ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 1

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1.4 Χαρακτηριστικό πολυώνυμο και χαρακτηριστικές ρίζες πίνακα

1.4.5 Γενικά

Θα ξεκινήσουμε την εξέταση των εννοιών αυτών αξιωματικά. Η γεωμετρική ερμηνεία τους θα γίνει στην επόμενη παράγραφο…

Έστω τώρα ο τετραγωνικός (νxν) πίνακας Α. Εάν αφαιρέσουμε από κάθε στοιχείο της διαγωνίου του την μεταβλητή λ, προκύπτει ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

1.4 Α – λΙ

(με Ι τον μοναδιαίο στη διάσταση νxν),

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu}-\lambda \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα Α – λΙ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, με μεταβλητή το λ. Πράγματι:

$$\det\left[A-\lambda I\right] = \det\begin{bmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots & \alpha_{\nu\nu}-\lambda \end{bmatrix} = \pi(\lambda)$$

Η πολυωνυμική συνάρτηση π(λ) είναι ν-ου βαθμού και λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Α.** Εφ’ όσον είναι ν-ου βαθμού, η εξίσωση

$$\mathrm{Det}[A - \lambda I] = \pi(\lambda) = 0$$

θα έχει ν ρίζες, πραγματικές ή μιγαδικές (τις λ_1, λ_2, …, λ_ν). Οι ρίζες αυτές λέγονται **χαρακτηριστικές τιμές ή ιδιοτιμές του πίνακα Α**.

1.4.5 Η περίπτωση του πίνακα 2x2

Αρχικά θα μελετήσουμε αναλυτικότερα την περίπτωση του πίνακα 2x2. Ξεκινούμε υπολογίζοντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A.

$$\pi(\lambda)=\det\left[A-\lambda I\right]=\det\begin{bmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda\end{bmatrix}=\left(\alpha_{11}-\lambda\right)\left(\alpha_{22}-\lambda\right)-\alpha_{12}\alpha_{21}=$$
$$=\lambda^2-\left(\alpha_{11}+\alpha_{22}\right)\lambda+\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}=\lambda^2-\left(\text{Ιχνος του A}\right)\lambda+\det\{A\}$$

όπου ονομάσαμε <u>**ίχνος**</u> του πίνακα A, το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του **(α_{11}+α_{22})**. Παρατηρούμε πως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A διάστασης 2x2, είναι δεύτερου βαθμού (όπως ειπώθηκε πιο πάνω).

Οι δύο ρίζες του π(λ)[1], έστω οι λ_1 και λ_2, είναι οι χαρακτηριστικές τιμές (ιδιοτιμές) του πίνακα A.

Αξίζει στη συνέχεια να προσεχθεί ο παρακάτω ορισμός:

<u>**Ορισμός:**</u> Αντικαθιστώντας στον πίνακα την μία από τις δύο ιδιοτιμές (έστω την λ_1), δημιουργούμε το ομογενές σύστημα:

$$\left[A-\lambda I\right]X=\begin{bmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

το οποίο είναι αόριστο[2]. Μία οποιαδήποτε από τις λύσεις του συστήματος αυτού λέγεται: **ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1.**

Παράδειγμα: Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα 2 ιδιοδιανύσματα του πίνακα:

---

[1] *που είναι οι δύο τιμές του λ που μηδενίζουν το π(λ), και οι οποίες είναι πραγματικές ή μιγαδικές…*

[2] *διότι επιλέγοντας για το λ την τιμή λ_1, η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων [det{A-λI]} θα είναι ίση με το μηδέν, οπότε το ομογενές σύστημα θα είναι αόριστο και θα έχει αι άλλες λύσεις (άπειρες) πέραν της τετριμμένης (μηδενικής).*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(i) Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$det[A - \lambda I] = det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)(6-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = \pi(\lambda)$$

(ii) Ιδιοτιμές:

$$\pi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \left[\begin{matrix} 7 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

(iii) Ιδιοδιανύσματα:

α) Εάν λ=-2. Τότε έχουμε:

$[A - (-2)I] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ που οδηγεί στο ομογενές σύστημα: $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

δηλαδή, στο σύστημα:

$$\begin{matrix} x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 48 = 0 \end{matrix} \qquad \textit{από το οποίο κρατούμε την εξίσωση:} \quad x_1 + 4x_2 = 0$$

μια και η δεύτερη γραμμή είναι το διπλάσιο της πρώτης. Άρα, θέτοντας x_1=κ έχουμε την γενική έκφραση του ιδιοδιανύσματος του πίνακα A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ=-2.

$$X(\lambda_1 = -2) = \begin{bmatrix} \kappa \\ -\frac{1}{4}\kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

β) Εάν λ=7. Τότε έχουμε:

$[A - 7I] = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ που οδηγεί στο ομογενές σύστημα: $\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

δηλαδή, στο σύστημα:

$$\begin{matrix} -8x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{matrix} \qquad \textit{από το οποίο κρατούμε την εξίσωση:} \quad 2x_1 - x_2 = 0$$

μια και η πρώτη στήλη είναι το διπλάσιο της δεύτερης. Άρα, θέτοντας x_1=κ έχουμε την γενική έκφραση του ιδιοδιανύσματος του πίνακα A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ=7.

$$X(\lambda_1 = 7) = \begin{bmatrix} \kappa \\ 2\kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1.4.5 Η περίπτωση του πίνακα 3x3

Ας μελετήσουμε αναλυτικότερα την περίπτωση του πίνακα 3x3, μια και τα περισσότερα συμπεράσματα στα οποία θα καταλήξουμε, ισχύουν και στη γενική περίπτωση των πινάκων νxν. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακας Α, διάστασης 3x3:

$$\pi(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \det\begin{bmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (\alpha_{11}-\lambda)[(\alpha_{22}-\lambda)(\alpha_{33}-\lambda)-\alpha_{23}\alpha_{32}] - \alpha_{21}[\alpha_{12}(\alpha_{33}-\lambda)-\alpha_{13}\alpha_{32}] + \alpha_{31}[\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}(\alpha_{22}-\lambda)] =$$

$$= \ldots \text{ μετά από απλές πράξεις } \ldots =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}) - \lambda(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32} + \alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{31}\alpha_{13} + \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}) +$$
$$+ (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}) =$$
$$= -\lambda^3 + M\lambda^2 + N\lambda + P$$

όπου οι συντελεστές του πολυωνύμου π(λ) προκύπτουν από τον αρχικό πίνακα Α:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

- **$M = \alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}$** : το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του Α, το οποίο ονομάσαμε **ίχνος** του Α.

- **$N = -[(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32}) + (\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{31}\alpha_{13}) + (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12})]$:** που είναι οι υποορίζουσες που αντιστοιχούν στα στοιχεία της διαγωνίου του Α (A_{jj} η ορίζουσα (2x2) που απομένει εάν διαγράψουμε τη στήλη και τη γραμμή του στοιχείου της διαγωνίου α_{jj}). Άρα γράφουμε: **$N = -[A_{11} + A_{22} + A_{33}]$.**

- **$P = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}$:** που ισούται με την τιμή της ορίζουσας του Α (εφαρμόστε τη μέθοδο του Sarrus). Άρα $P = \det[A]$.

Χαρακτηριστικά διανύσματα του πίνακα Α.

Έστω τώρα το ομογενές σύστημα εξισώσεων, του οποίου ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι ο [Α – λΙ]. Για ευκολία ας το γράψουμε σαν γινόμενο πινάκων:

$$[A-\lambda I]X=\begin{bmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Το σύστημα αυτό θα έχει λύση εκτός από τη μηδενική (που είναι η προφανής) μόνον όταν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι ίση με το μηδέν. Όταν δηλαδή η χαρακτηριστική εξίσωση ισούται με το μηδέν, όταν δηλαδή η παράμετρος λ παίρνει μία από τις τρεις χαρακτηριστικές ρίζες του πίνακα Α.

Αντικαθιστώντας λοιπόν στο σύστημα κάποια από τις χαρακτηριστικές ρίζες (έστω την λ_1), το σύστημα θα έχει κι άλλες λύσεις εκτός από τη μηδενική. Μία από αυτές την υπολογίζουμε θέτοντας $x_1 = 1$. Τότε αντικαθιστώντας το x_1 στις εξισώσεις, τότε θα υπολογίσουμε την τριάδα της λύσης:

$$\mathbf{x_1 = 1\,,\ \ x_2 = \rho_2 \ \ \text{και}\ \ x_3 = \rho_3 \ \ \text{για την χαρακτηριστική ρίζα}\ \ \lambda = \lambda_1}$$

Εύκολα αποδεικνύεται πως εάν είχαμε επιλέξει το $x_1 = \kappa$ (αντί του 1), τότε οι υπόλοιπες τιμές θα είναι οι:

$$\mathbf{x_2 = \kappa\rho_2 \ \ \text{και}\ \ x_3 = \kappa\rho_3}$$

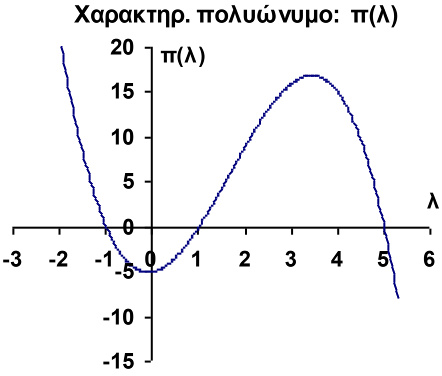
Οι τρεις τριάδες λύσεων που αντιστοιχούν στην κάθε μία χαρακτηριστική ρίζα είναι τα τρία **χαρακτηριστικά διανύσματα** του πίνακα Α.

Παράδειγμα: Δίνεται ο πίνακας:

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix} \quad \text{με χαρακτηριστικό πολυώνυμο} \quad \pi(\lambda)=\det[A-\lambda\ I]=\det\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 2\\ 2 & 3-\lambda & 2\\ 2 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε:

$$\pi(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5$$



Με τη βοήθεια της διπλανής γραφικής παράστασης, δοκιμάζουμε κι επαληθεύουμε πως οι τρεις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι οι:

$$\lambda_1 = -1\ ,\ \lambda_2 = 1 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 5$$

- Θέτοντας αρχικά λ=-1, έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Παραλείπουμε την $3^{η}$ εξίσωση (η οποία είναι ίδια με την $1^{η}$, θέτουμε x_1=1, και υπολογίζουμε τις άλλες δύο τιμές: x_2=0 x_3= –1.

Επομένως η γενική μορφή του πρώτου χαρακτηριστικού διανύσματος:

$$x_1 = \kappa\ ,\ x_2 = 0\ ,\ x_3 = -\kappa \quad \text{ή ορθότερα:} \quad X = \begin{bmatrix} \kappa \\ 0 \\ -\kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Θέτοντας στη συνέχεια λ=1, έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Παραλείπουμε την $2^{η}$ εξίσωση (η οποία είναι το άθροισμα της $1^{ης}$ με την $3^{η}$), θέτουμε x_1=1, και υπολογίζουμε τις άλλες δύο τιμές: x_2= –2 x_3=1.

Επομένως η γενική μορφή του δεύτερου χαρακτηριστικού διανύσματος:

$$x_1 = \kappa\ ,\ x_2 = -2\kappa\ ,\ x_3 = \kappa \quad \text{ή ορθότερα:} \quad X = \begin{bmatrix} \kappa \\ -2\kappa \\ \kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Θέτοντας τέλος λ=5, έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} -4x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \ \ x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Παραλείπουμε την $2^{η}$ εξίσωση (η οποία είναι το άθροισμα της $1^{ης}$ με την $3^{η}$, με αντίθετο πρόσημο), θέτουμε x_1=1, και υπολογίζουμε τις άλλες δύο τιμές: x_2=2 x_3=1.

Επομένως η γενική μορφή του τρίτου χαρακτηριστικού διανύσματος:

$$x_1 = \kappa \;,\; x_2 = 2\kappa \;,\;\; x_3 = \kappa \;\;\text{ή ορθότερα:}\;\; X = \begin{bmatrix} \kappa \\ 2\kappa \\ \kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις:

1) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

2) Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές του πίνακα A, όταν γνωρίζουμε πως η μία ιδιοτιμή είναι η λ=-2 (να βρεθούν οι άλλες δύο με τη διαίρεση των πολυωνύμων ή με τη μέθοδο Horner).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές του πίνακα A, όταν γνωρίζουμε πως η μία ιδιοτιμή είναι η λ=-2 (Οι άλλες δύο είναι μιγαδικές. Αυτό ας μην πανικοβάλει, και να συμπεριφερθείτε σαν να πρόκειται για έναν οποιδήποτε αριθμό, με προσοχή στις πράξεις).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.4.5 Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Μέχρι τώρα, ένα σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= \beta_2 \end{aligned}$$

το αντιμετωπίζαμε σαν ένα σύνολο σχέσεων, όπου μας δίνονται οι τιμές των σταθερών όρων β_1 και β_2 (προφανώς και ο πίνακας A των συντελεστών α_{ij}) και μας ζητούσαν να υπολογίσουμε τις τιμές των αγνώστων: x_1 και x_2. Στη συνέχεια, για να επαληθεύσουμε τη λύση, την αντικαθιστούσαμε στο σύστημα και βεβαιωνόμασταν πως η λύση αυτή επαληθεύει τις 2 εξισώσεις του.

Τώρα θα ξαναγράψουμε το σύστημα και πάλι υπό τη μορφή:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= x_1' \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= x_2' \end{aligned}$$

θεωρώντας πως με τη βοήθειά του, αντιστοιχίζουμε στην δυάδα των τιμών x_1 και x_2, την δυάδα x_1' και x_2'. Λέμε λοιπόν πως μετασχηματίζουμε την δυάδα των τιμών x_1 και x_2, στην δυάδα x_1' και x_2', και πως ο παράγοντας που διαμεσολαβεί σε αυτόν τον μετασχηματισμό είναι ο πίνακας A των συντελεστών α_{ij}!

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$$

και ο μετασχηματισμός που έχει σαν βάση τον A

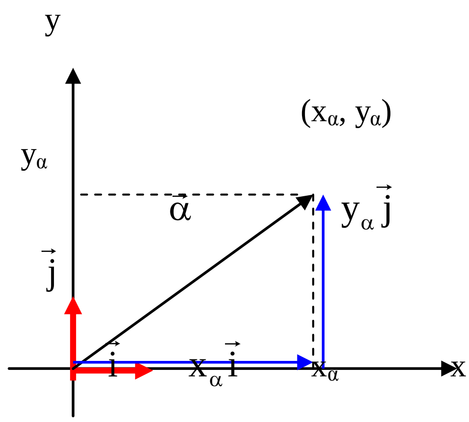
$$AX = X' \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= x_1' \\ 6x_1 - 10x_2 &= x_2' \end{aligned} \qquad \text{(M.1.)}$$

Εύκολα παρατηρούμε πως ο μετασχηματισμός αυτός μετασχηματίζει (για παράδειγμα)

$$\text{την δυάδα } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ στη δυαδα } X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Αξίζει να αναφερθούμε εδώ στην γραφή ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$, που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων ενός Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και καταλήγει στο σημείο (x_α, y_α) του επιπέδου Oxy.

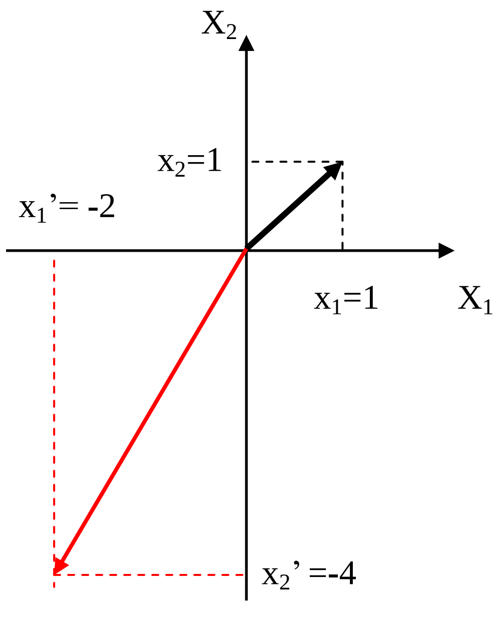
$$\vec{\alpha} = x_\alpha \vec{i} + y_\alpha \vec{j}$$



όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x και y.

Με βάση την πιο πάνω παρατήρηση, μετονομάζουμε τους άξονες του Καρτεσιανού συστήματος από Oxy, σε Ox_1x_2. και θεωρούμε πως οι δύο αυτές δυάδες

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$



είναι οι συντεταγμένες δύο διανυσμάτων στο Καρτεσιανό σύστημα $\mathbf{0}X_1X_2$. Τότε, μέσω του πίνακα A μετασχηματίζουμε το διάνυσμα X στο διάνυσμα X'.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν το διάνυσμα:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\vec{i} + 1\vec{j}$$

Μέσω του μετασχηματισμού που ορίζει ο πίνακας A, το διάνυσμα αυτό μετασχηματίζεται στο διάνυσμα:

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$$

α) Μερικοί σημαντικοί γραμμικοί μετασχηματισμοί.

1. Ο Ταυτοτικός μετασχηματισμός που, όπως δηλώνει το όνομά του, μετασχηματίζει ένα διάνυσμα στον εαυτό του. Προφανώς αυτό επιτυγχάνεται μέσω του μοναδιαίου πίνακα:

$$IX = X' \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. Μετασχηματισμός των μοναδιαίων διανυσμάτων. Ας δούμε πώς μετασχηματίζονται τα δύο μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}\,(1,0)$ και $\vec{j}\,(0,1)$ του Καρτεσιανού επιπέδου, μέσω ενός πίνακα Α:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

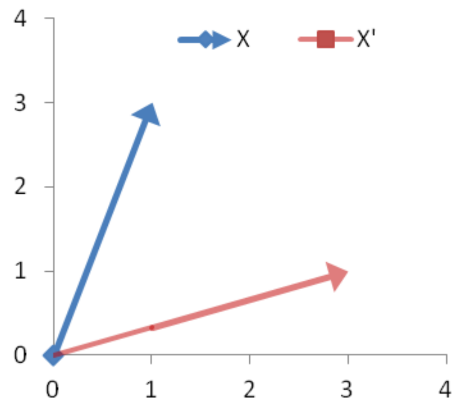
Άρα, το μεν $\vec{i}$ μετασχηματίζεται στο διάνυσμα που αντιστοιχεί στην 1^{η} στήλη του πίνακα Α, ενώ το $\vec{j}$ μετασχηματίζεται στο διάνυσμα που αντιστοιχεί στην 2^{η} στήλη.

3. Μετασχηματισμός με άξονα συμμετρίας την διχοτόμο y=x. Ζητούμε δηλαδή έναν πίνακα που να μετασχηματίζει το διάνυσμα (α,β) στο (β,α). Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε πως ο μετασχηματισμός αυτός βασίζεται στον πίνακα Α:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{διοτι} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

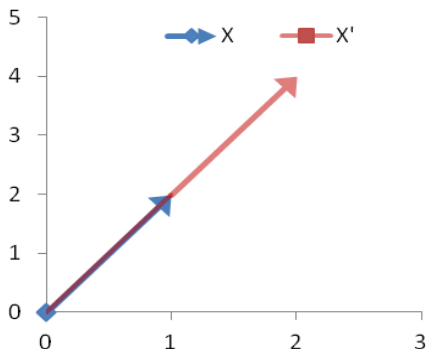
Μέσω του οποίου βλέπουμε στο γράφημα τον μετασχηματισμό του (1,3) στο (3,1)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



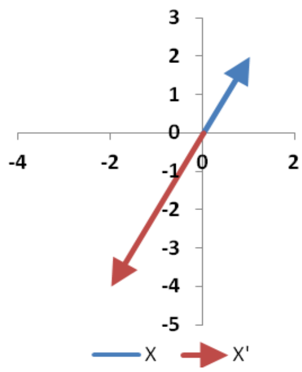
4. Μετασχηματισμός σταθερής διεύθυνσης (ομοιοθεσίας). Αναζητούμε έναν πίνακα A ο οποίος μετασχηματίζει ένα διάνυσμα, σε ένα συνευθειακό του. Εύκολα μπορούμε να βρούμε έναν τέτοιο πίνακα, ιδιαίτερα αν σκεφθούμε πως αυτό ήδη το επιτυγχάνει (περιορισμένα) ο μοναδιαίος πίνακας I. Ο μετασχηματισμός αυτός λοιπόν επιτυγχάνεται μέσω του πίνακα A:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \quad \text{διοτι} \quad \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\alpha\\ \lambda\beta\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$



Μέσω του οποίου βλέπουμε στο γράφημα τον μετασχηματισμό του (1,2) στο (2,4)

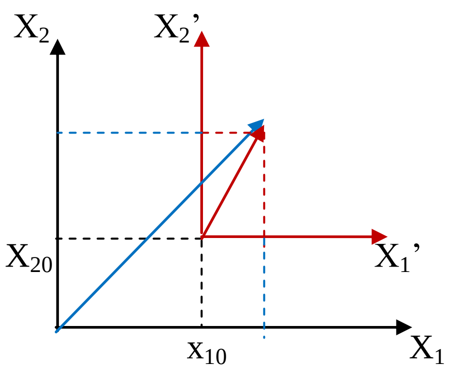
$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$$



Και αντίστοιχα τον μετασχηματισμό του (1,2) στο (-2,-4):

$$\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -4\end{bmatrix}$$

5. Μετασχηματισμός μεταφοράς σε σύστημα συντεταγμένων μα άξονες παράλληλους με το προηγούμενο. Θέλουμε, δηλαδή, να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου (x_1,x_2) του Καρτεσιανού συστήματος OX_1X_2, ως προς ένα Καρτεσιανό σύστημα με παράλληλους άξονες του οποίου το κέντρο O’ βρίσκεται στη θέση (x_{10},y_{10}).



Στην περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1'\\ x_2'\end{bmatrix}$$

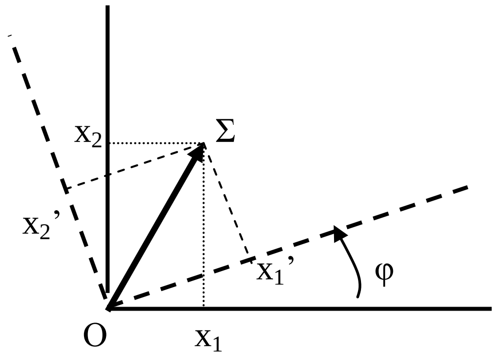
ο οποίος μεταφράζεται στις προφανείς σχέσεις:

$$x_1-x_{10}=x_1'$$
$$x_2-x_{20}=x_2'$$

6. **Μετασχηματισμός περιστροφής του Καρτεσιανού συστήματος.** Τώρα ζητούμε να υπολογίσουμε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες ενός σημείου, σε δύο Καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων τα οποία έχουν κοινή αρχή, αλλά το 2^{o} έχει περιστραφεί, αριστερόστροφα, γύρω από το κοινό κέντρο Ο κατά γωνία φ.

Θα δείξουμε πως ο ζητούμενος πίνακας είναι ο Α:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\phi & \eta\mu\phi \\ -\eta\mu\phi & \sigma\upsilon\nu\phi \end{bmatrix}$$



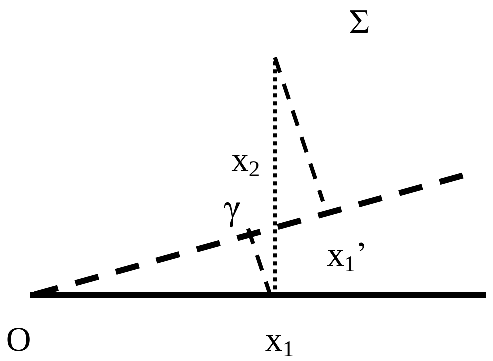
Λύση: Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\phi & \eta\mu\phi \\ -\eta\mu\phi & \sigma\upsilon\nu\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1\sigma\upsilon\nu\phi + x_2\eta\mu\phi \\ -x_1\eta\mu\phi + x_2\sigma\upsilon\nu\phi \end{bmatrix}$$

Ας εξηγήσουμε λοιπόν τη σχέση:

$$x_1' = x_1\sigma\upsilon\nu\phi + x_2\eta\mu\phi$$

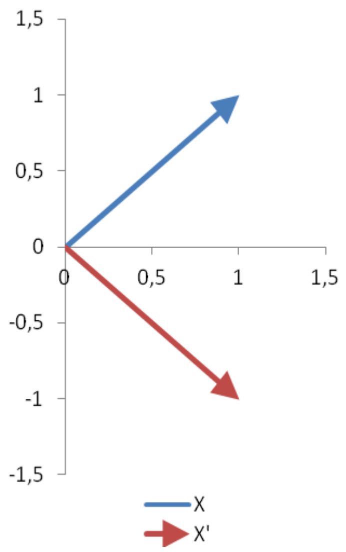


Κάνοντας ζουμ στο ευθ. τμήμα Οx_1', παρατηρούμε πως είναι η προβολή του τμήματος Οx_1 πάνω στον νέο άξονα (δηλαδή το Ογ = x_1συνφ και της προβολής του τμήματος x_1Σ, που δίνει το τμήμα γx_1'.

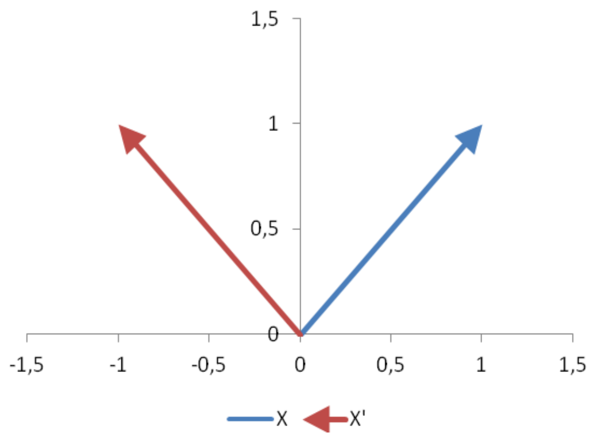
$$\Gamma x_1' = (x_1\Sigma)\sigma\upsilon\nu(\pi/2-\varphi) =$$
$$= x_2\eta\mu\varphi$$

Παρατήρηση: Ο ίδιος μετασχηματισμός μπορεί να εκληφθεί σαν ο μετασχηματισμός που περιστρέφει το διάνυσμα κατά γωνία –φ (δηλαδή δεξιόστροφα), πράγμα που είναι ισοδύναμο με την περιστροφή του συστήματος κατά γωνία φ.. Τέλος, εάν στη θέση των συντεταγμένων του διανύσματος ΟΣ βάλουμε τις συντεταγμένες του κάθε διανύσματος βάσης ($\vec{i}$ και $\vec{j}$), τότε θα προέκυπταν τα δύο νέα διανύσματα βάσης για το σύστημα αξόνων μετά την περιστροφή.

Ας δούμε λοιπόν δύο παραδείγματα που περιστρέφουν το διάνυσμα (1,1) κατά γωνία $\varphi=\pi/2$ (το 1^o) και κατά γωνία $\varphi= -\pi/2$ (το 2^o).



$\varphi=\pi/2$

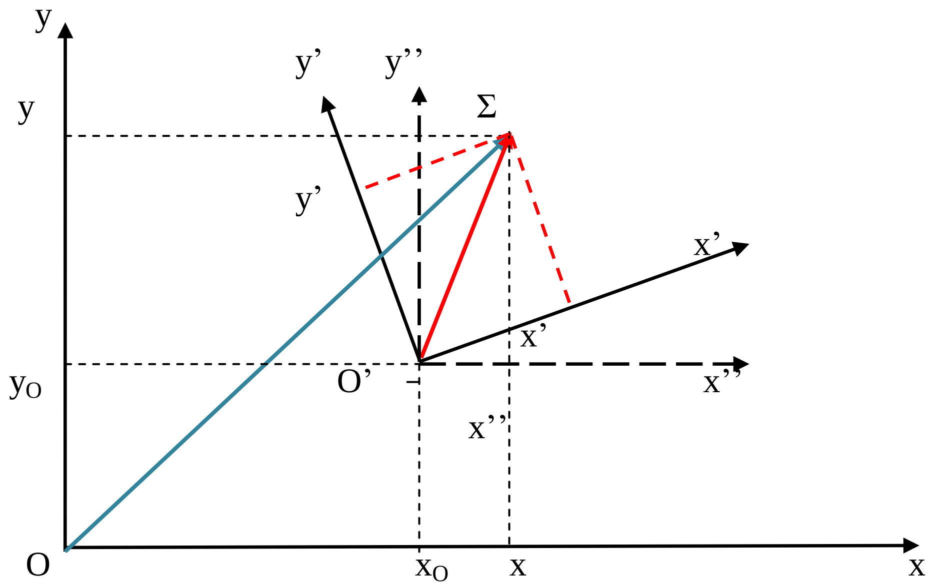


$\varphi= -\pi/2$

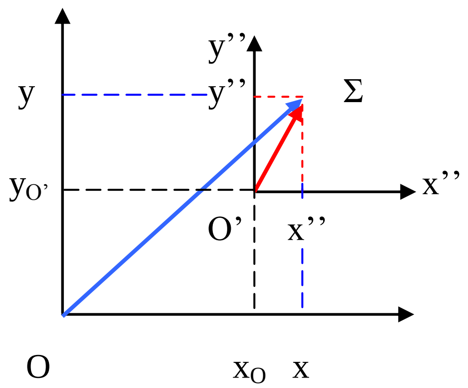
Άσκηση: Οι συντεταγμένες ενός σημείου Σ, σε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (Oxy) είναι οι (x,y). Στη συνέχεια θεωρούμε ένα δεύτερο Καρτεσιανό σύστημα (O'x'y'), του οποίου οι συντεταγμένες του κέντρου του O', ως προς το πρώτο σύστημα είναι οι (x_o,y_o), ενώ ταυτόχρονα το σύστημα έχει περιστραφεί αριστερόστροφα, κατά μία γωνία φ. Ζητούνται οι συντεταγμένες (x',y') του σημείου Σ στο δεύτερο σύστημα O'x'y' (βλ.σχήμα).

Λύση. Ξεκινούμε δεχόμενοι αξιωματικά πως κάθε μετακίνηση ενός επίπεδου στοιχείου (πχ ενός ευθυγράμμου τμήματος, ενός διανύσματος, ενός τριγώνου κλπ) μπορεί να περιγραφεί με τη σύνθεση δύο μετακινήσεων: Η πρώτη είναι μια παράλληλη μετατόπιση και η δεύτερη είναι μία στροφή γύρω από ένα σημείο.

Παρατηρώντας το επόμενο σχήμα ξεχωρίζουμε την σύνθεση των δύο αυτών μετακινήσεων, από το σύστημα Oxy, στο O'x''y'', το οποίο έχει τους άξονές του παράλληλους με τους αντίστοιχους του αρχικού, και τέλος από το O'x''y'' στο O'x'y', μέσω της στροφής κατά τη γωνία φ.



Η Μετακίνηση: Ήδη αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα αυτό, το οποίο άλλωστε λύνεται και με προφανή τρόπο:



$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \end{bmatrix}$$

σχέση που καθίσταται προφανής μέσω του διπλανού γραφήματος. Για να ολοκληρώσουμε την μετατροπή δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε και την αλλαγή των συντεταγμένων λόγω στροφής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\phi & \eta\mu\phi \\ -\eta\mu\phi & \sigma\upsilon\nu\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\phi & \eta\mu\phi \\ -\eta\mu\phi & \sigma\upsilon\nu\phi \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \end{bmatrix} \right]$$

Εάν εφαρμόσουμε αυτό τον μετασχηματισμό για τα δεδομένα:

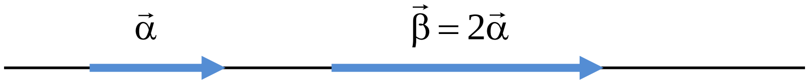
$(x_O,y_O) = (18,14)$, $(x,y) = (19,21)$ και $\varphi = 30^o$ (=0,5235988 rad) έχουμε:

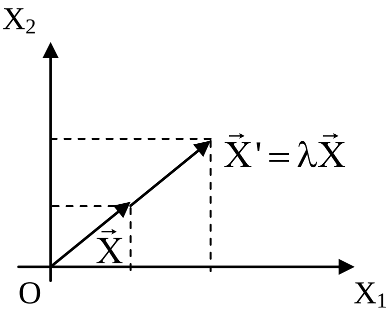
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\phi & \eta\mu\phi \\ -\eta\mu\phi & \sigma\upsilon\nu\phi \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0,866025 & 0,5 \\ -0,5 & 0,866025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,366 \\ 5,562 \end{bmatrix}$$

1.4.5 Γεωμετρική ερμηνεία των Ιδιοδιανυσμάτων

<u>Πρόβλημα:</u> Τίθεται τώρα το θέμα για το κατά πόσο υπάρχει κάποιο διάνυσμα X (του επιπέδου $0X_1X_2$) που να μετασχηματίζεται (μέσω του πίνακα A) σε ένα διάνυσμα X', το οποίο να είναι συγγραμμικό του X (αλλά διαφορετικού μέτρου).

Αρχικά να καταλάβουμε το τι σημαίνει συγγραμμικά διανύσματα X και X', βοηθούμενοι από την γραφή των διανυσμάτων αυτών με τη βοήθεια των δύο μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και. $\vec{j}$. Παρ'όλον ότι τα διανύσματα θα μελετηθούν σε επόμενο κεφάλαιο, νομίζουμε πως είναι γνωστό πως τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $3\vec{\alpha}$, ή γενικότερα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\lambda\vec{\alpha}$, όπου $\lambda \in R$, είναι συγγραμμικά, όπως δείχνει και το επόμενο σχήμα:





Ισχύει λοιπόν η σχέση:

$$\vec{X}' = \lambda\vec{X} = \lambda\left(x_\alpha\vec{i} + y_\alpha\vec{j}\right) = \lambda x_\alpha\vec{i} + \lambda y_\alpha\vec{j}$$

που δείχνει πως οι συντεταγμένες των διανυσμάτων X και X' είναι ανάλογες (μέσω ενός συντελεστή αναλογίας $\lambda \in R$). Δηλαδή πρέπει να ισχύουν οι ισότητες (αναλογίες):

$$\mathbf{x_1' = \lambda x_1 \quad \text{και} \quad x_2' = \lambda x_2}$$

Θέτοντας τις πιο πάνω ισότητες στην έκφραση του γραμμικού μετασχηματισμού (πάντα μέσω του πίνακα A), έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= x_1' = \lambda x_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= x_2' = \lambda x_2 \end{aligned} \quad \text{ή, ισοδύναμα} \quad \begin{aligned} (\alpha_{11} - \lambda)x_1 + \alpha_{12}x_2 &= 0 \\ \alpha_{21}x_1 + (\alpha_{22} - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Η δυάδα των σχέσεων στις οποίες καταλήξαμε πιο πάνω δηλώνει πως:

«Ένα διάνυσμα $X(x_1,x_2)$, του επιπέδου OX_1X_2, μετασχηματίζεται (μέσω του πίνακα Α) σε ένα διάνυσμα $X'(x_1',x_2')$, συγγραμμικό του Χ, μόνον εάν οι συντεταγμένες του Χ επαληθεύουν το πιο πάνω ομογενές σύστημα».

Όμως το σύστημα αυτό ή θα έχει μία και μοναδική λύση, την προφανή (μηδενική), ή θα είναι αόριστο, οπότε θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$X = \kappa \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ [3]

όπου οι λύσεις αυτές θα είναι όλες συγγραμικές μεταξύ τους. Άρα θα ισχύει ακριβώς αυτό που ζητούσαμε: Θα έχουμε υπολογίσει μια ολόκληρη οικογένεια διανυσμάτων Χ, τα οποία θα μετασχηματίζονται σε συγγραμμικά διανύσματα Χ'. Τελικά να τονίσουμε πως με τον τρόπο αυτό «ανακαλύπτουμε» μια διεύθυνση στο επίπεδο OX_1X_2, δηλαδή μια ευθεία που διέρχεται από το Ο, της οποίας όλα τα διανύσματα έχουν την ζητούμενη ιδιότητα!

Και επειδή η προφανής λύση (μηδενική)[4] δεν μας ενδιαφέρει, θα πρέπει το ομογενές σύστημα, στο οποίο καταλήξαμε να είναι αόριστο, οπότε, οι κατάλληλες τιμές της παραμέτρου λ είναι αυτές που μηδενίζουν την ορίζουσα του πίνακα Α-λΙ, δηλαδή οι ρίζες του Χαρακτηριστικού Πολυωνύμου π(λ) του πίνακα Α-λΙ:

$$\det\begin{bmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(A-\lambda I\right) = \pi(\lambda)$$

Τις ρίζες του π(λ) τις αποκαλέσαμε χαρακτηριστικές τιμές ή ιδιοτιμές του πίνακα Α και είναι στην προκειμένη περίπτωση 2, μια και το πολυώνυμο π(λ) είναι $2^{ου}$ βαθμού. Για κάθε τιμή λ, που αποτελεί ρίζα του Χαρακτηριστικού Πολυωνύμου π(λ), έχουμε και το σύνολο των λύσεων υπό τη μορφή:

$$X = \kappa \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

---

[3] *Όπως είδαμε στην παράγραφο των ομογενών συστημάτων, εάν βρούμε την λύση του συστήματος θέτοντας για παράδειγμα το $x_1=1$, τότε η γενική λύση του ομογενούς συστήματος γράφεται υπό τη μορφή $X_{γενική}=\kappa X$, όπου κ μια τυχαία σταθερά. Αξίζει όμως να παρατηρήσουμε πως όλα τα διανύσματα που ανήκουν στη γενική λύση είναι συγγραμμικά (και αυτό ισχύει μόνο στα ομογενή αόριστα συστήματα…).*

[4] *Δύο μηδενικά διανύσματα είναι προφανώς, ανάλογα με οποιονδήποτε συντελεστή αναλογίας. Πράγματι:* $\vec{0} = \lambda\vec{0}$*, ενώ ταυτόχρονα, το μηδενικό διάνυσμα είναι συγγραμμικό με κάθε άλλο μη μηδενικό διάνυσμα.*

και πρόκειται για την κλάση των διανυσμάτων του επιπέδου τα οποία μετασχηματίζονται, μέσω του πίνακα Α, σε συγγραμμικά διανύσματα.

<u>Παράδειγμα:</u> Θέλουμε να υπολογίσουμε το σύνολο (την κλάση) των διανυσμάτων του επιπέδου Ox_1x_2 τα οποία μετασχηματιζόμενα μέσω του πίνακα Α:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$$

μετασχηματίζονται σε συγγραμμικά (με αυτά) διανύσματα.

Λύση: Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα πρέπει να υπολογίσουμε:

- Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Α.
- Τις ρίζες λ_1 και λ_2 του $\pi(\lambda)$, δηλαδή τις ιδιοτιμές του πίνακα Α.
- Τα δύο ιδιοδιανύσματα του Α, που αντιστοιχούν στις δύο ιδιοτιμές.

1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\pi(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 6 & -10-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-10-\lambda)+18 = \lambda^2 + 9\lambda + 8$$

2. Οι ιδιοτιμές.

$$(1-\lambda)(-10-\lambda)+18 = \lambda^2 + 9\lambda + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \left[\begin{matrix} -1 \\ -8 \end{matrix}\right.$$

3. Ιδιοδιάνυσμα για την ρίζα λ=-1.

$$\begin{matrix} (1-\lambda)x_1 + (-3)x_2 = 0 \\ 6x_1 + (-10-\lambda)x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow 2x_1 - 3x_2 = 0$$ [5]

Άρα, η γενική μορφή της λύσης συνάγεται από την μερική λύση που βρίσκουμε θέτοντας $x_1 = 1$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \qquad \text{και η γενική έκφραση:} \qquad X = \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ \frac{2}{3}\kappa \end{bmatrix}$$

---

[5] *Όπου η 2η γραμμή παραλείπεται επειδή είναι γραμμικά εξαρτημένη (είναι το τριπλάσιο της 1ης).*

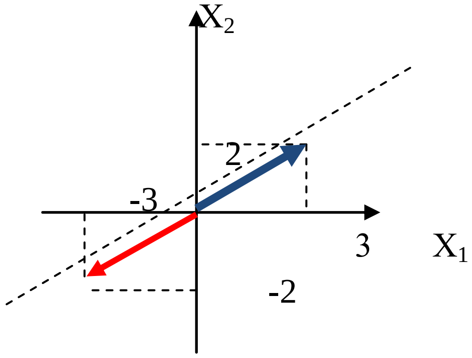
το οποίο είναι το **<u>ιδιοδιάνυσμα του πίνακα Α που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ=-1</u>**.

Ας θέσουμε λοιπόν στον αρχικό μετασχηματισμό που αντιστοιχεί στον πίνακα Α, έναν αντιπρόσωπο του ιδιοδιανύσματος, έστω το διάνυσμα:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί στην τιμή κ=3 (την οποία διαλέξαμε για να έχουμε ακέραιες συντεταγμένες).

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= x_1' \\ 6x_1 - 10x_2 &= x_2' \end{aligned} \quad \xrightarrow[x_2=2]{x_1=3} \quad \begin{aligned} x_1' &= -3 \\ x_2' &= -2 \end{aligned}$$



Στο διπλανό γράφημα βλέπουμε τα δύο διανύσματα, το

$$\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

και το

$$\vec{x}' = x_1'\vec{i} + x_2'\vec{j} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$$

τα οποία είναι συγγραμμικά, αλλά

4. Ιδιοδιάνυσμα για την ρίζα λ=-8.

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + (-3)x_2 &= 0 \\ 6x_1 + (-10-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 9x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow 6x_1 - 2x_2 = 0$$

Άρα, η γενική μορφή της λύσης συνάγεται από την μερική λύση που βρίσκουμε θέτοντας $x_1 = 1$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{και η γενική έκφραση:} \qquad X = \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ 3\kappa \end{bmatrix}$$

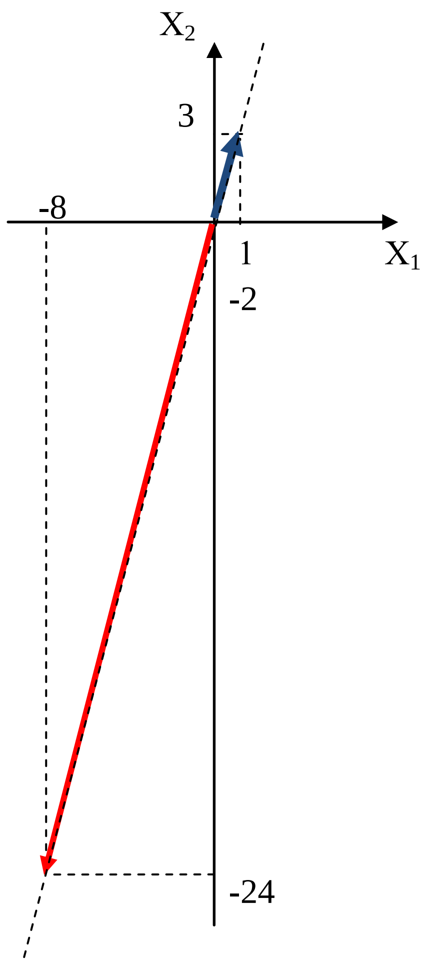
το οποίο είναι το **<u>ιδιοδιάνυσμα του πίνακα Α που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ=-8</u>**.

Ας θέσουμε λοιπόν στον αρχικό μετασχηματισμό που αντιστοιχεί στον πίνακα Α, έναν αντιπρόσωπο του ιδιοδιανύσματος, έστω το διάνυσμα:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί στην τιμή κ=1:

$$\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = x_1' \\ 6x_1 - 10x_2 = x_2' \end{array} \xrightarrow[x_2=3]{x_1=1} \begin{array}{l} x_1' = -8 \\ x_2' = -24 \end{array}$$



Στο διπλανό γράφημα βλέπουμε τα δύο διανύσματα, το

$$\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} = 1\vec{i} + 3\vec{j}$$

και το

$$\vec{x}' = x_1'\vec{i} + x_2'\vec{j} = -8\vec{i} - 24\vec{j}$$

τα οποία είναι συγγραμμικά, αλλά

Ασκήσεις:

1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Όμοια, να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

όταν είναι γνωστή η μια χαρακτηριστική ρίζα του, το $\lambda_1 = 1$.