ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 1

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1 Κεφάλαιο 1^{o}: Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας. Πίνακες, Ορίζουσες. και Γραμμικά Συστήματα.

1.1 Γενικά.

Συχνά θέτω στους φοιτητές του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών (ΤΕ) την ερώτηση:

«Αν κάποιος από εσάς μου δήλωνε την αντιπάθειά του στο μάθημα των Μαθηματικών και ότι θα έκανε μια μεγάλη προσπάθεια να ασχοληθεί συστηματικά με ένα μόνο κεφάλαιο των Μαθηματικών, και μου έδινε την δυνατότητα να επιλέξω εγώ αυτό το κεφάλαιο, τι νομίζετε πως θα απαντούσα;»

Οι περισσότεροι φοιτητές επιλέγουν το κεφάλαιο των Παραγώγων. Κάποιοι άλλοι αυτό των ολοκληρωμάτων. Μερικοί, παλαιότεροι, αναφέρουν τις Διαφορικές Εξισώσεις…

Η δική μου άποψη γέρνει προς τη Γραμμική Άλγεβρα, και ειδικότερα το τμήμα της Γραμμικής Άλγεβρας που εξετάζει τους Πίνακες, τις Ορίζουσες, τα Γραμμικά Συστήματα και τους Γραμμικούς Μετασχηματισμούς, έτσι ώστε να γίνουν κατανοητές οι έννοιες των Ιδιοτιμών και των Ιδιοδιανυσμάτων ενός τετραγωνικού πίνακα.

Η εμπειρία πολλών χρόνων διδασκαλίας των Μαθηματικών σε αντίστοιχα τμήματα των ΤΕΙ έδειξε στους συγγραφείς πως οι φοιτητές τους, με το χαμηλό θεωρητικό υπόβαθρο στα Μαθηματικά, απαιτούν από τον καθηγητή τους το να απεκδυθεί τον μανδύα του Μαθηματικού και να προσεγγίσει αυτόν του Μηχανικού!

Έτσι, η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει, πιστεύουμε, να τους διδάσκει το πώς και το γιατί των εννοιών αυτών, μακριά από αξιωματικές θεμελιώσεις, χωρίς πολλά θεωρήματα και αποδείξεις, αλλά πολλές Γεωμετρικές και Φυσικές ερμηνείες, ούτως ώστε να αντιληφθούν σε όσο μεγαλύτερο βάθος τα αντικείμενα αυτά.

Για το λόγο αυτό, τέλος, επιτρέπουμε στον εαυτό μας την χρήση κάποιων εννοιών με τρόπο πρωθύστερο. Για παράδειγμα, στο κεφάλαιο των πινάκων αναφερόμαστε και στα γραμμικά συστήματα, τα οποία ορίζονται, ολοκληρωμένα, στην επόμενη παράγραφο, χρησιμοποιώντας την γνώση των φοιτητών μας στο θέμα των γραμμικών συστημάτων, τα οποία έχουν ήδη αντιμετωπίσει.

Γνωρίζουμε πως επιχειρούμε μια προσπάθεια που ακροβατεί σε τεντωμένο σχοινί και κινδυνεύει να γκρεμιστεί είτε προς τη μεριά του χοντροκομμένου πρακτικισμού, είτε προς αυτήν της προσέγγισης των εννοιών αυτών με την αποστήθιση και την «μεθοδολογία» που είναι αμφότερες ιδιαίτερα προσφιλείς στους φοιτητές μας. Θέλουμε να πιστεύουμε πως προσπαθήσαμε να βρούμε μια χρυσή τομή, η οποία να οδηγεί τον αναγνώστη σε μια ουσιαστική κατανόηση ενός τεράστιου επιστημονικού πεδίου, έτσι ώστε τα εργαλεία με τα οποία θα τον εξοπλίσουμε να τα χρησιμοποιήσει όσο πιο συνειδητά γίνεται.

Ελπίζουμε το τελικό αποτέλεσμα να μας δικαιώσει…

1.2 Ορίζουσες

1.2.1 Δυο λόγια για τους Πίνακες

Μία δομή μχν στοιχείων, τα οποία είναι διατεταγμένα σε μ σειρές και ν στήλες, ονομάζεται πίνακας μχν. Έστω λοιπόν ο πίνακας Α. Το τυχαίο στοιχείο του Α συμβολίζεται με το $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$, και είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην i γραμμή και στην j στήλη.[1]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} = [\alpha_{ij}] \quad \text{όπου} \quad i = 1,2,\ldots,\mu \quad \text{και} \quad j = 1,2,\ldots,\nu$$

Ο πίνακας Α λέγεται και πίνακας νχμ (ν επί μ), ενώ αυτή η έκφραση ορίζει τη διάσταση ενός πίνακα. Για παράδειγμα ένας πίνακας με διάσταση 3 επί 4 έχει τρεις γραμμές και 4 στήλες.

Επομένως, το στοιχείο α_{35} βρίσκεται στην 3η γραμμή και στην 5η στήλη. Για τη συνέχεια, θεωρούμε ότι τα στοιχεία ενός πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί (σε αντίθεση με την περίπτωση όπου τα στοιχεία ενός πίνακα ανήκουν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, στο σύνολο των πολυωνυμικών ή των παραγωγίσιμων συναρτήσεων κ.λ.π.).

α) Πίνακας-στήλη και πίνακας-γραμμή.

Ένας πίνακας μx1 λέγεται «**πίνακας στήλη**» με μ γραμμές και μία στήλη. Όμοια ένας πίνακας 1xν λέγεται **«πίνακας γραμμή»** με μία γραμμή και ν στήλες:

[1] *Ακριβώς αντίστοιχος είναι και ο τρόπος αναγραφής του αριθμού δωματίου σε ένα ξενοδοχείο, όπου το 3-14 σημαίνει τρίτος όροφος (γραμμή) και 14 δωμάτιο (στήλη)!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{14} \end{bmatrix}$$

β) Τετραγωνικός πίνακας και οι διαγώνιοί του.

Ένας πίνακας νxν (όπου δηλαδή το πλήθος των γραμμών –ν- ισούται με το πλήθος των στηλών), λέγεται **τετραγωνικός**.

Η διαγώνιος ενός τετραγωνικού πίνακα που ξεκινά από το στοιχείο α_{11} και τελειώνει στο στοιχείο $\alpha_{\nu\nu}$, λέγεται **κύρια διαγώνιος** (τα στοιχεία της: α_{ii} , i=1,2,.., ν).

Όμοια, η διαγώνιος ενός τετραγωνικού πίνακα που ξεκινά από το στοιχείο $\alpha_{\nu 1}$ και τελειώνει στο στοιχείο $\alpha_{1\nu}$, λέγεται **δευτερεύουσα διαγώνιος.**

Κύρια διαγώνιος Δευτερεύουσα διαγώνιος

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

γ) Διαγώνιος Πίνακας.

Ένας τετραγωνικός πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία, εκτός από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου, είναι ίσα με το μηδέν, λέγεται διαγώνιος πίνακας.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

δ) Τριγωνικός πίνακας ονομάζεται ένας πίνακας τετραγωνικός του οποίου τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω ή κάτω από την κύρια διαγώνιό του είναι όλα μηδενικά.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \mathbf{0} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 1} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Κάτω τριγωνικός πίνακας Άνω τριγωνικός πίνακας

ε) Ανάστροφος Πίνακας. Έστω, τέλος, ο πίνακας Α (μxν). Ο πίνακας (νxμ) στον οποίο οι στήλες του Α έχουν γίνει σειρές (κι επομένως οι σειρές θα γίνουν στήλες), λέγεται ανάστροφος του Α και συμβολίζεται με το A^T.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^T = B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1\mu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \dots & \beta_{\nu\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{\mu 1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{\mu 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1\nu} & \alpha_{2\nu} & \dots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Σαν παράδειγμα έχουμε τον Α και τον A^T [2] :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2.2 Ορίζουσα ενός τετραγωνικού Πίνακα.

(Η ανάγνωση των 2 επομένων (i-ii) παραγράφων μπορεί να παραλειφθεί, χωρίς ιδιαίτερες επιπτώσεις για τη συνέχεια)

i) Η έννοια των μεταθέσεων. Έστω τα ν στοιχεία α_α, α_2, …, α_ν (ή όπως συχνά γράφουμε α_j, j=1,2,..,ν). Η τοποθέτησή τους σε μια σειρά λέγεται μετάθεση των ν αυτών στοιχείων. Το πλήθος όλων των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν αυτά τα ν στοιχεία να μπουν σε σειρά λέγεται «Μεταθέσεις των ν στοιχείων». Αποδεικνύεται (εύκολα) πως το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων είναι ίσο με το ν! (όπου ν!=1.2.3…ν, ενώ δεχόμαστε εξ ορισμού πως 0!=1). Δηλαδή:

Μεταθέσεις των ν στοιχείων = M_ν = ν!

Εάν θεωρήσουμε την μετάθεση α_α, α_2, …, αν σαν 1^η μετάθεση, κάθε μετάθεση που προκύπτει με άρτιο πλήθος αμοιβαίων αντιμεταθέσεων στοιχείων λέγεται άρτια μετάθεση. Σε αντίθετη περίπτωση, κάθε μετάθεση που προκύπτει από την αρχική με περιττό πλήθος αμοιβαίων αντιμεταθέσεων στοιχείων λέγεται περιττή μετάθεση.

---

[2] *Πολύ συχνά κάποιος που πρωτοασχολείται με τις έννοιες αυτές μπερδεύει τον Ανάστροφο πίνακα με τον αντίστροφο (τον οποίο θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο). Πρόκειται για δύο, απόλυτα διαφορετικές έννοιες. Άλλωστε ο υπολογισμός του αντιστρόφου πίνακα είναι πολύ πιο πολύπλοκος από τον άμεσο υπολογισμό του ανάστροφου.*

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το πλήθος των μεταθέσεων των στοιχείων 1, 2, 3 και 4, και να γραφούν όλες τους, διαχωρισμένες σε περιττές και άρτιες.

Λύση:
Το ζητούμενο πλήθος των μεταθέσεων των τεσσάρων αυτών αριθμών δίνεται από τον τύπο: $M_4 = 4! = 1.2.3.4 = 24$

Άρτιες μεταθέσεις		Περιττές μεταθέσεις	
$1^η$: 1, 2, 3, 4	$7^η$: 3, 1, 2, 4	$13^η$: 1, 2, 4, 3	$19^η$: 3, 2, 1, 4
$2^η$: 1, 3, 4, 2	$8^η$: 3, 2, 4, 1	$14^η$: 1, 4, 3, 2	$20^η$: 3, 1, 4, 2
$3^η$: 1, 4, 2, 3	$9^η$: 3, 4, 1, 2	$15^η$: 1, 3, 2, 4	$21^η$: 3, 4, 2, 1
$4^η$: 2, 1, 4, 3	$12^η$: 4, 3, 2, 1	$16^η$: 2, 1, 3, 4	$22^η$: 4, 2, 3, 1
$5^η$: 2, 4, 3, 1	$11^η$: 4, 2, 1, 3	$17^η$: 2, 3, 4, 1	$23^η$: 4, 3, 1, 2
$6^η$: 2, 3, 1, 4	$12^η$: 4, 1, 3, 2	$18^η$: 2, 4, 1, 3	$24^η$: 4, 1, 2, 3

Όπου, για παράδειγμα η $12^η$ μετάθεση (4,3,2,1) είναι άρτια, διότι προκύπτει από την αμοιβαία αντιμετάθεση του 1 με το 4 και του 2 με το 3 (2 αντιμεταθέσεις). Όμοια, η $22^η$ μετάθεση (4,2,3,1) είναι περιττή, διότι προκύπτει από την αμοιβαία αντιμετάθεση του 1 με το 4 (1 αντιμετάθεση).

ii) Ορισμός της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα. Έστω ο πίνακας $A=\{\alpha_{ij}\}$, διάστασης (νxν). Η ορίζουσά του είναι το άθροισμα όλων των γινομένων της μορφής:

$$(-1)^{\varepsilon} a_{1\mu_1} a_{2\mu_2} a_{3\mu_3} ... a_{\nu\mu_\nu}$$

όπου μ_1, μ_2, …, μ_ν είναι μία μετάθεση των δεικτών στήλης του πίνακα (1, 2, 3, …, ν), ενώ ο εκθέτης ε είναι ίσος με το 1 εάν η μετάθεση είναι περιττής τάξης και με το 2 εάν πρόκειται για άρτια μετάθεση.

Επειδή αυτός ο τρόπος υπολογισμού παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες, ειδικά εάν το ν είναι μεγαλύτερο του 5, υπάρχουν και άλλες μέθοδοι για τον υπολογισμό αυτό, οι οποίοι περιγράφονται στη συνέχεια.

1.2.3 Ορίζουσα 2x2

Η ορίζουσα $\det\{A\}$[3] ενός τετραγωνικού πίνακα Α (2x2) ορίζεται από την πράξη:

$$\det\{A\} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

[3] Από τον όρο Determinant.

Παράδειγμα:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} 2(-4)-3(-5) = -8+15 = 7$$

Ιδιότητες: Οι παρακάτω ιδιότητες αξίζει να προσεχθούν γιατί ισχύουν γενικά (για την ορίζουσα νxν). Η απόδειξή τους για την ορίζουσα 2x2 είναι απλούστατη. Η πλήρης απόδειξη παραλείπεται μια και θεωρούμε πως ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτού του συγγράμματος.

i) Η αντιμετάθεση 2 γραμμών (ή 2 στηλών) αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας.

ii) Εάν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) επί τη σταθερή τ, τότε και η τιμή της ορίζουσας πολλαπλασιάζεται επί τ.

iii) Εάν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία της ορίζουσας με τη σταθερή τ, τότε η τιμή της ορίζουσας πολλαπλασιάζεται επί $τ^2$ (η ορίζουσα νxν πολλαπλασιάζεται επί το $τ^ν$).

iv) Εάν από τα στοιχεία μιας γραμμής αφαιρέσουμε (ή προσθέσουμε) τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής, πολλαπλασιασμένα επί μία σταθερή τ, τότε η τιμή της ορίζουσας δεν μεταβάλλεται.

Ας δείξουμε την $4^η$ ιδιότητα:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma-\tau\alpha & \delta-\tau\beta \end{vmatrix} = \alpha\delta-\tau\alpha\beta-\beta\gamma+\tau\alpha\beta = \alpha\delta-\beta\gamma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα αυτή (η iv) είναι σημαντικότατη. Ορίζει μια «επιτρεπτή γραμμοπράξη» η οποία μεταβάλλει τη μορφή μιας ορίζουσας, χωρίς να μεταβάλλει την τιμή της. Με τη γραμμοπράξη αυτή μετασχηματίζουμε μιαν ορίζουσα, οδηγώντας την σε πιο ευκολοδούλευτες μορφές, διατηρώντας την τιμή της.

Ταυτόχρονα επιτρέπει την απόδειξη αρκετών άλλων ιδιοτήτων. Υπάρχουν σημαντικότατες ιδιότητες των οριζουσών οι οποίες συνδέονται με αντίστοιχες ιδιότητες ή πράξεις πινάκων και αυτές θα αναφερθούν στο επόμενο κεφάλαιο των πινάκων.[4]

---

[4] Ας αναφέρουμε σαν παράδειγμα τις:

i) Η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων Α και Β ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των δύο πινάκων.

det[AB] = det[A]det[B]

1.2.4 Ορίζουσα νxν

Ορισμοί:

Ορισμός 1. Η ορίζουσα που απομένει από τη διαγραφή της i-γραμμής και της j-στήλης την ονομάζεται **ελάσσονα ορίζουσα** που αντιστοιχεί στο στοιχείο α_{ij} και συμβολίζεται με το M_{ij}.

Έστω ο A

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \alpha_{1j-1} & \alpha_{1j} & \alpha_{1j+1} & \cdot & \alpha_{1\nu} \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ \alpha_{i-1,1} & \cdot & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j} & \alpha_{i-1,j+1} & \cdot & \alpha_{i-1,\nu} \\ \alpha_{i,1} & \cdot & \alpha_{i,j-1} & \alpha_{i,j} & \alpha_{i,j+1} & \cdot & \alpha_{i,\nu} \\ \alpha_{i+1,1} & \cdot & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i+1,j} & \alpha_{i+1,j+1} & \cdot & \alpha_{i+1,\nu} \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \cdot & \alpha_{\nu,j-1} & \alpha_{\nu,j} & \alpha_{\nu,j+1} & \cdot & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

---

ii) Η ορίζουσα του αντιστρόφου πίνακα ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι ίση με το αντίστροφο της ορίζουσας του A. Δηλαδή:

$$\det[A^{-1}] = \frac{1}{\det[A]}$$

Όσοι γνωρίζουν το γινόμενο δύο πινάκων μπορούν να δείξουν την ιδιότητα i). Έστω οι πίνακες A και B καθώς και το γινόμενό τους:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} \qquad AB = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{vmatrix}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την ορίζουσα του γινομένου AB και με απλές πράξεις (…) καταλήγουμε εύκολα:

$$\begin{aligned} \det[AB] &= [\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21}][\alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22}] - [\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21}][\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22}] \\ &= \ldots = [\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}][\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}] = \det[A]\det[B] \end{aligned}$$

Το σημαντικό τελικό συμπέρασμα που βγαίνει από τις τελευταίες δύο ιδιότητες είναι πως **ο πολλαπλασιασμός των οριζουσών ορίζεται ακριβώς όμοια με αυτό των τετραγωνικών πινάκων.**

Τότε η ελάσσων ορίζουσα του Α που αντιστοιχεί στο στοιχείο α_{ij} είναι η:

Τότε το
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \alpha_{1j-1} & \alpha_{1j+1} & \alpha_{1\nu} \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i-1,1} & \cdot & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j+1} & \alpha_{i-1,\nu} \\ \alpha_{i+1,1} & \cdot & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i+1,j+1} & \alpha_{i+1,\nu} \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \cdot & \alpha_{\nu,j-1} & \alpha_{\nu,j+1} & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Ορισμός 2. Αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου α_{ij} ονομάζεται το γινόμενο της ελάσσονος ορίζουσας M_{ij}, του στοιχείου α_{ij}, επί την τιμή $(-1)^{i+j}$, το οποίο ουσιαστικά προσδίδει ένα πρόσημο στην ελάσσονα ορίζουσα, το οποίο εξαρτάται από τους δείκτες i και j. Το **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου α_{ij} συμβολίζεται με το A_{ij} και δίνεται από τη σχέση:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \alpha_{1j-1} & \alpha_{1j+1} & \cdot & \alpha_{1\nu} \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ \alpha_{i-1,1} & \cdot & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j+1} & \cdot & \alpha_{i-1,\nu} \\ \alpha_{i+1,1} & \cdot & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i+1,j+1} & \cdot & \alpha_{i+1,\nu} \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \cdot & \alpha_{i\nu,j-1} & \alpha_{\nu,j+1} & \cdot & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Ορισμός 3. Η τιμή μιας τετραγωνικής ορίζουσας νxν δίνεται από το άθροισμα των γινομένων όλων των στοιχείων μιας γραμμής τους (ή μιας στήλης) με το αντίστοιχο αλγεβρικό συμπλήρωμά τους. Τότε λέμε πως αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της εν λόγω γραμμής (ή στήλης).

Δηλαδή:

$$\left|a_{ij}\right| = \det\{A\} = \alpha_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + \alpha_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + \ldots + \alpha_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + \ldots + a_{1\nu}(-1)^{1+\nu}M_{1\nu} =$$

$$=\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}=$$ (ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής[5])

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{21}(-1)^{2+1}M_{21}+...+a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}+...a_{\nu 1}(-1)^{\nu+1}M_{\nu 1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}=$$ (ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης)

$$=a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}+a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2}+...+a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}+...+a_{i\nu}(-1)^{i+\nu}M_{i\nu}=$$

$$=\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{ij}(-1)^{i+j}Mij=$$ (ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της i-γραμμής)

όπου την 1η φορά αναπτύξαμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής (α_{11}, α_{12}, …, α_{1j}, …, $\alpha_{1\nu}$), τη 2η φορά αναπτύξαμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης (α_{11}, α_{21}, …, α_{j1}, …, $\alpha_{\nu 1}$) και την 3η φορά αναπτύξαμε την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της i-γραμμής (α_{i1}, α_{i2}, …, α_{ij}, …, $\alpha_{i\nu}$), ενώ ο εκθέτης του (-1) είναι το άθροισμα των δεικτών της εκάστοτε ελάσσονος ορίζουσας.

Γίνεται φανερό πως αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς τη γραμμή ή τη στήλη που περιέχει τα περισσότερα μηδενικά, έτσι ώστε να κάνουμε λιγότερες πράξεις.

Παραδείγματα υπολογισμού ορίζουσας:

1ο) Να υπολογισθεί το ανάπτυγμα της ορίζουσας ενός πίνακα A, διάστασης (3x3), στην γενική του μορφή, αναλύοντάς την ως προς τα στοιχεία της 2ης γραμμής του.

$$\mathbf{det[A]=det\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{bmatrix}=(-1)^{2+1}\alpha_{21}\begin{vmatrix}\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\alpha_{22}\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{13}\\\alpha_{31}&\alpha_{33}\end{vmatrix}+}$$

$$\mathbf{+(-1)^{2+3}\alpha_{23}\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}\end{vmatrix}=}$$

$$\mathbf{=-\alpha_{21}(\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{32})+\alpha_{22}(\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31})-\alpha_{23}(\alpha_{11}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{31})}$$

[5] Συμβολισμός του αθροίσματος των ποσοτήτων A_j: $A_1+A_2+\ldots+A_{\nu-1}+A_\nu=\sum_{j=1}^{\nu}A_j$

2°) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$:

Λύση: Θα αναπτύξουμε την αρχική ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της $3^{ης}$ γραμμής, η οποία έχει τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία, γεγονός που μειώνει το πλήθος των πράξεων που απαιτούνται.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 * \left[1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right] = 2\left[1(9-2) - 2(12-1) + 1(8-3)\right] = -20$$

1.2.5 Η μέθοδος του Sarrus

<u>Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται (δυστυχώς) μόνο στην περίπτωση της ορίζουσας (3x3).</u> Επαναλαμβάνουμε δεξιότερα της ορίζουσας τις πρώτες δύο στήλες, οπότε ορίζονται 3 κύριες διαγώνιες (από επάνω αριστερά έως κάτω δεξιά) και τρεις δευτερεύουσες (από κάτω αριστερά προς επάνω δεξιά), όλες των τριών στοιχείων. Αθροίζουμε τα γινόμενα των κυρίων διαγωνίων και αφαιρούμε από αυτά το γινόμενο των δευτερευουσών διαγωνίων. Ας δούμε στο παράδειγμα:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{array}\right|$$

= 1*1*3 + 2*2*2 + 4*3*1 -
-2*1*4 - 1*2*1 - 3*3*2 = 31

Άσκηση: Να αποδείξετε πως ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

(i) $\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -5$

$$\text{(ii) det}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 19$$

$$\text{(iii) det}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

1.2.6 Ιδιότητες των Οριζουσών

Οι ιδιότητες που αναφέρθηκαν στην παράγραφο της ορίζουσας 2x2, ισχύουν και για τις ορίζουσες νxν. Αξίζει να αναφέρουμε τέσσερις ακόμη ιδιότητες:

1η) Μία ορίζουσα της οποίας όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω ή κάτω από την κύρια διαγώνιό της[6] είναι μηδέν, λέγεται τριγωνική. Η τιμή της ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου της: (Η απόδειξη γίνεται εύκολα εάν αναπτύξουμε την κάθε ορίζουσα που θα προκύψει κατά την ανάπτυξη, ως προς τη στήλη (ή τη γραμμή) με τα περισσότερα μηδενικά).

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{vmatrix} \mathbf{= 2*4*(-5)*3 = -120}$$

<u>Όμοια,</u> εάν μία ορίζουσα Α=$\{\alpha_{ij}\}$ έχει όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω ή κάτω από τη δευτερεύουσα διαγώνιό της, ίσα με το μηδέν, τότε η τιμή της ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου της.

2η) Μία ορίζουσα, της οποίας όλα τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) είναι ίσα με το μηδέν, ισούται με το μηδέν (για να το αποδείξουμε, αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την εν λόγω γραμμή (ή στήλη)).

3η) Μια ορίζουσα, της οποίας τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) είναι ανάλογα με τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (ή στήλης) είναι ίση με το μηδέν.

---

[6] Ας ξαναπούμε πως κύρια ονομάζεται η διαγώνιος που αποτελείται από τα στοιχεία α_{11}, α_{22}, …, $\alpha_{\nu\nu}$ (η οποία ξεκινά από άνω αριστερά και τελειώνει κάτω δεξιά), σε αντίθεση με τη δευτερεύουσα διαγώνιο που αποτελείται από τα στοιχεία $\alpha_{\nu1}$, $\alpha_{(\nu-1)2}$, …, $\alpha_{1\nu}$ (η οποία ξεκινά από κάτω αριστερά και τελειώνει άνω δεξιά)

4$^{\eta}$) Μια ορίζουσα της οποίας τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων άλλων γραμμών (ή στηλών), είναι ίση με το μηδέν.

Παρατηρήσεις:

1$^{\eta}$) Η 3$^{\eta}$ ιδιότητα λέει πως η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

είναι ίση με το μηδέν. Πράγματι, εάν από τη 2$^{\eta}$ γραμμή αφαιρέσουμε τα στοιχεία της 1$^{\eta\varsigma}$, πολλαπλασιασμένα με

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

είναι ίση με το μηδέν, σύμφωνα με την ιδιότητα 2. Είναι προφανές πως εάν δύο γραμμές (ή στήλες) είναι ίσες (έχουν δηλαδή τα στοιχεία τους ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας το 1), τότε η ορίζουσα είναι ίση με το μηδέν.

2$^{\eta}$) Η 4$^{\eta}$ ιδιότητα είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα γενίκευση της 3$^{\eta\varsigma}$. Ο ορισμός της γραμμικής εξάρτησης λέει:

Σε μία ορίζουσα (νxν) [εδώ ας πάρουμε σαν παράδειγμα την περίπτωση (4x4)] **οι γραμμές** (ή οι στήλες) **είναι γραμμικά εξαρτημένες, όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ και μ για τους οποίους ισχύει η σχέση:**

$$\boxed{\mathbf{4^{\eta} = \kappa * 1^{\eta} + \lambda * 2^{\eta} + \mu * 3^{\eta}}}$$

όπου ο όρος 1$^{\eta}$ αφορά στην 1$^{\eta}$ γραμμή (ή στήλη). Η ορισμός αυτός μπορεί να εκφραστεί και υπό τη μορφή**:**

Σε μία ορίζουσα (νxν) [εδώ πάντα (4x4)] **οι γραμμές** (ή οι στήλες) **είναι γραμμικά εξαρτημένες, όταν η σχέση:**

$$\boxed{\mathbf{\kappa * 1^{\eta} + \lambda * 2^{\eta} + \mu * 3^{\eta} + \nu * 4^{\eta} = 0^{\eta}}}$$

ισχύει μόνον όταν οι πραγματικοί κ = λ = μ = ν = 0, ενώ το **0$^{\eta}$** του 2^{ου} μέλους της ισότητας συμβολίζει την μηδενική γραμμή (μία γραμμή με τέσσερα μηδενικά).

Παράδειγμα: Οι παρακάτω ορίζουσες είναι ίσες με το μηδέν

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 15 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \mathrm{Det}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

διότι, η μεν πρώτη έχει την 2^{η} γραμμή ανάλογη της $1^{\eta\varsigma}$ (επί 5), ενώ στη δεύτερη η τρίτη γραμμή είναι το άθροισμα της δεύτερης με το διπλάσιο της πρώτης (γραμμική εξάρτηση).

Άσκηση: Γράψτε έναν πίνακα (5x5) του οποίου τα στοιχεία να μην είναι ίσα μεταξύ τους (άρα, και να μην είναι μηδενικά), αλλά η ορίζουσά του να είναι ίση με το μηδέν.

1.2.7 Υπολογισμός της ορίζουσας με τη μέθοδο του τριγωνισμού

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μιαν άλλη μέθοδο υπολογισμού της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα Α, η οποία είναι ταχύτερη από αυτήν της ανάπτυξης μιας ορίζουσας νxν σε ν ορίζουσες (ν-1)x(ν-1) κ.λ.π., ειδικά όταν η διάσταση ν είναι μεγαλύτερη του 4.

Η βασική ιδέα στηρίζεται στην ιδιότητα των τριγωνικών οριζουσών, η τιμή των οποίων δίνεται από το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου. Άρα, χρησιμοποιώντας την γραμμοπράξη (iv), μετατρέπουμε μια ορίζουσα σε τριγωνική, χωρίς να μεταβάλλεται η τιμή της.

Μηδενίζουμε λοιπόν ένα στοιχείο κάποιας γραμμής με τη βοήθεια του αντίστοιχου στοιχείου κάποιας άλλης γραμμής. Έτσι, εάν για παράδειγμα θέλουμε να μηδενίσουμε το στοιχείο α_{21} με τη βοήθεια του α_{11}, πολλαπλασιάζουμε την 1^{η} γραμμή επί το κλάσμα $(\alpha_{21}/\alpha_{11})$ και την αφαιρούμε από την 2^{η} γραμμή.

$\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$

α_{11}	α_{12}	α_{13}
α_{21}	α_{22}	α_{23}
α_{31}	α_{32}	α_{33}

α_{11}	α_{12}	α_{13}
0	$\alpha_{22}-\alpha_{12}(\alpha_{21}/\alpha_{11})$	$\alpha_{23}-\alpha_{13}(\alpha_{21}/\alpha_{11})$

Προφανώς, μηδενίζουμε και το α_{31} με τη βοήθεια του στοιχείου α_{11} (πολλαπλασιάζοντας την 1^{η} γραμμή με το $(\alpha_{31}/\alpha_{11})$) και αφαιρώντας από την 3^{η} γραμμή.

Προσοχή! Βολεύει να μηδενίζουμε μόνο με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου (τα $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$), τα οποία **δεν θέλουμε να μηδενισθούν**. Έτσι, εάν για παράδειγμα θέλουμε να μηδενίσουμε το στοιχείο α_{32} με τη βοήθεια του α_{22}, πολλαπλασιάζουμε την 2^{η} γραμμή επί το κλάσμα $(\alpha_{32}/\alpha_{22})$ και την αφαιρούμε από την 3^{η} γραμμή.

	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{22}}$	0	α_{22}	α_{23}
	0	α_{32}	α_{33}

α_{11}	α_{12}	α_{13}
0	α_{22}	α_{23}
0	0	$\alpha_{33}-\alpha_{23}(\alpha_{32}/\alpha_{22})$

Είναι φανερό πως χρησιμοποιώντας τα στοιχεία της διαγωνίου, δεν καταστρέφουμε τους μηδενισμούς που έχουμε ήδη επιτύχει…

Ένας συστηματικός τρόπος μετατροπής μιας ορίζουσας σε διαγώνια, είναι να μηδενίσω, με το $1^{ο}$ στοιχείο της διαγωνίου (το α_{11}), όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης. Στη συνέχεια κάνω το ίδιο για τη $2^{η}$ στήλη, με το στοιχείο α_{22}, κ.ο.κ..

Παράδειγμα: Χρησιμοποιώντας την διαδικασία των μηδενισμών, θα μετατρέψουμε την παρακάτω ορίζουσα αυτή σε διαγώνια και θα υπολογίσουμε την τιμή της.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 12 \\ 6 & 2 & 7 & 10 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

Στο $1^{ο}$ στάδιο μηδενίζουμε με τη βοήθεια του α_{11}, όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης. Αρχικά πολλαπλασιάζουμε την $1^{η}$ γραμμή με το 0,5 (2/4) και την αφαιρούμε από τη $2^{η}$. Πολλαπλασιάζοντας και πάλι την $1^{η}$ γραμμή επί 1,5 (6/4) και αφαιρώντας την από την $3^{η}$, μηδενίζουμε το α_{31}. Όμοια μηδενίζουμε και το α_{41} (επί –0,5).

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

Στο $2^{ο}$ στάδιο μηδενίζουμε τα στοιχεία της $2^{ης}$ στήλης, με τη βοήθεια του επόμενου στοιχείου της διαγωνίου (α_{22}). Πολλαπλασιάζω το α_{22} με το 7 (με το –6) και αφαιρώ τη $2^{η}$ γραμμή από την τρίτη (την τέταρτη).

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -10 & -62 \\ 0 & 0 & 17 & 58 \end{vmatrix} =$$

Τέλος μηδενίζω το 17, με τη βοήθεια του –10 (πολ/ζω επί –1,7).

Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει σαν το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου (μια και ο πίνακας έγινε διαγώνιος).

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -10 & -62 \\ 0 & 0 & 0 & -47{,}4 \end{vmatrix} =$$

$$= -1896$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Εάν κατά τους μηδενισμούς, κάποιο από τα στοιχεία της διαγωνίου μηδενισθεί, τότε θα πρέπει να αντιμεταθέσουμε τη γραμμή του, με κάποια από τις επόμενες, η οποία να έχει το αντίστοιχο στοιχείο διάφορο του μηδενός, αλλάζοντας (προφανώς) το πρόσημο της ορίζουσας (ιδιότητα (i), παρ.1.B.3.).

Εάν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία των επόμενων γραμμών είναι ίσα με το μηδέν, τότε το στοιχείο αυτό της διαγωνίου θα παραμείνει ίσο με το μηδέν, πράγμα που σημαίνει πως και η ορίζουσα θα μηδενίζεται.

<u>Παράδειγμα 1^{o}:</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -5 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -14$$

<u>Παράδειγμα 2^{o}:</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

1.2.8 Ασκήσεις

1η. Να επαληθεύσετε τη τιμή των παρακάτω οριζουσών:

$$\text{Det[A]} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \mathbf{= 16}$$

$$\text{Det[B]} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \mathbf{= -72}$$

2η. Γιατί οι παρακάτω ορίζουσες είναι ίσες με το μηδέν;

$$\textbf{(i) Det} \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{8} & \mathbf{5} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(ii) Det} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

$$\textbf{(iii) Det} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\eta\mu x} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{\eta\mu^2 x} & \boldsymbol{\eta\mu x} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(iii) Det} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\eta\mu x} & \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x} \\ \boldsymbol{\varepsilon\varphi x} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

3η. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα Α:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$