ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 1

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1.2 Πίνακες

Ήδη, στην παράγραφο 1.Β.1. μιλήσαμε για την έννοια του πίνακα διάστασης μxν, ο οποίος δηλαδή έχει μ*ν στοιχεία διατεταγμένα σε μ γραμμές και ν στήλες.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} = \left[\alpha_{ij}\right] \text{ όπου } i = 1,2,\dots,\mu \text{ και } j = 1,2,\dots,\nu$$

Μιλήσαμε επίσης για τετραγωνικούς πίνακες (και τις ορίζουσές τους), για πίνακες στήλες (μx1) και πίνακες γραμμές (1xν) και τέλος για τον ανάστροφο πίνακα (A^T) ενός πίνακα Α.

1.2.3 Πράξεις πινάκων

α) Ισότητα. Οι πίνακες $A = \{\alpha_{ij}\}$ και $B = \{\beta_{ij}\}$ είναι ίσοι όταν:

- έχουν την ίδια διάσταση
- έχουν ίσα τα αντίστοιχα στοιχεία $[\ \alpha_{ij} = \beta_{ij}\ \ \forall\, i,j\ ]$

β) Πολλαπλασιασμός πίνακα επί αριθμό. Πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα Α επί την πραγματική σταθερή κ, όταν πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο του επί κ:[1]

$$\kappa A = \kappa\{\alpha_{ij}\} = \Gamma = \{\gamma_{ij}\} = \{\kappa\alpha_{ij}\}$$

γ) Πρόσθεση – Αφαίρεση: Για να προστεθούν (ή να αφαιρεθούν) δύο πίνακες πρέπει αρχικά να είναι της ίδιας διάστασης. Το άθροισμα (ή η διαφορά) λοιπόν δύο πινάκων Α και Β, με διάσταση νxμ, είναι ένας νέος πίνακας Γ, ίδιας διάστασης με τους αρχικούς, του οποίου τα στοιχεία είναι το άθροισμα (ή η διαφορά) των αντίστοιχων στοιχείων των Α και Β. Χρησιμοποιώντας μάλιστα και την προηγούμενη πράξη έχουμε τη γενική σχέση (για κ και λ πραγματικούς):

$$\kappa A + \lambda B = \kappa\{\alpha_{ij}\} + \lambda\{\beta_{ij}\} = \Gamma = \{\gamma_{ij}\} = \{\kappa\alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij}\}$$

[1] Συχνά ακούγεται η απορία: «Μα εάν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία ενός πίνακα Α (μxν) με την σταθερή κ, τότε δεν πολλαπλασιάζεται ολόκληρος ο Α επί το $\kappa^{\mu\nu}$; Προσοχή! 1^o) Μιλάμε για πίνακες και όχι για ορίζουσες. 2^o) Να μην ξεχνούμε πως οι πράξεις αυτές ισχύουν για πίνακες κάθε διάστασης, ενώ ορίζουσα έχουν μόνον οι τετραγωνικοί…

Παράδειγμα: Υπολογίστε τον πίνακα 2Α – 3Β, για τους παρακάτω πίνακες:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση:

$$\Gamma = 2\mathrm{A} - 3\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2*1-3*1 & 2*3-3*2 \\ 2*(-3)-3*0 & 2*2-3*(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

δ) Μηδενικός πίνακας: Από τον ορισμό της πρόσθεσης και της αφαίρεσης προκύπτει και ο μηδενικός πίνακας. Πρόκειται για τον πίνακα που αφήνει αναλλοίωτο κάθε πίνακα στον οποίο προστίθεται ή από τον οποίο αφαιρείται (εφόσον ορίζεται η πράξη). Μηδενικός λοιπόν είναι ο πίνακας στον οποίο όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με το μηδέν.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{...} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{...} & \mathbf{0} \\ \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} & \mathbf{...} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{...} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ε) Πολλαπλασιασμός πινάκων. Ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται ο πολλαπλασιασμός των πινάκων είναι προσανατολισμένος στα γραμμικά συστήματα. Μάλιστα επιβάλλει και συγκεκριμένες διαστάσεις για τους πίνακες που παίρνουν μέρος στο γινόμενο.

Για να ορισθεί το γινόμενο Α x Β θα πρέπει το πλήθος των γραμμών του πίνακα Β να είναι ίσο με το πλήθος των στηλών του Α. Τότε το γινόμενο Α x Β είναι ένας πίνακας Γ που θα έχει γραμμές όσες και ο Α, και στήλες όσες και ο Β.

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{\alpha_{ij}\} \times \{\beta_{ij}\} = \Gamma = \{\gamma_{ij}\}$$

Πίνακας ν x κ	Πίνακας κ x μ	Πίνακας ν x μ

όπου το στοιχείο γ_{ij} προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της i–οστής γραμμής του Α επί την j-οστή στήλη του Β:

$$\begin{array}{rc} & \\ \text{i-γραμμή} & \end{array} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots\ldots & \alpha_{1\kappa} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots\ldots & \alpha_{2\kappa} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{\alpha_{i1}} & \boldsymbol{\alpha_{i2}} & \boldsymbol{\alpha_{i3}} & \ldots\ldots & \boldsymbol{\alpha_{i\kappa}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \alpha_{\nu3} & \ldots\ldots & \alpha_{\nu\kappa} \end{bmatrix} \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{j-στήλη} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \boldsymbol{\beta_{1j}} & \ldots & \beta_{1\mu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \boldsymbol{\beta_{2j}} & \ldots & \beta_{2\mu} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \ldots & \boldsymbol{\beta_{3j}} & \ldots & \beta_{3\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{\kappa1} & \beta_{\kappa2} & \ldots & \boldsymbol{\beta_{\kappa j}} & \ldots & \beta_{\kappa\mu} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + ... + \alpha_{i\kappa}\beta_{\kappa j}$$

Παρατηρήσεις:

1$^{\eta}$) Ο ορισμός του τυχαίου στοιχείου γ_{ij} του αποτελέσματος του γινομένου Γ κάνει προφανή τον καθορισμό της διάστασης των πινάκων Α και Β, καθώς και τη διάσταση του αποτελέσματος Γ. Πράγματι, ο αριθμός των στηλών του Α καθορίζει το πλήθος των στοιχείων των γραμμών του Α. Όμοια, ο αριθμός των γραμμών του Β καθορίζει το πλήθος των στοιχείων των στηλών του Β. Επομένως, για να μπορούν να πολλαπλασιαστούν ανά δύο τα στοιχεία μιας γραμμής του Α με τα αντίστοιχα στοιχεία μιας στήλης του Β, πρέπει το πλήθος τους να είναι ακριβώς ίσο.

2$^{\eta}$) Είναι φανερό πως ενώ ορίζεται το γινόμενο ΑxΒ, είναι δυνατό να μην ορίζεται το γινόμενο ΒxΑ. Όμως, ακόμη και στην περίπτωση που ορίζεται και το γινόμενο ΒxΑ, τα δύο γινόμενα δεν είναι ίσα παρά μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις.

3$^{\eta}$) Εάν οι πίνακες Α και Β είναι τετραγωνικοί (νxν), τότε η ορίζουσα του γινομένου ΑxΒ είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών Α επί Β:

$$\mathbf{det\{A*B\} = det\{A\}det\{B\}}$$

πράγμα που οδηγεί στο να ορισθεί ο πολλαπλασιασμός των οριζουσών με τον ίδιο τρόπο που ορίζεται και ο πολλαπλασιασμός πινάκων.

Παράδειγμα 1^{o}: Να υπολογισθούν τα γινόμενα Α*Β και Β*Α, εφ όσον ορίζονται, όταν δίνονται οι πίνακες, καθώς και οι ορίζουσες όλων αυτών των πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Λύση: Επειδή οι πίνακες Α και Β είναι τετραγωνικοί της ίδιας διάστασης (2x2), θα ορίζονται και τα δύο γινόμενα:

$$\mathbf{AxB} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*1+3*0 & 1*2+3(-1) \\ -3*1+2*0 & -3*2+2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BxA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*1+2*(-3) & 1*3+2*2 \\ 0*1+(-1)(-3) & 0*3+(-1)2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

det{A} = 11,   det{B} = -1,   det{A*B}= -11,   det{B*A} = -11

Παρατηρούμε λοιπόν πως ενώ για τους πίνακες A και B ορίζονται τα δύο γινόμενα (AxB και BxA), το αποτέλεσμά τους είναι τελείως διαφορετικό. Όμως οι ορίζουσες των δύο αυτών πινάκων [AxB και BxA] είναι ίσες. Γενικά, ισχύει η σχέση:

det{AxB} = det{BxA} = det{A}det{B}

Παρατήρηση: Εάν ορίζονται τα γινόμενα AxB και BxA, τότε είναι (εν γένει) διαφορετικά, **όμως έχουν την ίδια ορίζουσα** (τετραγωνικοί πίνακες).

Παράδειγμα 2^{o}: Το επόμενο σύστημα εξισώσεων λέγεται γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \alpha_{\nu3}x_3 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{array} \qquad (1)$$

Εάν ο πίνακας A είναι ο πίνακας συντελεστών $\{\alpha_{ij}\}$, X ο πίνακας-στήλη των αγνώστων $\{x_i\}$ και B ο πίνακας στήλη των σταθερών όρων $\{\beta_i\}$, τότε να δειχθεί πως το προηγούμενο γραμμικό σύστημα (1) μπορεί να γραφεί με τη σχέση:

AxX = B

Λύση: Το γινόμενο του αριστερού μέλους ορίζεται, μια και πολλαπλασιάζονται ένας πίνακας (νxν) με έναν (νx1). Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας-στήλη (νx1) και μπορεί επομένως να εξισωθεί με τον πίνακα-στήλη B. Υπολογίζουμε:

$$AxX = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + & \alpha_{12}x_2 + & \ldots & +\alpha_{1\nu}x_\nu \\ \alpha_{21}x_1 + & \alpha_{22}x_2 + & \ldots & +\alpha_{2\nu}x_\nu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu1}x_1 + & \alpha_{\nu2}x_2 + & \ldots & +\alpha_{\nu\nu}x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

Εξισώνοντας τους δύο τελευταίους πίνακες προκύπτουν οι ν εξισώσεις του γραμμικού συστήματος (1).

στ) Μοναδιαίος πίνακας. Μοναδιαίος είναι ένας πίνακας που αφήνει αναλλοίωτο κάθε πίνακα με τον οποίο πολλαπλασιάζεται (εφ' όσον ορίζεται ο πολλαπλασιασμός). Εύκολα συμπεραίνεται πως ο **μοναδιαίος πίνακας δεν μπορεί παρά να είναι τετραγωνικός (νxν)**. Έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με το μηδέν, εκτός από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του, τα οποία είναι ίσα με τη μονάδα.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\alpha + 0\beta + 0\gamma & 0\alpha + 1\beta + 0\gamma & 0\alpha + 0\beta + 1\gamma \\ 1\delta + 0\varepsilon + 0\zeta & 0\delta + 1\varepsilon + 0\zeta & 0\delta + 0\varepsilon + 1\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}\alpha + \mathbf{0}\delta & \mathbf{1}\beta + \mathbf{0}\varepsilon & \mathbf{1}\gamma + \mathbf{0}\zeta \\ \mathbf{0}\alpha + \mathbf{1}\delta & \mathbf{0}\beta + \mathbf{1}\varepsilon & \mathbf{0}\gamma + \mathbf{1}\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Ο μοναδιαίος πίνακας που πολλαπλασιάζει έναν πίνακα (μxν) από αριστερά, έχει διάσταση (μxμ). Αντίθετα αν τον πολλαπλασιάζει από δεξιά έχει διάσταση (νxν).

1.2.3 Ιδιότητες των Πινάκων

α) Επιτρεπτές γραμμοπράξεις σε πίνακα. Έστω και πάλι το γραμμικό σύστημα (1), του 2ου παραδείγματος του πολλαπλασιασμού πινάκων.

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ... + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + ... + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ .... \\ \alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \alpha_{\nu3}x_3 + ... + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{array} \qquad (1)$$

Συχνά, το σύστημα αυτό γράφεται (εκτός από AxX=B) με τη βοήθεια ενός πίνακα, ο οποίος καλείται «**επαυξημένος πίνακας**». Ουσιαστικά ο πίνακας αυτός είναι το ίδιο το σύστημα, μόνο που του αφαιρέθηκαν τα «περιττά» στοιχεία, δηλαδή τα x_i, τα + και τα =. Καταλήγουμε λοιπόν στον πίνακα [(ν,ν+1) διάστασης] :

$$G = \left| \begin{array}{ccccc:c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & .... & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & .... & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & .... & \alpha_{3\nu} & \beta_3 \\ ...... & ...... & ...... & ...... & ...... & .... \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \alpha_{\nu3} & .... & \alpha_{\nu\nu} & \beta_\nu \end{array} \right|$$

Αναζητούμε λοιπόν τις επιτρεπτές πράξεις ανάμεσα στα στοιχεία ενός πίνακα, έχοντας στο μυαλό μας <u>πως ένας πίνακας είναι και ο επαυξημένος, κι επομένως οι επιτρεπτές πράξεις δεν θα έπρεπε να επηρεάζουν τη λύση του συστήματος…</u> Μπορούμε λοιπόν:

1. Να αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές του πίνακα (είναι σαν να γράφουμε με άλλη σειρά τις εξισώσεις του συστήματος).
2. Αποφεύγουμε την αντιμετάθεση στηλών μεταξύ τους (μια τέτοια αντιμετάθεση –ειδικά με την τελευταία στήλη- θα έδινε ένα τελείως διαφορετικό σύστημα).
3. Να πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής επί μία σταθερή. (είναι σαν να πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης με μία σταθερή).
4. Να αφαιρέσουμε (ή να προσθέσουμε) από τα στοιχεία μιας γραμμής τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής, πολλαπλασιασμένα (όλα) με την ίδια σταθερή (είναι σαν να αντικαθιστούμε μια εξίσωση του συστήματος με έναν γραμμικό συνδυασμό μιας άλλης, με την εν λόγω εξίσωση).

Οι επιτρεπτές αυτές πράξεις, με τα στοιχεία των γραμμών ενός πίνακα, λέγονται **επιτρεπτές γραμμοπράξεις, ή στοιχειώδεις μετασχηματισμοί**. Να τονισθεί πως εάν εφαρμόσουμε τη λογική των σχέσεων 3 και 4 σε μία στήλη τότε έχουμε απόλυτη αλλοίωση του επαυξημένου πίνακα G.

Μετά την εκτέλεση μιας επιτρεπτής γραμμοπράξης σε ένα πίνακα A, προκύπτει ένας πίνακας A’, ο οποίος λέγεται γραμμοϊσοδύναμος πίνακας του πίνακα A. Όμοια δύο πίνακες A και B λέγονται γραμμοϊσοδύναμοι όταν μπορούμε από τον ένα να φθάσουμε στον άλλο με επιτρεπτές γραμμοπράξεις. **Άρα, οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί οδηγούν σε γραμμοϊσοδύναμους πίνακες.**

β) Βασικές ιδιότητες. Στη συνέχεια θα αναφερθούν κάποιες σημαντικές ιδιότητες, χωρίς απόδειξη, μια και η απόδειξη των περισσοτέρων είναι απλή.

i) $A+B = B+A$

ii) $AB \neq BA$ (έστω κι αν ορίζονται και τα δύο γινόμενα, εκτός από ειδικές εξαιρέσεις)

iii) $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$

iv) Α(ΒΓ) = (ΑΒ)Γ =ΑΒΓ = Δ όπου οι διαστάσεις των πινάκων επαληθεύουν την σχέση: Α(κxλ), Β(λxμ) και Γ(μxν), ενώ το γινόμενο έχει διαστάσεις: Δ(κxν).

v) Είδαμε ήδη πως για τετραγωνικούς πίνακες (νxν) ισχύει η σχέση: det{ΑxΒ} = det{ΒxΑ} = det{Α}det{Β}

vi) Έστω οι πίνακες Α και Β, ενώ Γ είναι το γινόμενό τους (ΑΒ=Γ). Ση συνέχεια εφαρμόζουμε μία επιτρεπτή γραμμοπράξη στις **γραμμές** του Α, παίρνοντας τον Α', γραμμοϊσοδύναμο πίνακα του Α. Τότε το γινόμενο Α'Β δίνει έναν πίνακα Γ' ο οποίος προκύπτει από τον Γ με την εφαρμογή της ίδιας γραμμοπράξης. Δηλαδή:

ΑΒ = Γ οπότε Α'Β = Γ'

Παρατήρηση: Στο γινόμενο ΑΒ = Γ, ισχύει μια παρόμοια ιδιότητα που να συνδέει τους πίνακες Β και Γ, όμως για μετασχηματισμούς που αφορούν σε στήλες. Κι επειδή πρακτικά αποφεύγουμε πράξεις με στήλες (στηλοπράξεις), θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε άκυρη μια σχέση της μορφής $AB'_\sigma = \Gamma'_\sigma$. Αξίζει επομένως να τονίσουμε για άλλη μια φορά πως οι σχέσεις 3 και 4 (της παρ. στ) ισχύουν μόνο για μετασχηματισμούς γραμμών.

Παράδειγμα: Θα δειχθεί με ένα παράδειγμα η ισχύς της ιδιότητας viii. Έστω λοιπόν δύο πίνακες Α και Β ενώ Γ είναι το γινόμενό τους:

$$AB = \Gamma \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\kappa + \gamma\mu & \alpha\lambda + \gamma\nu \\ \beta\kappa + \delta\mu & \beta\lambda + \delta\nu \end{bmatrix}$$

Μετασχηματίζουμε τον Α και ξαναπαίρνουμε το γινόμενο Α'Β:

$$A'B = \Gamma' \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta - \tau\alpha & \delta - \tau\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\kappa + \gamma\mu & \alpha\lambda + \gamma\nu \\ \beta\kappa + \delta\mu - \tau\alpha\kappa - \tau\gamma\mu & \beta\lambda + \delta\nu - \tau\alpha\lambda - \tau\gamma\nu \end{bmatrix}$$

όπου σαν γραμμοπράξη χρησιμοποιήθηκε ο πολλαπλασιασμός της $1^{ης}$ γραμμής επί τ και η αφαίρεσή της από την $2^{η}$. Παρατηρούμε πως ο ίδιος μετασχηματισμός γραμμών συνέβη και στο αποτέλεσμα του γινομένου…

<u>Ασκήσεις:</u>

1η) Δίνονται οι πίνακες:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-4}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{-1}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\quad \boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

και ζητείται να γίνουν τα 12 γινόμενα (ΑΑ, ΑΒ, ΑΓ κλπ). Εάν ένα γινόμενο δεν ορίζεται, αυτό πρέπει να δηλώνεται.

2η) Δίνεται οι παρακάτω επαυξημένοι πίνακες. Να γραφούν τα συστήματα που προκύπτουν από αυτούς:

$$\mathbf{G_1}=\begin{bmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{6} & \mathbf{4}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\quad \mathbf{G_2}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

1.2.3 Αντίστροφος πίνακας ενός <u>τετραγωνικού</u> πίνακα

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας Α (διάστασης νxν). Ο τετραγωνικός (νxν) πίνακας A^{-1} ονομάζεται αντίστροφος πίνακας του Α όταν ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{A^{-1}xA = AxA^{-1} = I}$$

όπου Ι ο μοναδιαίος πίνακας στη διάσταση νxν.

α) Υπολογισμός του αντιστρόφου πίνακα μέσω των αλγεβρικών συμπληρωμάτων:

Ορίσαμε το ανάπτυγμα μίας ορίζουσας με την βοήθεια των αλγεβρικών συμπληρωμάτων της μορφής:[2]

[2] Θυμίζουμε πως πρόκειται για το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij}, που ισούται με την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα διάστασης (ν-1 x ν-1) που προκύπτει από τον Α εάν διαγράψουμε την i-γραμμή του και την j-στήλη του. Το πρόσημο του αλγεβρικού συμπληρώματος δίνεται από τον παράγοντα $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j-1} & \alpha_{1j+1} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i-1,1} & \dots & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j+1} & \dots & \alpha_{i-1,\nu} \\ \alpha_{i+1,1} & \dots & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i+1,j+1} & \dots & \alpha_{i+1,\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \dots & \alpha_{i\nu,j-1} & \alpha\nu_{,j+1} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Ο αντίστροφος πίνακας (A^{-1}) του A δίνεται με την βοήθεια των αλγεβρικών συμπληρωμάτων (A_{ij}) των στοιχείων α_{ij}, και ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{det[A]} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{\nu 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & \dots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}}$$

όπου τα αλγεβρικά συμπληρώματα τοποθετούνται κατά την ανάστροφη λογική (δηλαδή ο πρώτος δείκτης ορίζει την στήλη στην οποία τοποθετείται, ενώ ο δεύτερος ορίζει την γραμμή).

Γίνεται επομένως φανερό πως ένας τετραγωνικός πίνακας A αντιστρέφεται όταν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός. <u>Αντίστοιχα ισχύει, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, πως ένα γραμμικό σύστημα έχει μία και μοναδική λύση όταν ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων του (ο A) αντιστρέφεται, ή ισοδύναμα, όταν η ορίζουσα του A είναι διάφορη του μηδενός.</u>

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα: $\mathbf{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}$

Λύση: Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του A:

$$\mathbf{det[A] = det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 - 2 = -1}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα:

$$\mathbf{A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -2} \qquad \mathbf{A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 1} \qquad \mathbf{A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} = 0}$$

$$\mathbf{A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 3} \qquad \mathbf{A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1} \qquad \mathbf{A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -1}$$

$$\mathbf{A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix} = -2} \qquad \mathbf{A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} = 0} \qquad \mathbf{A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1}$$

Τέλος τοποθετούμε όλα τα αποτελέσματα στον τύπο του A^{-1}:

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{det[A]}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{22} & A_{32}\end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}}$$

β) Υπολογισμός του αντιστρόφου πίνακα με γραμμοπράξεις:

Είδαμε πως ο υπολογισμός του A^{-1} δεν είναι μια εύκολη διαδικασία, απαιτώντας αρκετές πράξεις. Ιδιαίτερα στην περίπτωση που η διάσταση ενός πίνακα είναι αρκετά μεγαλύτερη της (3x3), τότε το πλήθος των πράξεων αυξάνεται εκρηκτικά! Η μέθοδος υπολογισμού του A^{-1} που θα εξετάσουμε στην παράγραφο αυτή βασίζεται στην (iv) ιδιότητα της προηγούμενης παραγράφου. Ξεκινούμε από την σχέση που ορίζει τον αντίστροφο πίνακα, ενός τετραγωνικού πίνακα Α:

$$AA^{-1} = I$$

Η εφαρμογή μιας σειράς μετασχηματισμών στις γραμμές του Α, συνεπάγεται την εφαρμογή των ίδιων μετασχηματισμών στις γραμμές του Ι.

$$A'A^{-1} = I'$$

Εάν επομένως οι μετασχηματισμοί που θα εφαρμοσθούν στον Α, τον μετατρέψουν στον μοναδιαίο, τότε θα ισχύει η σχέση:

$$IA^{-1} = I' \quad ή \quad A^{-1} = I'$$

<u>Συμπέρασμα:</u> Εάν εφαρμοστούν στον μοναδιαίο πίνακα I, οι μετασχηματισμοί γραμμών οι οποίοι μετατρέπουν τον πίνακα A σε μοναδιαίο, ο πίνακας I θα μετατραπεί στον αντίστροφο πίνακα του A (τον A^{-1}).

Τρόπος δουλειάς: Ένας εύκολος τρόπος για να εφαρμοσθούν στον I οι μετασχηματισμοί που μετατρέπουν τον A σε μοναδιαίο, είναι να τοποθετήσουμε τον I στα δεξιά του A και κάθε μετασχηματισμό του A να τον επεκτείνουμε και στον I

$$AI = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots\ldots & \alpha_{1\nu} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots\ldots & \alpha_{2\nu} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots\ldots & \alpha_{3\nu} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \ldots\ldots & \alpha_{\nu\nu} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, εάν με επιτρεπτές γραμμοπράξεις καταφέρουμε να μετατρέψουμε τις πρώτες ν στήλες (που αντιστοιχούν στον A) σε μοναδιαίο πίνακα, τότε στις επόμενες στήλες (όπου υπήρχε ο μοναδιαίος) θα εμφανισθεί ο αντίστροφος του A (ο A^{-1}).

Παρατηρήσεις:

1^{η}) Για να κάνουμε κάποιο στοιχείο ίσο με τη μονάδα, είμαστε υποχρεωμένοι να διαιρέσουμε **ολόκληρη τη γραμμή** στην οποία ανήκει με το στοιχείο αυτό (3^{η} επιτρεπτή γραμμοπράξη). Μηδενίζουμε ένα στοιχείο κάποιας γραμμής **με το αντίστοιχο στοιχείο της διαγωνίου** κάποιας άλλης γραμμής.

Έτσι, εάν για παράδειγμα θέλουμε να μηδενίσουμε το στοιχείο α_{32} με τη βοήθεια του α_{22}, πολλαπλασιάζουμε την 2^{η} γραμμή επί το κλάσμα (α_{32}/α_{22}) και την αφαιρούμε από την 3^{η} γραμμή. **Προσοχή!** Βολεύει να μηδενίζουμε **μόνο** με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου (τα α_{11}, α_{22}, …, $\alpha_{\nu\nu}$), τα οποία **<u>δεν θέλουμε να μηδενισθούν</u>**.

2^{η}) Εάν κατά τους μηδενισμούς, κάποιο από τα στοιχεία της διαγωνίου μηδενισθεί, τότε θα πρέπει να αντιμεταθέσουμε τη γραμμή του, με κάποια από τις επόμενες. **Εάν σε όλες τις επόμενες γραμμές το αντίστοιχο στοιχείο είναι μηδενικό, τότε ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται.** Όπως είδαμε, η ορίζουσά του, στην περίπτωση αυτή, είναι ίση με το μηδέν. Άρα, φθάνουμε πάλι στο συμπέρασμα πως ένας τετραγωνικός πίνακας A αντιστρέφεται, μόνον εάν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.

γ) Βασικές ιδιότητες των πινάκων (συνέχεια…)

i) Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να αντιστρέφεται ο τετραγωνικός πίνακας Α είναι η ορίζουσά του να είναι διάφορη του μηδενός.

ii) Όταν ορίζεται ο αντίστροφος (A^{-1}) ενός πίνακα Α, τότε είναι μοναδικός.

iii) $(A^{-1})^{-1} = A$ (Απόρροια της προηγούμενης ιδιότητας για τη μοναδικότητα του αντίστροφου πίνακα)

iv) $\det\{A-B\} = -\det\{B-A\}$

v) $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ [3]

vi) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ [4]

vii) $(AB)^T = B^T A^T$

viii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

ix) $\det(A) = \det(A^T)$

Πρόκειται για τρεις πολύ βασικές ιδιότητες των ανάστροφων πινάκων.

Τρόπος Υπολογισμού

Ένας συστηματικός τρόπος μετατροπής του πίνακα Α σε μοναδιαίο (δηλαδή υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα) είναι να μηδενίσω με το 1^{ο} στοιχείο της διαγωνίου (το α_{11}) όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της 1^{ης} στήλης, και να το μετατρέψω σε μονάδα (με διαίρεση της 1^{ης} γραμμής με το α_{11}). Στη συνέχεια κάνω το ίδιο για τη 2^{η} στήλη, με το στοιχείο α_{22}, κ.ο.κ..

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί ο αντίστροφος πίνακας του Α:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

---

[3] *Εύκολα αποδεικνύεται εάν συνδυάσουμε τις ιδιότητες: $\det\{AB\} = \det\{A\}\det\{B\}$, την $A^{-1}A = I$ και την $\det\{I\}=1$*

[4] *Για παράδειγμα, αποδεικνύεται εύκολα αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, από δεξιά με το γινόμενο ΑΒ.*

Λύση:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Παραθέτω τον μοναδιαίο πίνακα δεξιά από τον Α. Πολλαπλασιάζω την 1^{η} γραμμή επί 6/2 (=3) και την αφαιρώ από τη 2^{η}, ενώ ξαναπολλαπλασιάζω την 1^{η} γραμμή επί 4/2 (=2) και την αφαιρώ από την 3^{η}. Τέλος διαιρώ την 1^{η} γραμμή με το 2.

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0,5 & 1,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Πολλαπλασιάζω τη 2^{η} γραμμή με το 2/(-1) (=-2) και την αφαιρώ από την 3^{η}. Όμοια πολ/ζω την 2^{η} με το 0,5/(-1) (=-0,5) και την αφαιρώ από την 1^{η}. Τέλος διαιρώ τη 2^{η} με το –1.

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right|$$

Πολλαπλασιάζω την 3^{η} επί 3/(-4) (=-0,75) και την αφαιρώ από τη 2^{η}. Διαιρώ την 3^{η} γραμμή με το –4. Έτσι το αριστερό τμήμα του πίνακα μετατρέπεται σε μοναδιαίο 3x3, οπότε το δεξί τμήμα ισούται με τον αντίστροφο του Α. Σαν δοκιμή, πολλαπλασιάστε τον Α με τον A^{-1}. Πρέπει να βρείτε τον μοναδιαίο…

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -0,5 & -0,25 \end{array}\right|$$

Άσκηση: Να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα του Α:

$$A = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right|$$

Απάντηση: Εάν οι πράξεις γίνουν σωστά το αποτέλεσμα θα είναι ο πίνακας:

$$A^{-1} = \left|\begin{array}{ccc} -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & -0,5 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 \end{array}\right|$$

Άσκηση: Να αντιστραφεί ο πίνακας: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

δ) Αντιστροφή μιγαδικών πινάκων. Όπως είπαμε στην αρχή του κεφαλαίου των πινάκων, τα στοιχεία ενός πίνακα μπορεί να είναι πραγματικοί αριθμοί, μιγαδικοί, συναρτήσεις κλπ. Στη συνέχεια θα δώσουμε μια μέθοδο αντιστροφής ενός τετραγωνικού (νxν) πίνακα (έστω του Α) με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς.

Αρχικά να ορίσουμε τους πίνακες: «**Πραγματικό Μέρος του Α και Μιγαδικό Μέρος του Α**».

i) Το πραγματικό μέρος του Α είναι ένας πίνακας A_π, διάστασης (νxν), όπου τα στοιχεία του είναι ίσα με το πραγματικό μέρος των αντίστοιχων στοιχείων του Α.

ii) Το φανταστικό μέρος του Α είναι ένας πίνακας A_φ, διάστασης (νxν), όπου τα στοιχεία του είναι ίσα με το φανταστικό μέρος των αντίστοιχων στοιχείων του Α.

Δημιουργούμε λοιπόν τον πίνακα:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \begin{matrix}\Pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o} \\ \mu\acute{\varepsilon}\rho o\varsigma\ \ \tau o\upsilon\ \ A\end{matrix} & \begin{matrix}\Phi\alpha\nu\tau\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{o} \\ \mu\acute{\varepsilon}\rho o\varsigma\ \ \tau o\upsilon\ \ A\end{matrix} \\ \\ \begin{matrix}T o\,\alpha\nu\tau\iota\theta\varepsilon\tau o\,\tau o\upsilon \\ \varphi\alpha\nu\tau\alpha\sigma\tau\iota\kappa o\upsilon \\ \mu\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\varsigma\ \ \tau o\upsilon\ \ A\end{matrix} & \begin{matrix}\Pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o} \\ \mu\acute{\varepsilon}\rho o\varsigma\ \ \tau o\upsilon\ \ A\end{matrix} \end{bmatrix}$$

διάστασης (2ν x 2ν), τον οποίο αντιστρέφουμε και βρίσκουμε έναν πίνακα του οποίου τα στοιχεία ανήκουν στους υποπίνακες:

$$\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{matrix}\Pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o} \\ \mu\acute{\varepsilon}\rho o\varsigma\ \ \tau o\upsilon\ \ A^{-1}\end{matrix} & \begin{matrix}\Phi\alpha\nu\tau\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{o} \\ \mu\acute{\varepsilon}\rho o\varsigma\ \ \tau o\upsilon\ \ A^{-1}\end{matrix} \\ \\ \begin{matrix}T o\ \ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\theta\varepsilon\tau o \\ \tau o\upsilon\ \ \varphi\alpha\nu\tau\alpha\sigma\tau\iota\kappa o\acute{\upsilon} \\ \mu\acute{\varepsilon}\rho o\upsilon\varsigma\ \ \tau o\upsilon\ \ A^{-1}\end{matrix} & \begin{matrix}\Pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o} \\ \mu\acute{\varepsilon}\rho o\varsigma\ \ \tau o\upsilon\ \ A^{-1}\end{matrix} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Να αντιστραφεί ο πίνακας: $A = \begin{vmatrix} \mathbf{1+2i} & 2-i \\ \mathbf{1+i} & -1+i \end{vmatrix}$

Λύση: Αρχικά πρέπει να δείξουμε πως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος:

Det[A] = (1+2i)(-1+i) – 2i(1+i) = -1+2 – i – 2i +2 = 3 – 3i

Δημιουργούμε τον πίνακα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{Τον οποίο αντιστρέφουμε και βρίσκουμε τον} \quad \begin{vmatrix} 0,1 & 0,25 & -0,2 & -0,25 \\ 0,2 & -0,25 & 0,1 & -0,25 \\ 0,2 & 0,25 & 0,1 & 0,25 \\ -0,1 & 0,25 & 0,2 & -0,25 \end{vmatrix}$$

που δίνει τον αντίστροφο του A: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1-0.2i & 0.25-0.25i \\ 0.2+0.1i & -0.25-0.25i \end{bmatrix}$

Ας βεβαιωθούμε πως το αποτέλεσμα είναι σωστό:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1+2i & 2-i \\ 1+i & -1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1-0.2i & 0.25-0.25i \\ 0.2+0.1i & -0.25-0.25i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1+2i)(0.1-0.2i)+(2-i)(0.2+0.1i) & (1+2i)(0.25-0.25i)+(2-i)(-0.25-0.25i) \\ (1+i)(0.1-0.2i)+(-1+i)(0.2+0.1i) & (1+i)(0.25-0.25i)+(-1+i)(-0.25-0.25i) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση: Εάν

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -2-i \\ 2+2i & 4-2i \end{bmatrix}$$

να υπολογίσετε την ορίζουσα του A και να δείξετε πως ο αντίστροφός του είναι ο:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,25-0,25i & 0,125-0,125i \\ -0,2+0,1i & 0,1-0,05i \end{bmatrix}$$