

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ**

Αντοχή Υλικού

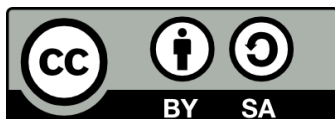
Ερρίκος Μουρατίδης (BSc, MSc)



Σεπτέμβριος 2015

Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Το έργο αυτό αδειοδοτείται από την Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές Άδεια. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.el>.

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΑΞΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΠΙΟΝΗΣΗ (Εφελκυσμός – θλίψη)

$$\text{Ορθή τάση: } \sigma = \frac{N}{F} \quad (\text{Pa})$$

N: Αξονική δύναμη (N)

F: Εμβαδόν διατομής (m²)

ΚΑΘΑΡΗ ΚΑΜΨΗ

$$\text{Ορθή τάση: } \sigma = \pm \frac{M}{I} y$$

M (M_z): ροπή κάμψης (Nm)

y: απόσταση από ουδέτερο άξονα (m)

I (I_z): Ροπή αδρανείας (m⁴)

Ροπές αδρανείας

A. Ορθογωνική διατομή (bxh): $I = bh^3 / 12$

B. Κυκλική διατομή ακτίνας R: $I = \pi R^4 / 4$

C. Τυχαία διατομή – Εφαρμογή θεωρήματος Steiner. Ροπή αδρανείας I' ως προς άξονα παράλληλο προς τον κεντροβαρικό σε απόσταση α:

$$I' = I + \alpha^2 F$$

Μέγιστη εφελκυστική τάση (max σ) – Περίπτωση θετικής ροπής κάμψης

$$\max \sigma = \sigma_u = \frac{M}{I} \max y_u = \frac{M}{W_u} \quad (\text{Pa})$$

όπου $W_u = \frac{I}{\max y_u}$ (ροπή αντίστασης), $\max y_u$: απόσταση κέντρου βάρους από το κάτω όριο

Μέγιστη θλιπτική τάση (min σ) – Περίπτωση θετικής ροπής κάμψης

$$\min \sigma = \sigma_o = - \frac{M}{I} \max y_o = - \frac{M}{W_o} \quad (\text{Pa})$$

όπου $W_o = \frac{I}{\max y_o}$ (ροπή αντίστασης), $\max y_o$: απόσταση κέντρου βάρους από το άνω όριο

Σε περίπτωση ορθογωνικής διατομής $W_u = W_o = W = bh^2 / 6 \quad (\text{m}^3)$

Σε περίπτωση κυκλικής διατομής $W_u = W_o = W = \pi R^3 / 4 \quad (\text{m}^3)$

ΚΑΜΨΗ ΜΕ ΟΡΘΗ ΔΥΝΑΜΗ

$$\sigma = \pm \frac{M}{I} y + \frac{N}{F} \quad (\text{Pa})$$

Σε περίπτωση θετικής ροπής:

$$\max \sigma = \frac{M}{I} \max y_u + \frac{N}{F} = \frac{M}{W_u} + \frac{N}{F} \quad (\text{Pa})$$

$$\min \sigma = -\frac{M}{I} \max y_o + \frac{N}{F} = -\frac{M}{W_o} + \frac{N}{F} \quad (\text{Pa})$$

ΔΙΠΛΗ ΚΑΜΨΗ ΜΕ ΟΡΘΗ ΔΥΝΑΜΗ

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{F} \quad (\text{Pa})$$

ΗΛΟΙ – ΚΟΧΛΙΕΣ

$$\text{Διατμητική τάση } \tau = \frac{P}{nm\pi R^2} \quad (\text{Pa})$$

$$\text{Ορθή τάση σύνθλιψης άντυνας της οπής : } \sigma_L = \frac{P}{ndt_{\min}}$$

n : αριθμός ήλων ή κοχλιών

m : αριθμός επιφανειών διάτμησης

R : ακτίνα ήλων – κοχλιών

d : διάμετρος ήλων – κοχλιών

t_{min} : πάχος λεπτότερου ελάσματος

ΔΙΑΤΜΗΣΗ ΛΟΓΩ ΚΑΜΨΗΣ

$$\text{Διατμητική τάση } \tau = \frac{VS}{Ib} \quad (\text{Pa})$$

V (Q_y) : τέμνουσα δύναμη (N)

S (S_z) : Στατική ροπή αποκοπτόμενης επιφάνειας (m³)

I (I_z) : Ροπή αδρανείας (m⁴)

b : πλάτος διατομής (m)

$$\text{Μέγιστη διατμητική τάση από τέμνουσα σε ορθογωνική διατομή: } \max \tau = \frac{3V}{2F} \quad (\text{Pa})$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ - ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ

Ορθή (ανηγμένη) παραμόρφωση $\varepsilon = \Delta L / L$

ΔL : μεταβολή μήκους (m)

L : αρχικό μήκος (m)

Διατμητική παραμόρφωση $\gamma = \Delta \alpha / \alpha$ (rad)

$\Delta \alpha$: ολίσθηση απέναντι πλευράς (m)

α : μήκος προσκείμενης πλευράς (m)

Σχέση ορθής τάσης – ορθής παραμόρφωσης: $\sigma = E \varepsilon$ (νόμος Hooke)

E : μέτρο ελαστικότητας Young (Pa)

Σχέση διατμητικής τάσης – διατμητικής παραμόρφωσης: $\tau = G \gamma$ (νόμος Hooke)

$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ (Pa) (Μέτρο ολίσθησης ή τέμνον μέτρο ελαστικότητας)

μ : συντελεστής εγκάρσιας παραμόρφωσης ή λόγος Poisson

Γενικευμένος νόμος Hooke: $\varepsilon_x = [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] / E$

$\varepsilon_y = [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] / E$

$\varepsilon_z = [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] / E$

Αξονική μετατόπιση σε περίπτωση αξονικής καταπόνησης :

$$\Delta L = \int_0^L \frac{P}{EF} dx \text{ (m)} \quad \text{Αν } P, E, A \text{ σταθερά: } \Delta L = \frac{PL}{EF} \text{ (m)}$$

ΚΥΡΙΟΙ ΑΞΟΝΕΣ – ΚΥΡΙΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

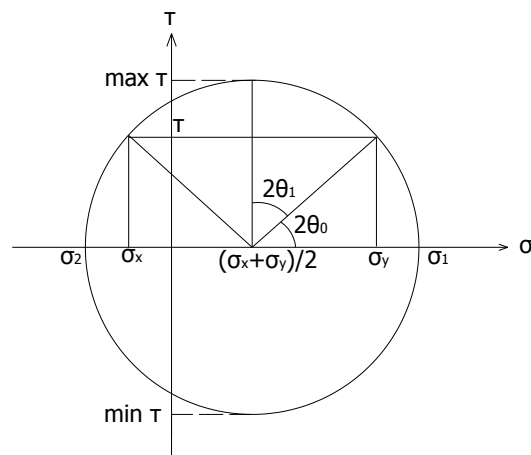
$$\text{Κύριες τάσεις: } \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\text{Γωνία κυρίων αξόνων: } \theta_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

$$\text{Μέγιστη διατμητική τάση: } \max \tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\text{Γωνία μέγιστης διατμητικής τάσης: } \theta_1 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}\right) \quad (\theta_0 = \theta_1 \pm 45^\circ)$$

Κύκλος Mohr



ΣΤΡΕΨΗ

ΚΥΚΛΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

$$\text{Γωνία στροφής λόγω στρέψης } \varphi = \int_0^L \frac{M_t}{GI_p} dx \quad (\text{rad}) \quad \text{Αν } M_t, G, I_p \text{ σταθερά: } \varphi = \frac{M_t L}{GI_p}$$

$$\text{Ανηγμένη γωνία στροφής } \theta = \varphi / L$$

M_t : ροπή στρέψης (Nm)

$$I_p = \int_F r^2 dF \quad \text{πολική ροπή αδράνειας (m}^4\text{)}$$

$$\text{Πολική ροπή αδράνειας κυκλικής διατομής ακτίνας R: } I_p = \pi R^4 / 2 \quad (\text{m}^4)$$

$$\text{Πολική ροπή αδράνειας κυκλικού δακτυλίου: } I_p = \pi(R^4 - r^4) / 2 \quad (\text{m}^4)$$

R : εξωτερική ακτίνα

r : εσωτερική ακτίνα

$$\text{Διατμητική τάση λόγω στρέψης: } \tau = \frac{M_t r}{I_p} \quad (\text{Pa})$$

r : απόσταση από το κέντρο του κύκλου

ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

Γωνία στροφής λόγω στρέψης ορθογωνικής διατομής b x h όπου h η μεγάλη πλευρά :

$$\varphi = \frac{M_t L}{\beta G b^3 h} \quad (\text{rad})$$

Διατμητικές τάσεις λόγω στρέψης ορθογωνικής διατομής :

$$\max \tau = \frac{M_t}{\alpha b^2 h} \quad (\text{Pa}) \quad \text{στο μέσο της μεγάλης πλευράς}$$

$$\tau_\mu = \max \tau \cdot b / h \quad (\text{Pa}) \quad \text{στο μέσο της μικρής πλευράς}$$

h / b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

ΛΥΓΙΣΜΟΣ

Περιπτώσεις λυγισμού



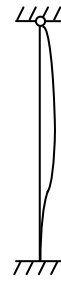
i



ii



iii



iv

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού (Euler) : $P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L_K^2} \geq P \text{ (N)}$

I_{\min} : ελάχιστη ροπή αδράνειας

Μήκος λυγισμού L_K

	i	ii	iii	iv
L_K	L	2L	0.5L	0.7L

Ελάχιστη ακτίνα αδρανείας $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} \quad (\text{m})$

Κρίσιμη τάση λυγισμού : $\sigma_{κρ} = P_{κρ} / F = \pi^2 E / \lambda^2 \quad (\text{Pa})$

Λυγηρότητα: $\lambda = L_K / i_{\min}$

ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ $y(x)$

Διαφορική εξίσωση:
$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Οριακές συνθήκες

1. Πάκτωση: Κατακόρυφη μετατόπιση $y = 0$
Οριζόντια μετατόπιση $u = 0$
Στροφή $\varphi = \frac{dy}{dx} = 0$
2. Άρθρωση Κατακόρυφη μετατόπιση $y = 0$
Οριζόντια μετατόπιση $u = 0$
Στροφή $\varphi = \frac{dy}{dx} \neq 0$
3. Κύλιση Κατακόρυφη μετατόπιση $y = 0$
Οριζόντια μετατόπιση $u \neq 0$
Στροφή $\varphi = \frac{dy}{dx} \neq 0$

Εξισώσεις συνέχειας σε κάθε σημείο:

Συνέχεια μετατοπίσεων : $y_{αριστερά} = y_{δεξιά}$

Συνέχεια στροφών : $\varphi_{αριστερά} = \varphi_{δεξιά} \Rightarrow \frac{dy}{dx}_{αριστερά} = \frac{dy}{dx}_{δεξιά}$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΣΤΟΧΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΝΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

1. ΟΛΚΙΜΑ ΥΛΙΚΑ

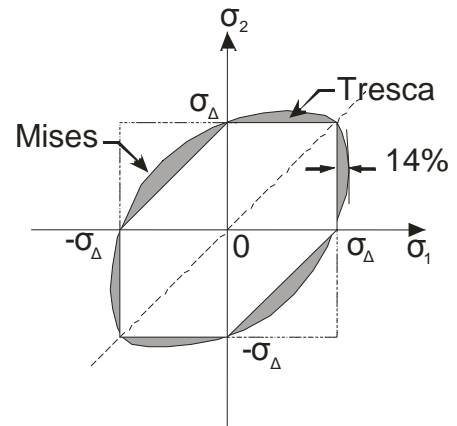
1α. ΚΡΙΤΗΡΙΟ TRESCA

Αν $\sigma_1 \sigma_2 > 0$: Υπάρχει αστοχία όταν $\sigma_1 > \sigma_\Delta$ ή $\sigma_2 > \sigma_\Delta$

Αν $\sigma_1 \sigma_2 < 0$: Υπάρχει αστοχία όταν $\sigma_{1\sigma} = \sigma_1 - \sigma_2 > \sigma_\Delta$

σ_1, σ_2 : κύριες τάσεις με $\sigma_1 > \sigma_2$

σ_Δ : τάση αστοχίας



1β. ΚΡΙΤΗΡΙΟ VON MISES

Υπάρχει αστοχία αν $\sigma_{1\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} > \sigma_\Delta$

2. ΨΑΘΥΡΑ ΥΛΙΚΑ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ MOHR

Υπάρχει αστοχία όταν ο κύκλος Mohr μιας εντατικής κατάστασης δεν βρίσκεται στο εσωτερικό της περιβάλλουσας Mohr.

Πρώτος κύκλος $\sigma_1 = \sigma_\Delta^\epsilon, \sigma_2 = 0$, όπου σ_Δ^ϵ : τάση αστοχίας σε εφελκυσμό

Δεύτερος κύκλος $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_\Delta^\theta$, όπου σ_Δ^θ : τάση αστοχίας σε θλίψη

Τρίτος κύκλος τ_Δ : $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_\Delta$ όπου τ_Δ τάση αστοχίας σε καθαρή διάτμηση

