ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 1

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

2 Συναρτήσεις μιας Πραγματικής Μεταβλητής

2.2 Εισαγωγικές έννοιες

2.2.4 Τα σύνολα των αριθμών που θα χρησιμοποιήσουμε

- **Φυσικοί αριθμοί:** Το πρώτο σύνολο αριθμών που μαθαίνει κάποιος είναι το σύνολο των Φυσικών αριθμών (στο οποίο θα τοποθετήσουμε και τον αριθμό μηδέν):

$$\mathbf{N = \{0, 1, 2, \ldots, \nu, \nu+1, \ldots\}}$$

- **Ακέραιοι αριθμοί:** Το σύνολο των ακεραίων αριθμών περιέχει τους Φυσικούς και τους αντίθετούς τους, Ως γνωστόν ο αριθμός β είναι αντίθετος του α όταν το άθροισμά τους είναι το μηδέν (α+β=0).

$$\mathbf{Z = \{ \ldots, -\nu, -\nu+1, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \nu-1, \nu, \ldots \}}$$

- **Ρητοί αριθμοί:** Το σύνολο των ρητών αριθμών περιέχει τους κλασματικούς αριθμούς των οποίων ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ακέραιοι αριθμοί (με τον παρονομαστή διάφορο του μηδενός).

$$\mathbf{Q = \left\{ \frac{\mu}{\nu} \text{, όπου οι } \mu \text{ και } \nu \text{ είναι ακέραιοι αριθμοί} \right\}}$$

Προφανώς και οι Ακέραιοι αριθμοί ανήκουν στο σύνολο των ρητών αριθμών, διότι μπορούν να γραφούν σαν κλάσμα δύο ακεραίων. Για παράδειγμα: 3=3/1=6/2=…. Όμοια, -5=-10/2.

Τέλος, τα κλάσματα 2/3, 4/6, 6/9, είναι διαφορετικά κλάσματα, παρ’όλον ότι έχουν την ίδια τιμή.

Βασική ιδιότητα: Όταν ένας ρητός αριθμός γράφεται σαν δεκαδικός, τότε, ή έχει πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, ή από κάποιο σημείο και πέρα τα δεκαδικά του ψηφία παρουσιάζουν περιοδικότητα. Αντίστροφα, κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί σαν κλασματικός. Για τις ανάγκες αυτής της μετατροπής τους χωρίζουμε σε δύο κατηγορίες

1η: Απλός περιοδικός, του οποίου η περίοδος ξεκινά αμέσως μετά την υποδιαστολή. Στην περίπτωση αυτή το ισοδύναμο προς αυτόν κλάσμα έχει για αριθμητή την περίοδο και παρονομαστή τόσα εννιάρια όσα είναι τα ψηφία της περιόδου:

$$0,272727\ldots = \frac{27}{99} \qquad \text{και} \qquad 0,99999\ldots = \frac{9}{9} = 1$$ [1]

2η: Σύνθετος περιοδικός, ο οποίος ξεκινά με ένα πρώτο μη περιοδικό μέρος. Οι δεκαδικοί αυτοί μετατρέπονται σε κλασματικούς με την παρακάτω διαδικασία:

$$0,25323232\ldots = \frac{25,323232...}{100} = \frac{25}{100} + \frac{0,323232...}{100} = \frac{25}{100} + \frac{32/99}{100} = \frac{25}{100} + \frac{32}{9900}$$

- **Άρρητοι αριθμοί:** Είναι το σύνολο των μη ρητών αριθμών, όλων δηλαδή των αριθμών των οποίων η δεκαδική γραφή δεν παρουσιάζει καμία περιοδικότητα. Παραδείγματα αρρήτων:

  π (=3,1415926535…), e (=2, 718281829…) , $-\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ κ.λ.π.

- **Πραγματικοί αριθμοί:** Είναι η ένωση των δύο βασικών προηγούμενων συνόλων, των Ρητών και των Αρρήτων αριθμών. Συμβολίζεται δε με το **R**.

Δύναμη συνόλου: Ως γνωστόν, το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου ονομάζεται πληθυκός αριθμός. Όταν όμως πρόκειται για απειροσύνολα, τότε μιλάμε για δύναμη του συνόλου. Τα σύνολα N, Z και Q έχουν τη δύναμη του αριθμησίμου και θεωρούνται ισοδύναμα.[2] Αντίθετα το σύνολο των Αρρήτων και των Πραγματικών έχουν

---

[1] *Πολλοί πιστεύουν πως ο περιοδικός δεκαδικός αριθμός 0,99999… διαφέρει κατά τι από την μονάδα. Όμως η διαφορά τους είναι μηδενική!*

[2] *Δύο απειροσύνολα ονομάζονται ισοδύναμα όταν μπορούμε να δημιουργήσουμε μια αντιστοιχία αμφιμονοσήμαντη και επί (βλέπε στην αμέσως επόμενη παράγραφο) μεταξύ τους. Για παράδειγμα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τους Φυσικούς αριθμούς με τους Ακέραιους, μέσω της αντιστοίχησης:*

Φυσικοί	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***…***
Ακέραιοι	***0***	***1***	***-1***	***2***	***-2***	***3***	***…***

στηριζόμενοι στο ότι οι Φυσικοί, που φαίνεται να εξαντλούνται ταχύτερα, είναι άπειροι και δεν θα εξαντληθούν ποτέ.

τη δύναμη του συνεχούς.[3] Συγκριτικά αναφέρουμε πως ένα οποιοδήποτε διάστημα [α,β] των πραγματικών έχει τη δύναμη του συνεχούς, πράγμα που σημαίνει πως το πλήθος των στοιχείων του είναι απείρως μεγαλύτερο από το πλήθος των Φυσικών ή των Ρητών.

2.2.4 Το σύνολο των Μιγαδικών Αριθμών

Ένας σημαντικός τομέας των Μαθηματικών, αυτός της Μιγαδικής Ανάλυσης, ξεκίνησε με την προσπάθεια υπολογισμού των ριζών της πολυωνυμικής παράστασης:

$$\mathbf{x^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{-1}}$$

<u>Ορισμός:</u> Δεχόμαστε την ύπαρξη της φανταστικής μονάδας (i), για την οποία ισχύει η ισότητα:

$$\mathbf{i^2 = -1}$$

α) Δυνάμεις της φανταστικής μονάδας:

Οι δυνάμεις της φανταστικής μονάδας προκύπτουν από τη σχέση ορισμού της, αλλά και από τις ιδιότητες των δυνάμεων. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ο διπλανός πίνακας, τον οποίο εύκολα μπορεί να συνεχίσει ο αναγνώστης.

Όσον αφορά στην ύψωση εις την ν, έχουμε τη σχέση:

$$\mathbf{i^{\nu} = i^{\upsilon}}$$

όπου υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του ν με το 4, σύμφωνα με το επόμενο παράδειγμα:

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i * i^2 = -i$$
$$i^4 = i^2 * i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i * i^4 = i * 1 = i$$
$$i^6 = i^2 * i^4 = (-1) * 1 = -1$$

κ.λ.π.

$$\mathbf{i^{23} = i^{(5*4+3)} = (i^4)^5 * i^3 = 1^5 * i^3 = 1 * i^3 = (-i) = -i}$$

[3] *Μια πολύ πετυχημένη απόδειξη για το ότι δεν υπάρχει αντιστοίχηση ανάμεσα στους Ρητούς και στους Άρρητους υπάρχει στο πολύ ωραίο μυθιστόρημα «Η έπαυλη των ανδρών» του Γάλλου συγγραφέα και καθηγητή της Ιστορίας των Μαθηματικών, Denis Guedj.*

β) Το σύνολο των Φανταστικών Αριθμών, η Φανταστική Ευθεία.

Μετά τη φανταστική μονάδα ορίζουμε την έννοια του φανταστικού αριθμού:

Ορισμός: Ονομάζουμε φανταστικό αριθμό έναν αριθμό της μορφής κi, όπου το κ είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Για παράδειγμα έχουμε τους φανταστικούς αριθμούς:

$$\mathbf{2i,\quad -5i,\quad \frac{3}{5}i,\quad \sqrt{2}i\quad κλπ}$$

Αξίζει να δούμε και την παρακάτω πράξη:

$$\mathbf{\frac{3}{2i}=\frac{3i}{2i^2}=\frac{3i}{-2}=-\frac{3}{2}i}$$

Τέλος, ανάλογα με την ευθεία των πραγματικών αριθμών, ορίζεται και η ευθεία των φανταστικών αριθμών (φανταστική ευθεία):

-4 -2 0 2 4 R : Πραγματική ευθεία

-4i -2i 0i i 2i 4i I : Φανταστική ευθεία

γ) Μιγαδικοί Αριθμοί.

Ο ορισμός της φανταστικής μονάδα, που επέτρεψε την επίλυση ριζών της μορφής:

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25(-1)}=\sqrt{25i^2}=\sqrt{(5i)^2}=5i$$

οπότε δημιουργήθηκε η δυνατότητα υπολογισμού όλων των ριζών των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Εδώ θα αρκεστούμε στις ρίζες της δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης, του γνωστού τριωνύμου.

Αναζητώντας τις δύο λύσεις της εξίσωσης:

$$x^2 + 4x + 29 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-116}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{-4 \pm 10i}{2} = -2 \pm 5i$$

διαπιστώνουμε πως αυτό που βρήκαμε σαν λύση είναι μία μείξη 2 διαφορετικού είδους αριθμών. Ενός πραγματικού (το -2) κι ενός φανταστικού (του 5i στην μία περίπτωση και του -5i στην άλλη). Φυσιολογικά, λοιπόν, καταλήγουμε στον Ορισμό:

Ορισμός: Ονομάζουμε μιγαδικό αριθμό έναν αριθμό που είναι το άθροισμα ενός πραγματικού κι ενός φανταστικού αριθμού.

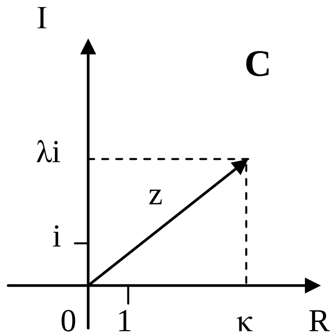
Παρατηρούμε λοιπόν πως με την «προσθήκη» ενός νέου στοιχείου (της φανταστικής μονάδας), στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως, δημιουργείται ένα νέο σύνολο, το οποίο στην Άλγεβρα αποκαλείται επέκταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών[4], το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Ορισμός: Για τον μιγαδικό αριθμό z = κ+λi, ο πραγματικός αριθμός κ λέγεται **πραγματικό μέρος το z**, ενώ ο πραγματικός αριθμός λ λέγεται **φανταστικό μέρος του z**

δ) Το μιγαδικό επίπεδο.

Το μιγαδικό επίπεδο (C) είναι ένα επίπεδο εφοδιασμένο με ένα Καρτεσιανό σύστημα, του οποίου ο οριζόντιος άξονας είναι η ευθεία των πραγματικών αριθμών και ο κατακόρυφος άξονας είναι η ευθεία των φανταστικών αριθμών.

Με τον τρόπο αυτό ο κάθε μιγαδικός αριθμός παίρνει τη μορφή ενός διανύσματος με τετμημένη (δηλ. στα x) το πραγματικό μέρος του και τεταγμένη το φανταστικό κομμάτι (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα).



Το μιγαδικό επίπεδο C και το διάνυσμα του μιγαδικού z = κ + λi

[4] *Η ακριβής ορολογία είναι δημιουργία του Σώματος των μιγαδικών αριθμών, σαν επέκταση του Σώματος των πραγματικών αριθμών. Απλά να πούμε χωρίς περεταίρω ανάλυση πως ονομάζουμε Σώμα ένα σύνολο στοιχείων, εφοδιασμένο με δύο αντιμεταθετικές-πράξεις (πρόσθεση και πολλαπλασιασμός), κλειστό ως προς τις πράξεις αυτές, εφοδιασμένο με τα ουδέτερα στοιχεία των πράξεων (μηδενικό και μοναδιαίο) καθώς και τα αντίθετα και τα αντίστροφα στοιχεία όλων των στοιχείων του.*

ε) Πράξεις μιγαδικών.

1. Πρόσθεση – Αφαίρεση. Προσθέτουμε (αφαιρούμε) δύο μιγαδικούς αριθμούς, προσθέτοντας (αφαιρώντας) ξεχωριστά το πραγματικό μέρος και το φανταστικό κομμάτι[5].

Παράδειγμα 1^o: Να προσθέσουμε τους μιγαδικούς: $z_1 = α+βi$ και $z_2 = κ+λi$

$$z_1 + z_2 = (α+βi) + (κ+λi) = (α+κ) + (β+λ)i = (κ+α) + (λ+β)i = z_2 + z_1$$

όπου η πράξη αυτή δείχνει πως η πρόσθεση είναι πράξη αντιμεταθετική.

Παράδειγμα 2^o: Να αφαιρέσουμε τους μιγαδικούς: $z_1 = α+βi$ και $z_2 = κ+λi$

$$z_1 - z_2 = (α+βi) - (κ+λi) = (α-κ) + (β-λ)i = -[(κ-α) + (λ-β)i]= -[z_2 - z_1]$$

Ταυτόχρονα διαπιστώνουμε πως

$$z_1 + (-z_1) = 0+0i = 0$$

καταλήγοντας στο συμπέρασμα πως το μηδενικό στοιχείο των μιγαδικών αριθμών είναι το $0+0i$, ενώ το αντίθετο του $α+βi$ είναι το $(–α–βi)$.

2. Πολλαπλασιασμός μιγαδικού επί πραγματικό αριθμό. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε απλά την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

$$\mathbf{κ(α+βi) = κα + κβi}$$

Παράδειγμα: Εάν $z_1 = α+βi$ και $z_2 = κ+λi$, να υπολογίσετε την τιμή: $Α=3z_1-7\ z_2$

$$Α = 3z_1-7\ z_2 = 3(α+βi) – 7(κ+λi) = (3α+3βi) – (7κ+7λi) =$$
$$= (3α–7κ) + (3β–7λ)i$$

---

[5] *Να θυμίσουμε και πάλι πως αν λέγαμε το φανταστικό μέρος θα εννοούσαμε μόνο τον συντελεστή της φανταστικής μονάδας, σύμφωνα με την ορολογία του 2^{ου} ορισμού της παραγράφου (γ).*

3. Πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών. Όμοια, εφαρμόζουμε και πάλι την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

$$(\alpha+\beta i)(\kappa+\lambda i) = \alpha\kappa + \alpha\lambda i + \beta\kappa i + \beta\lambda i^2 = (\alpha\kappa-\beta\lambda) + (\alpha\lambda+\beta\kappa)i$$

Ορισμός: Ο μιγαδικός α-βi λέγεται **συζυγής** του α+βi.. Συμβολικά γράφουμε:

$$z = \alpha + \beta i \quad \kappa\alpha\iota \quad \bar{z} = \alpha - \beta i$$

Παράδειγμα: Να δειχθεί πως το γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Πράγματι

$$z\bar{z} = (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i) = \alpha^2 + \alpha\beta i - \alpha\beta i - \beta^2 i^2 = \alpha^2 + \beta^2 \in R$$

4. Διαίρεση μιγαδικών αριθμών. Εκφράζουμε τη διαίρεση υπό μορφή κλάσματος και πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή επί τον συζυγή του παρονομαστή, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός πως το γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών είναι πραγματικός αριθμός:

Παράδειγμα 1°: Εάν z_1 = α+βi και z_2 = κ+λi, να υπολογίσετε την τιμή: $A=z_1/z_2$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha+\beta i}{\kappa+\lambda i} = \frac{(\alpha+\beta i)(\kappa-\lambda i)}{(\kappa+\lambda i)(\kappa-\lambda i)} = \frac{(\alpha\kappa+\lambda\beta)+(\beta\kappa-\alpha\lambda)i}{\kappa^2+\lambda^2} =$$

$$= \frac{\alpha\kappa+\lambda\beta}{\kappa^2+\lambda^2} + \frac{\beta\kappa-\alpha\lambda}{\kappa^2+\lambda^2} i$$

Παράδειγμα 2°: Να βρεθεί ο αντίστροφος του μιγαδικού z = i.

Επειδή ο αντίστροφος ενός πραγματικού α είναι ο 1/α, πιστεύουμε πως και ο αντίστροφος του i είναι το 1/i. Ας βεβαιωθούμε:

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$$

Σαν επιβεβαίωση πρέπει να δείξουμε πως το γινόμενο του i επί τον αντίστροφό του θα είναι ίσο με τη μονάδα…

$$i\frac{1}{i} = i(-i) = -(-i^2) = 1$$

Παράδειγμα 3^{o}: Να βρεθεί ο αντίστροφος του μιγαδικού z = α+βi.

Δουλεύουμε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\mathbf{\frac{1}{\alpha+\beta i} = \frac{\alpha-\beta i}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)} = \frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}}$$ [6]

και η δοκιμή:

$$\mathbf{(\alpha+\beta i)\frac{1}{\alpha+\beta i} = (\alpha+\beta i)\frac{(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)} = \frac{(\alpha+\beta i)}{(\alpha+\beta i)} = 1}$$

5. Ύψωση του e σε μιγαδικό εκθέτη. Στο μάθημα της Αριθμητικής ανάλυσης, και με τη βοήθεια των σειρών Mac-Laurin, θα αποδείξουμε τον τύπο του Euler, τον οποίο δεχόμαστε εδώ χωρίς απόδειξη:

$$\mathbf{Euler: \quad e^{\pm ix} = \sigma\upsilon\nu x \pm i\eta\mu x}$$

Με τη βοήθεια του τύπου αυτού μπορούμε να μετατρέψουμε την έκφραση: $\mathbf{e^{\kappa\pm\lambda i}}$ σε έναν απλό μιγαδικό.

Παράδειγμα:

$$e^{2-4i} = e^2e^{-4i} = e^2\left(\sigma\upsilon\nu\left(4\right) - i\eta\mu(4)\right) = 7,389(-0,6536-0,7568i) =$$
$$= -4.8298 - 5.592i$$

---

[6] *Το οποίο μπορεί να γραφεί τελικά:*

$$\mathbf{\frac{1}{\alpha+\beta i} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}i}$$

Παράδειγμα: Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler, να εκφραστούν μέσω των εκθετικών συναρτήσεων οι συναρτήσεις ημx και συνx..

Γράφουμε δύο φορές τη σχέση του Euler, την μία με το συν και την άλλη με το πλην. Αμέσως μετά τις προσθέτουμε κατά μέλη και επιλύουμε ως προς το συνx την σχέση που θα προκύψει. Με όμοιο τρόπο αλλά με αφαίρεση κατά μέλη, υπολογίζουμε το ημx. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} e^{xi} &= \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x \\ e^{-xi} &= \sigma\upsilon\nu x - i\eta\mu x \end{aligned} \underset{+}{\Longrightarrow} e^{xi} + e^{-xi} = 2\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

και

$$\begin{aligned} e^{xi} &= \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x \\ e^{-xi} &= \sigma\upsilon\nu x - i\eta\mu x \end{aligned} \underset{-}{\Longrightarrow} e^{xi} - e^{-xi} = 2i\eta\mu x \Rightarrow \eta\mu x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

Παρατήρηση: Τα δεύτερα μέλη των συναρτήσεων που δίνουν το ημx και το συνx, εάν γραφούν χωρίς την παρουσία της φανταστικής μονάδας, ορίζουν δύο άλλες συναρτήσεις που ονομάζονται Υπερβολικό ημίτονο και υπερβολικό συνημίτονο:

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad \text{και} \quad \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Ασκήσεις.

1^{η}) Να υπολογισθούν οι παραστάσεις:

$$A = (5-3i)(2+4i), \qquad B = (1-3i)^2, \qquad \Gamma = (2-3i)(1-i)(1+i)$$

$$\Delta = \frac{1-i}{1+i}, \qquad E = \frac{\alpha+\beta i}{i}, \qquad E = \frac{2+2i}{1-2i}$$

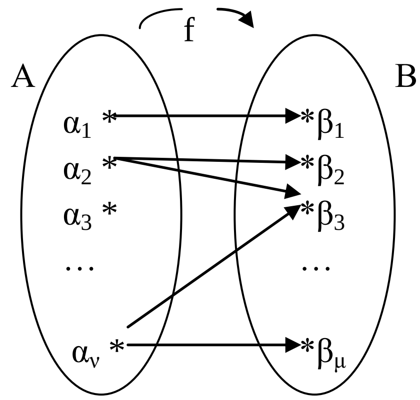
2^{η}) Να υπολογισθεί η τιμή: i^{1050}.

3^{η}) Να υπολογισθεί ο αντίθετος και ο αντίστροφος του $z = \kappa i$.

4^{η}) Να υπολογισθεί ο μιγαδικός αριθμός $\dfrac{1}{e^{\ln 2+\pi i}}$

2.2.4 Αντιστοιχίσεις – Απεικονίσεις

Έστω τα σύνολα A και B. Δημιουργούμε έναν κανόνα αντιστοίχισης - απεικόνισης των στοιχείων του A στα στοιχεία του B, ονομάζοντας το A σύνολο αφετηρίας και το B σύνολο αφίξεως. Διακρίνουμε τα παρακάτω είδη αντιστοίχισης:

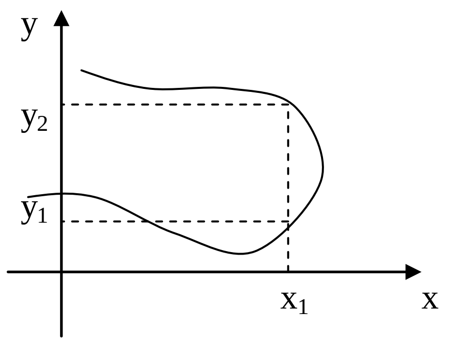


α. Μη μονοσήμαντη αντιστοίχιση.

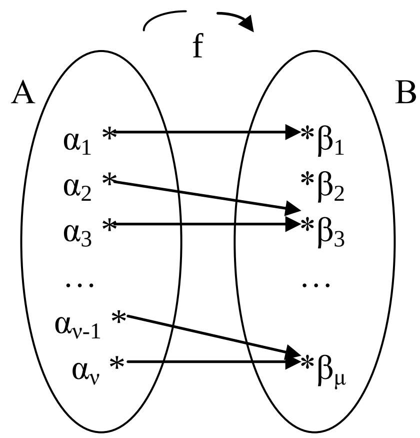
Ένα στοιχείο α του συνόλου αφετηρίας A μπορεί να αντιστοιχίζεται σε περισσότερα του ενός στοιχεία του συνόλου αφίξεως B.

Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, οι συναρτήσεις είναι μία αντιστοίχιση ενός υποδιαστήματος (υποσυνόλου) του άξονα των x, σε ένα υποδιάστημα (υποσύνολο) του άξονα των y.

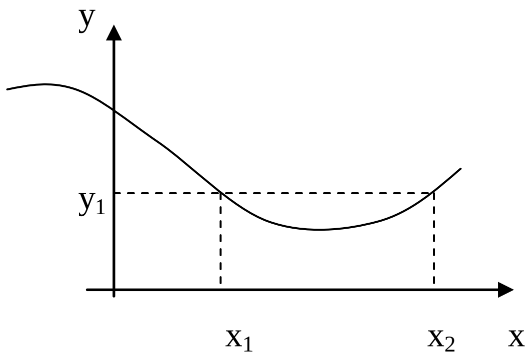
Εάν δεχθούμε πως μια συνάρτηση y=f(x) ορίζει μια μη μονοσήμαντη αντιστοίχιση ανάμεσα στις τιμές των αξόνων x και y, ενός Καρτεσιανού συστήματος, τότε η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι της μορφής του διπλανού γραφήματος (όπου στην τιμή x_1 αντιστοιχίζονται δύο τιμές στα y, το y_1 και το y_2). Δεχόμαστε όμως εξ' ορισμού πως μια αντιστοίχιση θα λέγεται συνάρτηση μόνον εάν σε κάθε x η συνάρτηση αντιστοιχίζει ένα και μόνον ένα y, μιλώντας για μονότιμες αντιστοιχίσεις–συναρτήσεις.



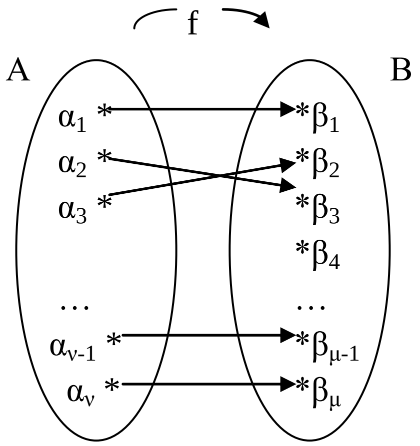
β. Μονοσήμαντη αντιστοίχιση.



Ένα στοιχείο α του συνόλου αφετηρίας A αντιστοιχίζεται (απεικονίζεται) σε ένα το πολύ στοιχείο του συνόλου αφίξεως B. Είναι δυνατόν δύο διαφορετικά στοιχεία $α_κ$ και $α_λ$ να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο β του B, να έχουν όπως λέγεται την ίδια εικόνα. Δεν είναι υποχρεωτικό να εξαντλούνται όλα τα στοιχεία του συνόλου A.



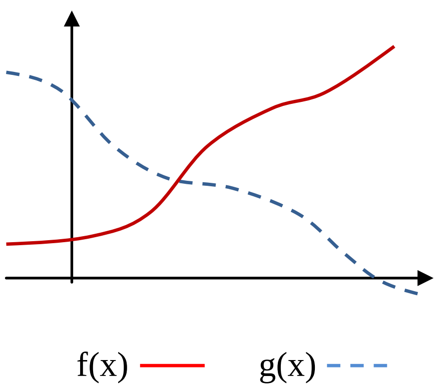
Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που αντιστοιχεί σε μονοσήμαντη αντιστοίχιση (και λέγεται μονότιμη συνάρτηση) είναι η διπλανή, όπου για κάθε x υπάρχει μόνον ένα y, όμως μπορεί να συμβεί δύο διαφορετικά x (x_1 και x_2) να αντιστοιχίζονται στο ίδιο y.



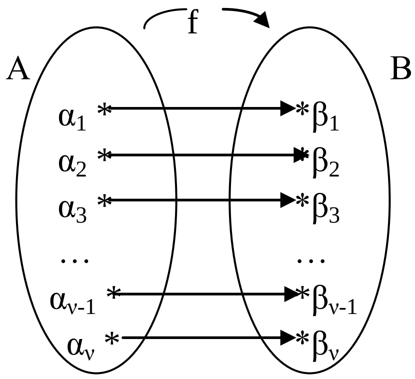
γ. Αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση.

Είναι μια μονοσήμαντη αντιστοίχιση στην οποία:

- δύο διαφορετικά στοιχεία του Α θα έχουν πάντα διαφορετικές εικόνες.
- εξαντλούνται τα στοιχεία του Α
- δεν είναι υποχρεωτικό να εξαντλούνται τα στοιχεία του Β.

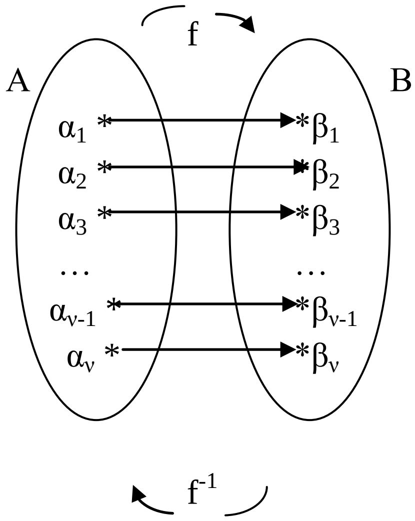


Ξαναγυρνώντας στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, έχουμε να παρατηρήσουμε πως όταν μία συνάρτηση f, εγκαθιστά μιαν αμφιμονοσήμαντη (αμφιμονότιμη) αντιστοίχιση, τότε η συνάρτηση αυτή θα είναι μονότονη (είτε αύξουσα όπως η f(x), είτα φθίνουσα όπως η g(x)).



γ. Αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση και επί.

Είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία στην οποία όμως εξαντλούνται όλα τα στοιχεία του συνόλου άφιξης Β.



γ. Αντίστροφη αντιστοίχιση της f.

Έστω τώρα μία αντιστοίχιση f με σύνολο αφετηρίας το Α και άφιξης το Β. Τώρα προσπαθούμε να ορίσουμε την αντίστροφη αντιστοίχιση της f, πράγμα που σημαίνει:

- Το σύνολο αφετηρίας θα είναι το Β.
- Το σύνολο άφιξης θα είναι το Α.
- Εάν η f απεικόνιζε στο α_1 το β_1, τώρα η αντίστροφη αντιστοίχιση f^{-1} θα απεικονίζει το β_1 στο α_1.

Τα παραπάνω όμως επιφέρουν και κάποιους περιορισμούς:

1. Για να μπορεί η απεικόνιση f^{-1} να είναι μονότιμη (δηλαδή σε κάθε β_j να αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα α_j), θα πρέπει η f να είναι αμφιμονοσήμαντη (αμφιμονότιμη).

2. Και για να μπορεί η απεικόνιση f^{-1} να εξαντλεί όλα τα στοιχεία του Β, θα πρέπει η f να είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

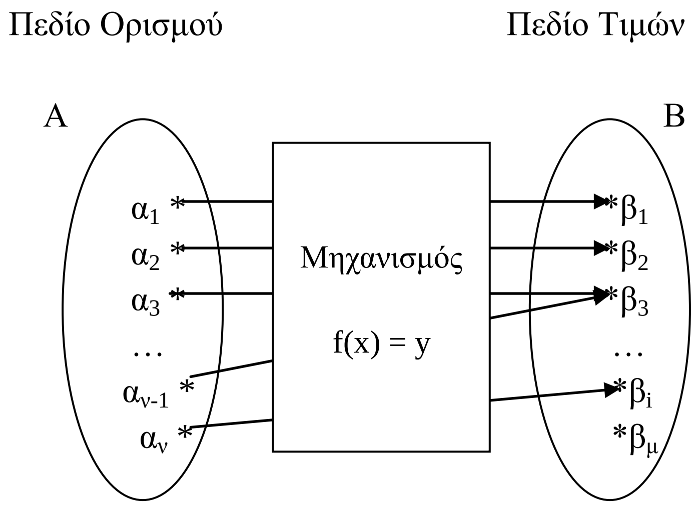
Φθάνουμε λοιπόν στον ορισμό: **Μία αντιστοίχιση-απεικόνιση f, με σύνολο αφετηρίας το Α και άφιξης το Β, μπορεί να αντιστραφεί, μόνον όταν η απεικόνιση f είναι αμφιμονοσήμαντη (αμφιμονότιμη) και επί του Β (εξαντλεί το Β).**

2.2.4 Η έννοια της συνάρτησης

Μέχρι τώρα μιλήσαμε για την έννοια των αντιστοιχίσεων-απεικονίσεων, ανάμεσα στα στοιχεία ενός συνόλου αφετηρίας Α κι ενός συνόλου άφιξης (εικόνων) Β. Όμως δεν αναφερθήκαμε καθόλου στον τρόπο με τον οποίο θα επιλέξουμε το στοιχείο-εικόνα β_i του συνόλου Β, για το α_i του Α.

Αυτός ακριβώς ο τρόπος καθορίζεται από ένα μηχανισμό αντιστοίχισης (απεικόνισης), ο οποίος επιλέγει την εικόνα β_i όταν του δοθεί το στοιχείο α_i του συνόλου αφετηρίας.

Ένας μηχανισμός αντιστοίχισης μπορεί να στηρίζεται σε μία μαθηματική σχέση, στα δεδομένα ενός πειράματος ή στα δεδομένα μιας έρευνας που αφορά σε οποιοδήποτε πεδίο μιας επιστήμης ή τέχνης. Ταυτόχρονα καθορίζει το σύνολο αφετηρίας, το οποίο θα λέγεται Πεδίο Ορισμού και το σύνολο άφιξης, που θα λέγεται Πεδίο Τιμών.

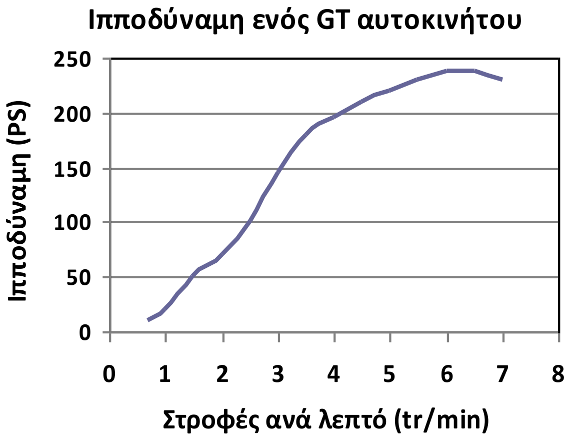


Όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα ο μηχανισμός f οφείλει:

- Να είναι μονότιμος (για κάθε α_i να υπάρχει μόνο μία τιμή (εικόνα) β_i), χωρίς να είναι αμφιμονότιμος.
- Να εξαντλεί όλα τα στοιχεία του Πεδίου Ορισμού, χωρίς να είναι υποχρεωτικό να εξαντλούνται όλα τα στοιχεία του Πεδίου Τιμών (Β).

Παραδείγματα

1°) Βάλαμε στο δυναμόμετρο ένα βενζινοκίνητο αυτοκίνητο μεγάλου τουρισμού (GT) και πήραμε την διπλανή καμπύλη ιπποδύναμης, συναρτήσει των στροφών ανά λεπτό του κινητήρα:

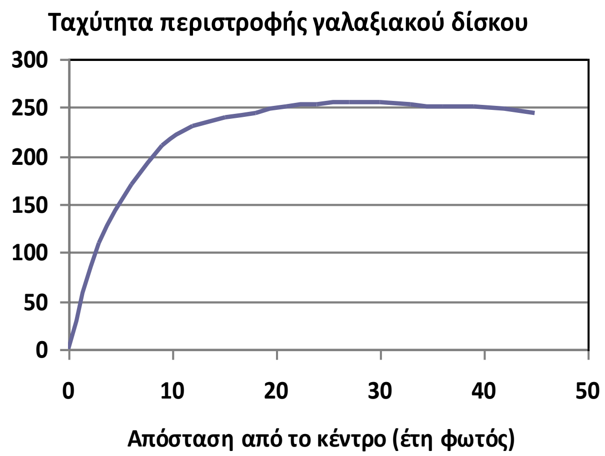


Παρατηρούμε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης αυτής είναι το διάστημα που ξεκινά από τις 700 στροφές ανά λεπτό (0,7 στο γράφημα), όπου βρίσκεται το λεγόμενο ρελαντί, και τελειώνει στις 7000 στροφές, όπου επεμβαίνει ο «κόφτης» του κινητήρα.

Αντίστοιχα, το πεδίο τιμών ξεκινά από τους 10 ίππους και τελειώνει στους 238.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί πως εάν ταυτίσουμε τη συνάρτηση με το αποτέλεσμά της (με την ιπποδύναμη δηλαδή του αυτοκινήτου), τότε αυτή «ζει» πάνω στον κατακόρυφο άξονα. Αντίθετα, η καμπύλη του γραφήματος μας επιτρέπει να αντιστοιχίζουμε τις τιμές το Πεδίου Ορισμού (στροφές ανά λεπτό του κινητήρα), που εμφανίζονται στον οριζόντιο άξονα, με την ιπποδύναμη του κινητήρα που εμφανίζεται στον κατακόρυφο άξονα. Τέλος, να παρατηρήσουμε πως στην συναρτησιακή αυτή σχέση, η παράμετρος που μπορεί να πάρει την οποιαδήποτε τιμή των στροφών ανά λεπτό λέγεται **Ανεξάρτητη Μεταβλητή**, ενώ η ιπποδύναμη αποτελεί την **Εξαρτημένη Μεταβλητή**.

2°) Μετρήσαμε την ταχύτητα με την οποία περιστρέφονται τα νέφη υδρογόνου του γαλαξιακού δίσκου ενός σπειροειδούς γαλαξία, και βρήκαμε τις παρακάτω ταχύτητες συναρτήσει της απόστασης του νέφους από το κέντρο του γαλαξία. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο διπλανό



Στον οριζόντιο άξονα οι αποστάσεις από το γαλαξιακό κέντρο μετριούνται σε χιλιάδες έτη φωτός, ενώ οι ταχύτητες περιστροφής μετριούνται σε χιλιόμετρα ανά δευτερόλεπτο.

Παρατηρούμε πως στο παράδειγμα αυτό το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης (δηλαδή το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές η ανεξάρτητη μεταβλητή), αφορά στις αποστάσεις από το κέντρο του γαλαξία και ξεκινά από τα 0 έτη φωτός και τελειώνει στα 45 χιλιάδες έτη φωτός. Προφανώς στο πρόβλημα αυτό δεν θα μπορούσαν να περιέχονται και αρνητικές τιμές στο Πεδίο Ορισμού, μια και αρνητικές αποστάσεις δεν έχουν νόημα!

Αντίστοιχα το πεδίο τιμών (δηλαδή το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές η εξαρτημένη μεταβλητή) περιλαμβάνει τιμές του διαστήματος που ξεκινά από τα 0 χιλιόμετρα το δευτερόλεπτο (συμβατικά, διότι τίποτε δεν είναι ακίνητο σε έναν γαλαξία) και τελειώνει στα 260.

Και στο παράδειγμα αυτό έχουμε μια συνάρτηση που προκύπτει από τα αποτελέσματα μετρήσεων, τα οποία δίνουν το παραπάνω γράφημα των ταχυτήτων περιστροφής, χωρίς την διαμεσολάβηση ενός μαθηματικού τύπο.

Να τονίσουμε εδώ πως η ανάγνωση των τιμών αυτών της γραμμικής ταχύτητας περιστροφής μαρτυρά πως ο γαλαξιακός δίσκος δεν περιστρέφεται σαν ένα σώμα, αλλά εκτελεί ένα είδος περιστροφής που ονομάζεται **Διαφορική Περιστροφή**.

3^o) Θέλουμε να μελετήσουμε τις τιμές που παίρνει η μαθηματική συνάρτηση

$$\mathbf{f(x) = ημ(2x)συν(3x)}$$

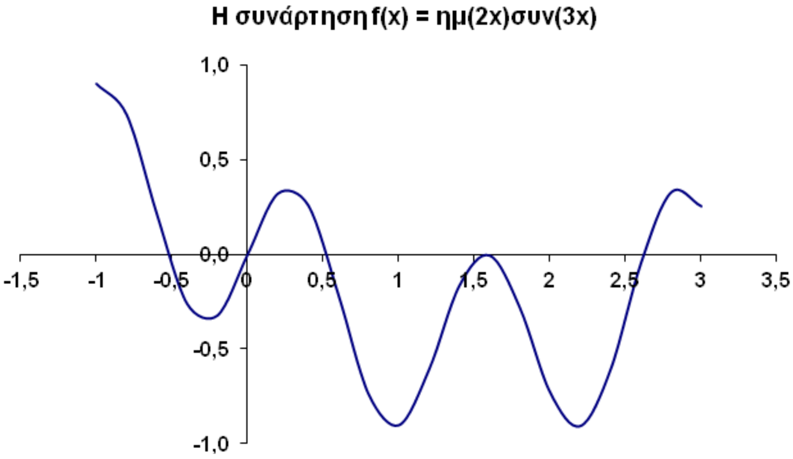
και για το λόγο αυτό δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών της, από τον οποίο προκύπτει και το αντίστοιχο γράφημα,

Στο παράδειγμα αυτό παρατηρούμε πως το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης δεν περιορίζεται από κανέναν παράγοντα (όπως συνέβαινε στα προηγούμενα παραδείγματα). Αντίθετα, η ανεξάρτητη μεταβλητή (το x) μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή του οριζόντιου άξονα (ο οποίος περιέχει τιμές με μονάδα το ακτίνιο). Όμως, συμβατικά, στο παράδειγμα το Πεδίο Ορισμού έχει περιοριστεί στο διάστημα: [-1 , 3].

Αντίθετα, το Πεδίο Τιμών είναι το διάστημα [-1 , 1], μια και η τιμή της συνάρτησης f δεν μπορεί ποτέ να βρίσκεται εκτός του διαστήματος αυτού.

Πίνακας τιμών

X	Y
-1	0,900
-0,8	0,737
-0,6	0,212
-0,4	-0,260
-0,2	-0,321
0	0
0,2	0,321
0,4	0,260
0,6	-0,212
0,8	-0,737
1	-0,900
1,2	-0,606
1,4	-0,164
1,6	-0,005
1,8	-0,281
2	-0,727
2,2	-0,904
2,4	-0,606
2,6	-0,048
2,8	0,328
3	0,255



Δεν ξεχνάμε πως το γράφημα μιας συνάρτησης που ορίζεται με μαθηματικό τύπο, δηλαδή με μία ισότητα της μορφής $y = f(x)$, περιέχει όλα τα σημεία και μόνον αυτά, των οποίων οι συντεταγμένες επαληθεύουν την ισότητα αυτή. Συχνά λέμε πως η καμπύλη του γραφήματος μιας συνάρτησης f είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που επαληθεύουν την εξίσωση $y = f(x)$

Άσκηση: Ποια από τα σημεία:

$$(0,0),\ (1,1),\ \left(-1,\frac{1}{2}\right),\ (1,0.5),\ (3,0.3),\ \left(5,\frac{1}{25}\right)$$

ανήκουν στο γράφημα της συνάρτησης

$$y = f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

2.2.4 Συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής

Στο κεφάλαιο αυτό, αλλά και στα επόμενα, θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις οι οποίες κατά κύριο λόγο θα ορίζονται μέσω μιας μαθηματικής έκφρασης. Στην πλέον συνηθισμένη περίπτωση οι συναρτήσεις αυτές είναι συμβατές με την λογική της γραφικής αναπαράστασής τους σε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο τοποθετούμε στον οριζόντιο άξονα[7] την μεταβλητή της συνάρτησης (την x), ενώ στον κατακόρυφο την εξαρτημένη μεταβλητή (την y). Γράφουμε λοιπόν:

$$y = f(x)$$

όπου με το f (function-λειτουργία) συμβολίζεται ο μηχανισμός αντιστοίχισης μιας τιμής y στην τιμή x του πεδίου ορισμού της f.

Το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών (R) ή ένα υποσύνολό του.

Εάν και το Πεδίο Τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών (R) ή ένα υποσύνολό του, τότε πρόκειται για μία **Πραγματική Συνάρτηση μιας Πραγματικής Μεταβλητής**.

Ο ορισμός του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης είναι το πρώτο πράγμα που ορίζουμε για μία συνάρτηση. Το πεδίο ορισμού, όπως είπαμε, είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή ένα υποσύνολό του. Οι πιο συνηθισμένοι λόγοι που οδηγούν σε ένα πεδίο ορισμού, γνήσιο υποσύνολο του R, είναι οι παρακάτω:

- Η ύπαρξη παρονομαστών στον μαθηματικό τύπο της συνάρτησης που μηδενίζονται για κάποιες τιμές της μεταβλητής. Τότε οι τιμές αυτές πρέπει να αφαιρεθούν από το πεδίο ορισμού.
- Η ύπαρξη κάποιων συναρτήσεων στον μαθηματικό τύπο της συνάρτησης που δεν μπορούν να λειτουργήσουν με όλους τους πραγματικούς (για παράδειγμα να αναφέρουμε τις συναρτήσεις ln(x), Τοξημ(x) κλπ. Ιδιαίτερη μνεία χρειάζονται οι ρίζες άρτιας τάξης, εάν δεν θέλουμε η εξαρτημένη μεταβλητή (y) να παίρνει μιγαδικές τιμές.
- Η φυσική σημασία της μεταβλητής x στο πρόβλημα που προσπαθεί να περιγράψει μια συνάρτηση. Αν για παράδειγμα οι τιμές x αντιστοιχούν σε Ευκλείδειες αποστάσεις, τότε προφανώς το x δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

[7] *Υπάρχουν φορές όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή τοποθετείται στον κατακόρυφο άξονα (όπως για παράδειγμα στην Πολιτική Οικονομία…*

Άσκηση: Να βρεθούν παραδείγματα συναρτήσεων που περιγράφουν φυσικά προβλήματα και όπου το πεδίο ορισμού τους να είναι:

- Το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών.
- Το σύνολο των φυσικών αριθμών.
- Το σύνολο A={1,2,3,4,5,6}

2.2 Πραγματικές συναρτήσεις, μιας πραγματικής μεταβλητής

2.2.4 Πολυωνυμικές συναρτήσεις

1. Μορφή των πολυωνυμικών συναρτήσεων (π.σ.).

Ονομάζουμε μονώνυμο κάθε παράσταση της μορφής: αx^{ν}, όπου το α είναι μια παράμετρος (πραγματική) και ο ν είναι Φυσικός αριθμός.[8]. Η πολυωνυμική συνάρτηση (π,σ.) είναι ένα άθροισμα μονώνυμων. Η μορφή της:

$$y = \pi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_\nu x^\nu \qquad (B.1)$$

η οποία ορίζει μια πολυωνυμική συνάρτηση ν-ου βαθμού. Άρα, ονομάζουμε βαθμό μιας π.σ. τον μεγαλύτερο εκθέτη στον οποίο υψώνεται η μεταβλητή x, ή όπως λέγεται, τον εκθέτη του μεγιστοβάθμιου όρου.

Οι π.σ. είναι βασικά εργαλεία στα Μαθηματικά και ιδιαίτερα στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Γι’ αυτό το λόγο θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα μ’ αυτές. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε και σε έννοιες οι οποίες θα οριστούν στη συνέχεια, όμως θεωρούμε πως ο αναγνώστης τις έχει ήδη γνωρίσει, έστω και με τρόπο πλημμελή.

2. Βασικές ιδιότητες των π.σ..

i. Το πεδίο ορισμού των π.σ. είναι ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών R, διότι τα μονώνυμα των π.σ. μπορούν να λειτουργήσουν με οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

ii. Οι π.σ. είναι συνεχείς[9] συναρτήσεις σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους (το R)

---

[8] *Προφανώς δεν είναι πολυωνυμικό μονώνυμο το* $\mathbf{5x^{-3} = \frac{5}{x^3}}$, *η οποία λέγεται ρητή (κλασματική) συνάρτηση.*

iii. Το όριό τους, όταν το x τείνει στο άπειρο, εξαρτάται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο. Δηλαδή:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\pi(x)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[a_0+a_1x+a_1x^2+...+a_\nu x^\nu\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[a_\nu x^\nu\right]$$

iv. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους (σε ολόκληρο το R)

v. Ο αριθμός ρ λέγεται ρίζα της π.σ. (Α.1) όταν την μηδενίζει [π(ρ)=0].

vi. Κάθε π.σ. ν-ου βαθμού έχει ακριβώς ν-ρίζες [ρ_1, ρ_2, …, ρ_ν], οι οποίες είναι είτε πραγματικοί αριθμοί (πραγματικές ρίζες) είτε μιγαδικοί (μιγαδικές ρίζες). Οι πραγματικές ρίζες είναι εμφανείς στο γράφημα μιας π.σ., διότι σε αυτές τις τιμές της μεταβλητής x (του οριζόντιου άξονα) τέμνει το γράφημα τον άξονα των x. Αντίθετα οι μιγαδικές ρίζες δεν είναι εμφανείς σε ένα γράφημα (συχνά αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξή τους αλλά όχι την τιμή τους).

vii. Η π.σ. (Α.1) μπορεί να γραφεί και σαν γινόμενο παραγόντων, με τη βοήθεια των ριζών της:

$$\mathbf{y = \pi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_\nu x^\nu =}$$
$$\mathbf{=a_\nu(x-\rho_1)\ (x-\rho_2)\ (x-\rho_3)...\ (x-\rho_\nu)}$$

Πρόκειται για μια ισοδύναμη γραφή της π.σ. π(x). Όμως προσοχή στον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου a_ν., ο οποίος εμφανίζεται διότι, χωρίς την παρουσία του, κατά τον πολλαπλασιασμό των ν-παραγόντων ο όρος x^ν θα είχε συντελεστή τη μονάδα.

viii. Αν η τιμή ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου π(x), τότε αυτό θα διαιρείται[10] με τον παράγοντα (x-ρ).

Πράγματι,

$$\mathbf{\frac{\pi(x)}{(x-\rho_\kappa)}=\frac{a_0+a_1x+a_1x^2+...+a_\nu x^\nu}{(x-\rho_\kappa)}=}$$
$$\mathbf{=\frac{a_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)...(x-\rho_\kappa)(x-\rho_{\kappa+1})...(x-\rho_\nu)}{(x-\rho_\kappa)}=}$$
$$\mathbf{=a_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)...(x-\rho_{\kappa-1})(x-\rho_{\kappa+1})...(x-\rho_\nu)}$$

---

[9] *Μια συνάρτηση λέγεται συνεχής όταν μπορούμε να χαράξουμε το γράφημά της με μια μονοκονδυλιά (δεν περιέχει δηλαδή ασυνέχειες)*

[10] *Εννοείται πως πρόκειται για τέλεια διαίρεση, χωρίς υπόλοιπο.*

ix. Εάν η ρίζα ρ_1 είναι μιγαδική (ρ_1 = κ+λi) τότε η ρ_2 θα είναι η συζυγής της (ρ_2=κ-λi). Επομένως οι μιγαδικές ρίζες πάντα πάνε δύο-δύο. Στη συνέχεια θα δοθεί μία εξήγηση για την ιδιαιτερότητα αυτή των μιγαδικών ριζών.

x. Εάν ο βαθμός μιας π.σ. (το ν) είναι περιττός τότε θα έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα (συνέπεια της προηγούμενης ιδιότητας).

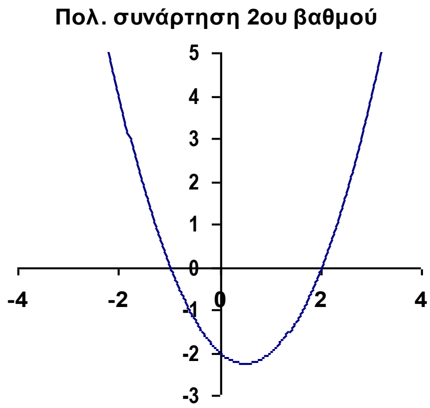
xi. Εάν ρ_1=ρ_2 τότε η ρίζα αυτή ονομάζεται διπλή ρίζα, ή ρίζα δεύτερης τάξης πολλαπλότητας. Όμοια έχουμε τριπλές, τετραπλές κλπ ρίζες. Η τάξη πολλαπλότητας μιας ρίζας γίνεται εμφανής στην γραφή μιας π.σ. σαν γινόμενο παραγόντων. Έτσι η

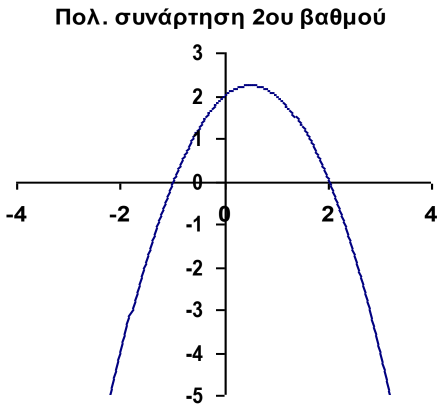
$$\boldsymbol{\pi(x) = a_\nu (x-\rho_1)^2 (x-\rho_2)^4 (x-\rho_3)(x-\rho_4)^2 (x-\rho_5)....}$$

έχει διπλές ρίζες την ρ_1 και ρ_4, τετραπλή την ρ_2, ενώ οι άλλες είναι απλές ρίζες (τάξης πολλαπλότητας 1).

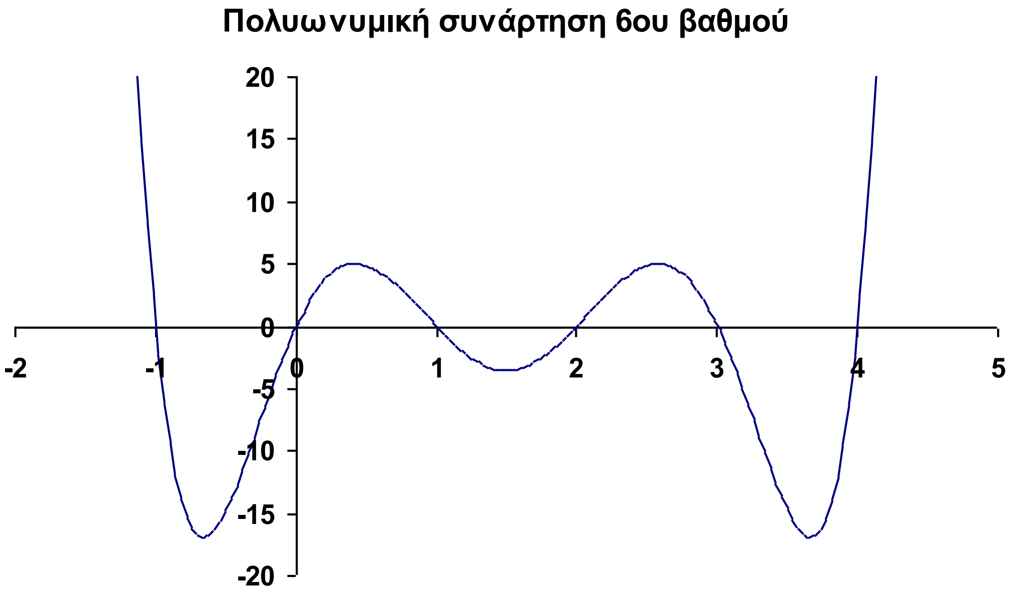
xii. ν+1 τυχαία σημεία του επιπέδου Oxy καθορίζουν ακριβώς ένα πολυώνυμο ν-ου βαθμού.

xiii. Το γράφημα μιας πολυωνυμικής συνάρτησης (π.σ.) 1^{ου} βαθμού είναι μία ευθεία. Το γράφημα μιας π.σ. 2^{ου} βαθμού είναι μία παραβολή.

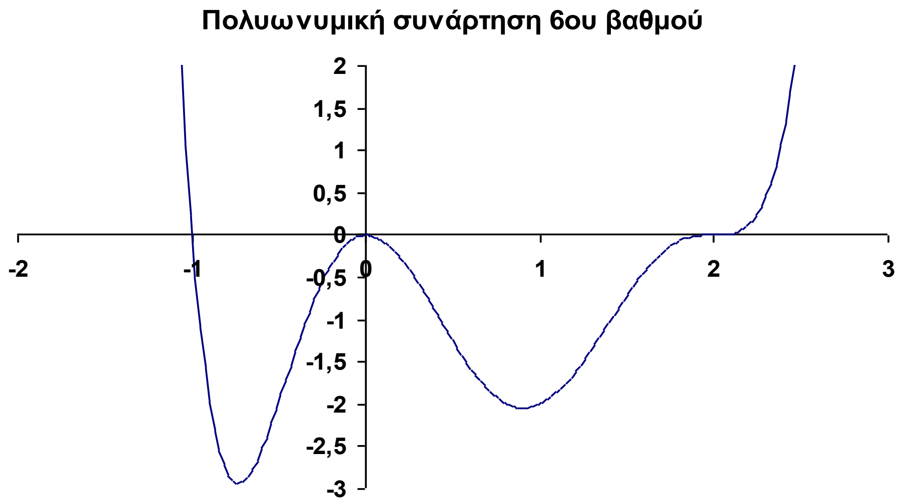




Στη συνέχεια, για κάθε επιπλέον βαθμό θα προστίθεται, εν γένει, και μια επιπλέον στροφή στο γράφημα. Σαν παράδειγμα, στο επόμενο γράφημα εμφανίζεται μία π.σ. με 5 διαφορετικές στροφές (και με τέσσερα διαφορετικά σημεία αλλαγής στροφής, που λέγονται σημεία καμπής), η οποία είναι 6^{ου} βαθμού.

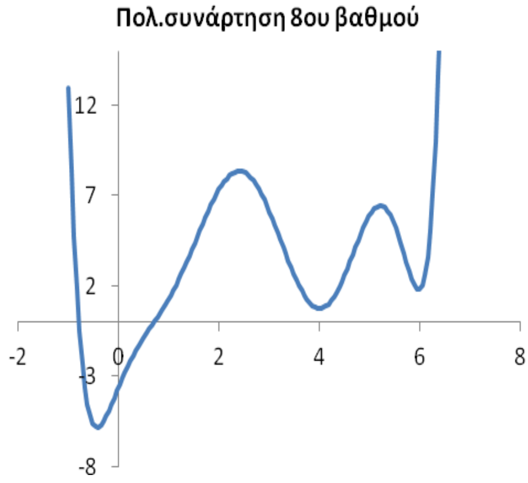


xiv. Η γραφική παράσταση των ριζών, ανάλογα με την τάξη πολλαπλότητάς τους φαίνεται στο παρακάτω γράφημα:



όπου παρατηρούμε πως οι απλές ρίζες (ρίζες τάξης πολλαπλότητας 1, εδώ η ρ=-1) τέμνουν ευθέως τον άξονα των x. Οι διπλές (όπως και όλες οι άρτιας τάξης ρίζες, εδώ η ρ=0) εφάπτονται στον άξονα και δεν αποτελούν σημείο αλλαγής του προσήμου της π.σ.. Τέλος, οι τριπλές (όπως και όλες οι περιττής τάξης ρίζες, εδώ η ρ=2), τέμνουν τον άξονα των x με την μορφή ενός s.

xv. Η γραφική παράσταση μιας π.σ. συχνά μας επιτρέπει να αντιληφθούμε την ύπαρξη των μιγαδικών ριζών. Για παράδειγμα στο επόμενο γράφημα παρατηρούμε:



- Την ύπαρξη 6 σημείων καμπής, 7 ειδών στροφής που εναλλάσσονται, επομένως αντιλαμβανόμαστε πως πρόκειται για π.σ. 8^{ου} βαθμού.
- Την ύπαρξη δύο απλών πραγματικών ριζών.
- Την αναγκαιότητα ύπαρξης άλλων έξι, οι οποίες θα είναι μιγαδικές.
- Δυστυχώς ενώ από το γράφημα φαίνεται πως οι δύο πραγματικές ρίζες είναι κοντά στο -1 και στο 0.7, δεν έχουμε κάποια ένδειξη για την τιμή των μιγαδικών ριζών.

xvi. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των παραγώγων, οι π.σ. ν-ου βαθμού έχουν ακριβώς ν-παραγώγους (οι παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης της ν-ης είναι ίσες με το μηδέν)[11]. Αυτή είναι μία ιδιότητα που την έχουν μόνον οι πολυωνυμικές συναρτήσεις. Όλες οι γνωστές στον αναγνώστη συναρτήσεις, έχουν άπειρες παραγώγους.

Παράδειγμα 1^{o}: Να βρεθεί η π.σ. που διέρχεται (ορίζεται) από τα σημεία: (0,0), (1,1) και (2,0).

Λύση: Με βάση την ιδιότητα (xii) 3 σημεία ορίζουν μία π.σ. 2^{ου} βαθμού, έστω την

$$y=\pi(x) = \alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2.$$

Επειδή θέλουμε η π(x) να διέρχεται από τα δοσμένα σημεία, θα πρέπει οι συντεταγμένες τους να επαληθεύουν τη σχέση ορισμού της. Αντικαθιστούμε λοιπόν τις συντεταγμένες των τριών σημείων στην εξίσωση της π(x), και παίρνουμε το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

---

[11] *Παράδειγμα:* $\mathbf{y=x^3 \;\Rightarrow\; y'=3x^2 \;\Rightarrow\; y''=6x \;\Rightarrow\; y'''=6 \;\Rightarrow\; y^{(\nu)}=0\ \forall \nu>3}$

ενώ $\mathbf{y=\frac{1}{x}=x^{-1} \;\Rightarrow\; y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; y''=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}}$ **κλπ**

$$\begin{array}{lcl} \alpha_0+\alpha_1 0+\alpha_2 0^2 = 0 & & \alpha_0 = 0 \\ \alpha_0+\alpha_1 1+\alpha_2 1^2 = 1 & ή & \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 = 1 \\ \alpha_0+\alpha_1 2+\alpha_2 2^2 = 0 & & \alpha_0+2\alpha_1+4\alpha_2 = 0 \end{array}$$

Λύνοντας το εύκολο σύστημα που προέκυψε, υπολογίζουμε τις τιμές:

$$\boldsymbol{\alpha_0 = 0\,,\ \ \alpha_1 = 2 \quad \text{και} \quad \alpha_2 = -1}$$

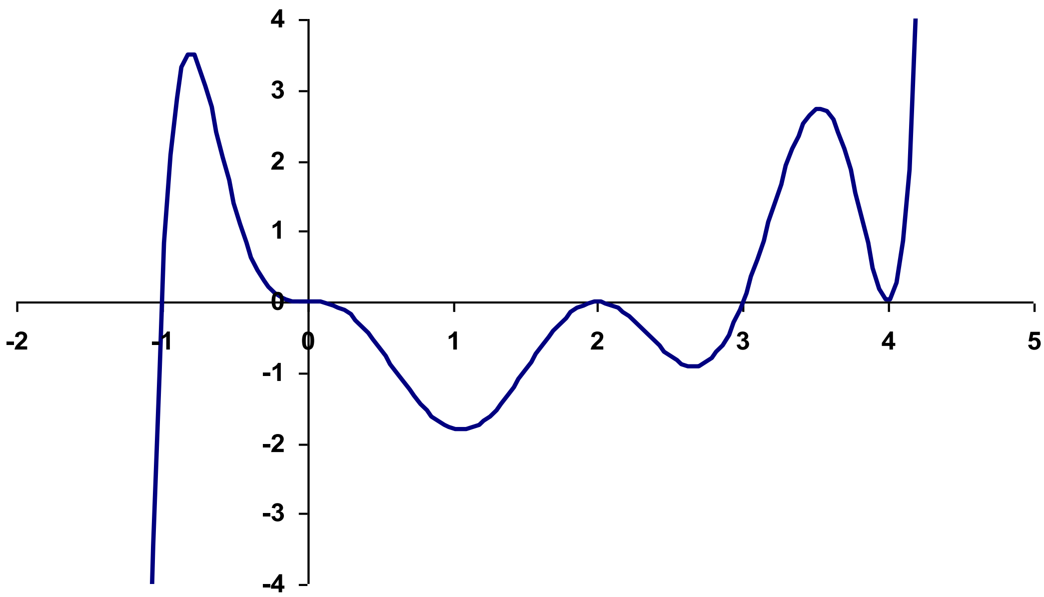
οπότε η π.σ. που ορίζεται από τα δοσμένα σημεία είναι η:

$$\mathbf{y = \pi(x) = -x^2 + 2x}$$

Παράδειγμα 2ο: Εάν το παρακάτω γράφημα προέρχεται από μία πολυωνυμική συνάρτηση που

- ❖ έχει μόνο πραγματικές ρίζες
- ❖ καμιά από τις ρίζες δεν έχει τάξη πολλαπλότητας μεγαλύτερη του τρία
- ❖ ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι ίσος με το 0,05.

να βρεθούν: ο βαθμός της, η τάξη πολλαπλότητας των ριζών της και να γραφεί η ίδια η πολυων. συνάρτηση.



Λύση:

α) Η δοσμένη π.σ. έχει 8 στροφές (και 7 σημεία καμπής). Άρα είναι $9^{ου}$ βαθμού (πράγμα που σημαίνει πως έχει εννέα ρίζες)

β) Οι ρίζες με τον βαθμό πολλαπλότητάς τους είναι οι εξής:

ρ_1 = -1 (απλή), ρ_2 = 0 (τριπλή), ρ_3 = 2 (διπλή),
ρ_4 = 3 (απλή), ρ_5 = 4 (διπλή)
οι οποίες, πράγματι, είναι εννέα.

γ) Η ζητούμενη π.σ. επομένως θα είναι η:

$$\mathbf{y = \pi(x) = 0{,}05(x+1)x^3(x-2)^2(x-3)(x-4)^2}$$ [12]

Παράδειγμα 3^o: Στην ιδιότητα (ix) αναφέρθηκε πως εάν μία π.σ. έχει μία μιγαδική ρίζα, τότε, υποχρεωτικά, θα έχει και την συζυγή της.   Να δοθεί μια πρακτική ερμηνεία.

Αρχικά να εξηγήσουμε το τι θα συνέβαινε αν υπήρχε μία μόνη μιγαδική ρίζα. Θα το αντιμετωπίσουμε στην περίπτωση μιας δευτεροβάθμιας π.σ.. Έστω πως οι ρίζες μιας π.σ. ήταν η ρ_1=μ (πραγματική) και η ρ_2=κ+λi (μιγαδική). Τώρα, την γράφουμε με την μορφή του γινομένου παραγόντων:

$$\pi(x) = (x-\mu)(x-\kappa-\lambda i) = x^2 - \left[\left(\kappa+\mu\right)+\left(\lambda-\mu\right)i\right]x + \kappa\mu$$

Παρατηρούμε πως στην περίπτωση αυτή οδηγούμαστε σε μία π.σ. 2^{ου} βαθμού που έχει και μιγαδικούς συντελεστές, πράγμα που αποκλείστηκε από τον αρχικό ορισμό των πολυωνυμικών συναρτήσεων με πραγματικούς συντελεστές.

Δοκιμάζουμε τώρα την περίπτωση δύο μιγαδικών συζυγών ριζών, $\rho_{1,2} = \kappa \pm \lambda i$.

$$\pi(x) = (x-\kappa-\lambda i)(x-\kappa+\lambda i) = \left(x-\kappa\right)^2 - \left(\lambda i\right)^2 = x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2$$ [13]

Άρα, η ιδιότητα των συζυγών μιγαδικών, το γινόμενό τους να είναι πραγματικός αριθμός, οδηγεί την π.σ. που έχει ρίζες, δύο συζυγείς μιγαδικούς να έχει πραγματικούς συντελεστές.

[12] *Όπου θέσαμε: $(x-0)^3 = x^3$*
[13] *Όπου εκφράσαμε το γινόμενο σαν διαφορά τετραγώνων*

2.2.4 Πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου βαθμού (Ευθεία)

Κάθε π.σ. 1ου βαθμού παριστάνει στο επίπεδο Oxy μία ευθεία. Για το λόγο αυτό ονομάζεται και συχνά εξίσωση της ευθείας. Η μορφή της:

$$\mathbf{y = \pi(x) = a_0 + a_1 x}$$

ή όπως συχνά γράφουμε:

$$\mathbf{y = \pi(x) = \alpha x + \beta} \qquad \text{(A.2)}$$

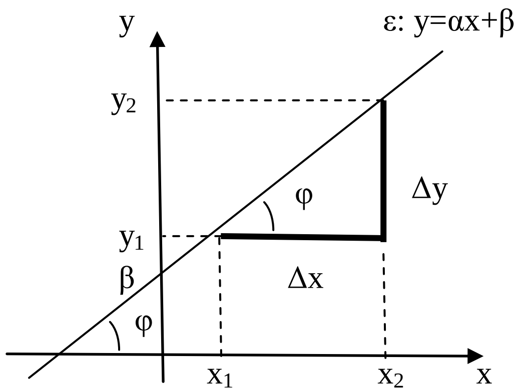
Αντίθετα κάθε δυάδα σημείων του επιπέδου ορίζει μία πρωτοβάθμια π.σ., ορίζει δηλαδή μία δυάδα παραμέτρων a_0 και a_1 (ή α και β).

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται[14] από τα σημεία Σ_1 (x_1,y_1) και Σ_2 (x_2,y_2).

Λύση: Έστω η εξίσωση της ευθείας ε: y = αx+β. Η εξίσωση αυτή πρέπει να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των 2 σημείων που την ορίζουν. Άρα, οδηγούμαστε στις παρακάτω εξισώσεις, που αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους το α και το β:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta &= y_1 \\ \alpha x_2 + \beta &= y_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \beta &= y_1 - \alpha x_1 = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Γεωμετρική ερμηνεία των παραμέτρων α και β.



i) **Του α:** Από τον τύπο υπολογισμού έχουμε:

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varepsilon \phi \phi =$$

= κλίση της ευθείας ε

= συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας

το x μεταβάλλεται κατά Δx=1[15].

---

14 *Είναι γνωστό πως ένα σημείο (x_0,y_0) του επιπέδου Oxy ανήκει στο γράφημα μιας συνάρτησης f(x) όταν οι συντεταγμένες του σημείου αυτού επαληθεύουν τη σχέση y=f(x). Όταν ισχύει δηλαδή:*

$$y_0=f(x_0)$$

Από τα παραπάνω συνάγεται πως η ευθεία ε

- είναι αύξουσα, όταν ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι θετικός,
- είναι φθίνουσα, όταν ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι αρνητικός, ενώ
- είναι παράλληλη με τον άξονα των x (έχει μηδενική κλίση) όταν α=0.

Μία ιδιαίτερη οικογένεια ευθειών αποτελούν οι ευθείες που είναι παράλληλες με τον άξονα των y (κατακόρυφες), των οποίων

- η κλίση δεν ορίζεται (απειρίζεται),
- δεν αποτελούν συναρτήσεις (σε μία τιμή του x αντιστοιχούν άπειρα y),
- έχουν εξίσωση την y=k (όπου το k είναι μία πραγματική σταθερά), και εκφράζουν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου Oxy, των οποίων η συντεταγμένη y είναι ίση με το k.

ii) **Του β:** Εάν στην εξίσωση της ευθείας ε: y=αx+β τεθεί x=0, παίρνουμε y=β. Επομένως το σημείο (0,β) ανήκει στην ευθεία ε, πράγμα που σημαίνει πως το y=β είναι το σημείο του άξονα των y από το οποίο διέρχεται η ευθεία.

Όμοια με τα προηγούμενα, η εξίσωση y=β εκφράζει τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου Oxy, των οποίων η συντεταγμένη x είναι ίση με το k.

2.2.4 Πολυωνυμικές συναρτήσεις μεγαλύτερου βαθμού

1. Πολυωνυμικές συναρτήσεις 2^{ου} βαθμού.

Η αναλυτική μορφή τους είναι:

$$y = \pi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_2(x-\rho_1)(x-\rho_2) \quad (1)$$

όπου ρ_1 και ρ_2 είναι οι 2 ρίζες της π.σ..

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του ορίου, παρ’ όλο που θα την εξετάσουμε διεξοδικότερα σε επόμενο κεφάλαιο. Προς το παρόν θα αντιμετωπίσουμε το όριο με την πιο απλή μορφή του. Για παράδειγμα έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\left[x^3\right] = 3^3 = 27$$

[15] *Πάντα η κλίση μιας ευθείας (όπως και ενός επιπέδου) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που ξεκινάει από τον άξονα των x και καταλήγει στην ευθεία.*

όπου ζητούμε την τιμή της συνάρτησης x^3 όταν το x τείνει στην τιμή 3. Στην περίπτωση αυτή το προφανές όριο είναι το $3^3=27$. Όμοια, έχουμε:

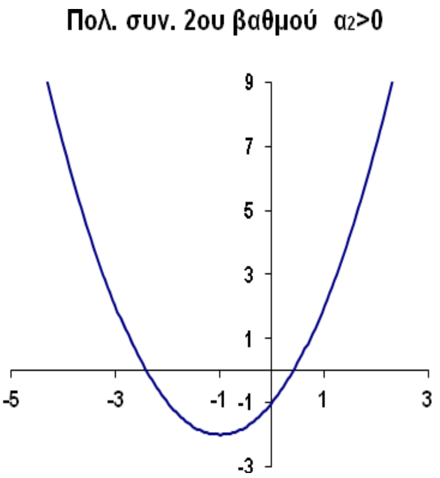
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2\right]=\left(\pm\infty\right)^2=\infty$$

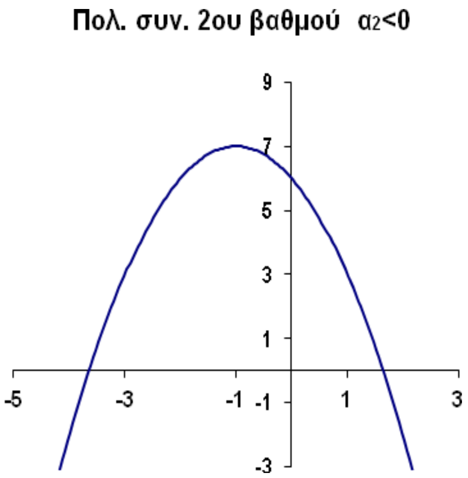
όπου γράφουμε το προφανές: Αν υψώσουμε στο τετράγωνο έναν πολύ μεγάλο αριθμό, αυτός θα γίνει ακόμη μεγαλύτερος. Έχουμε λοιπόν:

Τα όρια της π.σ. (1) στο $\pm\infty$ δίνονται από τη σχέση:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\pi(x)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[a_2x^2\right]=\begin{bmatrix}\infty & \alpha\nu\ \alpha_2>0\\ -\infty & \alpha\nu\ \alpha_2<0\end{bmatrix}$$

Επομένως το γράφημα της π.σ. (1) θα τείνει ταυτόχρονα, στα αριστερά και στα δεξιά του, είτε προς το $+\infty$, εάν $\alpha_2>0$, είτε προς το $-\infty$, εάν $\alpha_2<0$. Η χαρακτηριστική καμπύλη της δευτεροβάθμιας π.σ. λέγεται **Παραβολή**.





Οι δύο ρίζες της δίνονται από την γνωστή σχέση του τριωνύμου:

$$\rho_{1,2}=\frac{-\alpha_1\pm\sqrt{\alpha_1^2-4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}$$

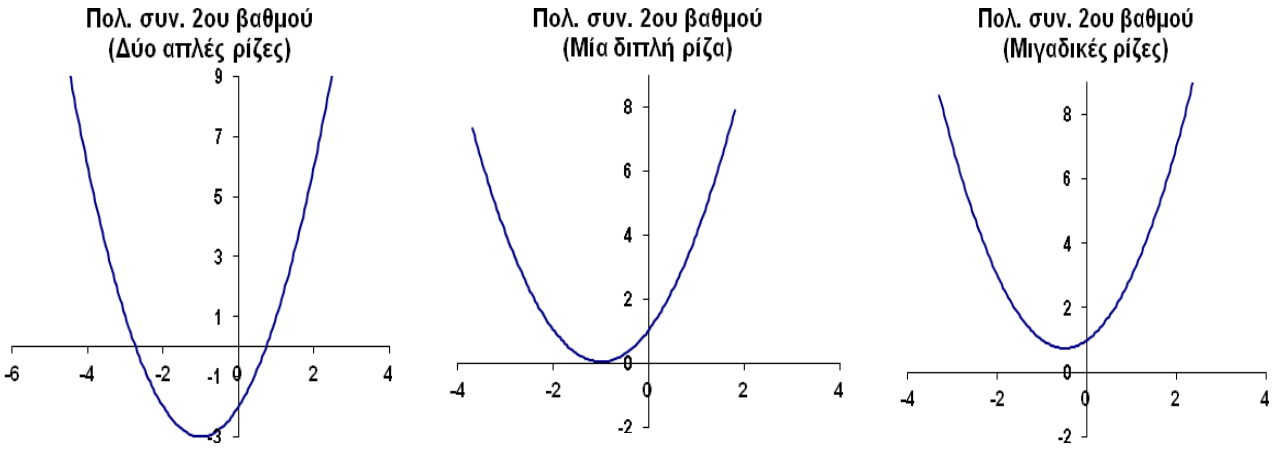
Η ποσότητα $\Delta = \alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0$ λέγεται Διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης. Γίνεται φανερό πως διακρίνουμε τις παρακάτω τρείς περιπτώσεις:

(i) Δ>0, οπότε έχουμε δύο πραγματικές ρίζες: $\rho_1 \neq \rho_2$

(ii) Δ=0, οπότε έχουμε μια διπλή πραγματική ρίζα: $\rho_1 = \rho_2 = -\dfrac{\alpha_1}{2\alpha_2}$

(iii) Δ<0, οπότε έχουμε δύο μιγαδικές συζυγείς ρίζες: $\rho_{1,2} = -\dfrac{\alpha_1}{2\alpha_2} \pm \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha_2} i$

Στη συνέχεια έχουμε τρεις γραφικές παραστάσεις, πάντα για την περίπτωση α_2>0, ανάλογα με το είδος των ριζών, δύα απλές πραγματικές ρίζες, μία διπλή πραγματική και δύο συζυγείς μιγαδικές.



2. Πολυωνυμικές συναρτήσεις 3ου βαθμού.

Η αναλυτική μορφή τους είναι:

$$y = \pi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_3(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3) \quad (2)$$

όπου ρ_1, ρ_2 και ρ_3 είναι οι 3 ρίζες της π.σ..

Τα όρια της π.σ. (2) στο $\pm\infty$ δίνονται από τη σχέση:

$$\lim_{x\to\infty}[\pi(x)] = \lim_{x\to\infty}\left[a_3x^3\right] = \begin{bmatrix} \infty & \alpha\nu\ \alpha_3 > 0 \\ -\infty & \alpha\nu\ \alpha_3 < 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}[\pi(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[a_3x^3\right] = \begin{bmatrix} -\infty & \alpha\nu\ \alpha_3 > 0 \\ +\infty & \alpha\nu\ \alpha_3 < 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως το γράφημα της π.σ. (1) θα τείνει πάντα σε αντίθετες κατευθύνσεις, στα αριστερά και στα δεξιά του. Το γεγονός αυτό, συνδυασμένο με το ότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς, δίνει και μία γραφική ερμηνεία του γεγονότος πως η τριτοβάθμια π.σ. έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Ρίζες της π.σ. 3^{ου} βαθμού:

1) Ως γνωστόν, η πολυωνυμική συνάρτηση (π.σ.) 3^{ου} βαθμού:

$$p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \qquad \text{με} \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in R$$

έχει τρείς ρίζες, εκ των οποίων η μία θα είναι υποχρεωτικά πραγματικός αριθμός. Για να υπολογίσουμε τις τρεις αυτές ρίζες, ορίζουμε τις ποσότητες:

$$\Delta_0 = \beta^2 - 3\alpha\gamma\ , \quad \Delta_1 = 2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma + 27\alpha^2\delta$$

και

$$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_2{}^2 - 4\Delta_0{}^3}}{2}}$$

ενώ υπάρχει και η Διακρίνουσα: $\Delta = \dfrac{4\Delta_0{}^3 - \Delta_2{}^2}{27\alpha^2}$

<u>Διερεύνηση:</u>

α) Εάν Δ=0 τότε η π.σ. έχει μόνο πραγματικές ρίζες, είτε μία απλή και μία διπλή, είτε μία τριπλή! Διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις:

- Εάν $\Delta = 0$ και $\Delta_0 = 0$, τότε έχουμε μία τριπλή ρίζα, την:

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{\beta}{3\alpha}$$

- Εάν $\Delta = 0$ και $\Delta_0 \neq 0$, τότε έχουμε μία διπλή και μία απλή ρίζα, τις:

$$x_1 = x_2 = \frac{9\alpha\delta - \beta\gamma}{2\Delta_0} \quad \text{και} \quad x_1 = \frac{4\alpha\beta\gamma - 9\alpha^2\delta - \beta^3}{\alpha\Delta_0}$$

β) Εάν $\Delta>0$ τότε η π.σ. έχει τρεις πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες, ενώ εάν $\Delta<0$ τότε η π.σ. έχει μία πραγματική ρίζα και δύο συζυγείς μιγαδικές. Οι ρίζες αυτές υπολογίζονται από τον τύπο

$$x_j = -\frac{1}{3}\left(\beta - u_j C + \frac{\Delta_0}{u_j C}\right)$$

όπου:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad u_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta_0 = \beta^2 - 3\alpha\gamma, \quad \Delta_1 = 2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma + 27\alpha^2\delta$$

και

$$C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^{\,2} - 4\Delta_0^{\,3}}}{2}}$$

και όπου η κάθε μία από τις ρίζες αυτές προκύπτει από τις τρεις ποσότητες u_j. Αξίζει να σημειωθεί πως στην ιδιαίτερη περίπτωση που: $\Delta_0 = 0$, τότε η ποσότητα Δ_1 «βγαίνει» από την τετραγωνική ρίζα με το πρόσημό της! Δηλαδή θα έχουμε:

$$\text{Αν} \quad \Delta_0 = 0, \quad C = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^{\,2}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2\Delta_1}{2}} = \sqrt[3]{\Delta_1}$$

2) Υπάρχει όμως και μια ευκολότερη μέθοδος υπολογισμού των ριζών της εξίσωσης:

$$p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \qquad \text{με} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$$

Ο παρακάτω τύπος δίνει την **πραγματική ρίζα** της πολυωνυμικής συνάρτησης 3^{ου} βαθμού:

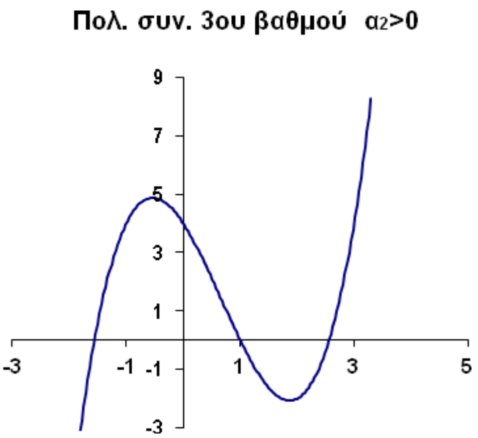
$$x_1=\sqrt[3]{\left(\frac{\beta\gamma}{6\alpha^2}-\frac{\beta^3}{27\alpha^3}-\frac{\delta}{2\alpha}\right)+\sqrt{\left(\frac{\beta\gamma}{6\alpha^2}-\frac{\beta^3}{27\alpha^3}-\frac{\delta}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{3\alpha}-\frac{\beta^2}{9\alpha^2}\right)^3}}\;+$$

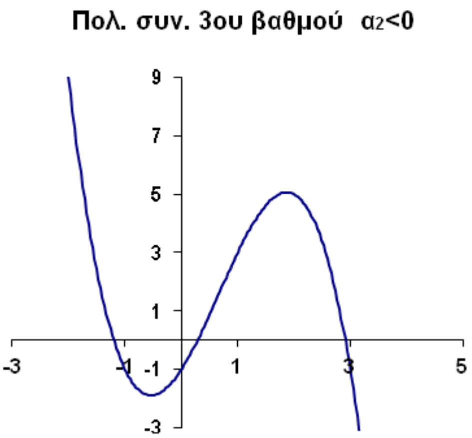
$$+\sqrt[3]{\left(\frac{\beta\gamma}{6\alpha^2}-\frac{\beta^3}{27\alpha^3}-\frac{\delta}{2\alpha}\right)-\sqrt{\left(\frac{\beta\gamma}{6\alpha^2}-\frac{\beta^3}{27\alpha^3}-\frac{\delta}{2\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{3\alpha}-\frac{\beta^2}{9\alpha^2}\right)^3}}-\frac{\beta}{3\alpha}$$

Στη συνέχεια, διαιρούμε την τριτοβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση με τον παράγοντα (x-x_1), υπολογίζοντας το πηλίκο της (τέλειας) διαίρεσης, που είναι ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, από το οποίο προκύπτουν οι άλλες δύο ρίζες x_2 και x_2.

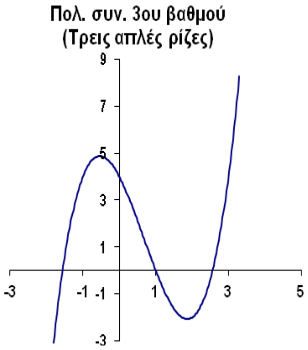
3) Ένας τρίτος τρόπος παρουσιάζεται στο πλαίσιο της Αριθμητικής Ανάλυσης, όπου με μία αριθμητική μέθοδο (π.χ. του Newton) υπολογίζεται προσεγγιστικά (με όση ακρίβεια χρειαζόμαστε) η πραγματική ρίζα x_1 και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία (διαίρεση με τον παράγοντα (x-x_1) κλπ).

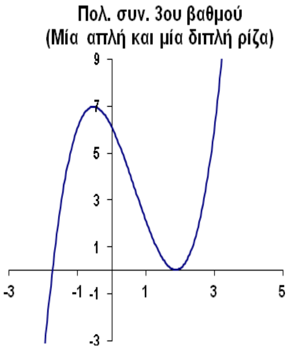
Γραφικές Παραστάσεις.

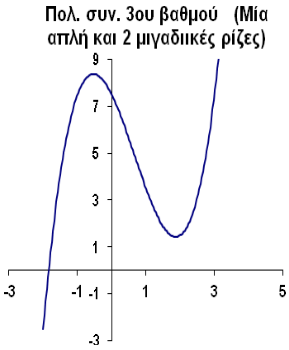


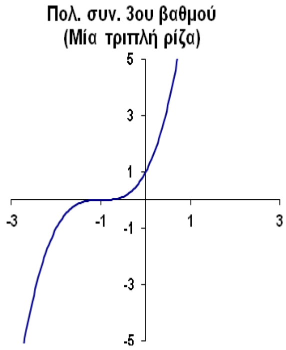


Στη συνέχεια παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις της τριτοβάθμιας π.σ., ανάλογα με το είδος των ριζών της, όταν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι θετικός (α_3>0).









3. Πολυωνυμικές συναρτήσεις 4ου βαθμού.

Η αναλυτική μορφή τους είναι:

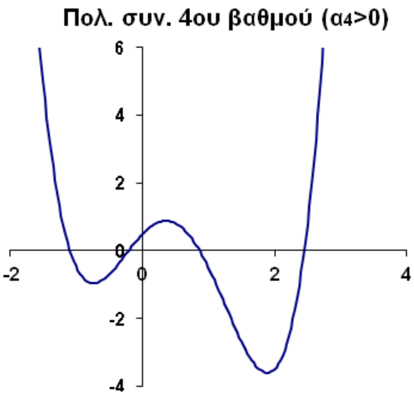
$$y=\pi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4=a_3(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4) \quad (3)$$

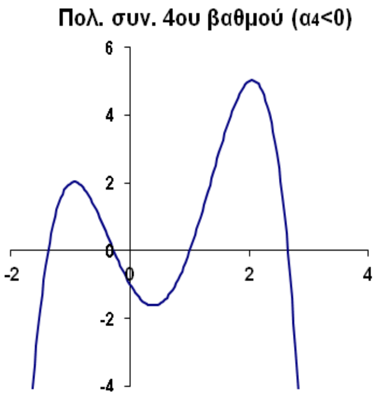
όπου ρ_1, ρ_2, ρ_3 και ρ_4 είναι οι 4 ρίζες της π.σ..

Τα όρια της π.σ. (2) στο $\pm\infty$ δίνονται από τη σχέση:

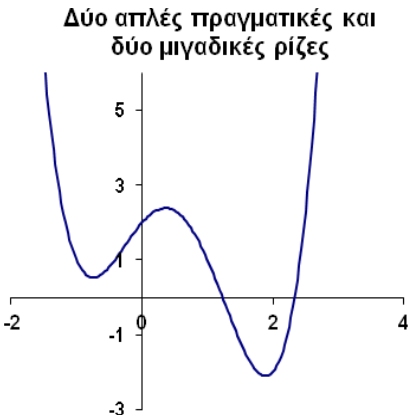
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\pi(x)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[a_4x^4\right]=\left[\begin{array}{l}\infty \quad \alpha\nu\ \alpha_4>0\\ -\infty \quad \alpha\nu\ \alpha_4<0\end{array}\right.$$

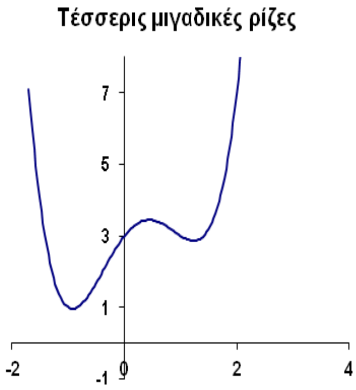
Επομένως το γράφημα της π.σ. (1) θα τείνει ταυτόχρονα, στα αριστερά και στα δεξιά του, είτε προς το $+\infty$, εάν $\alpha_2>0$, είτε προς το $-\infty$, εάν $\alpha_2<0$.

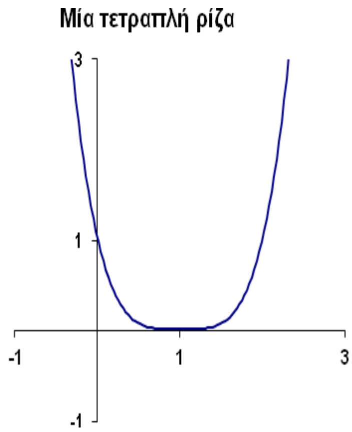




Στη συνέχεια παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις της τεταρτοβάθμιας π.σ., ανάλογα με το είδος των ριζών της, όταν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι θετικός ($\alpha_4>0$).







Υπολογισμός των ριζών της πολυωνυμικής συνάρτησης 4^ου^ βαθμού.

Η π.σ. 4^ου^ βαθμού είναι η τελευταία για την οποία υπάρχει θεωρητική μέθοδος υπολογισμού των τεσσάρων ριζών της, ανάλογη με αυτήν του τριτοβάθμιου πολυωνύμου. Έστω η εξίσωση:

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0$$

Ορίζουμε τις παραμέτρους :

$$A = \gamma^2 - 3\beta\delta + 12\alpha\varepsilon$$

$$B = 2\gamma^3 - 9\beta\gamma\delta + 27\alpha\delta^2 + 27\beta^2\varepsilon - 72\alpha\gamma\varepsilon$$

$$C = -4A^3 + B^2$$

$$D = -\frac{\beta^2}{\alpha^3} + \frac{4\beta\gamma}{\alpha^2} - \frac{8\delta}{a\alpha}$$

$$E = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{2\gamma}{3\alpha}$$

$$F = \frac{A\sqrt[3]{2}}{3\alpha\sqrt[3]{B+\sqrt{C}}} + \frac{\sqrt[3]{B+\sqrt{C}}}{3\alpha\sqrt[3]{2}}$$

οπότε οι τέσσερις ρίζες της π.σ. (1) δίνονται από τον τύπο:

$$\boxed{\rho_{1,2,3,4} = -\frac{\beta}{4\varepsilon} + \frac{e_1}{2}\sqrt{F+E} + \frac{e_2}{2}\sqrt{-F+2E+\frac{e_1 D}{4\sqrt{F+E}}}}$$

όπου $e_1 = \pm 1$ και $e_2 = \pm 1$. Έτσι οι τέσσερις ρίζες προκύπτουν από τους τέσσερις συνδυασμούς των τιμών των e_1 και e_2.