $F_A=\rho_1 g V_1+\rho_2 g V_2$.

<u>ΠΥΚΝΟΜΕΤΡΑ</u>: Όργανα βασιζόμενα στην αρχή του Αρχιμήδη που υπολογίζουν την πυκνότητα υγρών. Ουσιαστικά πρόκειται για πλωτήρες με ένδειξη βύθισης, ο οποίος είναι βαθμονομημένος σε νερό 4 [$^oC$], δηλαδή είναι γνωστή η βύθισή του σε νερό πυκνότητας 1000 [kg $m^{-3}$]. Όταν ο ίδιος πλωτήρας (δηλαδή με το ίδιο βάρος) βυθίζεται σε ένα υγρό άγνωστης πυκνότητας, η διαφορά της ένδειξης, $\Delta h$, η οποία αντιστοιχεί σε διαφορά βυθισμένου όγκου $\Delta V$, οδηγεί στον υπολογισμό της σχετικής πυκνότητας, $S=\gamma_f/\gamma_w$.

Και στις δύο περιπτώσεις η ισορροπία των κατακόρυφων δυνάμεων, δηλαδή του βάρους του πλωτήρα και της άνωσης δίνει, εφόσον το βάρος είναι το ίδιο): $F_A = F'_A \Rightarrow \gamma_w V_o = \gamma_f V \Rightarrow \gamma_w V_o = S\gamma_w (V_o - A\Delta h) \Rightarrow$




$$S = \frac{V_o}{V_o - A\Delta h}$$

όπου $\gamma_w$ και $\gamma_f$=ειδικό βάρος νερού και του υγρού, $V_o$ και $V$=βυθισμένος όγκος στο νερό και στο υγρό, A=εμβαδόν διατομής του πλωτήρα στο πάνω τμήμα του.

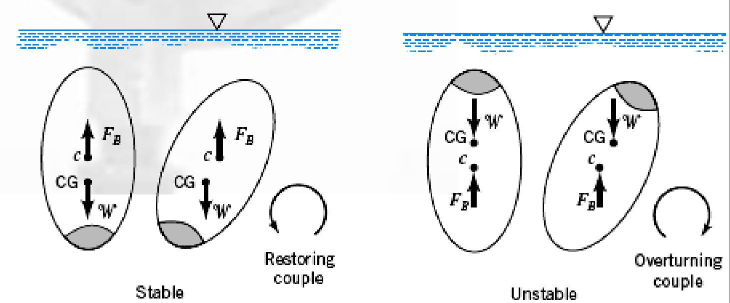
## ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΠΛΗΡΩΣ ΒΥΘΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Τα βυθισμένα σώματα δέχονται δύο κατακόρυφες δυνάμεις: (i) το βάρος και (ii) την άνωση.

- Εάν είναι στην ίδια κατακόρυφο, η ροπή είναι μηδενική, άρα δεν υπάρχει περιστροφή.
- Εάν είναι ίσες, η μετακίνηση είναι μηδενική.
- Εάν είναι στην ίδια κατακόρυφο και ίσες, επικρατεί στατική ισορροπία (ακινησία).

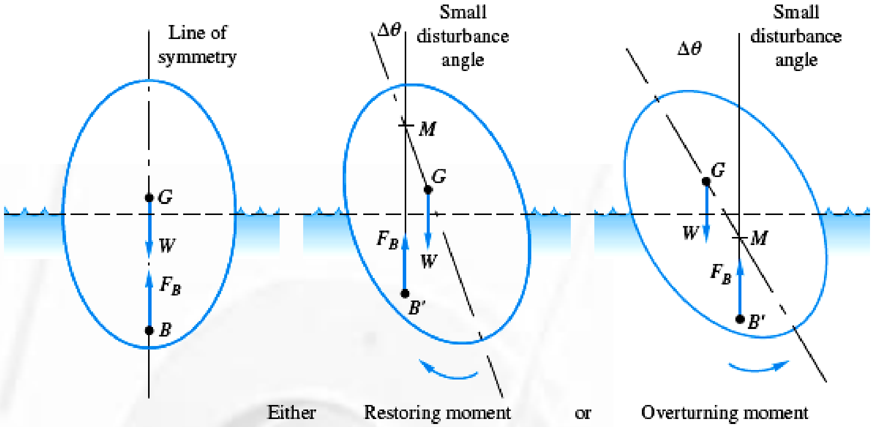
Ένα σώμα πλήρως ή μερικώς βυθισμένο σε υγρό σε βρίσκεται σε ***ευσταθή ισορροπία*** όταν εφόσον μετακινηθεί από αυτή τείνει να επιστρέψει στην ίδια κατάσταση ισορροπίας. Αντίστοιχα, ένα σώμα βρίσκεται σε κατάσταση ***ασταθούς ισορροπίας*** όταν εφόσον μετακινηθεί, έστω ελάχιστα, από αυτή τείνει σε άλλη κατάσταση ισορροπίας.

Όταν το σώμα δεν είναι ομοιογενές (βλ. σχήμα), τότε το κέντρο βάρους (CG) δεν είναι στο ίδιο επίπεδο με το κέντρο άνωσης (C) που συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο. Όταν το Κ.Α. είναι πάνω από το Κ.Β., υπάρχει ευσταθής ισορροπία διότι η όποια μετατόπιση δημιουργεί ροπή επαναφοράς. Αντίθετα, όταν το Κ.Α. είναι κάτω από το Κ.Β. τότε υπάρχει ασταθής ισορροπία διότι δημιουργείται ροπή ανατροπής.




**Ευσταθής** **Ασταθής**

## ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΕΡΙΚΩΣ ΒΥΘΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ




Στην περίπτωση αυτή με την μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, αλλάζει η κατακόρυφη θέση του Κ.Α., λόγω της αλλαγής του όγκου που είναι βυθισμένος, τόσο στο μέγεθος, όσο και στη θέση.

Σε αυτήν την περίπτωση όταν το Κ.Α. είναι πάνω από το Κ.Β. η ισορροπία είναι πάντα ευσταθής. Επίσης, μπορεί να υπάρχει ευσταθής ισορροπία ακόμη και εάν το Κ.Α. βρίσκεται κάτω από το Κ.Β.

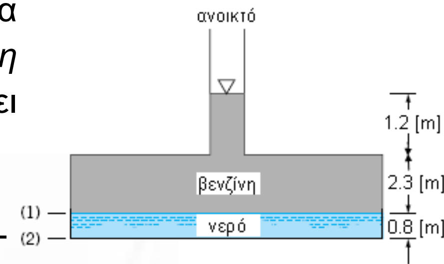
Προϋπόθεση είναι το **μετάκεντρο, Μ,** (σημείο τομής της ευθείας που εφαρμόζεται η άνωση κατά τη στατική ισορροπία και εκτός αυτής) να βρίσκεται πάνω από το Κ.Β. (μεσαίο σχήμα). Εάν το Μ είναι κάτω από το Κ.Β. (δεξιό σχήμα), τότε η ισορροπία είναι ασταθής και το σώμα (π.χ. πλοίο) θα ανατραπεί. Η απόσταση μεταξύ Μ και Κ.Β. ονομάζεται μετακεντρικό ύψος.

- Όσο ένα πλοίο φορτώνεται, αλλάζει και το Κ.Β., άρα και η ευστάθειά του, καθώς επίσης αλλάζει και η άνωση και το Κ.Α.
- Εάν το φορτίο του πλοίου είναι υγρό, η μετατόπιση προκαλεί κατακόρυφη μετατόπιση και του Κ.Β. με αποτέλεσμα τη μείωση της ευστάθειας. Για το λόγο αυτό τα δεξαμενόπλοια έχουν διαμερίσματα.
- Τυπικό μετακεντρικό ύψος είναι 0.3÷1.2 [m]. Όσο πιο μικρό το μετακεντρικό ύψος, τόσο μεγαλύτερη η ταλάντωση στη θάλασσας, άρα πιο ήρεμο ταξίδι.

# 3.8 ΑΣΚΗΣΕΙΣ – (α)

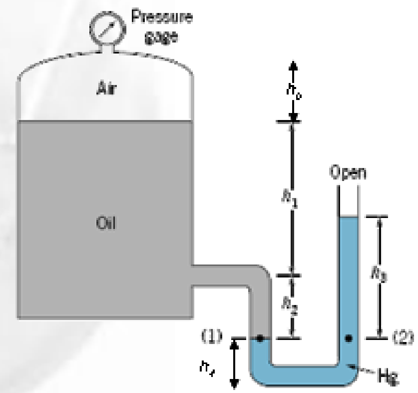


**1.** Σε δεξαμενή βενζίνης υπήρξε διαρροή νερού, το οποίο κατακάθισε στον πυθμένα της δεξαμενής, όπως φαίνεται στο σχήμα. *Υπολογίστε την πίεση σε [atm] στη διεπιφάνεια νερού–βενζίνης, και στον πυθμένα της δεξαμενής*, εάν η βενζίνη έχει ειδικό βάρος 7060 [$Nm^{-3}$]. **1.24, 1.32 [atm]**.

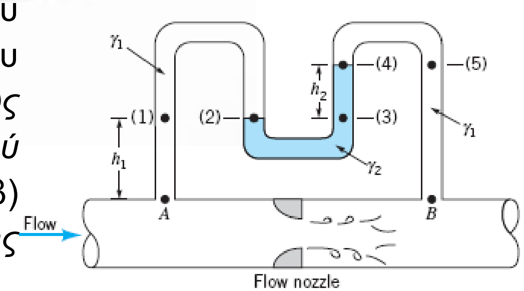



**2.** Μία λίμνη σε οροπέδιο έχει μέγιστο βάθος 42 [m]. Η βαρομετρική πίεση στο οροπέδιο είναι 598 [mmHg] (στήλης υδραργύρου) και το νερό έχει θερμοκρασία 12 [$^{o}$C]. *Να υπολογιστεί η απόλυτη πίεση σε [bar] στο βαθύτερο σημείο της λίμνης*, όταν η πυκνότητα του υδραργύρου είναι 13529 [kg $m^{-3}$] και η πυκνότητα του νερού για 10 και 20 [$^{o}$C] είναι 999.7 και 998.2 [kg $m^{-3}$], αντίστοιχα. **4.91 [bar]**.

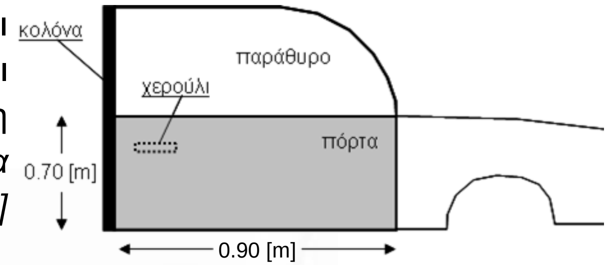
**3.** Κλειστό δοχείο πίεσης βρίσκεται σε θερμοκρασία 20 [$^{o}$C] και περιέχει αέρα υπό πίεση και πετρέλαιο (σχετική πυκνότητα πετρελαίου=0.90). Το δοχείο συνδέεται με μανόμετρο τύπου U με υδράργυρο (σχετική πυκνότητα υδραργύρου=13.6), Τα διάφορα ύψη είναι $h_0$=1.3, $h_1$=5.6, $h_2$=0.75, $h_3$=2.8 και $h_4$=1.2 [m]. *Υπολογίστε την ένδειξη του μανόμετρου Bourdon στην κορυφή του δοχείου*. **4.1335 [atm], 1.32 [atm]**.



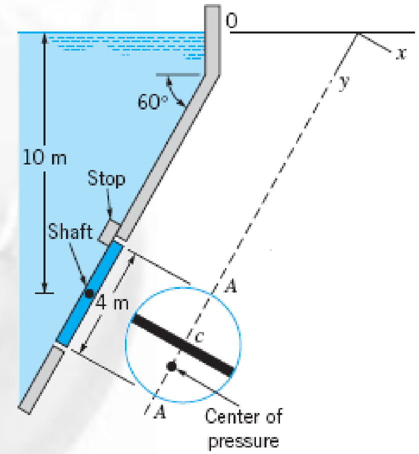

**4.** Η ροή μέσα από ροόμετρο τύπου ακροφυσίου υπολογίζεται από τη σχέση $\boldsymbol{Q=K(p_A-p_B)^{1/2}}$, όπου Q=ογκομετρική παροχή σε [$m^3$ $s^{-1}$] και K=σταθερά του οργάνου. Η διαφορά πίεσης ($p_A$–$p_B$) μετράται με διαφορικό ροόμετρο τύπου U όπως φαίνεται στο σχήμα. (α) *Εκφράστε τη διαφορά πίεσης ως συνάρτηση των ειδικών βαρών $\gamma_1$ και $\gamma_2$ του ρέοντος ρευστού και του υγρού του μανομέτρου, καθώς και των υψών $h_1$ και $h_2$ που δίνονται στο σχήμα*. (β) *Για $\gamma_1$=9.80, $\gamma_2$=15.6 [kN $m^{-3}$] και $h_1$=1.0, $h_2$=0.5 [m] ποια η τιμή της πτώσης πίεσης μεταξύ των σημείων A και B?* **$(p_A-p_B)=h_2(\gamma_2-\gamma_1)$, 2900 [Pa]**.



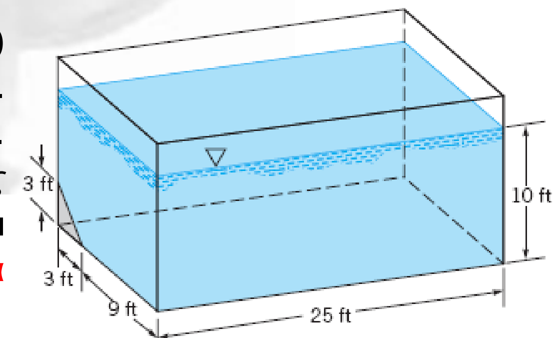
**5.** Αυτοκίνητο πέφτει στη θάλασσα από γέφυρα και αρχίζει να βυθίζεται χωρίς να έχει πάρει κλίση. Όταν η πόρτα του οδηγού (ύψους 0.70 και μήκους 0.90 [m]) έχει καλυφθεί πλήρως από το νερό (μέχρι τη βάση του παράθυρου), αυτός προσπαθεί να την ανοίξει. *Πόση δύναμη θα χρειαστεί να ασκήσει στο χερούλι της πόρτας που βρίσκεται 20 [cm] από την κολόνα της πόρτας?* **1391 [N]**.



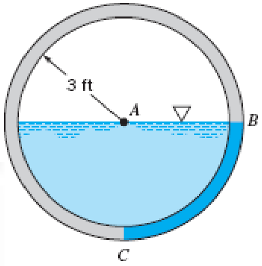

**6.** Η κυκλική θυρίδα διαμέτρου 4 [m] του σχήματος βρίσκεται σε κεκλιμένη κατά $60^o$ επιφάνεια μίας μεγάλης δεξαμενής νερού. Η θυρίδα εδράζεται σε άξονα που περνάει από την οριζόντια διάμετρό της και το άνοιγμά της ασφαλίζει με κατάλληλο μηχανισμό στο πάνω μέρος της. Για βάθος νερού πάνω από το κέντρο της θυρίδας 10 [m], *υπολογίστε (α) το μέγεθος και τη θέση της δύναμης που ασκείται στη θυρίδα από το νερό και (β) την απαιτούμενη ροπή για να περιστραφεί η θυρίδα.* **(α) 1.23 [MN] στα 0.0866 [m] κάτω από το Γ.Κ., (β) $1.07\times10^5$ [N m]**.




**7.** Σε ένα μεγάλο ενυδρείο που περιέχει θαλασσινό νερό ($\gamma$=10.05 [kN m$^{-3}$]) γίνεται αντικατάσταση ενός τριγωνικού τμήματος σε ένα πλάγιο τοίχωμα. Οι διαστάσεις του τμήματος και της δεξαμενής δίνονται στο σχήμα. *Υπολογίστε το μέγεθος και το σημείο εφαρμογής της υδροστατικής δύναμης που ασκείται στο τριγωνικό τμήμα.* Δίνεται ότι 1ft=30.48 [cm] και 1lb=4.4482 [N]. **11525.7 [N] , 0.0169 και 0.00847 [m] κάτω και δεξιά από το Γ.Κ.**



**8.** Ο αγωγός αποχέτευσης του σχήματος είναι μισογεμάτος με νερό. Εάν έχει διάμετρο 6 [ft], *υπολογίστε το μέγεθος και τη δ/νση εφαρμογής της υδροστατικής δύναμης του νερού στο τοίχωμα BC του αγωγού* για τμήμα μήκους 1 [ft]. Δίνεται ότι 1ft=30.48 [cm]. **2327.7 [N], 32.5$^{o}$**.




**9.** Μεταλλικό δοχείο 10 [kg], μήκους 1.0 [m] και διαμέτρου 0.5 [m] περιέχει νερό στήλης 60 [cm]. Το δοχείο βυθίζεται σε δεξαμενή που περιέχει νερό βάθους 2.3 [m] και λαδιού στήλης 30 [cm] πυκνότητας 820 [kg m$^{-3}$]. *Υπολογίστε το βύθισμα του δοχείο στη δεξαμενή*. **70.5 [cm]**.

**10.** Όταν κατασκευάστηκε το φράγμα της λίμνης Tucurui στη βόρεια Βραζιλία, δημιουργήθηκε μία τεχνητή λίμνη, η οποία σκέπασε ένα μεγάλο δάσος με πολύτιμη ξυλεία. Όταν αργότερα, μετά από 15 χρόνια διαπίστωσαν ότι τα δένδρα ήταν σε σχεδόν τέλεια κατάσταση, άρχισε η υποβρύχια ξυλεία τους. Κατά την κοπή τα δένδρα δένονται με σχοινιά, ώστε να μην αρχίσουν ξέφρενη πορεία προς την επιφάνεια της λίμνης σαν τορπίλες. Αν θεωρήσουμε ως αντιπροσωπευτικό σχήμα για το μέσο δένδρο, αυτό ενός κόλουρου κώνου με διάμετρο μεγάλης και μικρής βάσης τα 2.4 και 0.6 [m] και μήκος τα 30 [m] και για μέση ειδική πυκνότητα του ξύλου ίση με 0.6, *υπολογίστε την κατακόρυφη δύναμη που ασκείται στα σχοινιά συγκράτησης*. **250 [kN]**.