



ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΙ

ΜΟΥΡΑΤΙΔΗΣ ΕΡΡΙΚΟΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΕ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Βασικές υποθέσεις αντοχής των υλικών
 - 1.1. Υπόθεση Navier - Bernoulli
 - 1.2. Υπόθεση Saint Venant
 - 1.3. Υπόθεση μικρών παραμορφώσεων.
2. Χάραξη διαγραμμάτων
 - 2.1. Υπολογισμός τεμνουσών
 - 2.2. Μέγιστη ροπή
 - 2.3. Παράδειγμα
3. Υποστατικοί - Ισοστατικοί - Υπερστατικοί φορείς - Βαθμός υπερστατικότητας.
 - 3.1. Υποστατικοί φορείς (μηχανισμοί).
 - 3.2. Ισοστατικοί φορείς
 - 3.3. Υπερστατικοί φορείς
 - 3.4. Βαθμός υπερστατικότητας
 - 3.5. Παράδειγμα
4. Θεώρημα δυνατών έργων
 - 4.1. Ορισμός έργου
 - 4.2. Έργα εσωτερικών και εξωτερικών εντατικών μεγεθών.
 - 4.3. Εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας
 - 4.4. Θεώρημα δυνατών έργων
 - 4.5. Υπολογισμός μετατοπίσεων - στροφών ισοστατικών φορέων με εφαρμογή του θεωρήματος των δυνατών έργων.
 - 4.6. Εφαρμογές
5. Μέθοδος των δυνάμεων
 - 5.1. Αρχή της επαλληλίας
 - 5.2. Εφαρμογή
 - 5.3. Βασικός φορέας δοθέντος υπερστατικού
 - 5.4. Αρχή της μεθόδου των δυνάμεων
 - 5.5. Εφαρμογές
6. Γραμμές επιρροής υπερστατικών φορέων
 - 6.1. Θεώρημα αμοιβαιότητας Maxwell - Betti
 - 6.2. Εύρεση γραμμών επιρροής υπερστατικών φορέων
 - 6.3. Εφαρμογή
7. Υπολογισμός μεγεθών παραμόρφωσης υπερστατικών φορέων
 - 7.1. Εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων
 - 7.2. Εφαρμογή
8. Μέθοδος Castiglano
 - 8.1. Ελαστικό δυναμικό φορέα
 - 8.2. Θεώρημα Castiglano
 - 8.3. Εφαρμογές

9. Μέθοδος παραμορφώσεων
 - 9.1. Εισαγωγή
 - 9.2. Εκλογή μεγεθών παραμόρφωσης - Πορεία επίλυσης
 - 9.3. Συμμετρικοί φορείς
 - 9.4. Μη πάγιοι φορείς
 - 9.5. Εφαρμογές

10. Μέθοδος διανομής ροπών Cross.
 - 10.1. Πάγιοι φορείς
 - 10.2. Μη πάγιοι φορείς
 - 10.3. Αντιμετώπιση συμμετρικών φορέων
 - 10.4. Εφαρμογές

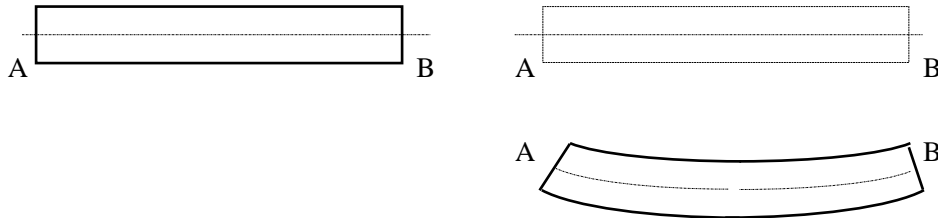
11. Μέθοδος τριών ροπών (Clapeyron)
 - 11.1. Τύπος του Bresse
 - 11.2. Εσωτερικά εντατικά μεγέθη
 - 11.3. Στροφές ακραίων διατομών ανοίγματος
 - 11.4. Θεώρημα τριών ροπών για συνεχείς δοκούς
 - 11.5. Εφαρμογή

12. Άμεση μέθοδος δυσκαμψίας
 - 12.1. Στοιχείο αναφοράς
 - 12.2. Συναρτήσεις μορφής
 - 12.3. Στοιχειώδες μητρώο ακαμψίας
 - 12.4. Στοιχειώδες μητρώο μετασχηματισμού
 - 12.5. Ισοδύναμες επικόμβιες φορτίσεις
 - 12.6. Συνολικά μητρώα φόρτισης και ακαμψίας
 - 12.7. Επίλυση συστήματος
 - 12.8. Εφαρμογές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Βασικές υποθέσεις της αντοχής των υλικών.

1.1. Υπόθεση Navier- Bernoulli

Όταν μία δοκός παραμορφώνεται, οι κάθετες στον άξονα διατομές παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον άξονα.



Οι διατομές A και B παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση.

Η υπόθεση αυτή επαληθεύεται ικανοποιητικά για παραμορφώσεις οφειλόμενες σε ορθές τάσεις, λιγότερο για παραμορφώσεις οφειλόμενες σε διατμητικές τάσεις. Αμεση συνέπεια της παραπάνω υπόθεσης είναι η σχέση υπολογισμού ορθών τάσεων λόγω κάμψης:

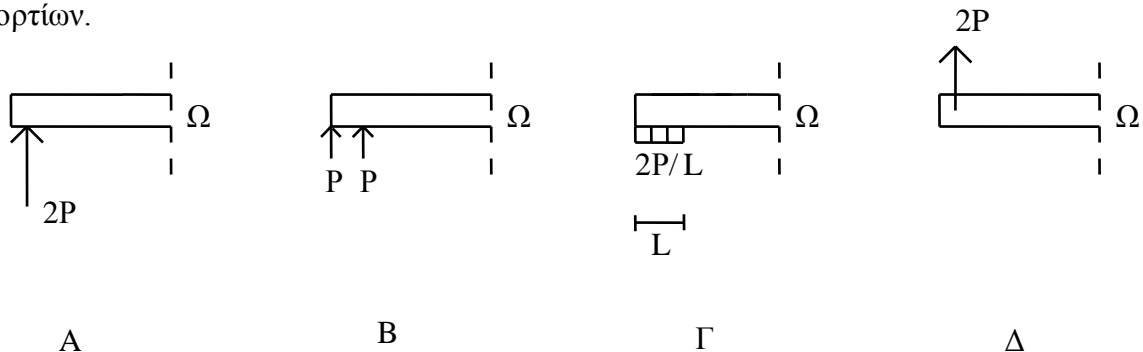
$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

1.2. Υπόθεση Saint Venant

Οι τάσεις, και κατά συνέπεια οι παραμορφώσεις, σε μία διατομή Ω αρκετά απομακρυσμένη από τα σημεία εφαρμογής των εξωτερικών εντατικών μεγεθών, εξαρτώνται μόνον από τη γενική συνισταμένη των εξωτερικών μεγεθών που εφαρμόζονται σε ένα από τα δύο τμήματα του φορέα που διαχωρίζονται από τη διατομή Ω .

Στην πράξη, η υπόθεση αυτή επαληθεύεται, όταν η απόσταση της διατομής Ω από το σημείο εφαρμογής των φορτίων γίνει μεγαλύτερη από τη μεγαλύτερη διάσταση της διατομής του φορέα.

Η συμπεριφορά του φορέα επηρεάζεται μόνον τοπικά από τον τρόπο εφαρμογής των φορτίων.



Υπόθεση Saint Venant: Οι τάσεις στη διατομή Ω είναι ίσες στις περιπτώσεις A,B,Γ,Δ.

1.3. Υπόθεση μικρών παραμορφώσεων.

Οι παραμορφώσεις των φορέων θεωρούνται μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις των διατομών. Είναι συνεπώς δυνατόν να παραληφθούν όταν γράφονται οι εξισώσεις ισορροπίας, δεδομένου ότι τα σημεία εφαρμογής των φορτίων μπορούν να θεωρηθούν αμετατόπιστα.

Σημειώνεται ότι η υπόθεση αυτή δεν επαληθεύεται ικανοποιητικά σε μερικές ειδικές περιπτώσεις (π.χ. λυγισμός στοιχείων μεγάλης λυγηρότητας), όπου πρέπει να ληφθούν υπόψη τα οφειλόμενα σε παραμόρφωση εντατικά μεγέθη δεύτερης τάξης.

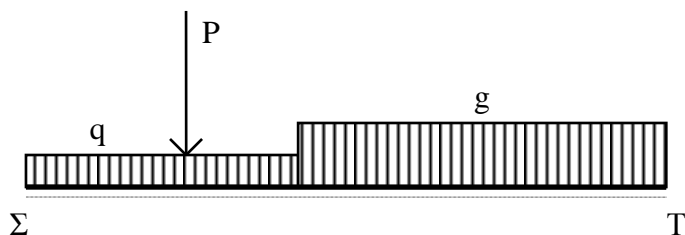
Από τα παραπάνω συνάγεται, ότι για μικρές στροφές φ , μπορεί κατά προσέγγιση να γραφεί:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \cos^2\varphi = 1 \\ \sin\varphi &= \tan\varphi = \varphi \text{ (rad)}\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Χάραξη διαγραμμάτων.

2.1. Υπολογισμός τεμνουσών δυνάμεων.

- Ας θεωρηθεί ένα τμήμα ΣΤ ενός ολόσωμου φορέα για το οποίο είναι γνωστά:
- Οι ροπές αριστερά $M_{\Sigma T}$ και δεξιά $M_{T\Sigma}$.
 - Τα εξωτερικά φορτία που εφαρμόζονται στο τμήμα ΣΤ.



Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί (11.1,11.2) ότι:

$$V_{\Sigma T} = V_{\Sigma T}^0 + \Delta V \quad (2.1)$$

όπου $V_{\Sigma T}$: Τέμνουσα δεξιά του Σ

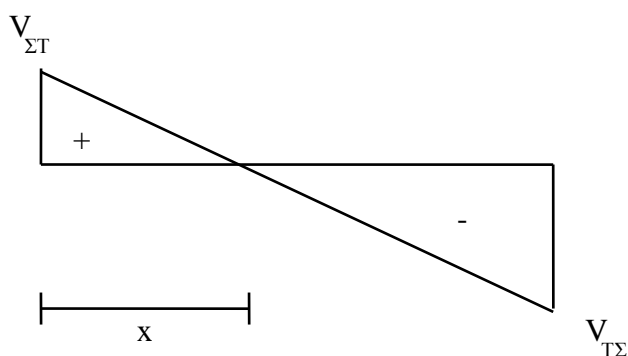
$V_{\Sigma T}^0$: Τέμνουσα δεξιά του Σ, του τμήματος ΣΤ θεωρούμενου αμφιέριστου.

$$\Delta V = \frac{M_{T\Sigma} - M_{\Sigma T}}{L_{\Sigma T}} = \frac{\text{Ροπή, δεξιά} - \text{Ροπή, αριστερά}}{\text{Μήκος}}$$

Από την τιμή $V_{\Sigma T}$ μπορεί να χαραχθεί το διάγραμμα V.

2.2. Μέγιστη ροπή

Σε περίπτωση που υπάρχει μόνον συνεχές ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q, η θέση που εμφανίζεται η μέγιστη τιμή της ροπής $\max M$, δηλαδή η θέση μηδενισμού του διαγράμματος τεμνουσών, μπορεί να καθορισθεί από τη σχέση:



$$x = V_{\Sigma T} / q$$

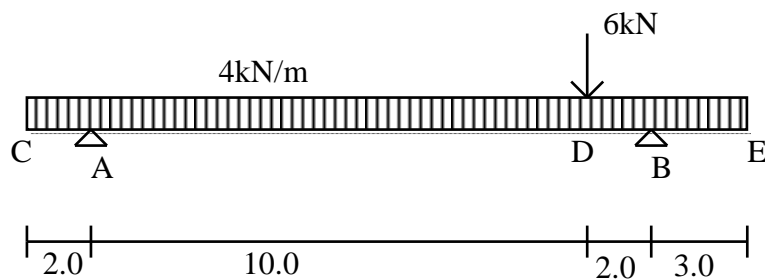
Η τιμή της μέγιστης ροπής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\max M = M(x) = M_{\Sigma T} + V_{\Sigma T}x - q \frac{x^2}{2}$$

από όπου

$$\boxed{\max M = M_{\Sigma T} + \frac{V_{\Sigma T}^2}{2q}} \quad (2.2)$$

2.3. Παράδειγμα χάραξης διαγραμμάτων σε αμφιπροέχουσα δοκό.



$$M_{AB} = M_{AC} = - \frac{4.0 \times 2.0^2}{2} = -8.0 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = M_{BE} = - \frac{4.0 \times 3.0^2}{2} = -18.0 \text{ kNm}$$

$$V_{AC} = - 4.0 \times 2.0 = -8.0 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_{AB}^0 + \frac{M_{BA} - M_{AB}}{L_{AB}} = \\ &= \frac{4.0 \times 12.0}{2} + \frac{6.0 \times 2.0}{12.0} + \frac{-18.0 - (-8.0)}{12.0} = 24.17 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$V_{DA} = 24.17 - 4.0 \times 10.0 = -15.83 \text{ kN}$$

$$V_{DB} = -15.83 - 6.0 = -21.83 \text{ kN}$$

$$V_{BD} = -21.83 - 4.0 \times 2.0 = -29.83 \text{ kN}$$

$$V_{BE} = 4.0 \times 3.0 = 12.0 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M_{DA} = M_{DB} &= M_{AB} + V_{AB} \times L_{AD} - \frac{qL_{AD}^2}{2} = \\ &= -8.0 + 24.17 \times 10.0 - \frac{4.0 \times 10.0^2}{2} = 33.7 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Υπολογισμός μέγιστης ροπής maxM.

Α τρόπος

-Θέση μηδενισμού τέμνουσας: $x = \frac{24.17}{4.0} = 6.04\text{m}$

- $\max M = M(x=6.04\text{m}) = -8.0 + 24.17 \times 6.04 - \frac{4.0 \times 6.04^2}{2} = 65.0\text{kNm}$

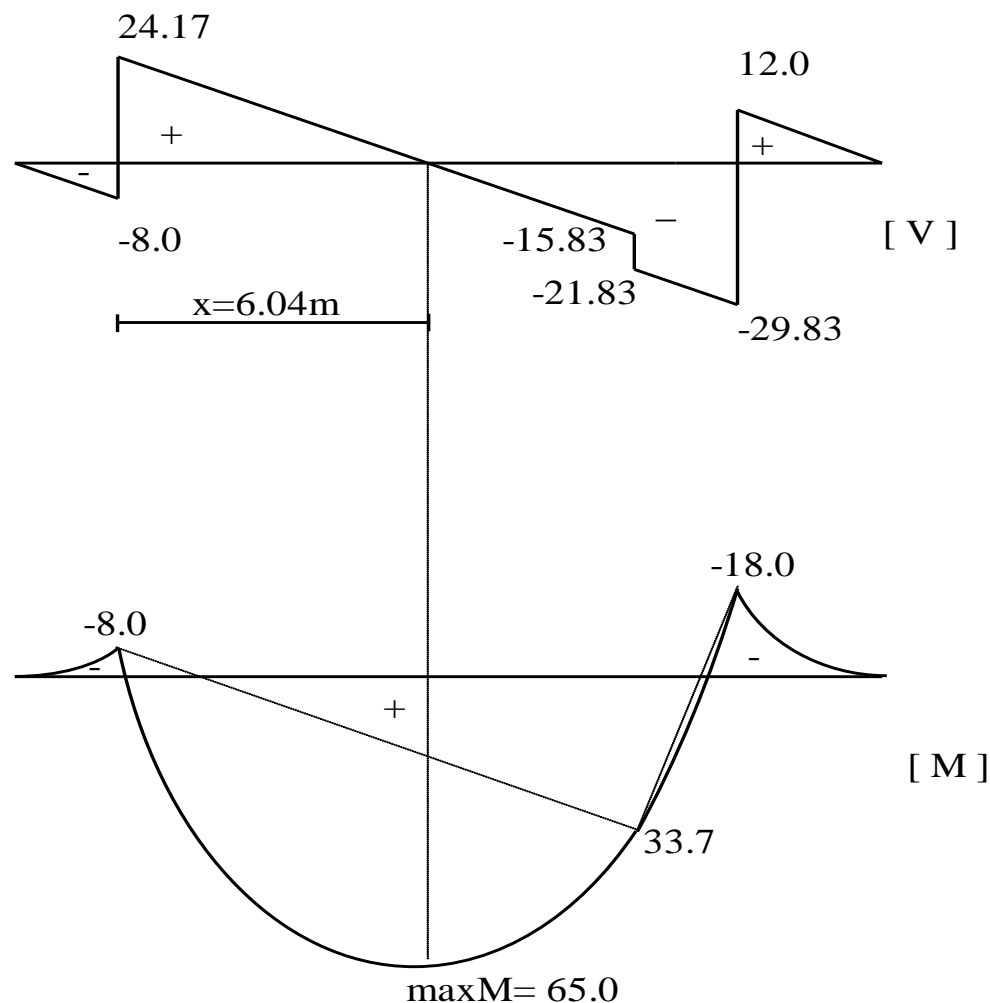
Εναλλακτικά με τη μέθοδο των εμβαδών του διαγράμματος V:

- $\max M = M(x=6.04\text{m}) = -8.0 + 24.17 \times 6.04 / 2 = 65.0\text{kNm}$

Β τρόπος

Δεδομένου ότι στο τμήμα AD συντρέχουν οι προϋποθέσεις ύπαρξης μόνον συνεχούς ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου, μπορεί να εφαρμοσθεί η σχέση (2.2.):

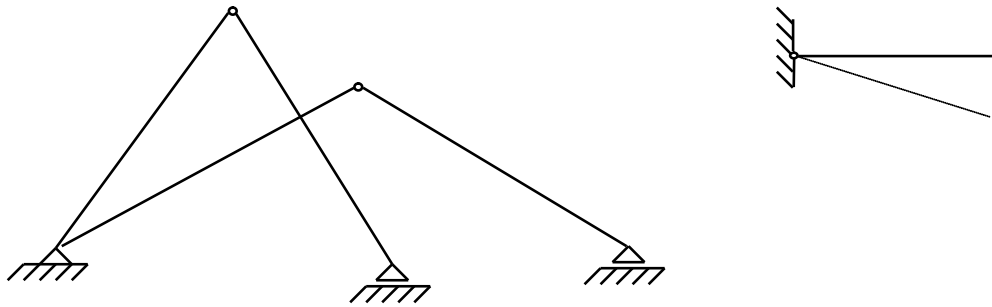
$$\max M = -8.0 + \frac{24.17^2}{2 \times 4.0} = 33.7 + \frac{(-15.83)^2}{2 \times 4.0} = 65.0\text{kNm}$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Υποστατικοί-ισοστατικοί-υπερστατικοί φορείς Βαθμός υπερστατικότητας

3.1. Υποστατικοί φορείς (μηχανισμοί).

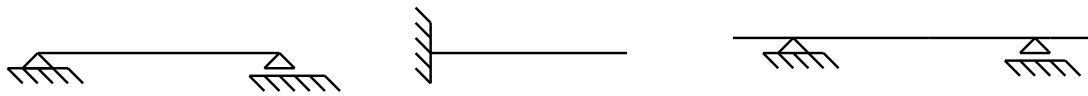
Είναι φορείς για τους οποίους ο αριθμός των εξισώσεων ισορροπίας είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των αντιδράσεων. Γενικά είναι ασταθείς φορείς, μηχανισμοί ελεύθερα μετακινούμενοι με εφαρμογές κυρίως σε προβλήματα μηχανολογίας.



Υποστατικοί φορείς

3.2. Ισοστατικοί φορείς.

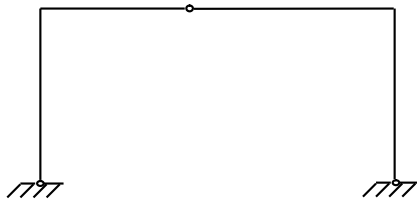
Καλούνται οι φορείς για τους οποίους ο αριθμός των εξισώσεων ισορροπίας είναι ίσος με τον αριθμό των (αγνώστων) αντιδράσεων.



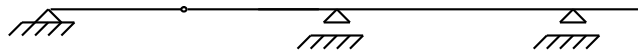
Αμφιέριστη δοκός

Πρόβολος

Αμφιπροέχουσα δοκός



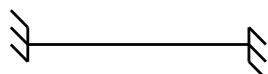
Τριαρθρωτό πλαίσιο



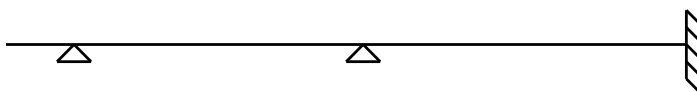
Δοκός Gerber

3.3. Υπερστατικοί φορείς

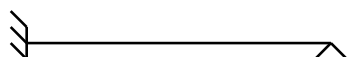
Είναι οι φορείς για τους οποίους ο αριθμός των εξισώσεων ισορροπίας είναι μικρότερος από τον αριθμό των αντιδράσεων. Οι φορείς αυτοί αποτελούν το κύριο αντικείμενο του παρόντος συγγράμματος.



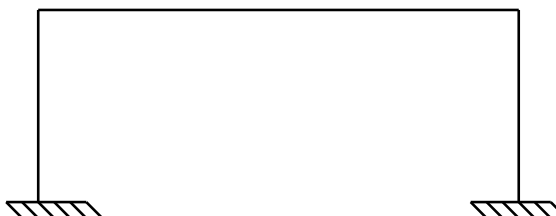
Αμφίπακτη δοκός



Συνεχής δοκός



Μονόπακτη δοκός



Αμφίπακτο πλαίσιο

3.4. Βαθμός υπερστατικότητας (ή βαθμός στατικής αοριστίας)

Καλείται η διαφορά του αριθμού των (αγνώστων) αντιδράσεων από τον αριθμό των εξισώσεων ισορροπίας.

$$v = R - L$$

v : βαθμός υπερστατικότητας

R : αριθμός (αγνώστων) αντιδράσεων

L : αριθμός εξισώσεων ισορροπίας

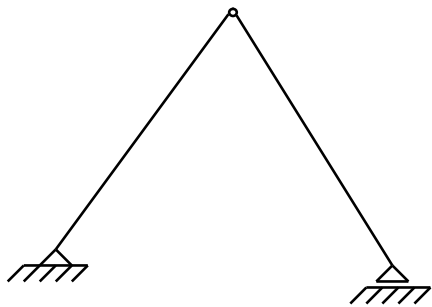
Από τον ορισμό του βαθμού υπερστατικότητας προκύπτει:

$v < 0$ για μηχανισμούς

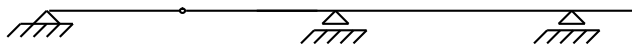
$v = 0$ για ισοστατικούς φορείς

$v > 0$ για υπερστατικούς φορείς

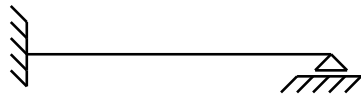
3.5. Παραδείγματα υπολογισμού βαθμού υπερστατικότητας.



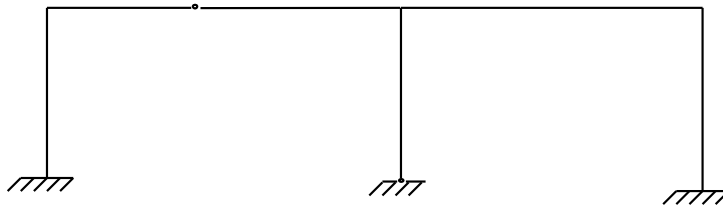
$R=3 \ L=4 \Rightarrow v=-1$ (μηχανισμός)



$R=4 \ L=4 \Rightarrow v=0$ (ισοστατική δοκός Gerber)



$R=4 \ L=3 \Rightarrow v=1$ (μονόπακτη δοκός, μια φορά υπερστατική)



$R=8 \ L=4 \Rightarrow v=4$ (πλαισιωτός αρθρωτός φορέας, 4 φορές υπερστατικός)

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι τα παραπάνω αναφέρονται στο λεγόμενο "εξωτερικό" βαθμό υπερστατικότητας. Υπάρχουν ωστόσο φορείς οι οποίοι είναι εξωτερικά ισοστατικοί και εσωτερικά υπερστατικοί, δηλαδή φορείς των οποίων οι αντιδράσεις υπολογίζονται με τη βοήθεια των εξισώσεων ισορροπίας, όχι όμως και τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη.

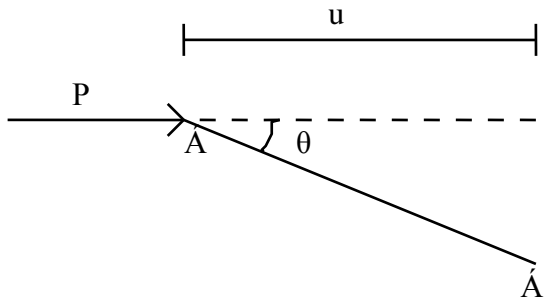


Φορέας εσωτερικά υπερστατικός

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Θεώρημα δυνατών έργων.

4.1. Ορισμός έργου

Όταν το σημείο εφαρμογής μίας σταθερής δύναμης P μετακινείται από το σημείο A στο A' , τότε παράγεται έργο ίσο με το εσωτερικό γινόμενο:



$$W = \overline{P} \cdot \overline{AA'} = P \times u = P \times |AA'| \cos \theta$$

όπου u : η προβολή του AA' στη διεύθυνση της P .

Κατ' αναλογία, ένα ζεύγος M που προκαλεί μία στροφή φ γύρω από τον άξονα του, παράγει έργο:

$$W = M \times \varphi$$

4.2. Έργα εσωτερικών και εξωτερικών εντατικών μεγεθών.

Όταν ένας φορέας υπόκειται σε ένα σύστημα εξωτερικών εντατικών μεγεθών [δυνάμεων $\overline{q}(s)$ και ροπών $\overline{m}(s)$] το παραγόμενο έργο εξωτερικών εντατικών μεγεθών ισούται με:

$$W_e = \int_0^L (\overline{q} \cdot \overline{u} + \overline{m} \cdot \overline{\theta}) ds$$

όπου $\overline{u}(s)$ και $\overline{\theta}(s)$ είναι οι μετατοπίσεις και οι στροφές του φορέα αντίστοιχα.

Οι εξωτερικές αυτές δράσεις δημιουργούν εσωτερικά εντατικά μεγέθη (τάσεις) στο φορέα που εκφράζονται μέσω καμπτικών ροπών $M(s)$, τεμνουσών $V(s)$, αξονικών δυνάμεων $N(s)$ και ροπών στρέψης $T(s)$.

Το έργο των εσωτερικών εντατικών μεγεθών ισούται με:

$$W_i = \int_0^L (M\varphi + N\varepsilon + V\gamma + T\tau) ds$$

όπου $\varphi(s)$ η καμπύλωση, $\varepsilon(s)$ η επιμήκυνση, $\gamma(s)$ η διατμητική ολίσθηση και $\tau(s)$ η στρεπτική διατμητική ολίσθηση του φορέα.

4.3. Εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας.

Το έργο που παράγεται από τα εξωτερικά εντατικά μεγέθη ισούται με την ενέργεια που αποθηκεύεται στο φορέα σαν ενέργεια παραμόρφωσης.

$$W_e = W_i$$

4.4. Θεώρημα των δυνατών έργων.

Ας θεωρηθεί ένας φορέας υποκείμενος σε ένα σύστημα εξωτερικών εντατικών μεγεθών (δυνάμεων q και ροπών m) που προκαλούν εσωτερικά εντατικά μεγέθη M, N, V, T . Ο φορέας παραμορφώνεται (μετατοπίσεις u και στροφές θ) με εσωτερικά μεγέθη παραμόρφωσης $\varphi, \varepsilon, \gamma, \tau$. Ας θεωρηθεί τώρα ένα νέο τυχαίο δυνατό πεδίο εξωτερικών εντατικών μεγεθών \bar{q}_1, \bar{m}_1 που προκαλεί εσωτερικά εντατικά μεγέθη M_1, N_1, V_1, T_1 (πεδίο δυνατών τάσεων).

Αποδεικνύεται ότι το έργο των δυνατών εξωτερικών εντατικών μεγεθών \bar{q}_1, \bar{m}_1 με πεδίο μετατοπίσεων τις πραγματικές μετατοπίσεις του φορέα $\bar{u}, \bar{\theta}$ ισούται με τη δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης που οφείλεται στα δυνατά εσωτερικά εντατικά μεγέθη M_1, N_1, V_1, T_1 με πεδίο εσωτερικών παραμορφώσεων τις πραγματικές παραμορφώσεις του φορέα.

$$W_{e1} = W_{i1} \quad (4.1.)$$

όπου

$$W_{e1} = \int_0^L (\bar{q}_1 \bar{u} + \bar{m}_1 \bar{\theta}) ds$$

$$W_{i1} = \int_0^L (M_1 \varphi + N \varepsilon + V_1 \gamma + T_1 \tau) ds = \int_0^L \left(\frac{M M_1}{EI} + \frac{N N_1}{E \eta} + k \frac{V V_1}{GF} + \frac{T T_1}{GI_p} \right) ds$$

Η παραπάνω σχέση (4.1.) ονομάζεται θεώρημα των δυνατών έργων και έχει μεγάλη εφαρμογή στη στατική και συγκεκριμένα:

- Επιτρέπει τον καθορισμό μετατοπίσεων-στροφών οποιουδήποτε φορέα
- Επιτρέπει τη στατική επίλυση υπερστατικών φορέων με τη μέθοδο των δυνάμεων.

Είναι σημαντικό να υπογραμμισθεί εδώ ότι σε ολόσωμους καμπτόμενους φορείς χωρίς στρέψη, το έργο που παράγεται από τις αξονικές και τις τέμνουσες δυνάμεις είναι συνήθως της τάξης του 1/1000 του έργου που παράγεται από τις ροπές κάμψης. Μπορεί συνεπώς κατά προσέγγιση να γραφεί:

$$W_{i1} = \int_0^L \frac{M M_1}{EI} ds$$

Η παραπάνω προσέγγιση απλοποιεί σημαντικά τους υπολογισμούς.

Σημειώνεται επίσης ότι ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων του τύπου της παραπάνω σχέσης γίνεται ταχύτερα με τη βοήθεια των σχετικών πινάκων (πίνακας 1).

4.5. Υπολογισμός μετατοπίσεων-στροφών ισοστατικών φορέων με εφαρμογή του θεωρήματος των δυνατών έργων.

Ας θεωρηθεί ένας ισοστατικός φορέας υποκείμενος σε μία εξωτερική φόρτιση. Από τη στατική επίλυση προκύπτει το διάγραμμα M του φορέα.

Ας υποθεθεί ότι ζητείται η μετατόπιση u ενός σημείου του φορέα, κατά μία συγκεκριμένη διεύθυνση. Στο σημείο αυτό και κατά τη διεύθυνση της ζητούμενης μετατόπισης, με αυθαίρετη φορά, επιβάλλεται μια μοναδιαία δύναμη $P=1$ και υπολογίζεται το αντίστοιχο διάγραμμα M_1 .

Εφαρμόζεται το θεώρημα των δυνατών έργων θεωρώντας:

-Πεδίο μετατοπίσεων τις πραγματικές μετατοπίσεις του φορέα.

-Πεδίο δυνατών τάσεων το οφειλόμενο στη μοναδιαία δύναμη $P=1$.

Ισχύει:

$$W_{el} = P \times u = 1 \times u = u$$

$$W_{il} = \int_0^L \frac{MM_1}{EI} ds$$

$$W_{el} = W_{il} \Rightarrow u = \int_0^L \frac{MM_1}{EI} ds \quad 4.2.$$

Η παραπάνω σχέση (4.2.) επιτρέπει τον καθορισμό οποιασδήποτε μετατόπισης σε οποιοδήποτε σημείο του φορέα. Αν το ζητούμενο μέγεθος είναι η στροφή φ ενός σημείου του φορέα, τότε επιβάλλεται στο σημείο αυτό μία μοναδιαία ροπή αυθαίρετης φοράς και από τη φόρτιση αυτή προκύπτει το διάγραμμα M_1 . Με παρόμοιο τρόπο συνάγεται:

$$\varphi = \int_0^L \frac{MM_1}{EI} ds \quad 4.3.$$

Για μετατοπίσεις κόμβων δικτυωμάτων (όπου υπάρχουν μόνον αξονικές δυνάμεις) με N ράβδους, υπό τυχούσα φόρτιση, υπολογίζονται πρώτα οι αξονικές δυνάμεις S_i όλων των ράβδων του δικτύωματος. Ακολούθως, επιβάλλεται στον κόμβο μοναδιαία δύναμη $P=1$ κατά τη διεύθυνση της ζητούμενης μετατόπισης και υπολογίζονται οι αναπτυσσόμενες αξονικές δυνάμεις S_{i1} . Η ζητούμενη μετατόπιση είναι:

$$u = \sum_{i=1}^N \frac{S_i S_{i1}}{EA} L_i \quad 4.4.$$

Υπολογισμός μετατοπίσεων-στροφών φορέων με εφαρμογή του
θεωρήματος των δυνατών έργων.

1. Κατασκευή διαγράμματος ροπών κάμψης M του φορέα λόγω εξωτερικής φόρτισης (αξονικών δυνάμεων S_i όλων των ράβδων για δικτυώματα).

2. Υπολογισμός διαγράμματος M_1 οφειλόμενου σε μοναδιαία φόρτιση (δύναμη ή ροπή) στο σημείο και κατά τη διεύθυνση που ζητείται η μετατόπιση ή στροφή (αξονικών δυνάμεων S_{i1} για δικτυώματα).

3. Υπολογισμός αγνώστου μεγέθους παραμόρφωσης με εφαρμογή του θεωρήματος των δυνατών έργων:

$$u, \varphi = \int_0^L \frac{MM_1}{EI} ds \quad \text{για ολόσωμους φορείς χωρίς στρέψη}$$

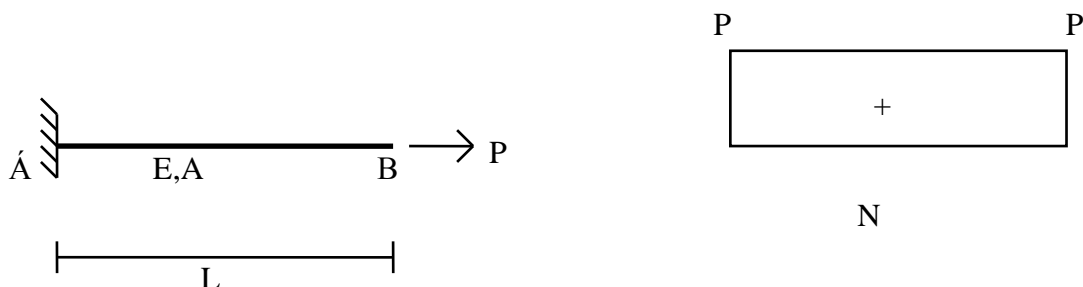
$$u = \sum_{i=1}^N \frac{S_i S_{i1}}{EA} L_i \quad \text{για δικτυώματα}$$

Σημειώνεται ότι αν το **πρόσημο** του ζητούμενου μεγέθους παραμόρφωσης εξαχθεί **θετικό**, η **φορά της παραμόρφωσης είναι ίδια με την αυθαίρετα εκλεγμένη φορά του μοναδιαίου εντατικού μεγέθους**, διαφορετικά οι φορές είναι αντίθετες.

4.6. Εφαρμογές του θεωρήματος των δυνατών έργων.

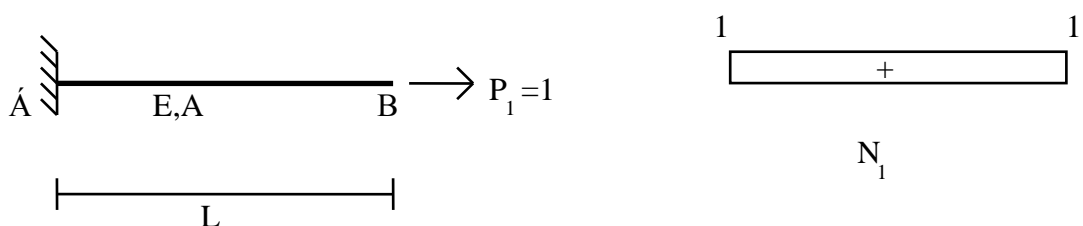
Υπολογισμός μετατοπίσεων - στρεφών ισοστατικών φορέων.

4.6.1. Στην εφελκόμενη ράβδο του σχήματος ζητείται η μετατόπιση u_B του άκρου B.



Εφαρμόζεται το θεώρημα δυνατών έργων θεωρώντας:

-Πεδίο δυνατών τάσεων: το οφειλόμενο σε μοναδιαία δύναμη $P_1=1$ στο άκρο B του φορέα.

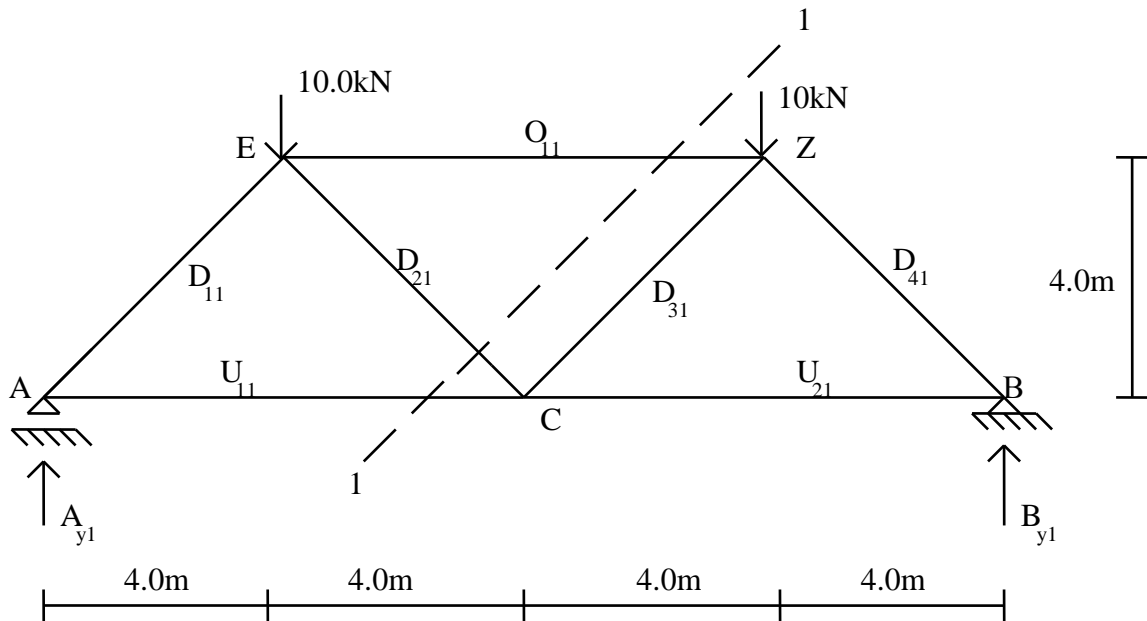


$$W_{e1} = P_1 \times u_B = u_B$$

$$W_{i1} = \int_0^L \frac{NN_1}{EA} dx = \frac{P}{EA} \int_0^L dx = \frac{PL}{EA}$$

$$W_{e1} = W_{i1} \Rightarrow u_B = \frac{PL}{EA}$$

4.6.2. Στο δικτύωμα του σχήματος ζητείται η κατακόρυφη μετατόπιση δ_C του κόμβου C. Οι ράβδοι είναι όμοιες με $EA=10000kN$



$$LD1 = LD2 = LD3 = LD4 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.66m$$

-Από τις εξισώσεις ισορροπίας προκύπτει:

$$A_y = B_y = 10.0kN$$

-Ισορροπία κόμβου A:

$$A_y + D_1 \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow D_1 = 14.14kN \quad (\thetaλίψη)$$

-Τομή 1-1:

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 8.0 \times A_y - 4.0 \times 10.0 - 4.0 \times O_1 = 0 \Rightarrow O_1 = 10.0kN \quad (\thetaλίψη)$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow A_y - 10.0 + D_2 \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow D_2 = 0$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow O_1 - U_1 = 0 \Rightarrow U_1 = 10.0kN \quad (\epsilonφελκυσμός)$$

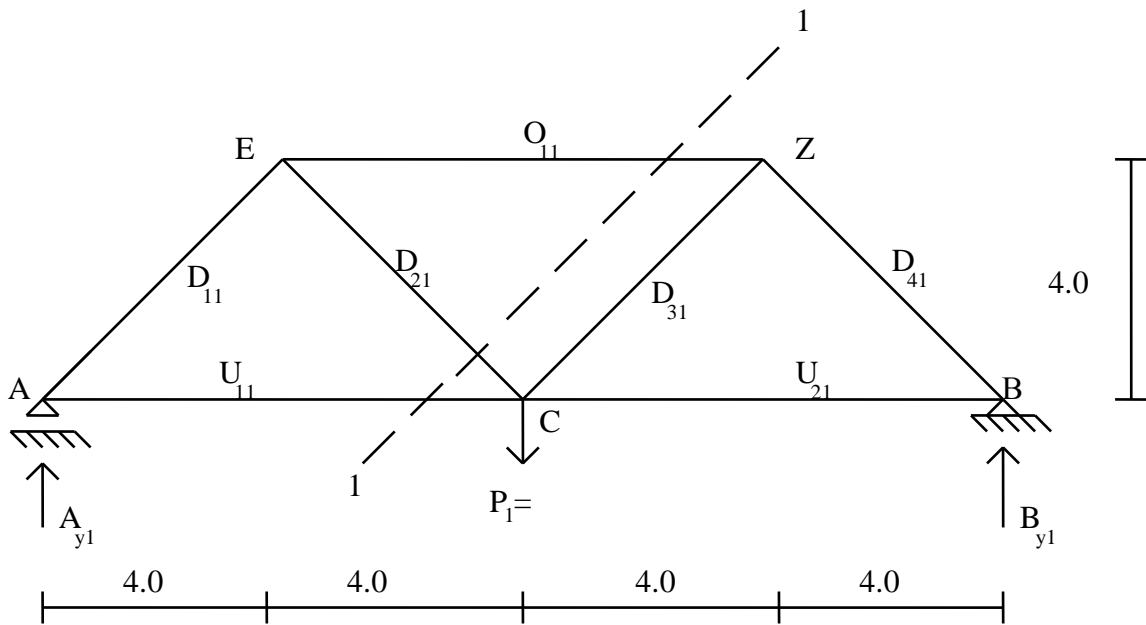
Λόγω συμμετρίας:

$$D4 = 14.14kN \quad (\thetaλίψη)$$

$$U2 = 10.0kN \quad (\epsilonφελκυσμός)$$

$$D3 = 0$$

Εφαρμόζεται τώρα το θεώρημα των δυνατών έργων με πεδίο μετατοπίσεων τις πραγματικές μετατοπίσεις του φορέα και πεδίο δυνατών τάσεων τις οφειλόμενες σε μοναδιαίο κατακόρυφο φορτίο $P_1=1$ στον κόμβο C.



Λόγω συμμετρίας:

$$U_{11} = U_{21}, D_{11} = D_{41}, D_{21} = D_{31}, A_{y1} = B_{y1} = 0.5$$

Ισορροπία κόμβου A:

$$\Sigma Y=0 \Rightarrow A_{y1} + D_{11} \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow D_{11} = 0.707 \quad (\theta\lambda\acute{\iota}\psi\eta)$$

$$\Sigma X=0 \Rightarrow D_{11} \sin 45^\circ + U_{11} = 0 \Rightarrow U_{11} = 0.5 \quad (\epsilon\phi\epsilon\lambda\kappa\upsilon\sigma\mu\acute{o}\varsigma)$$

Τομή 1-1

$$\Sigma M_C=0 \Rightarrow 8.0 \times A_{y1} + 4.0 \times O_{11} = 0 \Rightarrow O_{11} = 1.0 \quad (\theta\lambda\acute{\iota}\psi\eta)$$

$$\Sigma Y=0 \Rightarrow A_{y1} - D_{21} \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow D_{21} = 0.707 \quad (\epsilon\phi\epsilon\lambda\kappa\upsilon\sigma\mu\acute{o}\varsigma)$$

Δυνατό έργο εξωτερικών εντατικών μεγεθών: $W_{e1} = P_1 \times \delta_C = 1 \times \delta_C = \delta_C$

$$W_{i1} = \sum_{i=1}^7 \frac{N_i N_{i1} L_i}{EA}$$

Δυνατή ενέργεια παραμόρφωσης:

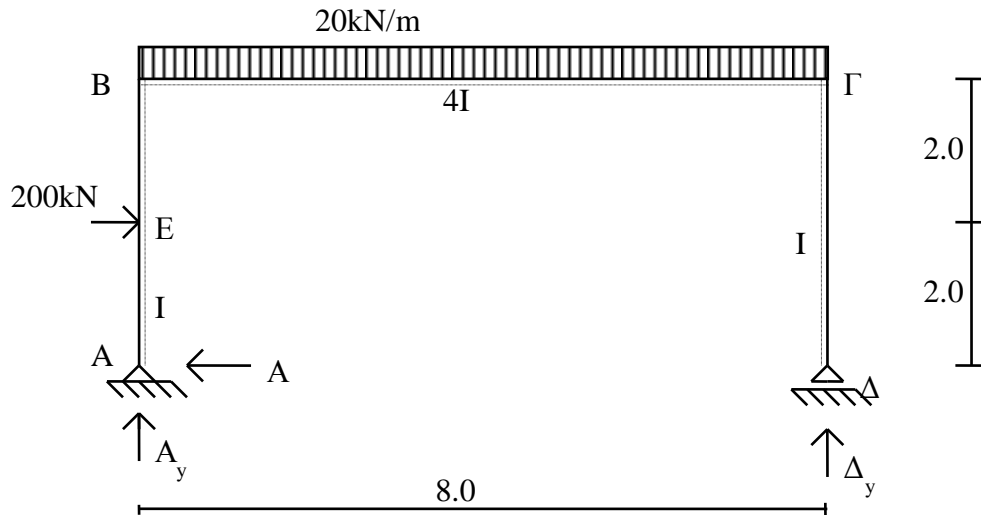
Αν οι εφελκυστικές δυνάμεις θεωρηθούν θετικές και οι θλιπτικές αρνητικές, λαμβάνεται:

$$W_{i1} = \frac{1}{10000} [2 \times (-14.14) \times (-0.707) \times 5.66 + 2 \times 10.0 \times 0.5 \times 8.0 + (-10.0) \times (-1.0) \times 8.0] = 0.0273$$

$$W_{e1} = W_{i1} \Rightarrow \delta_C = 0.0273\text{m} = 2.73\text{cm}$$

- 4.6.3. Στο πλαίσιο του σχήματος ζητούνται:
 - Η οριζόντια μετατόπιση u_B του ζυγώματος
 - Η στροφή φ_Γ του κόμβου Γ .

Δίδεται: $EI=10^5 \text{kNm}^2$



Υπολογισμός αντιδράσεων - κατασκευή διαγράμματος ροπών κάμψης M.

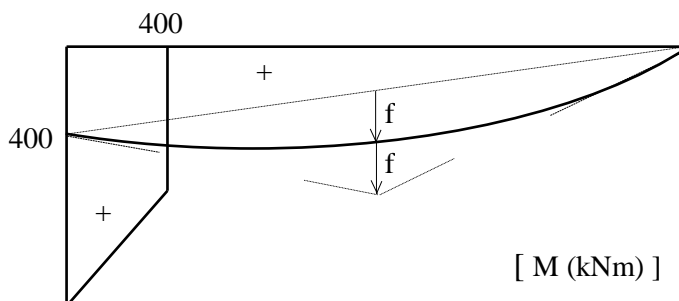
$$\Sigma M_\Delta = 0 \Rightarrow A_y \times 8.0 + 200.0 \times 2.0 - 20.0 \frac{8.0^2}{2} = 0 \Rightarrow A_y = 30.0 \text{kN}$$

$$\Delta_y = 20.0 \times 8.0 - 30.0 = 130.0 \text{kN} \quad A_x = 200.0 \text{kN}$$

$$M_{EA} = M_{EB} = 200.0 \times 2.0 = 400.0 \text{kNm}$$

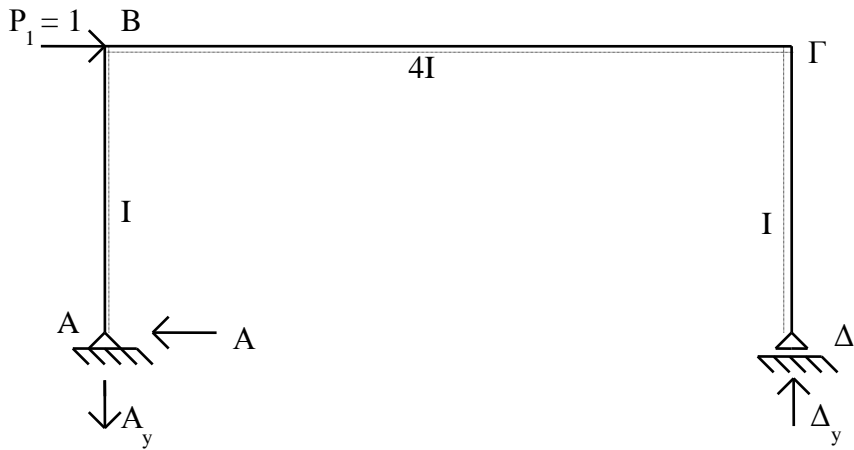
$$M_{BA} = M_{B\Gamma} = 200.0 \times 4.0 - 20.0 \times 2.0 = 400.0 \text{kNm}$$

$$M_{\Gamma B} = M_{\Gamma \Delta} = M_{\Delta \Gamma} = 0 \quad f = \frac{20.0 \times 8.0^2}{8} = 160 \text{kNm}$$



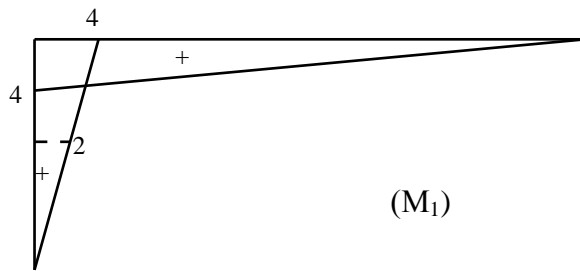
Υπολογισμός u_B :

Στατική επίλυση του φορέα για οριζόντια μοναδιαία δύναμη $P_1=1$ στο B.
 Κατασκευή διαγράμματος M_1 .



$$\Sigma M_{\Delta} = 0 \rightarrow A_y \times 8.0 - 1.0 \times 4.0 = 0 \rightarrow A_y = 0.5 \downarrow \rightarrow \Delta_y = 0.5 \uparrow$$

$$A_x = 1.0 \quad M_{BA} = M_{B\Gamma} = 1.0 \times 4.0 = 4.0 \quad M_{\Gamma B} = M_{\Gamma\Delta} = 0$$



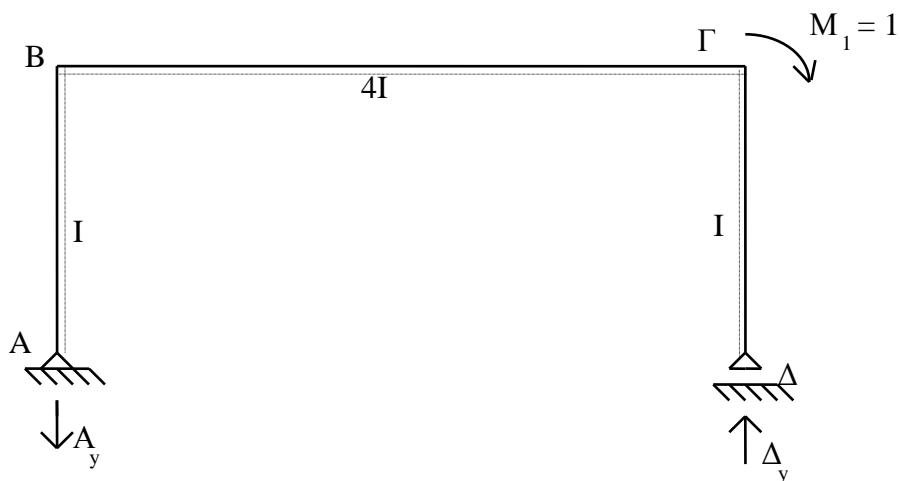
Εφαρμόζεται το θεώρημα των δυνατών έργων και με τη βοήθεια πινάκων λαμβάνεται:

$$u_B = \int_A^{\Delta} \frac{MM_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[\frac{2.0}{3} \times 2.0 \times 400.0 + \frac{2.0}{2} \times (2.0 + 4.0) \times 400.0 \right] +$$

$$+ \frac{1}{4EI} \left(\frac{8.0}{3} \times 4.0 \times 400.0 + \frac{8.0}{3} \times 4.0 \times 160.0 \right) = \frac{4427}{EI} = 0.0443m = 4.43cm$$

Υπολογισμός φ_{Γ} .

Επίλυση για μοναδιαία ροπή $M_1=1$ στο Γ . Κατασκευή διαγράμματος M_2 .

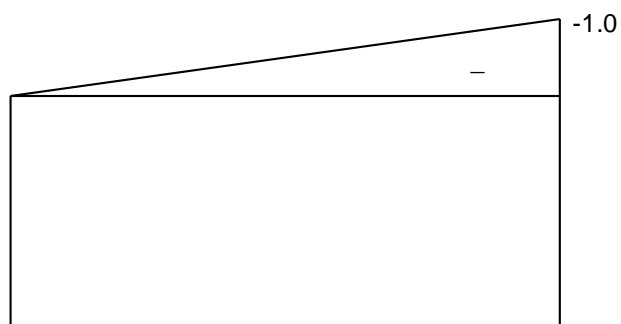


$$\Sigma M_{\Delta} = 0 \rightarrow A_y \times 8.0 - 1.0 = 0 \rightarrow A_y = 0.125 \downarrow \rightarrow \Delta_y = 0.125 \uparrow$$

$$A_x = 0 \Rightarrow M_{BA} = M_{B\Gamma} = 0$$

$$M_{\Gamma B} = -0.125 \times 8.0 = 1.0$$

$$M_{\Gamma \Delta} = -0.125 \times 8.0 + 1.0 = 0$$



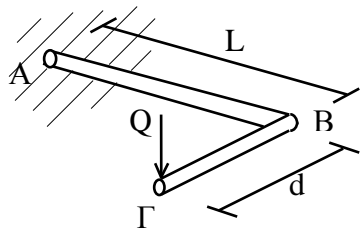
(M_2)

Εφαρμόζεται το θεώρημα των δυνατών έργων. Μέσω πινάκων λαμβάνεται:

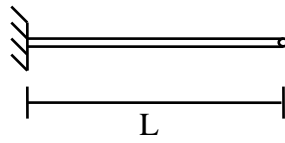
$$\varphi_{\Gamma} = \int_A^{\Delta} \frac{\Delta M M_2}{EI} ds = \frac{1}{4EI} \left[\frac{8.0}{6} \times (-1.0) \times 400.0 + \frac{8.0}{3} \times (-1.0) \times 160.0 \right] = -0.0024 \text{ rad}$$

Το αρνητικό πρόσημο στη στροφή φ_{Γ} σημαίνει ότι η φορά της φ_{Γ} είναι αντίθετη από τη φορά της μοναδιαίας ροπής $M_1=1$ του σχήματος.

4.6.4. Στο φορέα κυκλικής διατομής ακτίνας r του σχήματος, ζητείται η βύθιση δ του άκρου Γ . Δίδεται $G = 0.4E$.



Αξονομετρικό



Πλάγια όψη

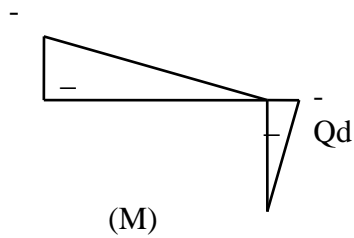


Κάτοψη

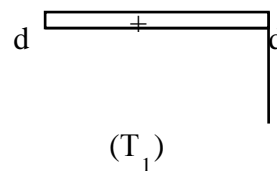
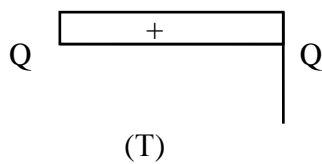
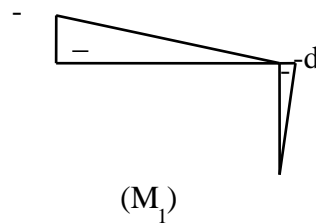
$$I = \frac{\pi r^4}{4} \quad I_p = \frac{\pi r^2}{2} \quad (\text{από Αντοχή Υλικών})$$

Διαγράμματα ροπών κάμψης M και ροπών στρέψης T

φόρτιση Q



φόρτιση $Q_1 =$



$$\delta = \int_A^{\Gamma} \frac{MM_1}{EI} ds + \int_A^{\Gamma} \frac{TT_1}{GI_p} ds = \frac{Q}{3EI} (d^3 + L^3) + \frac{Q}{0.4EI_p} d^2 L \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{4Q}{3\pi E r^4} (d^3 + L^3 + 3.75d^2L)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Μέθοδος των δυνάμεων.

5.1. Αρχή της επαλληλίας.

Ας θεωρηθεί ένας φορέας υποκείμενος σε ένα σύστημα δυνάμεων P_1 . Υπό την ενέργεια του P_1 εμφανίζονται στο φορέα αντιδράσεις R_1 , εσωτερικά εντατικά μεγέθη V_1, M_1, N_1 και μετατοπίσεις-στροφές δ_1, ϕ_1 .

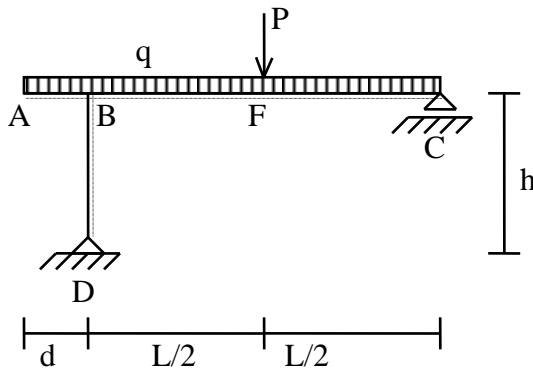
Ας υποθεθεί τώρα ότι ο φορέας υπόκειται σε ένα νέο σύστημα δυνάμεων P_2 υπό τη δράση του οποίου εμφανίζονται αντιδράσεις R_2 , εσωτερικά εντατικά μεγέθη V_2, M_2, N_2 και μετατοπίσεις-στροφές δ_2, ϕ_2 .

Αν οι παραμορφώσεις παραμένουν ελαστικές τότε, βάσει της αρχής της επαλληλίας, υπό τη σύγχρονη δράση των P_1 και P_2 εμφανίζονται στο φορέα αντιδράσεις R_1+R_2 , εσωτερικά εντατικά μεγέθη V_1+V_2 , M_1+M_2 , N_1+N_2 και μετατοπίσεις-στροφές $\delta_1+\delta_2$, $\phi_1+\phi_2$.

Η αρχή της επαλληλίας χρησιμοποιείται σε πολυάριθμες εφαρμογές στη στατική είτε για απλοποίηση προβλημάτων, είτε για στατική επίλυση υπερστατικών φορέων.

5.2. Εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας.

Στο φορέα του σχήματος ζητείται η στροφή ϕ του κόμβου B.

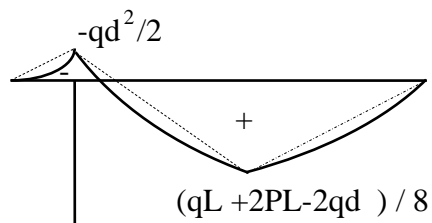


$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow C_y L + \frac{qd^2}{2} - \frac{PL}{2} - \frac{qL^2}{2} = 0 \Rightarrow C_y = \frac{qL^2 + PL - qd^2}{2L}$$

$$M_{FB} = M_{FC} = \frac{C_y L}{2} - \frac{q \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} = \frac{qL^2 + 2PL - 2qd^2}{8}$$

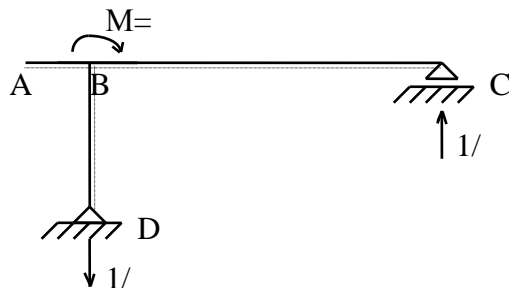
$$D_x = 0 \Rightarrow M_{BD} = 0 \Rightarrow M_{BA} = M_{BC} = -\frac{qd^2}{2}$$

Από τις παραπάνω τιμές προκύπτει το διάγραμμα ροπών κάμψης M του φορέα:



Διάγραμμα M

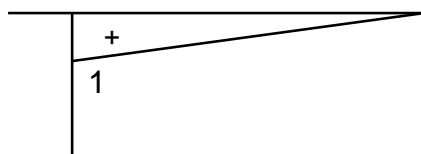
Εύρεση διαγράμματος M_1 για μοναδιαία φόρτιση $M=1$ στον κόμβο B .



$$D_x = 0 \Rightarrow M_{BD} = 0$$

$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow C_y L - 1 = 0 \Rightarrow C_y = \frac{1}{L} \uparrow \Rightarrow D_y = \frac{1}{L} \downarrow$$

$$M_{BA} = 0, M_{BC} = 1$$



Διάγραμμα M_1 .

Από τη μορφή του διαγράμματος M , είναι φανερό ότι η διαδικασία υπολογισμού της

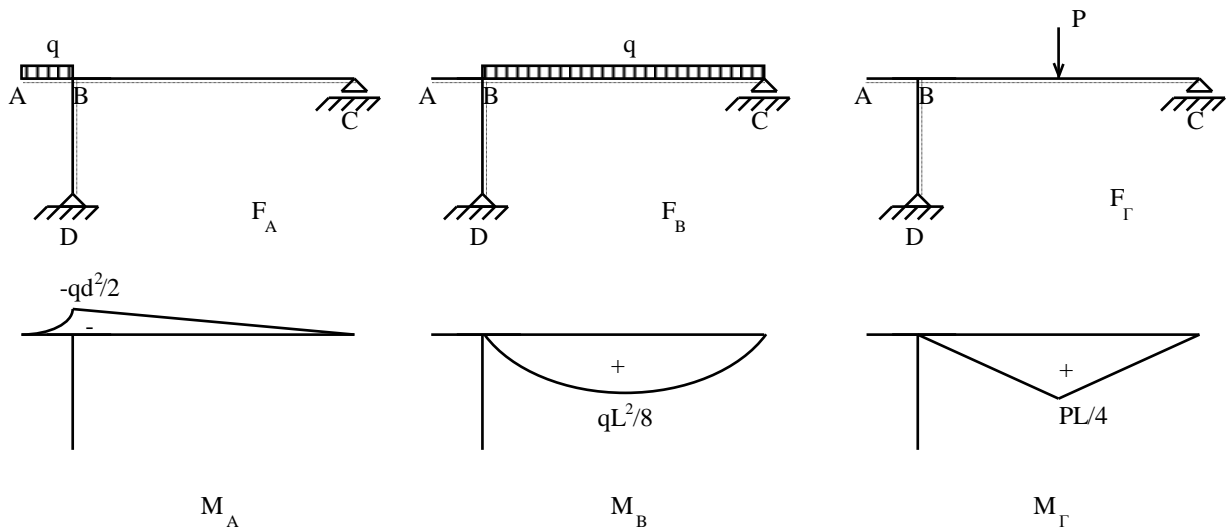
τιμής $\varphi_B = \int_0^L \frac{MM_1}{EI} ds$ είναι σχετικά κοπιώδης.

Οι υπολογισμοί απλουστεύονται σημαντικά αν η συνολική φόρτιση F αναλυθεί ως εξής:

- A. Σε μία φόρτιση q στον πρόβολο AB (φόρτιση F_A).
- B. Σε μία φόρτιση q στο άνοιγμα BC (φόρτιση F_B).
- Γ. Σε ένα συγκεντρωμένο φορτίο P στο μέσο του BC (φόρτιση F_Γ).

Είναι προφανές (αρχή της επαλληλίας) ότι ισχύει $F=F_A+F_B+F_\Gamma$ και κατά συνέπεια για το διάγραμμα M ισχύει: $M=M_A+M_B+M_\Gamma$.

Οι φορτίσεις A,B,Γ και τα αντίστοιχα διαγράμματα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Η στροφή φ_B υπολογίζεται εύκολα με τη βοήθεια των πινάκων:

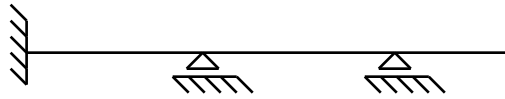
$$\varphi_B = \int_A^C \frac{MM_1}{EI} ds = \int_A^C \left(\frac{M_A M_1}{EI} + \frac{M_B M_1}{EI} + \frac{M_\Gamma M_1}{EI} \right) ds \Rightarrow$$

$$\varphi_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{L}{3} \left(-\frac{qd^2}{2} \right) 1 + \frac{L}{3} \frac{qL^2}{8} 1 + \frac{L}{4} \frac{PL}{4} 1 \right] \Rightarrow$$

$$\varphi_B = \frac{L}{48EI} (2qL^2 + 3PL - 8qd^2)$$

5.3. Βασικός φορέας (ή κύριο σύστημα) δοθέντος υπερστατικού.

Ας θεωρηθεί ένας φορέας n φορές υπερστατικός. Καλείται βασικός φορέας ένας ισοστατικός φορέας ο οποίος προκύπτει από το δοθέντα υπερστατικό μετά από την αφαίρεση n αντιδράσεων ή την προσθήκη αντίστοιχου αριθμού εξισώσεων (π.χ. με εισαγωγή αρθρώσεων) ή με συνδυασμό των παραπάνω. Είναι αυτονόητο ότι σε κάθε υπερστατικό αντιστοιχούν περισσότεροι του ενός βασικοί.

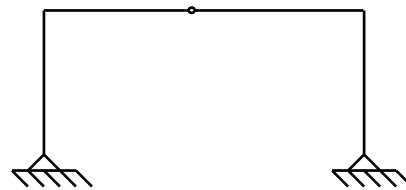
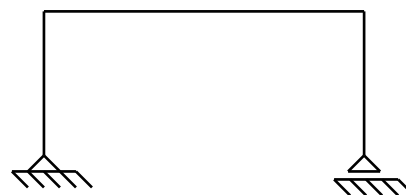
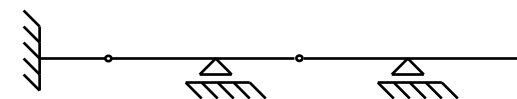
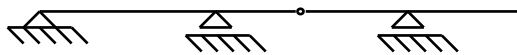
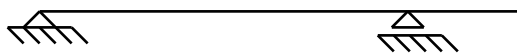
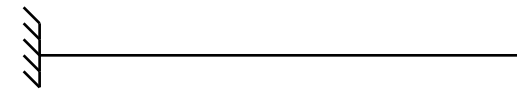


2 φορές υπερστατικός φορέας



3 φορές υπερστατικός φορέας

Βασικοί φορείς



5.4. Αρχή της μεθόδου των δυνάμεων.

Εστω ένας φορέας n φορές υπερστατικός. Αφαιρώντας n αντιδράσεις (ή εσωτερικά εντατικά μεγέθη) $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_n$ προκύπτει ένας βασικός φορέας του δοθέντος υπερστατικού.

Αν ονομασθεί M_0 το διάγραμμα ροπών κάμψης του **βασικού** φορέα λόγω εξωτερικής φόρτισης και M_i ($i=1, \nu$) το διάγραμμα ροπών κάμψης του **βασικού** φορέα λόγω μοναδιαίας φόρτισης στη θέση της ισοτής καταργηθείσας αντίδρασης, τότε, βάσει της αρχής της επαλληλίας, ισχύει:

$$M(x) = M_0(x) + R_1 M_1(x) + R_2 M_2(x) + \dots + R_i M_i(x) + \dots + R_\nu M_\nu(x)$$

Ας εφαρμοσθεί τώρα ν φορές το θεώρημα των δυνατών έργων θεωρώντας:

-Πεδίο μετατοπίσεων τις **πραγματικές** μετατοπίσεις του φορέα.

-Πεδίο δυνατών τάσεων το οφειλόμενο σε μοναδιαία φόρτιση στη θέση της ισοτής καταργηθείσας αντίδρασης.

-Οτι οι πραγματικές μετατοπίσεις δ_i του φορέα στις θέσεις των αντιδράσεων R_i που καταργήθηκαν είναι μηδενικές.

Προκύπτει έτσι ένα σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους (τις αντιδράσεις R_1, R_2, \dots, R_ν) της μορφής:

$$\delta_1=0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M M_1}{EI} ds = 0 \Rightarrow I_{10} + R_1 I_{11} + R_2 I_{12} + \dots + R_i I_{1i} + \dots + R_\nu I_{1\nu} = 0$$

$$\delta_2=0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M M_2}{EI} ds = 0 \Rightarrow I_{20} + R_1 I_{21} + R_2 I_{22} + \dots + R_i I_{2i} + \dots + R_\nu I_{2\nu} = 0$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\delta_i=0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M M_i}{EI} ds = 0 \Rightarrow I_{i0} + R_1 I_{i1} + R_2 I_{i2} + \dots + R_i I_{ii} + \dots + R_\nu I_{i\nu} = 0$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

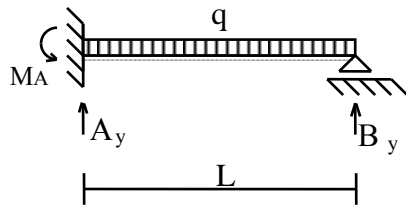
$$\delta_\nu=0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M M_\nu}{EI} ds = 0 \Rightarrow I_{\nu 0} + R_1 I_{\nu 1} + R_2 I_{\nu 2} + \dots + R_i I_{\nu i} + \dots + R_\nu I_{\nu \nu} = 0$$

$$\text{όπου } I_{ij} = I_{ji} = \int_0^L \frac{M_i M_j}{EI} ds \quad (0 \leq i, j \leq \nu)$$

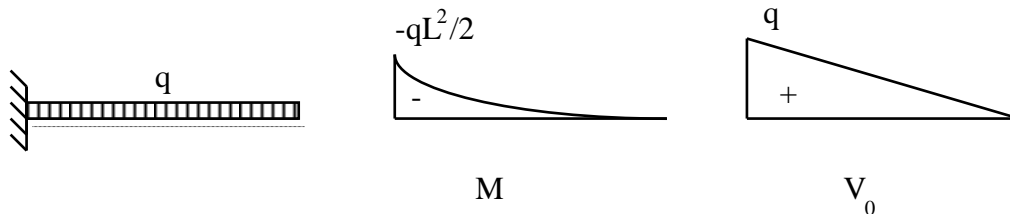
Δεδομένου ότι τα διαγράμματα M_i , $i=1, \nu$ μπορούν να χαραχθούν, υπολογίζονται αρχικά τα ολοκληρώματα I_{ij} και ακολούθως επιλύεται το σύστημα. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων I_{ij} απλοποιείται σημαντικά με τη βοήθεια των σχετικών πινάκων (Πίνακας 1).

5.5. Εφαρμογές

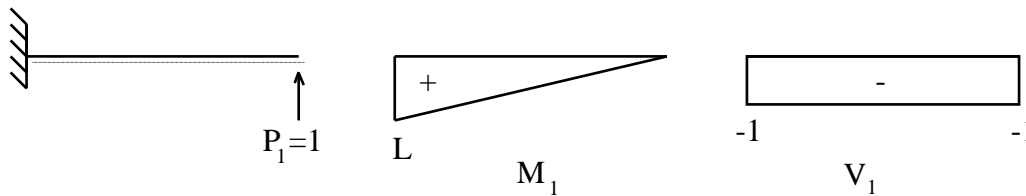
5.5.1. Να υπολογισθούν τα διαγράμματα V,M της μονόπακτης δοκού του σχήματος (Φορέας μία φορά υπερστατικός).



A. Εκλογή βασικού φορέα: εκλέγεται σαν άγνωστο υπερστατικό μέγεθος η αντίδραση B_y και κατασκευάζονται τα διαγράμματα.

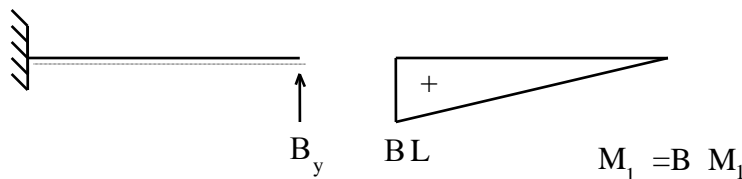


B. Υπολογισμός βύθισης δ στο άκρο B του βασικού λόγω εξωτερικής φόρτισης.



$$\delta = I_{01} = \int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{L}{4EI} \left(-\frac{qL^2}{2} \right) L = -\frac{qL^4}{8EI}$$

Γ. Εύρεση κατακόρυφης μετατόπισης δ' στο άκρο B λόγω φόρτισης ίσης με B_y στο B.



$$\delta' = \int \frac{M_1 M_1'}{EI} dx = B_y \int \frac{M_1^2}{EI} dx = B_y I_{11} = B_y \frac{L}{3EI} L^2 = B_y \frac{L^3}{3EI}$$

Δ. Επαλληλία φορτίσεων: Ο αρχικός φορέας μπορεί να προκύψει από επαλληλία του βασικού και της φόρτισης ίσης με B_y στο B. Κατά συνέπεια, και με δεδομένο ότι στον αρχικό φορέα η κατακόρυφη μετατόπιση του B είναι μηδέν, μπορεί να γραφεί:

$$\delta + \delta' = 0 \Rightarrow I_{01} + B_y I_{11} = 0$$

Παρατηρείται ότι η σχέση αυτή, που επιτρέπει τον υπολογισμό της B_y , είναι ίδια με το σύστημα εξισώσεων της προηγούμενης παραγράφου για έναν άγνωστο ($n=1$).

Αντικαθιστώντας λαμβάνεται:

$$-\frac{qL^4}{8EI} + B_y \frac{L^3}{3EI} = 0 \Rightarrow B_y = \frac{3qL}{8}$$

Ε. Χάραξη διαγραμμμάτων.

Ο καθορισμός της B_y οδηγεί εύκολα στη χάραξη των διαγραμμμάτων. Διακρίνονται δύο τρόποι:

α) Με τη βοήθεια των εκφράσεων:

$$M = M_0 + B_y M_1$$

$$V = V_0 + B_y V_1$$

από όπου:

$$M_{AB} = -\frac{qL^2}{2} + \frac{3qL}{8}L = -\frac{qL^2}{8}$$

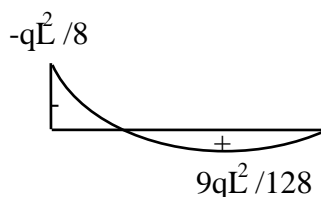
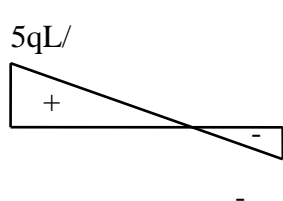
$$V_{AB} = qL + \frac{3qL}{8}(-1) = \frac{5qL}{8} \quad V_{BA} = 0 + \frac{3qL}{8}(-1) = -\frac{3qL}{8}$$

β) Της B_y γνωστής, με τη βοήθεια των εξισώσεων ισορροπίας που οδηγούν στον καθορισμό των υπολοίπων αντιδράσεων:

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow A_y = qL - \frac{3qL}{8} = \frac{5qL}{8}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \frac{3qL}{8}L - \frac{qL^2}{2} - M_A = 0 \Rightarrow M_A = -\frac{qL^2}{8}$$

Τα διαγράμματα μπορούν εύκολα να χαραχθούν εν συνεχεία:

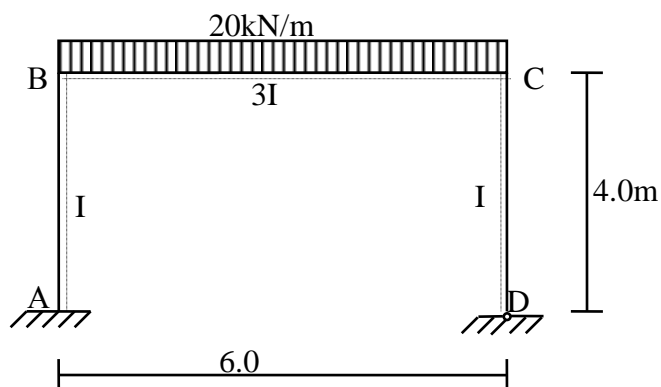


Διάγραμμα τεμνουσών V

Διάγραμμα ροπών κάμψης M

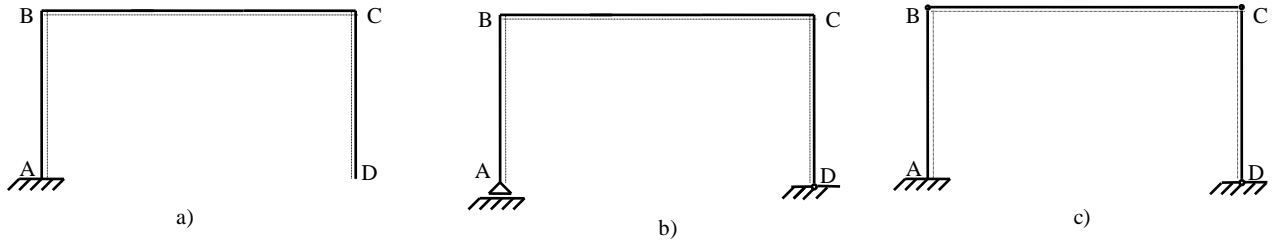
$$\text{Υπολογισμός μέγιστης ροπής: } \max M = 0 + \frac{\left(-\frac{3qL}{8}\right)^2}{2q} = \frac{9qL^2}{128}$$

5.5.2. Να υπολογισθούν τα διαγράμματα V, M, N του πλαισίου του σχήματος (Φορέας 2 φορές στατικά αόριστος).

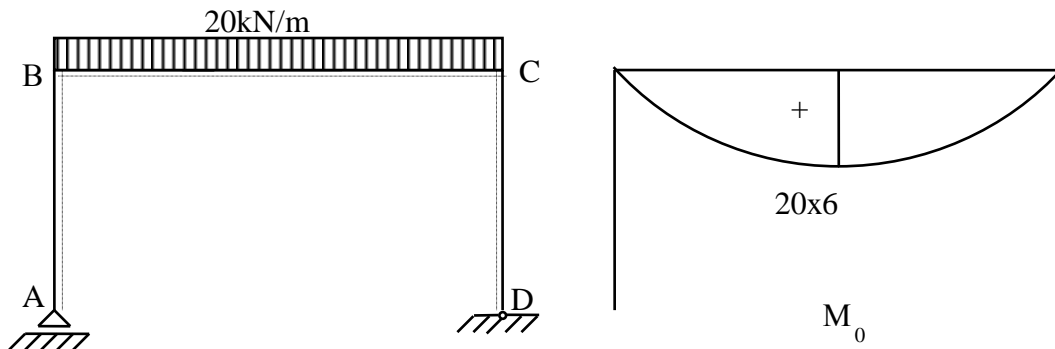


Για τη στατική επίλυση του παραπάνω φορέα, ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην κατάλληλη επιλογή του βασικού φορέα ώστε τα προκύπτοντα διαγράμματα ροπών κάμψης να έχουν την απλούστερη δυνατή μορφή, έτσι ώστε να απλοποιηθεί η διαδικασία υπολογισμού των ολοκληρωμάτων του τύπου I_{II} . Είναι προφανές ότι το παραπάνω κριτήριο πρέπει να αποτελεί το γνώμονα επιλογής του βασικού φορέα για όλους τους υπερστατικούς φορείς.

Για το συγκεκριμένο φορέα φαίνεται ότι οι βασικοί φορείς b) και c) είναι σκόπιμο να προτιμηθούν του a) λόγω απλούστερης μορφής του προκύπτοντος διαγράμματος M_0 .

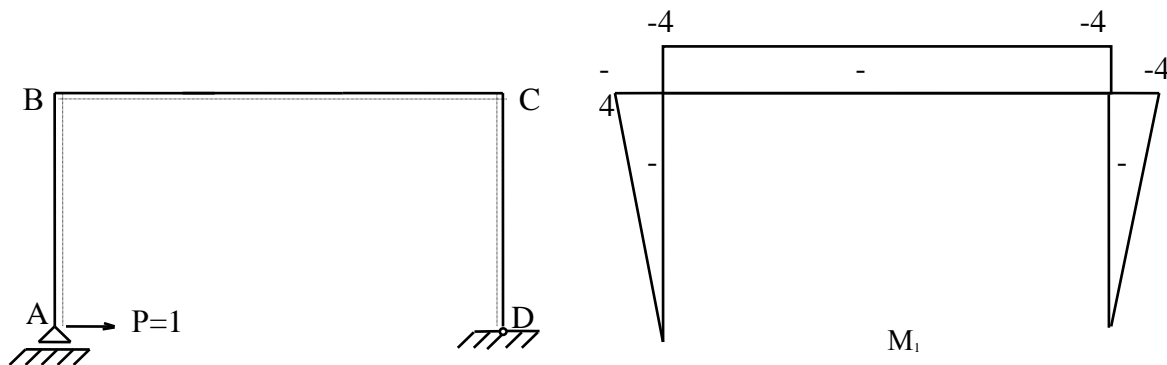


Εκλέγεται ως βασικός φορέας ο φορέας b). Το διάγραμμα M_0 κατασκευάζεται εύκολα:



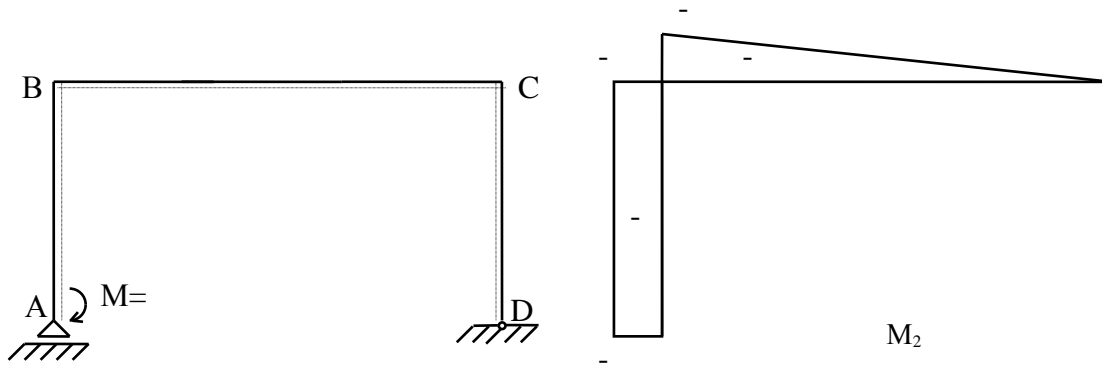
$$\Sigma X = 0 \Rightarrow A_x = 0 \Rightarrow M_{BA} = M_{BC} = M_{CB} = M_{CD} = 0$$

Ακολουθώντας κατασκευάζεται το διάγραμμα M_1 που αντιστοιχεί σε μοναδιαία οριζόντια δύναμη στο βασικό στη στήριξη A.



$$\Sigma X = 0 \Rightarrow D_x = 1 \Rightarrow M_{BA} = M_{BC} = M_{CB} = M_{CD} = -4.0$$

Τέλος, κατασκευάζεται το διάγραμμα M_2 που αντιστοιχεί σε μοναδιαία ροπή στη στήριξη A.



$$M_{BA} = M_{BC} = -1.0$$

$$M_{CB} = M_{CD} = 0$$

Ο υπολογισμός των υπερστατικών αγνώστων αντιδράσεων A_y και M_A γίνεται βάσει των σχέσεων της προηγούμενης παραγράφου:

$$I_{10} + A_y I_{11} + M_A I_{12} = 0 \quad (I)$$

$$I_{20} + A_y I_{21} + M_A I_{22} = 0 \quad (II)$$

$$I_{10} = \int_A^D \frac{M_0 M_1}{EI} ds = \frac{1}{3EI} \frac{2 \times 6.0}{3} \times 90.0 \times (-4.0) = -\frac{480.0}{EI}$$

$$I_{11} = \int_A^D \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{1}{3EI} \times 6.0 \times (-4.0)^2 + \frac{2}{EI} \frac{4.0}{3} \times (-4.0)^2 = \frac{74.67}{EI}$$

$$I_{12} = \int_A^D \frac{M_1 M_2}{EI} ds = \frac{1}{3EI} \frac{6.0}{2} (-4.0) \times (-1.0) + \frac{1}{EI} \frac{4.0}{2} (-4.0) \times (-1.0) = \frac{12.0}{EI} = I_{21}$$

$$I_{20} = \int_A^D \frac{M_0 M_2}{EI} ds = \frac{1}{3EI} \frac{6.0}{3} \times 90.0 \times (-1.0) = -\frac{60.0}{EI}$$

$$I_{22} = \int_A^D \frac{M_2^2}{EI} ds = \frac{1}{3EI} \frac{6.0}{3} (-1.0)^2 + \frac{1}{EI} 4.0 (-1.0)^2 = \frac{4.67}{EI}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στις σχέσεις (I) και (II) και επιλύοντας το προκύπτον σύστημα εξάγονται οι τιμές των αντιδράσεων A_x και M_A .

$$A_x = 7.43 \text{ kN} \quad M_A = -6.27 \text{ kNm}$$

Το αρνητικό πρόσημο της M_A σημαίνει ότι η φορά της αντίδρασης M_A είναι αντίθετη από την αυθαίρετα εκλεγείσα φορά της μοναδιαίας ροπής.

Διαγράμματα.

$$M_{BA} = M_{BC} = 6.27 - 7.43 \times 4.0 = -23.45 \text{ kNm} \quad \Sigma X = 0 \Rightarrow D_x = 7.43 \text{ kN} \leftarrow$$

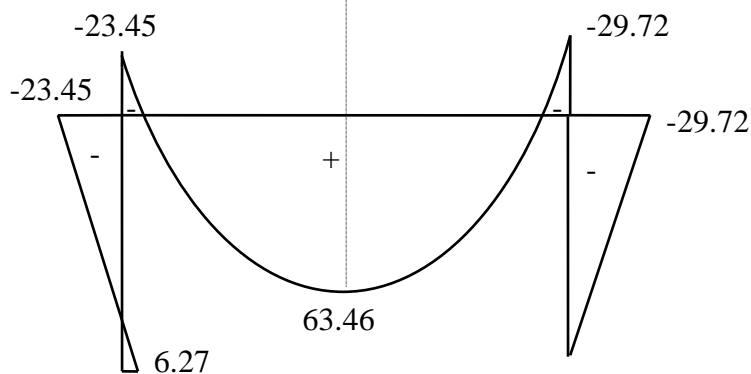
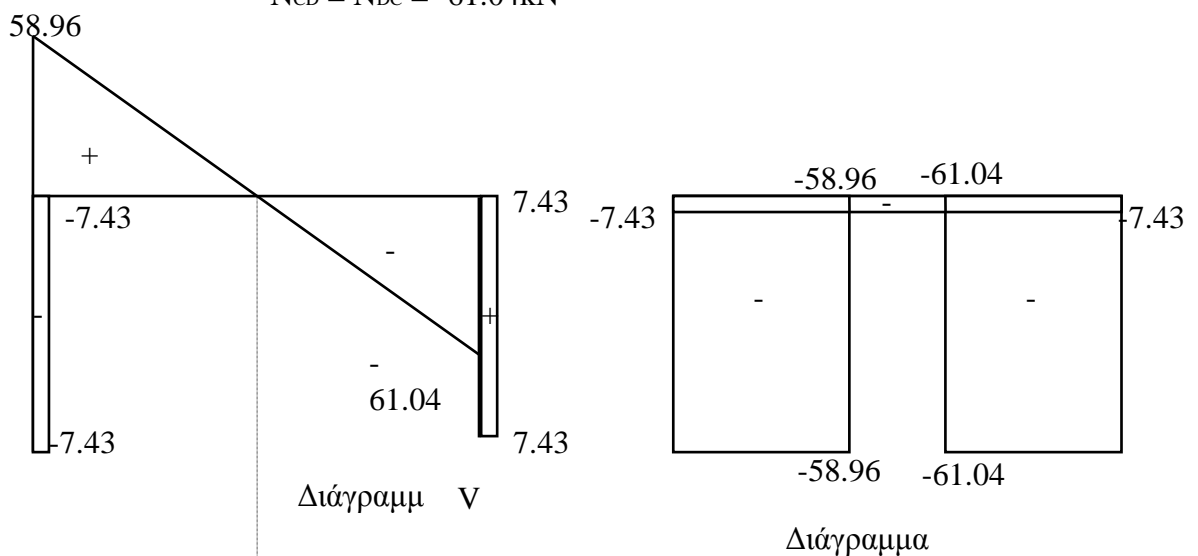
$$M_{CB} = M_{CD} = -7.43 \times 4.0 = -29.72 \text{ kNm} \quad V_{AB} = V_{BA} = -7.43 \text{ kN}$$

$$V_{BC} = \frac{20 \times 6.0}{2} + \frac{-29.72 + 23.45}{6.0} = 58.96 \text{ kN}$$

$$V_{CB} = 58.96 - 20.0 \times 6.0 = -61.04 \text{ kN} \quad V_{CD} = V_{DC} = 7.43 \text{ kN}$$

$$N_{AB} = N_{BA} = -58.96 \text{ kN} \quad N_{BC} = N_{CB} = -7.43 \text{ kN}$$

$$N_{CD} = N_{DC} = -61.04 \text{ kN}$$



$$\max M = -23.45 + \frac{58.96^2}{2 \times 20.0} = 63.46 \text{ kNm}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Γραμμές επιρροής υπερστατικών φορέων

6.1. Θεώρημα αμοιβαιότητας Maxwell-Betti

Ας θεωρηθεί ένας φορέας υποκείμενος στη σύγχρονη δράση δύο συστημάτων δυνάμεων F_i και Φ_j .

Αρχίζοντας από τον αφόρτιστο φορέα, ας εφαρμοσθεί μόνον το σύστημα F_i . Ας υποτεθεί ότι οι μετατοπίσεις των σημείων εφαρμογής του συστήματος δυνάμεων F_i κατά τη διεύθυνση των F_i είναι d_i και ότι οι μετατοπίσεις των σημείων εφαρμογής του συστήματος δυνάμεων Φ_j κατά τη διεύθυνση των Φ_j είναι d_j .

Ομοίως, υπό τη δράση μόνον του συστήματος Φ_j οι μετατοπίσεις του Φ_j είναι δ_j και οι μετατοπίσεις του F_i είναι δ_i .



Ας υπολογισθεί το έργο W των εξωτερικών δυνάμεων με δύο διαφορετικούς τρόπους:

1. Εφαρμόζεται πρώτα το σύστημα F_i και ακολούθως το σύστημα Φ_j . Κατά τη φάση εφαρμογής τους οι δυνάμεις F_i, Φ_j μεταβάλλονται από 0 μέχρι F_i, Φ_j ενώ κατά τη φάση εφαρμογής των Φ_j , οι F_i παραμένουν σταθερές. Κατ' αυτόν τον τρόπο:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i F_i d_i + \sum_i F_i \delta_i + \frac{1}{2} \sum_j \Phi_j \delta_j$$

2. Αν εφαρμοσθεί πρώτα το Φ_j και ακολούθως το F_i προκύπτει:

$$W = \frac{1}{2} \sum_j \Phi_j \delta_j + \sum_j \Phi_j d_j + \frac{1}{2} \sum_i F_i d_i$$

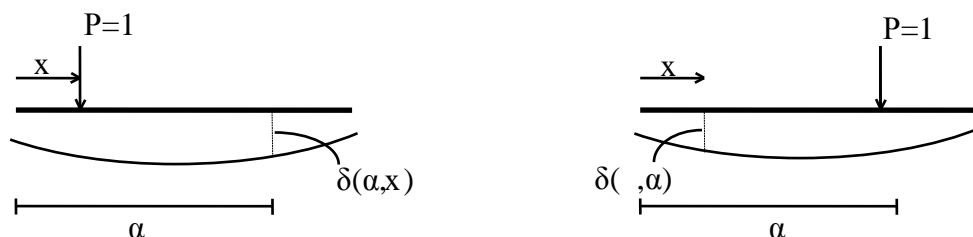
Εξισώνοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει η σχέση που συνιστά το θεώρημα αμοιβαιότητας Maxwell - Betti.

$$\sum_i F_i \delta_i = \sum_j \Phi_j d_j \quad 6.1.$$

Σε έναν ελαστικό φορέα, το έργο ενός συστήματος δυνάμεων F λόγω μετατοπίσεων οφειλόμενων σε ένα σύστημα δυνάμεων Φ ισούται με το έργο του συστήματος Φ λόγω μετατοπίσεων οφειλόμενων στο σύστημα F .

6.2 Εύρεση γραμμών επιρροής υπεραστικών φορέων.

6.2.1 Γραμμές επιρροής μετατόπισης.



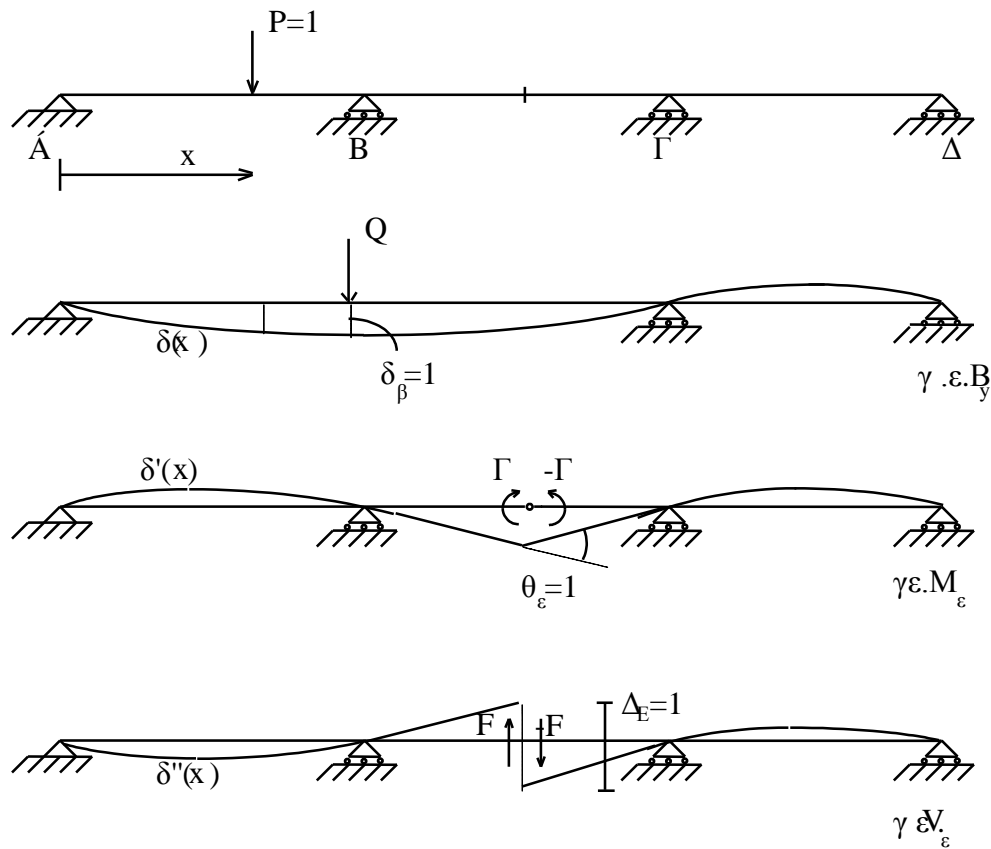
Η γραμμή επιρροής της μετατόπισης $\delta(a,x)$ μιας διατομής Ω τετμημένης a , οφειλόμενη σε φόρτιση $P = 1$ που εφαρμόζεται σε μια μεταβλητή διατομή τετμημένης x είναι η ελαστική γραμμή $\delta(x,a)$ του φορέα υπό την επίδραση μοναδιαίας δύναμης $P = 1$ εφαρμοζόμενης στη σταθερή διατομή Ω .

Τα παραπάνω είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος της αμοιβαιότητας καθώςον:

$$\delta(a,x) = \delta(x,a)$$

6.2.2. Γραμμές επιρροής αντιδράσεων - εσωτερικών εντατικών μεγεθών.

Για λόγους απλότητας αναφέρεται το παράδειγμα μίας συνεχούς δοκού ΑΒΓΔ.



α) Γραμμή επιρροής B_y .

Εξετάζεται ο φορέας που προκύπτει αν, από τη συνεχή δοκό ΑΒΓΔ, αφαιρεθεί η στήριξη Β. Στο σημείο Β επιβάλλεται κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο Q, τέτοιο ώστε να προκαλείται (πάντα στο σημείο Β) μοναδιαία βύθιση $\delta_B=1$. Αν $\delta(x)$ η προκύπτουσα ελαστική γραμμή, το θεώρημα της αμοιβαιότητας εφαρμοζόμενο σ' αυτήν τη φόρτιση και στη φόρτιση της πραγματικής συνεχούς δοκού δίνει:

$$P \times \delta(x) - B_y(x) \times \delta_B = Q \times 0 \Rightarrow B_y(x) = \delta(x)$$

Η γραμμή επιρροής της **αντίδρασης** B_y είναι η **ελαστική γραμμή** του φορέα που προκύπτει **αφαιρώντας από τον αρχικό τη στήριξη Β**, υπό την επίδραση στο Β **μίας δύναμης Q**, κατά τη διεύθυνση της B_y , τέτοιας ώστε να προκύπτει στο Β **μοναδιαία βύθιση $\delta_B=1$** .

Ο καθορισμός του φορτίου Q που αναφέρεται παραπάνω μπορεί να γίνει με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας: Φορτίζεται ο φορέας με φόρτιση $Q_0=1$ στο B . Αν d_B είναι η προκύπτουσα βύθιση στο B και $d(x)$ η ελαστική γραμμή, τότε:

$$Q = 1/d_B \quad \text{και} \quad B_y(x) = \delta(x) = Q \times d(x) = d(x) / d_B$$

Γενικεύοντας, για τον υπολογισμό της γραμμής επιρροής μιας αντίδρασης:

- Θεωρείται ο φορέας που προκύπτει από τον αρχικό αφαιρώντας τη συγκεκριμένη στήριξη.

- Στον παραπάνω φορέα επιβάλλεται μοναδιαία φόρτιση στη θέση της καταργηθείσας στήριξης και υπολογίζεται η προκύπτουσα ελαστική γραμμή $d(x)$.

- Αν d_B η προκύπτουσα βύθιση στο B , η γραμμή επιρροής B_y δίνεται:

$$B_y(x) = d(x)/d_B$$

β) Γραμμή επιρροής M_E .

Εισάγεται στο E μία άρθρωση και εφαρμόζεται αριστερά μία ροπή Γ και δεξιά μία ροπή $-\Gamma$, τέτοιες ώστε η προκαλούμενη σχετική στροφή θ_E στο E να είναι μοναδιαία. Αν η ελαστική γραμμή του φορέα είναι $d'(x)$, τότε, βάσει της αρχής της αμοιβαιότητας, ισχύει:

$$P \times d'(x) - M_E(x) \times \theta_E = 0 \Rightarrow M_E(x) = d'(x)$$

Με ανάλογο τρόπο με προηγουμένως, αν $d'(x)$ η ελαστική γραμμή που προκύπτει από δύο μοναδιαίες ροπές αντίθετης φοράς γύρω από το E και φ_E η προκύπτουσα σχετική στροφή, μπορεί να γραφεί:

$$M_E(x) = d'(x) = d'(x)/\varphi_E$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό γραμμής επιρροής ροπής σε ένα σημείο E ολόσωμου φορέα:

- Εισάγεται στο σημείο E μία άρθρωση.

- Γύρω από την εισαχθείσα άρθρωση στο E , επιβάλλονται δύο μοναδιαίες αντίρροπες ροπές και υπολογίζεται η προκύπτουσα ελαστική γραμμή $d'(x)$.

- Αν φ_E η προκύπτουσα σχετική στροφή στο E , η γραμμή επιρροής $M_E(x)$ δίνεται:

$$M_E(x) = d'(x)/\varphi_E$$

γ) Γραμμή επιρροής V_E .

Ομοίως, εισάγεται στο φορέα μία τομή στο E, που επιτρέπει την κατακόρυφη σχετική μετατόπιση Δ_E των άκρων $E_{αρ}$ και $E_{δεξ}$. Εφαρμόζοντας αριστερά του E μία δύναμη F και δεξιά μία δύναμη -F τέτοιες ώστε $\Delta_E=1$, τότε αν $d''(x)$ η ελαστική γραμμή που προκύπτει από την παραπάνω φόρτιση:

$$P \times d''(x) - V_E(x) \times \Delta_E = 0 \Rightarrow V_E(x) = d''(x)$$

Κατ' αναλογία με προηγουμένως, αν $d''(x)$ η ελαστική γραμμή που αντιστοιχεί σε μοναδιαίες δυνάμεις αριστερά και δεξιά του E, τότε μπορεί να γραφεί:

$$V_E(x) = d''(x) / D_E$$

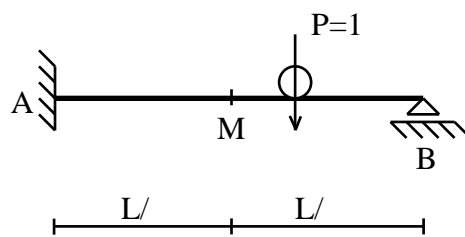
όπου D_E η αντίστοιχη κατακόρυφη σχετική μετατόπιση των άκρων $E_{αρ}$ και $E_{δεξ}$.

Είναι σαφές ότι όλα τα προαναφερθέντα μπορούν να εφαρμοσθούν και σε ισοστατικούς φορείς. Σε ισοστατικούς φορείς όμως η αφαίρεση στηρίξεων ή η εισαγωγή αρθρώσεων οδηγεί σε μηχανισμούς των οποίων τα χωριζόμενα τμήματα μετατοπίζονται απαραμόρφωτα. Για το λόγο αυτό, οι γραμμές επιρροής των ισοστατικών φορέων αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα ενώ των υπερστατικών από καμπύλες.

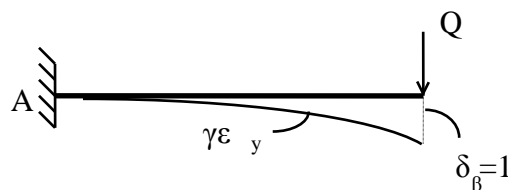
Αν ο φορέας που προκύπτει μετά την αφαίρεση στήριξης - εισαγωγή άρθρωσης - εισαγωγή τομής είναι ισοστατικός η ελαστική γραμμή υπολογίζεται κατά το κεφάλαιο

4. Ο υπολογισμός της ελαστικής γραμμής υπερστατικών φορέων αναφέρεται στο επόμενο κεφάλαιο.

6.3. Εφαρμογή: Υπολογισμός γραμμών επιρροής μονόπακτης δοκού.



6.3.1. Γραμμή επιρροής $B_y = n_1$

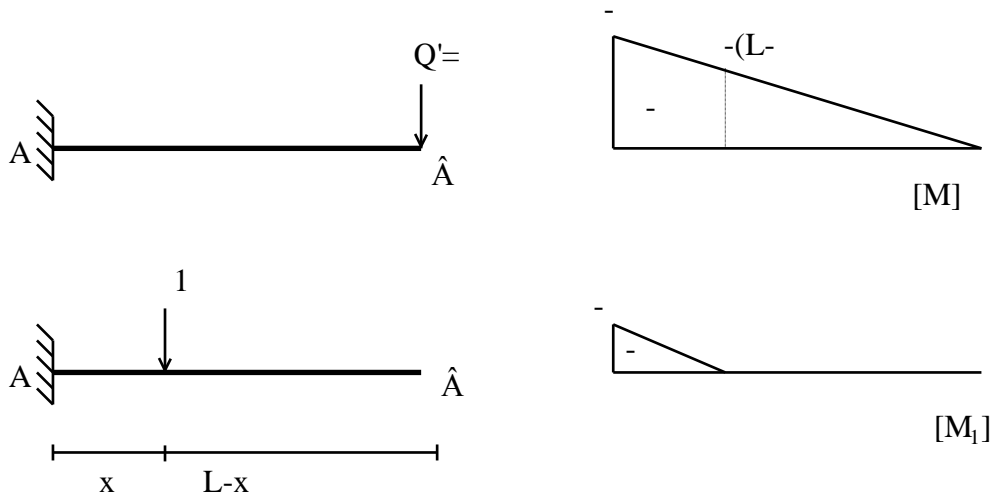


Η γραμμή επιρροής n_1 της αντίδρασης B_y είναι η ελαστική γραμμή του προβόλου με φορτίο Q τέτοιο ώστε να προκύπτει $\delta_B=1$. Για τον υπολογισμό της, τίθεται στο σημείο B μοναδιαίο φορτίο $Q'=1$ και καθορίζεται η ελαστική γραμμή n_1' και η αντίστοιχη βύθιση δ_B' . Η n_1 προκύπτει από τη n_1' από τη σχέση:

$$n_1 = n_1' / \delta_B'$$

-Καθορισμός n_1' .

Κατασκευάζεται το διάγραμμα M λόγω μοναδιαίας κατακόρυφης φόρτισης $Q'=1$ στο B και ακολούθως το διάγραμμα M_1 οφειλόμενο σε μοναδιαία κατακόρυφη φόρτιση σε τυχούσα θέση σε απόσταση x από την πάκτωση.



Η ελαστική γραμμή n_1' υπολογίζεται με εφαρμογή του θεωρήματος των δυνατών έργων:

$$n_1'(x) = \int_0^L \frac{MM_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[\frac{x}{6} (-x) \{2(-L) - (L-x)\} \right] = \frac{L^3}{6EI} (3w^2 - w^3)$$

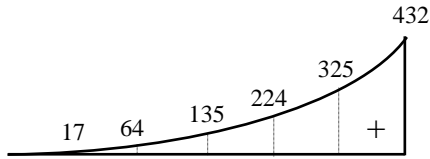
όπου $w = x/L$

Η βύθιση δ_B' στο B προκύπτει για $w = 1$.

$$\delta_B' = n_1'(1) = \frac{L^3}{3EI} \Rightarrow n_1(x) = \frac{n_1'(x)}{\delta_B'} = \frac{1}{2} (3w^2 - w^3)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούν να υπολογισθούν οι τιμές της γραμμής επιρροής $n_1(x)$ της αντίδρασης B_y για οποιοδήποτε x και να χαραχθεί η αντίστοιχη καμπύλη. Ενδεικτικά υπολογίζονται εδώ οι τιμές ανά $L/6$.

w	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
$n_1(x)$	0	17/432	64/432	135/432	224/432	325/432	1



Γραμμή επιρροής $B_y = n_1(x)$. Οι τεταγμένες είναι πολλαπλασιασμένες επί 432.

6.3.2. Γραμμή επιρροής $A_y = n_2$

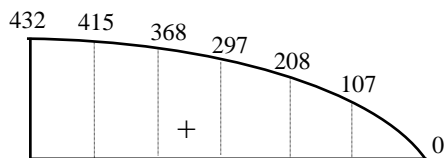
Για τον καθορισμό της γραμμής επιρροής της αντίδρασης A_y πρέπει να εφαρμοσθεί στο A , ανάλογα με προηγουμένως, ένα φορτίο Q και να υπολογισθεί η προκύπτουσα ελαστική γραμμή. Η διαδικασία αυτή μπορεί να απλοποιηθεί δεδομένου ότι ισχύει:

$$A_y = 1 - B_y$$

και συνεπώς οι τιμές της $n_2(x)$ προκύπτουν εύκολα από τις τιμές της $n_1(x)$ που έχουν ήδη υπολογισθεί. Ανά $L/6$ εξάγεται ο παρακάτω πίνακας από τη σχέση:

$$n_2(x) = 1 - n_1(x)$$

w	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
$n_2(x)$	1	415/432	368/432	297/432	208/432	107/432	0



Γραμμή επιρροής $A_y = n_2(x)$. Οι τεταγμένες είναι πολλαπλασιασμένες επί 432.

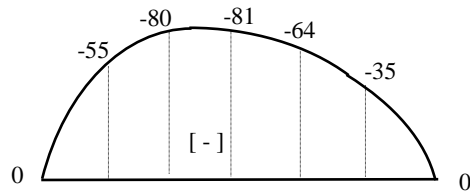
6.3.3. Γραμμή επιρροής $M_A = n_3$

Προφανώς ισχύει: $M_A = -Px + B_y L$

και κατά συνέπεια: $n_3(x) = -x + n_1(x)L$

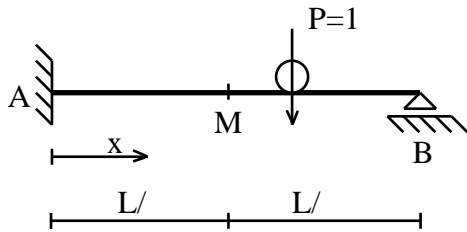
Ανά $L/6$ λαμβάνεται:

w	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
$n_3(x)$	0	-55L/432	-80L/432	-81L/432	-64L/432	-35L/432	0



Γραμμή επιρροής $M_A = n_3(x)$. Οι τεταγμένες είναι πολλαπλασιασμένες επί $432/L$.

6.3.4. Γραμμή επιρροής $M_M = n_4(x)$



Από τις σχέσεις: $M_M = B_y \cdot L/2$ αν $x \leq L/2$ και

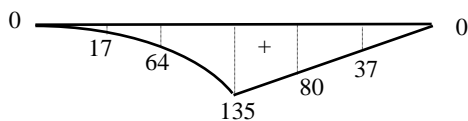
$M_M = B_y \cdot L/2 - P(x - L/2)$ αν $x \geq L/2$

προκύπτει: $n_4(x) = n_1(x) \cdot \frac{L}{2}$ αν $x \leq L/2$ και

$n_4(x) = [n_1(x) + 1] \cdot \frac{L}{2} - x$ αν $x \geq L/2$

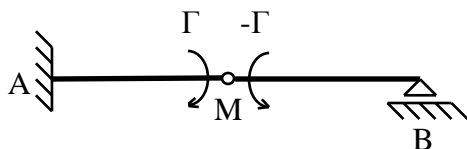
Ανά $L/6$ λαμβάνεται:

w	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
$n_4(x)$	0	$17L/864$	$64L/864$	$135L/864$	$80L/864$	$37L/864$	0



Γραμμή επιρροής $M_M = n_4(x)$. Οι τεταγμένες είναι πολλαπλασιασμένες επί $864/L$.

Η γραμμή επιρροής της M_M ισούται επίσης, όπως έχει προαναφερθεί, με την ελαστική γραμμή της δοκού Gerber του παρακάτω σχήματος



όπου οι ροπές Γ και $-\Gamma$ προκαλούν μοναδιαία στροφή στο M.

6.3.5. Γραμμή επιρροής $V_M = n_5$.

Από τις σχέσεις: $V_M = -B_y$ αν $x \leq L/2$ και

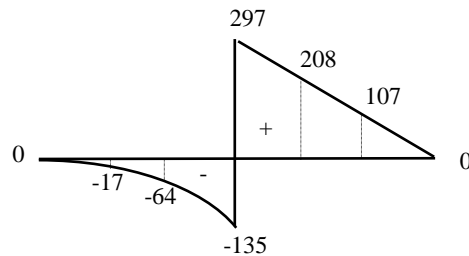
$$V_M = 1 - B_y \quad \text{αν } x \geq L/2$$

προκύπτει: $n_5(x) = -n_1(x)$ αν $x \leq L/2$ και

$$n_5(x) = 1 - n_1(x) \quad \text{αν } x \geq L/2$$

Ανά $L/6$ λαμβάνεται:

w	0	1/6	2/6	3/6αρ.	3/6δεξ.	4/6	5/6	1
$n_5(x)$	0	-17/432	-64/432	-135/432	297/432	208/432	107/432	0



Γραμμή επιρροής $V_M = n_5(x)$. Οι τεταγμένες είναι πολλαπλασιασμένες επί 432.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΓΕΘΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

7.1. Εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων.

Ας θεωρηθεί ένας υπερστατικός φορέας του οποίου είναι γνωστό το διάγραμμα ροπών κάμψης M , που οφείλεται σε μια τυχούσα εξωτερική φόρτιση. Η εύρεση των μεγεθών παραμόρφωσης γίνεται με εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων.

Εστω M_1 το διάγραμμα ροπών κάμψης του βασικού φορέα λόγω μοναδιαίας φόρτισης κατά τη διεύθυνση του ζητούμενου μεγέθους παραμόρφωσης u (πεδίο δυνάμεων - τάσεων). Αν εφαρμοσθεί το θεώρημα των δυνατών έργων με πεδίο μετατοπίσεων την πραγματική μετατόπιση του φορέα (η οποία είναι δυνατή μετατόπιση του βασικού)

$$W_e = 1 \times u, W_i = \int_0^L \frac{MM_1}{EI} ds \Rightarrow u = \int_0^L \frac{MM_1}{EI} ds$$

Συνοπτικά, η διαδικασία υπολογισμού γράφεται ως εξής:

A. Εύρεση του διαγράμματος ροπών κάμψης M του φορέα (π.χ. με τη μέθοδο των δυνάμεων).

B. Εύρεση του διαγράμματος M_1 του **βασικού** φορέα με μοναδιαία φόρτιση κατά τη διεύθυνση του ζητούμενου μεγέθους παραμόρφωσης.

Γ. Καθορισμός μεγέθους παραμόρφωσης από τη σχέση:

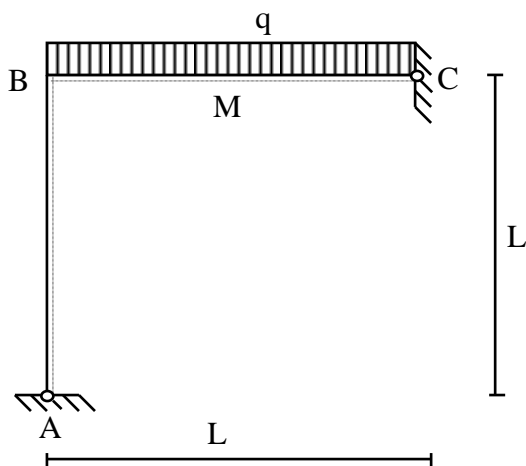
$$u = \int_0^L \frac{MM_1}{EI} ds$$

7.2. Εφαρμογή.

Στο φορέα του σχήματος ζητούνται:

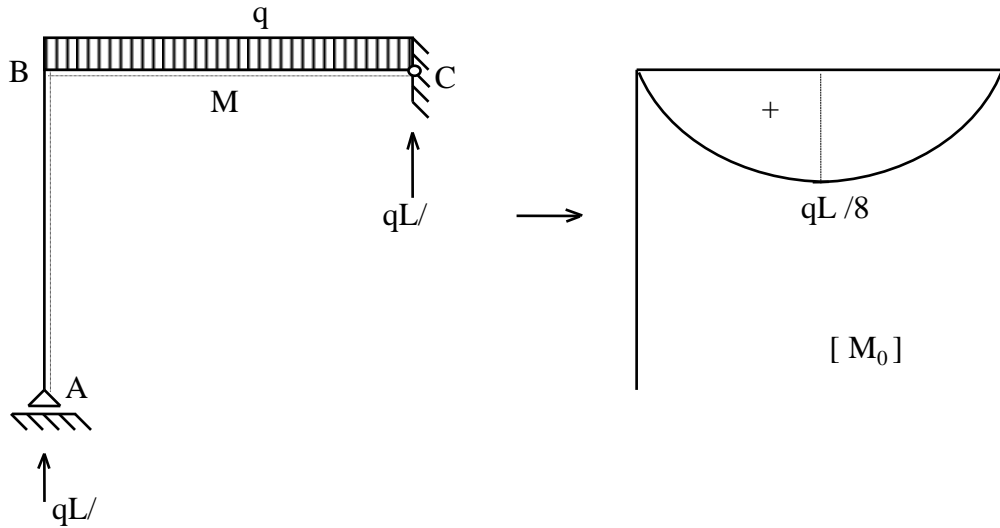
-Η στροφή φ του κόμβου B.

-Η βύθιση δ του μέσου M του ανοίγματος BC.

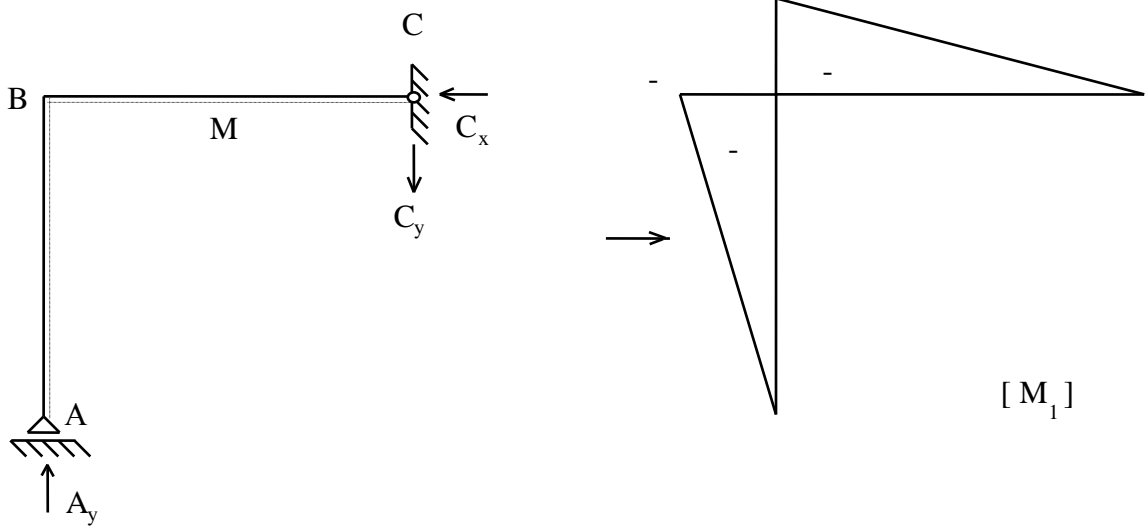


A) Στατική επίλυση φορέα με τη μέθοδο των δυνάμεων.
Κατασκευή διαγράμματος M.

Εκλέγεται ως υπερστατική αντίδραση η οριζόντια αντίδραση στο A και κατασκευάζεται το διάγραμμα M_0 λόγω εξωτερικής φόρτισης.

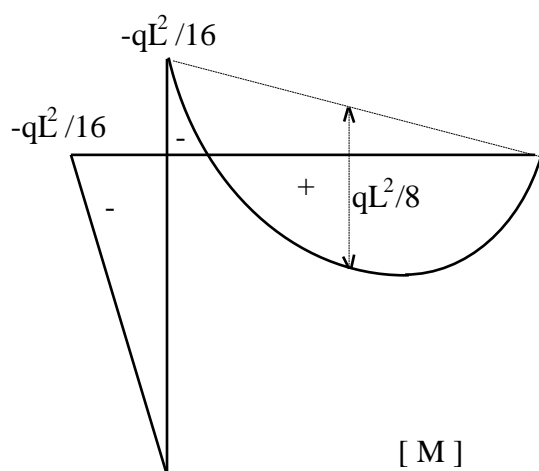


A. Κατασκευάζεται το διάγραμμα M_1 για μοναδιαία οριζόντια φόρτιση $P=1$ στο A.



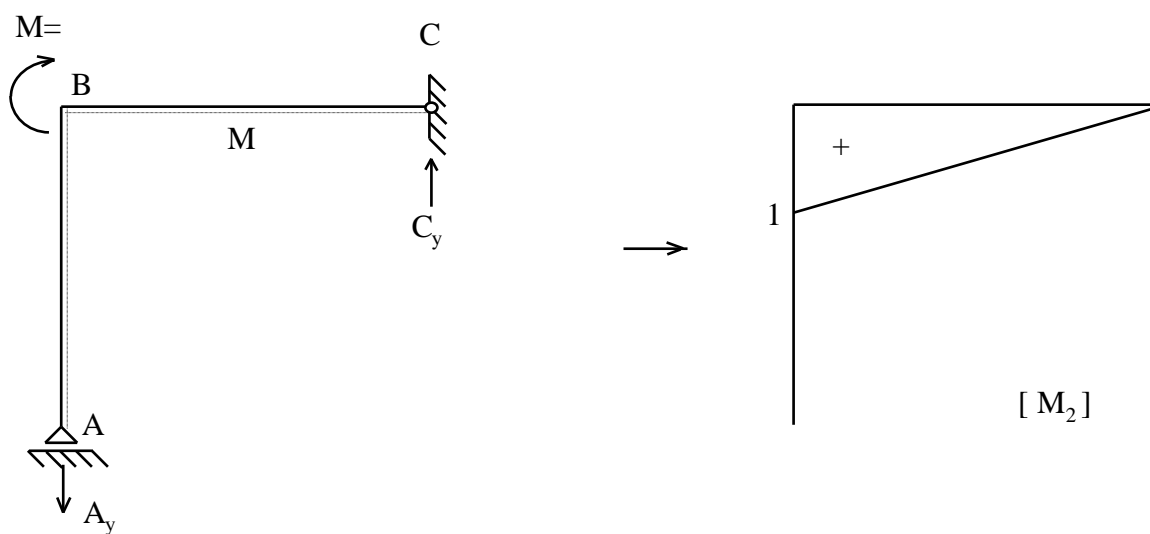
$$I_0 + A_x I_{11} = 0 \Rightarrow \frac{L}{3}(-L) \frac{qL^2}{8} + A_x 2 \frac{L}{3} L^2 = 0 \Rightarrow A_x = \frac{qL}{16} \Rightarrow M_B = \frac{qL^2}{16}$$

Από την τιμή της M_B κατασκευάζεται το διάγραμμα M του φορέα.



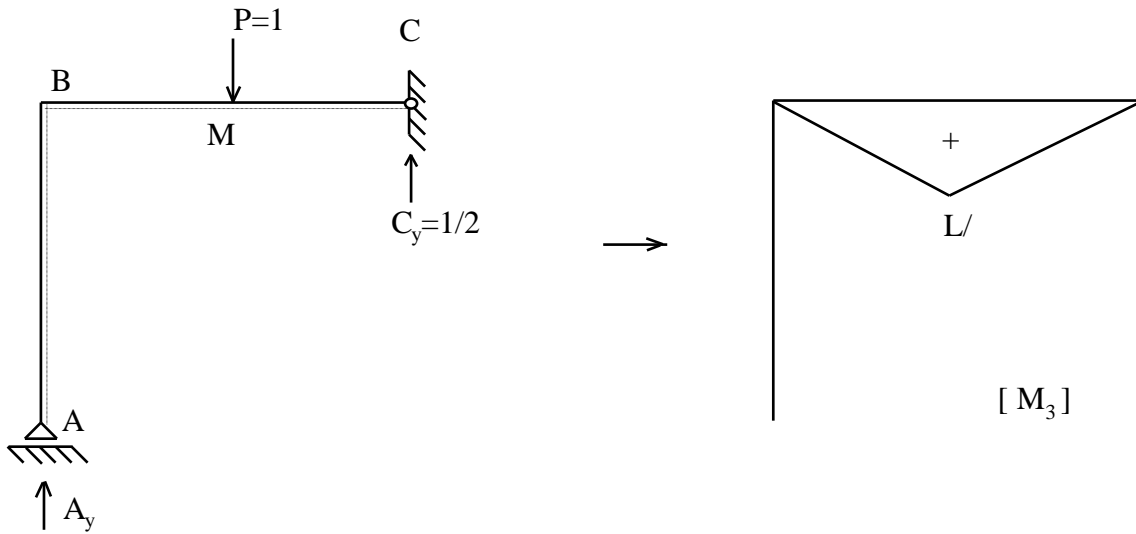
B) Διάγραμμα ροπών κάμψης βασικού φορέα λόγω μοναδιαίας φόρτισης κατά τη διεύθυνση του ζητούμενου μεγέθους παραμόρφωσης.

B1) Υπολογισμός γωνίας φ στο B.



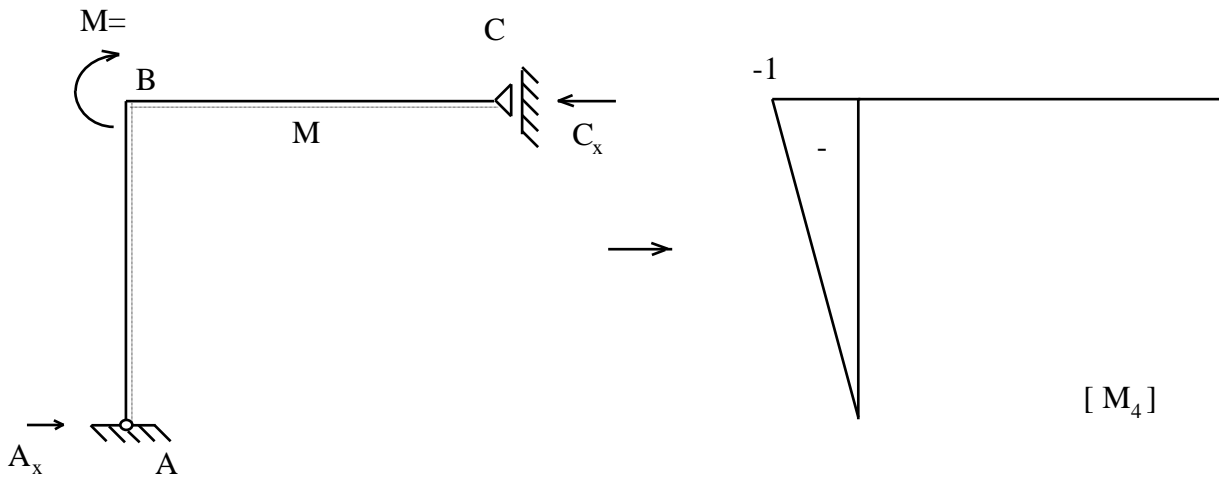
$$\varphi = I_{02} = \frac{1}{EI} \left[\frac{L}{3} \cdot 1 \left(-\frac{qL^2}{16} \right) + \frac{L}{3} \cdot 1 \frac{qL^2}{8} \right] = \frac{qL^3}{48EI}$$

B2) Υπολογισμός βύθισης δ στο M.



$$\delta = I_{03} = \frac{1}{EI} \left[\frac{L}{6} \frac{L}{4} \left(-\frac{qL^2}{16} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{L}{3} \frac{L}{4} \frac{qL^2}{8} \left(1 + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{7qL^4}{768EI}$$

Παρατήρηση: Για τη στροφή φ στο B, θα ήταν απλούστεροι οι υπολογισμοί με διαφορετική εκλογή βασικού φορέα. Π.χ.



$$\varphi = I_{04} = \frac{1}{EI} \frac{L}{3} (-1) \left(-\frac{qL^2}{16} \right) = \frac{qL^3}{48EI}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: Μέθοδος Castiglano

8.1. Ελαστικό δυναμικό φορέα.

Εστω ένας ελαστικός φορέας που φορτίζεται αργά (δηλαδή χωρίς να υπάρχει απώλεια ενέργειας λόγω ανάπτυξης θερμότητας ή ταλαντώσεων) με εξωτερική φόρτιση P_j , $j=1,n$. Κατά την παραμόρφωση, το έργο των εξωτερικών εντατικών μεγεθών W_e απορροφάται από το φορέα υπό τη μορφή εσωτερικής ενέργειας (ή ενέργειας παραμόρφωσης) W_i . Η τιμή $W=W_e=W_i$ ονομάζεται ελαστικό δυναμικό του φορέα.

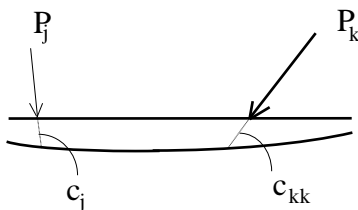
Όπως έχει ήδη αναφερθεί:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n P_j \delta_j \quad 8.1.$$

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI} + \frac{kV^2}{GA} + \frac{T^2}{GI_p} \right) ds \quad 8.2.$$

Οι συντελεστές $1/2$ που εμφανίζονται εδώ οφείλονται στο ότι τα εντατικά μεγέθη υποτίθενται μεταβαλλόμενα γραμμικά από την τιμή 0 μέχρι την τελική τιμή.

Βάσει της αρχής της επαλληλίας, κάθε μετατόπιση δ_j μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα συνιστωσών οφειλομένων σε δυνάμεις P_k .



$$\delta_j = \sum_{k=1}^n c_{jk} P_k \quad 8.3.$$

όπου c_{jk} : μετατόπιση κατά τον άξονα της P_j οφειλόμενη στην εφαρμογή δύναμης $P_k=1$. Το έργο των εξωτερικών εντατικών μεγεθών W_e υπολογίζεται αντικαθιστώντας τη σχέση 8.3. στη σχέση 8.1.:

$$\begin{aligned} W=W_e &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n c_{jk} P_k \right) P_j = \\ &= \frac{1}{2} (P_1 c_{11} P_1 + P_1 c_{12} P_2 + \dots + P_1 c_{1k} P_k + \dots + P_1 c_{1j} P_j + \dots + P_1 c_{1n} P_n + \\ &+ P_2 c_{21} P_1 + P_2 c_{22} P_2 + \dots + P_2 c_{2k} P_k + \dots + P_2 c_{2j} P_j + \dots + P_2 c_{2n} P_n + \\ &\quad \vdots \\ &+ P_j c_{j1} P_1 + P_j c_{j2} P_2 + \dots + P_j c_{jk} P_k + \dots + P_j c_{jj} P_j + \dots + P_j c_{jn} P_n + \\ &\quad \vdots \\ &+ P_n c_{n1} P_1 + P_n c_{n2} P_2 + \dots + P_n c_{nk} P_k + \dots + P_n c_{nj} P_j + \dots + P_n c_{nn} P_n) \end{aligned}$$

8.2. Θεώρημα Castiglano

Αν εφαρμοσθεί το θεώρημα της αμοιβαιότητας στην εύρεση του δυναμικού ενός φορέα, προκύπτει:

$$c_{jk} = c_{kj}$$

από όπου:

$$\frac{dW}{dP_j} = \frac{1}{2} (2P_1 c_{1j} + 2P_2 c_{2j} + \dots + 2P_j c_{jj} + \dots + 2P_n c_{nj}) =$$

$$\sum_{k=1}^n P_k c_{kj} = \delta_j \quad 8.4.$$

Η παραπάνω σχέση (8.4.) αποτελεί το θεώρημα του Castiglano και συνεπάγεται ότι η παράγωγος του ελαστικού δυναμικού ενός φορέα ως προς μία δύναμη P που ενεργεί σε μία διατομή Ω του φορέα ισούται με τη μετατόπιση της διατομής Ω κατά τη διεύθυνση της δύναμης P .

Αν ληφθούν υπόψη έργα μόνον από ροπές κάμψης και δεδομένου ότι $W_e = W_i$, μπορεί να γραφεί:

$$\delta_j = \frac{dW}{dP_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{dM}{dP_j} ds \quad 8.5.$$

Το θεώρημα του Castiglano επιτρέπει, εκτός από τον καθορισμό μετατοπίσεων φορέων με τη βοήθεια της σχέσης 8.5., και τη στατική επίλυση υπερστατικών φορέων. Πράγματι, το δυναμικό ενός φορέα δεν είναι μόνον συνάρτηση των εξωτερικών φορτίων αλλά και των αντιδράσεων P . Καθώς τα σημεία εφαρμογής των αντιδράσεων παραμένουν αμετακίνητα, μπορεί να γραφεί:

$$\frac{dW}{dR} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{dM}{dR} ds = 0 \quad (\text{θεώρημα Manabrea}) \quad 8.6.$$

Η σχέση 8.6. μπορεί να εφαρμοσθεί για όλες τις υπερστατικές αντιδράσεις του φορέα και να προκύψει έτσι προς επίλυση ένα σύστημα τέτοιου βαθμού, όσος και ο βαθμός υπερστατικότητας του φορέα.

Τέλος, όταν ζητείται το μέγεθος παραμόρφωσης σε σημείο του φορέα όπου δεν εφαρμόζεται δύναμη, υποτίθεται εφαρμοζόμενη στο σημείο μία δύναμη Φ και το μέγεθος παραμόρφωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\delta_j = \frac{dW}{d\Phi} \quad \text{για } \Phi=0.$$

Σημειώνεται ότι όλα τα προαναφερθέντα που αφορούν σε δυνάμεις και μετατοπίσεις, ισχύουν κατ' αναλογία και για ροπές και στροφές.

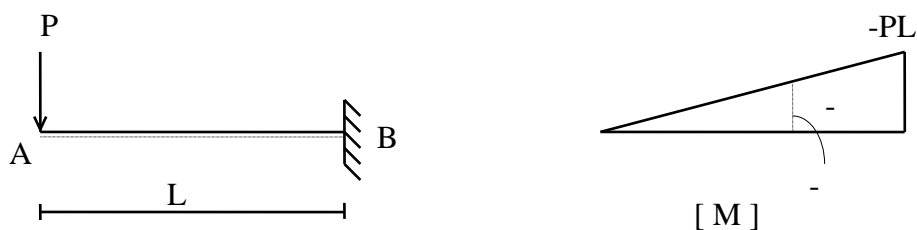
8.3. Εφαρμογές.

8.3.1. Να υπολογισθεί η βύθιση δ του άκρου A ενός προβόλου AB αν:

α) Ο πρόβολος υπόκειται σε συγκεντρωμένο φορτίο P στο A.

β) Ο πρόβολος υπόκειται σε συνεχές, ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο q.

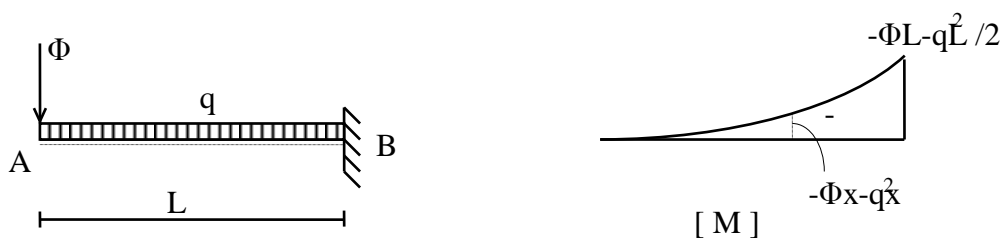
α)



$$M(P, x) = -Px \Rightarrow \frac{dM}{dP} = -x \Rightarrow$$

$$\delta = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{dM}{dP} dx = \frac{P}{EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{PL^3}{3EI}$$

β) Στο άκρο A υποτίθεται εφαρμοζόμενη μία δύναμη Φ .

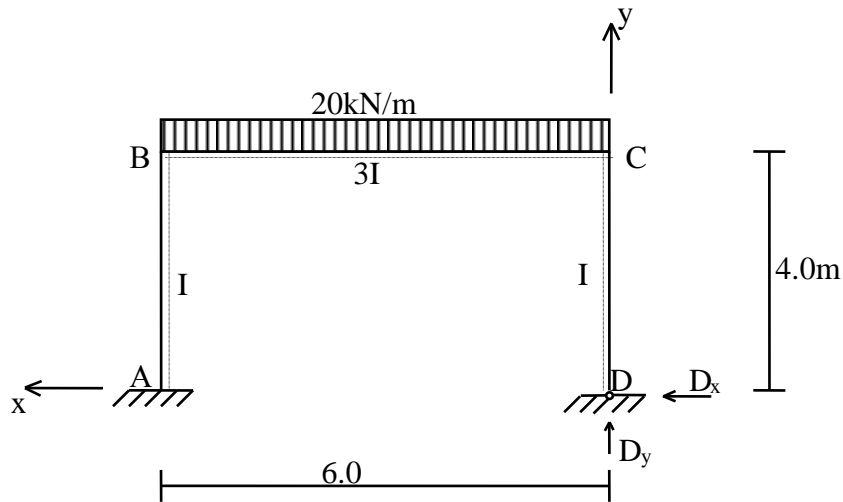


$$M(\Phi, x) = -\Phi x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow \frac{dM}{d\Phi} = -x \Rightarrow \delta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\Phi x - \frac{qx^2}{2} \right) (-x) dx$$

για $\Phi=0$ λαμβάνεται:

$$\delta = \frac{q}{2EI} \int_0^L x^3 dx = \frac{qL^4}{8EI}$$

8.3.2. Να υπολογισθούν τα διαγράμματα V,M,N του πλαισίου του σχήματος (Φορέας 2 φορές στατικά αόριστος).



Υπολογίζονται οι ροπές κάμψης σε ολόκληρο το πλαίσιο συναρτήσει των εξωτερικών φορτίων και των αντιδράσεων D_x και D_y . Για το σύστημα αξόνων του σχήματος λαμβάνεται:

$$\begin{aligned}
 \text{CD : } M &= -D_x y & \frac{dM}{dD_x} &= -y & \frac{dM}{dD_y} &= 0 \\
 \text{BC : } M &= -4D_x + D_y x - 20 \times 2/2 & \frac{dM}{dD_x} &= -4 & \frac{dM}{dD_y} &= x \\
 \text{AB : } M &= -D_x y + 6 D_y - 20 \frac{6^2}{2} & \frac{dM}{dD_x} &= -y & \frac{dM}{dD_y} &= 6
 \end{aligned}$$

Βάσει του θεωρήματος του Castiglano:

$$\begin{aligned}
 \int_A^D \frac{M}{EI} \frac{dM}{dD_x} dy &= 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^4 (-D_x y)(-y) dy + \\
 + \frac{1}{3EI} \int_0^6 (-4D_x + D_y x - 10x^2)(-4) dx &+ \frac{1}{EI} \int_0^4 (-D_x y + 6D_y - 360)(-y) dy = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 74.67D_x - 72.0D_y + 3840.0 &= 0 \Rightarrow D_x = 0.964D_y - 51.43
 \end{aligned}$$

$$\int_A^D \frac{M}{EI} \frac{dM}{dD_y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3EI} \int_0^6 (-4D_x + D_y x - 10x^2) x dx + \frac{1}{EI} \int_0^4 (-D_x y + 6D_y - 360) 6 dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -72.0D_x + 168.0D_y - 9720.0 = 0 \Rightarrow D_y(-69.41 + 168.0) = 9720 - 3703 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_y = 61.04 \text{ kN} \Rightarrow D_x = 0.964 \times 61.04 - 51.43 = 7.43 \text{ kN}$$

Από τις τιμές των αντιδράσεων D_x και D_y μπορούν, με τη βοήθεια των εξισώσεων ισορροπίας, να υπολογισθούν και οι υπόλοιπες αντιδράσεις και ακολούθως να κατασκευασθούν τα διαγράμματα. Η χάραξη των διαγραμμάτων έχει γίνει στο παράδειγμα 5.5.2.

Κεφάλαιο 9. Μέθοδος παραμορφώσεων.

9.1. Εισαγωγή

Κατά τη στατική επίλυση ενός n φορές υπερστατικού φορέα με τη μέθοδο των δυνάμεων, σαν άγνωστα μεγέθη x_i , $i=1,n$ εκλέγονται συνιστώσες αντίδρασης R ή εσωτερικά εντατικά μεγέθη V,M,N . Αφού υπολογισθούν τα άγνωστα μεγέθη x_i , προσδιορίζεται η τελική ένταση του φορέα (διαγράμματα V,M,N) και ακολούθως η παραμόρφωση του φορέα με εφαρμογή του θεωρήματος των δυνατών έργων.

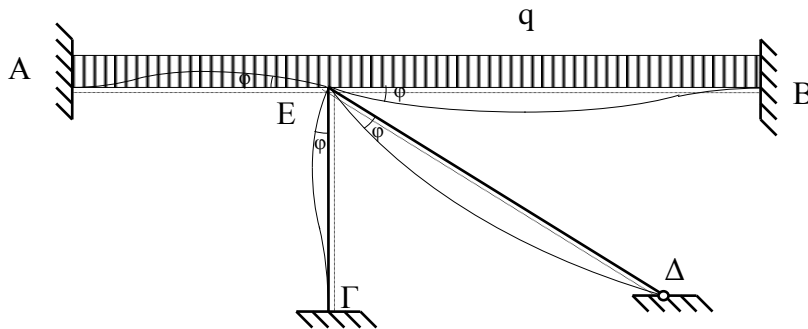
Στη μέθοδο των (επικομβίων) παραμορφώσεων η πορεία αντιστρέφεται. Για επίπεδους φορείς εισάγονται σαν άγνωστα μεγέθη, αντιπροσωπευτικά μεγέθη παραμόρφωσης αξονικών σημείων του φορέα και κατά προτίμηση κόμβων, δηλαδή σημείων όπου συντρέχουν δύο ή περισσότερα στοιχεία. Τα εκλεγόμενα άγνωστα μεγέθη είναι οι συνιστώσες μετατόπισης δ_x, δ_y και οι στροφές φ των κόμβων. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν 3 άγνωστοι και έτσι ο συνολικός αριθμός αγνώστων είναι $\mu=3κ$ όπου $κ$ ο αριθμός των κόμβων.

Πολλές φορές ο αριθμός μ των αγνώστων επικομβίων παραμορφώσεων είναι μικρότερος από το βαθμό υπερστατικότητας του φορέα. Στις περιπτώσεις αυτές, η μέθοδος των παραμορφώσεων προβαδίζει της μεθόδου των δυνάμεων λόγω περιορισμού των αγνώστων.

Υπογραμμίζεται εδώ η σημασία της υπόθεσης ότι, σε ολόσωμους φορείς, η ενέργεια παραμόρφωσης του φορέα οφείλεται σε ροπές κάμψης και κατά συνέπεια το έργο των αξονικών δυνάμεων μηδενίζεται, πράγμα που σημαίνει ότι αμελείται η μεταβολή μηκών των ευθυγράμμων μελών του φορέα.

Κατά την εφαρμογή της μεθοδολογίας των επικομβίων παραμορφώσεων θα χρειασθεί να χρησιμοποιηθούν επιλύσεις βασικών στοιχειωδών φορέων: της αμφίπακτης και της μονόπακτης δοκού (πίνακας 2). Με τη βοήθεια των επιλύσεων αυτών και με παρατηρήσεις ισορροπίας κόμβων ή μελών του φορέα επιτυγχάνεται ο υπολογισμός των αγνώστων μεγεθών παραμόρφωσης και ακολουθεί ο προσδιορισμός της τελικής εντατικής κατάστασης (χάραξη διαγραμμάτων V,M,N)

9.2. Εκλογή μεγεθών παραμόρφωσης - Πορεία επίλυσης.



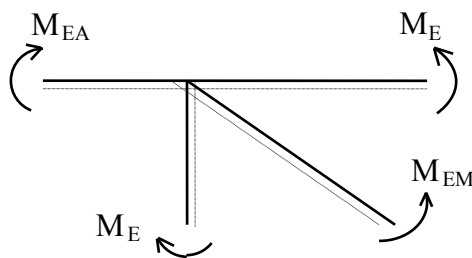
Το παραπάνω πλαίσιο είναι 8 φορές υπερστατικό. Επομένως, η επίλυσή του με τη μέθοδο των δυνάμεων είναι αρκετά δύσκολη και κοπιώδης.

Στη μέθοδο των παραμορφώσεων ο αριθμός των αγνώστων περιορίζεται σημαντικά. Δεδομένου ότι υπάρχει ένας κόμβος (E) οι άγνωστοι είναι κατ' αρχάς 3: οι συνιστώσες μετατόπισης δ_x, δ_y και η στροφή φ του κόμβου E. Οι κόμβοι θεωρούνται πλήρους συνοχής και συνεπώς η γωνία φ είναι σταθερή για όλα τα στοιχεία που συντρέχουν στον κόμβο: AE, BE, GE, ΔE. Αν παραληφθεί η συμβολή των αξονικών δυνάμεων και επομένως αν τα μήκη θεωρηθούν αμετάβλητα, προκύπτει αμέσως ότι:

$$\delta_x = 0 \text{ (για να μείνει αμετάβλητο το μήκος AE).}$$

$$\delta_y = 0 \text{ (για να μείνει αμετάβλητο το μήκος GE).}$$

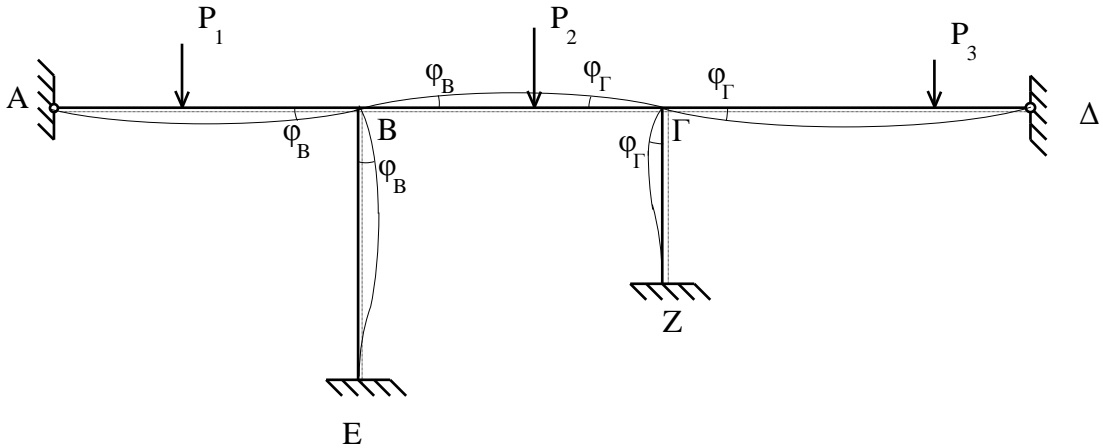
Παραμένει τελικά άγνωστη η γωνία φ (πάγιος φορέας). Αρκεί η διατύπωση μιας εξίσωσης ισορροπίας ροπών γύρω από τον κόμβο E για τον υπολογισμό της φ . Σημειώνεται ότι κατά τη διατύπωση της ισορροπίας ροπών γύρω από τον κόμβο E οι ροπές εισέρχονται με τη θετική τους φορά, δηλαδή:



$$M_{EA} + M_{EG} = M_{E\Delta} + M_{EB}$$

Αν οι ροπές $M_{EA}, M_{EG}, M_{E\Delta}, M_{EB}$ εκφραστούν συναρτήσει των εξωτερικών φορτίων και της στροφής φ , με τη βοήθεια της παραπάνω εξίσωσης υπολογίζεται η φ και ακολούθως η εντατική κατάσταση του φορέα.

Στο παρακάτω παράδειγμα (ο φορέας είναι 7 φορές υπερστατικός) η επίλυση με τη μέθοδο των δυνάμεων θα κατέληγε σε ένα σύστημα 7×7 .



Παρατηρώντας ότι ο φορέας είναι **πάγιος** (δηλαδή ότι όλοι οι κόμβοι παραμένουν αμετάθετοι), οι άγνωστοι αν εφαρμοσθεί η μέθοδος των παραμορφώσεων περιορίζονται σε δύο: τις στροφές φ_B και φ_Γ των κόμβων B και Γ.

Στον κόμβο B συντρέχουν τα στοιχεία BA, BE και BΓ από τα οποία το **BA** συμπεριφέρεται σαν **μονόπακτο** ενώ τα **BE** και **BΓ** σαν **αμφίπακτα**. Χρησιμοποιώντας τις βασικές επιλύσεις μονόπακτης και αμφίπακτης δοκού υπολογίζονται οι ροπές M_{BA} , M_{BE} , $M_{B\Gamma}$ και M_{EB} . Η ροπή M_{BA} οφείλεται στο εξωτερικό φορτίο P_1 και τη στροφή φ_B , η $M_{B\Gamma}$ στο φορτίο P_2 και στις στροφές φ_B και φ_Γ ενώ οι ροπές M_{BE} και M_{EB} μόνο στη φ_B . Η απαίτηση ισορροπίας ροπών γύρω από τον κόμβο B γράφεται:

$$M_{BA} + M_{BE} = M_{B\Gamma} \quad (I)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μία εξίσωση με αγνώστους τις στροφές φ_B και φ_Γ .

Με ανάλογο τρόπο λαμβάνεται η εξίσωση ισορροπίας ροπών γύρω από τον κόμβο Γ, με αγνώστους επίσης τις στροφές φ_B και φ_Γ :

$$M_{\Gamma B} + M_{\Gamma Z} = M_{\Gamma \Delta} \quad (II)$$

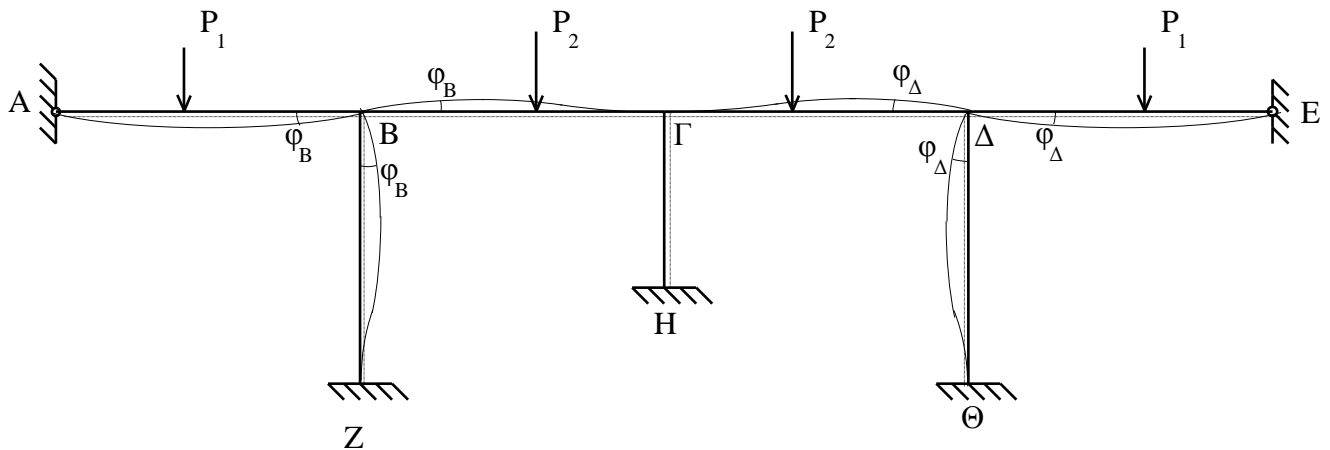
Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (I) και (II) καθορίζονται οι τιμές των φ_B και φ_Γ και ακολούθως, με αντικατάσταση, οι ροπές M_{BA} , M_{BE} , M_{EB} , $M_{B\Gamma}$, $M_{\Gamma B}$, $M_{\Gamma Z}$, $M_{Z\Gamma}$, $M_{\Gamma \Delta}$. Η χάραξη των διαγραμμάτων είναι πλέον εύκολη.

Στα παραπάνω σχήματα σχεδιάστηκαν πρόχειρα και με παραμορφωμένη κλίμακα οι ελαστικές γραμμές των φορέων. Καλό είναι να σχεδιάζονται εκ των προτέρων οι ελαστικές γραμμές, ασχέτως αν δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή η πραγματική φορά των μεγεθών παραμόρφωσης. Εκλέγεται αυθαίρετη φορά των επικομβίων παραμορφώσεων, η οποία τηρείται σχολαστικά κατά τη διάρκεια της επίλυσης. Αν η τελική τιμή ενός μεγέθους παραμόρφωσης προκύψει θετική, η φορά

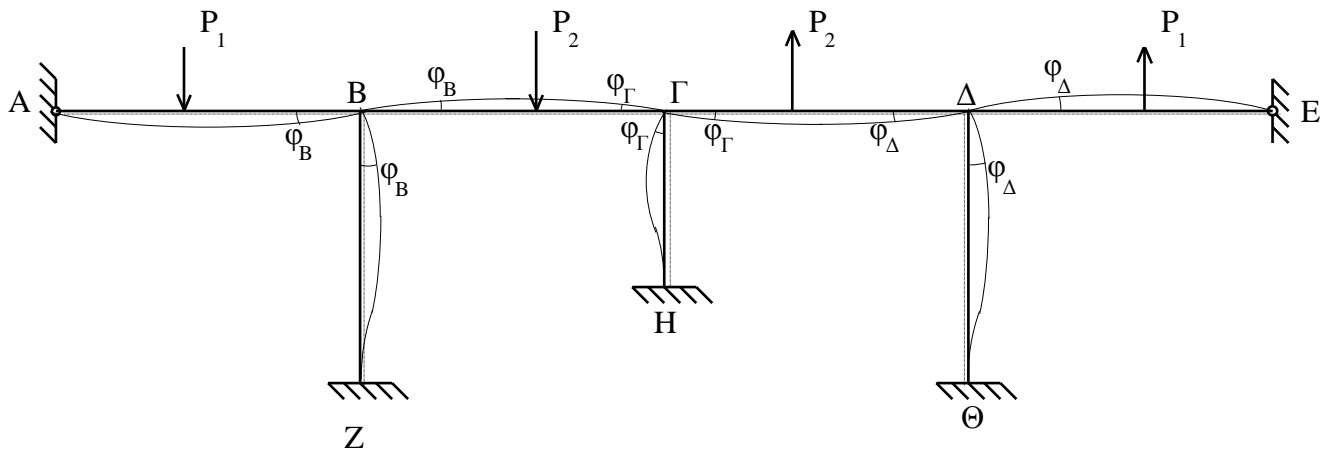
που αυθαίρετα εκλέχθηκε είναι η πραγματική, αλλιώς η φορά που αυθαίρετα εκλέχθηκε είναι αντίθετη από την πραγματική φορά του μεγέθους παραμόρφωσης.

9.3. Συμμετρικοί φορείς

Σε περίπτωση που ο φορέας είναι συμμετρικός με συμμετρική φόρτιση, ο αριθμός των αγνώστων περιορίζεται σημαντικά. Στον παρακάτω φορέα παραμένει ένας μόνον άγνωστος καθόσον $\varphi_B = \varphi_\Delta$ και $\varphi_\Gamma = 0$ λόγω συμμετρίας.



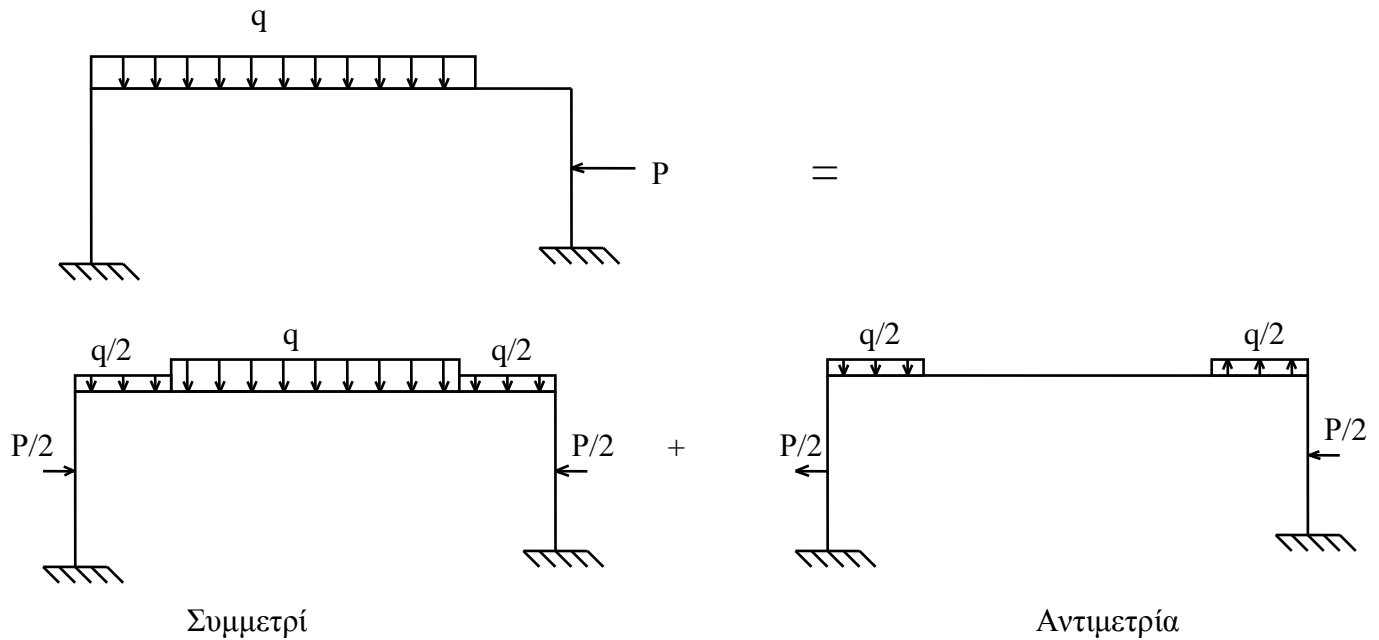
Σε συμμετρικούς φορείς με αντισυμμετρική φόρτιση, οι αγνώστοι πάλι περιορίζονται. Στον παρακάτω φορέα παραμένουν δύο αγνώστοι: οι $\varphi_B = \varphi_\Delta$ και φ_Γ .



Υπενθυμίζεται ότι για συμμετρικούς φορείς με συμμετρική φόρτιση, τα διαγράμματα ροπών και αξονικών δυνάμεων είναι συμμετρικά ενώ το διάγραμμα τεμνουσών είναι αντισυμμετρικό. Σε συμμετρικούς φορείς με αντισυμμετρική φόρτιση, τα

διαγράμματα ροπών και αξονικών δυνάμεων είναι αντισυμμετρικά ενώ το διάγραμμα τεμνουσών είναι συμμετρικό.

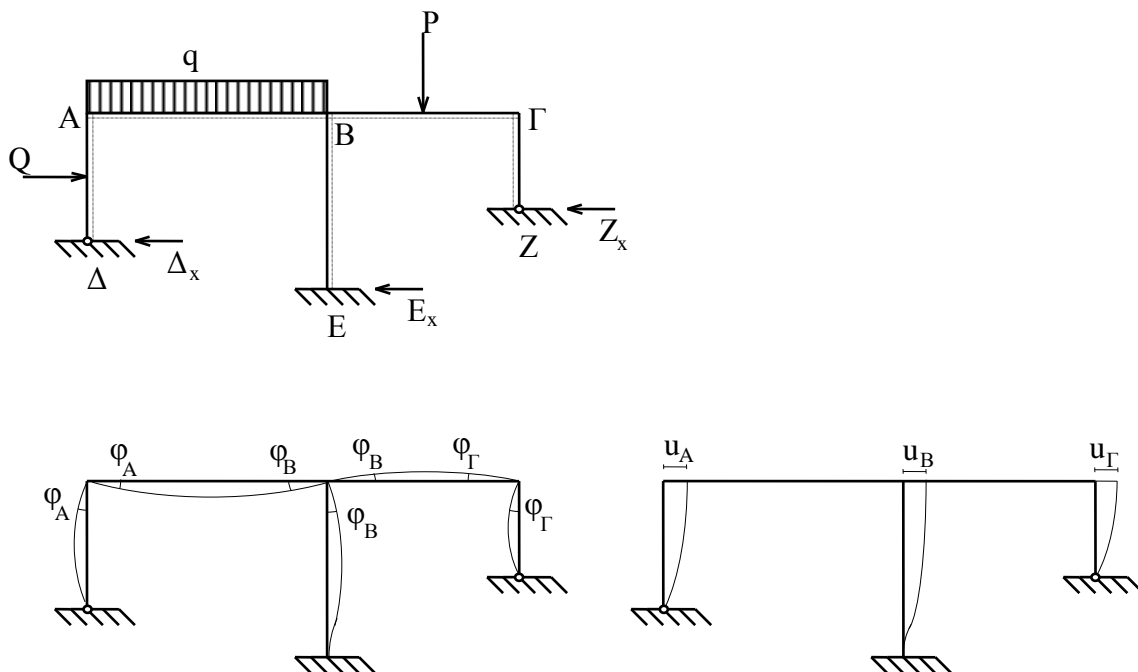
Εξ άλλου, όλες οι φορτίσεις μπορούν να αναλυθούν σε μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική, όπως φαίνεται στο παράδειγμα του παρακάτω σχήματος.



Κατά συνέπεια, η στατική επίλυση ενός συμμετρικού φορέα με τυχούσα φόρτιση μπορεί να πραγματοποιηθεί σε δύο φάσεις: Μία φάση για τη συμμετρική φόρτιση και μία φάση για την αντισυμμετρική φόρτιση. Τα τελικά εντατικά μεγέθη υπολογίζονται με επαλληλία.

9.4. Μη πάγιοι φορείς

Οι φορείς που εξετάστηκαν στα παραδείγματα της παραγράφου 9.2. ήταν πάγιοι, δηλαδή οι συνιστώσες μετατόπισης στους κόμβους τόσο κατά x όσο κατά y ήταν μηδενικές. Ο φορέας του παρακάτω σχήματος δεν είναι πάγιος καθόσον οι κόμβοι A , B και Γ , εκτός από τις στροφές φ_A , φ_B και φ_Γ , είναι ελεύθεροι να μετακινηθούν κατά την οριζόντια διεύθυνση κατά u_A , u_B και u_Γ αντίστοιχα.



Δεδομένου ότι τα μήκη των οριζοντίων τμημάτων AB και $B\Gamma$ παραμένουν αμετάβλητα, προκύπτει:

$$u_A = u_B = u_\Gamma = u$$

και επομένως οι άγνωστοι είναι συνολικά 4 (φ_A , φ_B , φ_Γ , u).

Η ροπή $M_{A\Delta}$ εκφράζεται με τη βοήθεια των βασικών επιλύσεων, συναρτήσει της γωνίας στροφής φ_A , της οριζόντιας μετατόπισης u , και του εξωτερικού φορτίου Q ενώ η ροπή M_{AB} εκφράζεται συναρτήσει των γωνιών στροφής φ_A, φ_B και του φορτίου q (η αξονική μετατόπιση των άκρων A και B κατά u δεν προκαλεί κάμψη του τμήματος AB). Η εξίσωση ισορροπίας ροπών $M_{AB} = M_{A\Delta}$ είναι μία εξίσωση με αγνώστους φ_A , φ_B και u .

Ομοίως, η εξίσωση $M_{BA} + M_{BE} = M_{B\Gamma}$ είναι μία εξίσωση με αγνώστους φ_A , φ_B , φ_Γ και u ενώ η εξίσωση $M_{\Gamma B} = M_{\Gamma Z}$ είναι μία εξίσωση με αγνώστους φ_B , φ_Γ και u .

Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις δεν αρκούν για τον καθορισμό των τεσσάρων αγνώστων φ_A , φ_B , φ_Γ και u . Μία τέταρτη εξίσωση μπορεί όμως να προκύψει από την ισορροπία του φορέα κατά x :

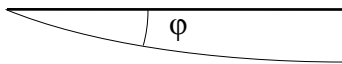
$$\Sigma X = 0 \Rightarrow \Delta_x + E_x + Z_x = Q$$

Οι αντιδράσεις Δ_x , E_x , Z_x μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των $M_{\Delta\Delta}$, M_{BE} , M_{EB} , και $M_{\Gamma Z}$, άρα συναρτήσει των φ_A , φ_B , φ_Γ και u . Παραδείγματος χάριν:

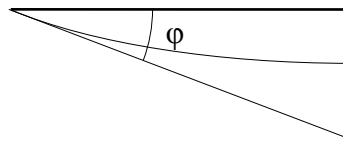
$$E_x = V_{EB} = \frac{M_{BE} - M_{EB}}{L_{BE}}$$

Αφού γραφούν οι τέσσερις εξισώσεις, επιλύεται το σύστημα και υπολογίζονται τα τέσσερα άγνωστα μεγέθη παραμόρφωσης φ_A , φ_B , φ_Γ και u . Ακολούθως μπορούν να καθορισθούν όλες οι ροπές στους κόμβους και τις πακτώσεις που έχουν ήδη εκφρασθεί συναρτήσει των μεγεθών παραμόρφωσης και των εξωτερικών φορτίων και να σχεδιασθούν τα διαγράμματα V , M και N .

Παρατήρηση: Στις πρόχειρα σχεδιασμένες ελαστικές γραμμές των προηγούμενων παραδειγμάτων, για απλότητα, οι στροφές των κόμβων σχεδιάστηκαν επί των καμπύλων ελαστικών γραμμών. Είναι γνωστό ότι οι στροφές των κόμβων είναι οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των μελών του απαραμόρφωτου φορέα και των εφαπτόμενων στην ελαστική γραμμή στους κόμβους.



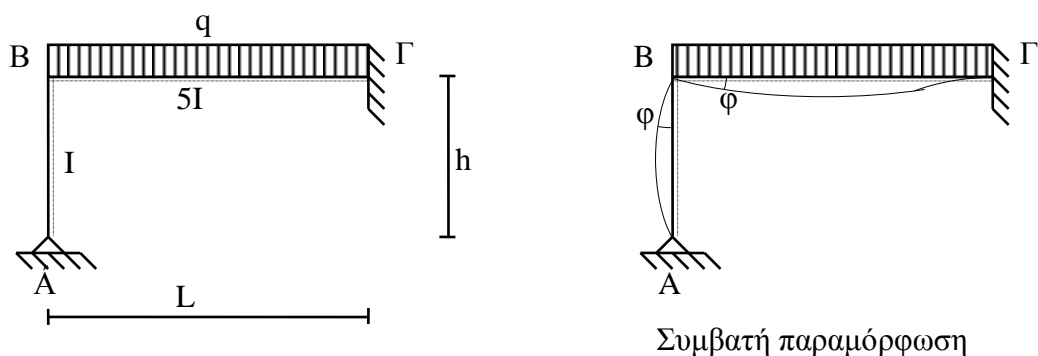
Προσεγγιστικός σχεδιασμός



Ακριβής κατάσταση

9.5. Εφαρμογές

9.5.1. Να υπολογισθούν οι ροπές στον κόμβο και την πάκτωση του φορέα του σχήματος.



Ο φορέας είναι πάγιος. Άγνωστη είναι η στροφή φ του κόμβου B. Από τις βασικές επιλύσεις λαμβάνεται:

$$M_{BA} = -\frac{3EI\varphi}{h} \quad M_{BG} = -\frac{qL^2}{12} + \frac{4E \times 5I}{L} \varphi = -\frac{qL^2}{12} + \frac{20EI\varphi}{L}$$

$$M_{GB} = -\frac{qL^2}{12} - \frac{2E \times 5I}{L} \varphi = -\frac{qL^2}{12} - \frac{10EI\varphi}{L}$$

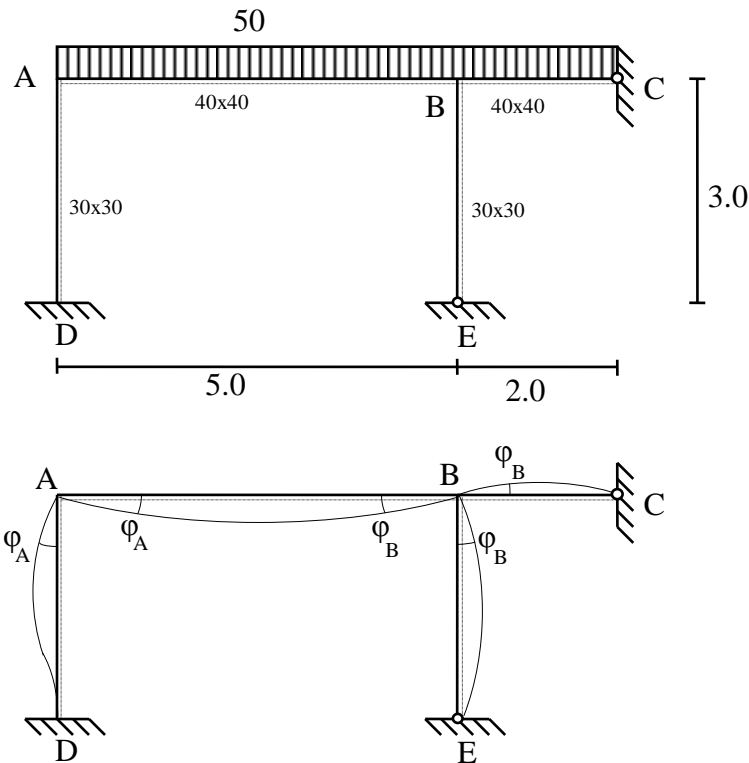
Ισοροπία κόμβου:

$$M_{BA} = M_{BG} \Rightarrow -\frac{3EI\varphi}{h} = -\frac{qL^2}{12} + \frac{20EI\varphi}{L} \Rightarrow EI\varphi = \frac{qL^2}{12 \left(\frac{20}{L} + \frac{3}{h} \right)}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή $EI\varphi$ λαμβάνεται:

$$M_{BA} = M_{BG} = -\frac{qL^3}{80h + 12L} \quad M_{GB} = -\frac{qL^2(10h + L)}{80h + 12L}$$

9.5.2. Να χαραχθούν τα διαγράμματα V,M,N του φορέα του σχήματος. Να υπολογισθούν οι μέγιστες τάσεις (ορθή και διατμητική) στο ζύγωμα ABC. Δίδονται οι διατομές: Ζύγωμα ABC: 40cm x 40cm, στύλοι AD και BE: 30cm x 30cm.



Συμβατή παραμόρφωση.

$$I_{AB} = I_{BC} = 0.4 \times 0.4^3 / 12 = 21.33 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{AD} = I_{BE} = 0.3 \times 0.3^3 / 12 = 6.75 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Ο φορέας είναι πάγιος. Εκλέγονται σαν άγνωστες οι στροφές φ_A και φ_B των κόμβων A και B αντίστοιχα. Τίθεται:

$$A = E \times 10^{-4} \times \varphi_A \quad \text{και} \quad B = E \times 10^{-4} \times \varphi_B$$

$$\text{Από τις βασικές επιλύσεις λαμβάνεται: } M_{AD} = -\frac{4 \times 6.75 \times A}{3.0} = -9.0A$$

$$M_{DA} = \frac{2 \times 6.75 \times A}{3.0} = 4.5A \quad M_{AD} = -\frac{4 \times 6.75 \times A}{3.0} = -9.0A$$

$$M_{AB} = -\frac{50.0 \times 5.0^2}{12} + \frac{2 \times 21.33}{5.0} (2A - B) = -104.2 + 17.07A - 8.53B$$

$$M_{BA} = -\frac{50.0 \times 5.0^2}{12} + \frac{2 \times 21.33}{5.0} (2B - A) = -104.2 + 17.07B - 8.53A$$

$$M_{BE} = \frac{3 \times 6.75 \times B}{3.0} = 6.75B$$

$$M_{BC} = -\frac{50.0 \times 2.0^2}{8} - \frac{3 \times 21.33 \times B}{2.0} = -25.0 - 32.0B$$

Ισορροπίες κόμβων:

$$M_{AD} = M_{AB} \Rightarrow -9.0A = -104.2 + 17.07A - 8.53B \Rightarrow 26.07A = 104.2 - 8.53B \Rightarrow \\ \Rightarrow A = 4.0 + 0.33B$$

$$M_{BA} + M_{BE} = M_{BC} \Rightarrow -104.2 + 17.07B - 8.53A + 6.75B = -25.0 - 32.0B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (17.07 + 6.75 + 32.0 - 8.53 \times 0.33)B = 104.2 - 25.0 + 8.53 \times 4.0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{113.3}{52.97} = 2.14 \Rightarrow A = 4.0 + 0.33 \times 2.14 = 4.71$$

$$M_{DA} = 4.5 \times 4.71 = 21.2 \text{ kNm} \quad M_{AD} = -9.0 \times 4.71 = -42.3 \text{ kNm}$$

$$M_{AB} = -104.2 + 17.07 \times 4.71 - 8.53 \times 2.14 = -42.3 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = -104.2 + 17.07 \times 2.14 - 8.53 \times 4.71 = -107.8 \text{ kNm}$$

$$M_{BE} = 6.75 \times 2.14 = 14.4 \text{ kNm} \quad M_{BC} = -25.0 - 32.0 \times 2.14 = -93.4 \text{ kNm}$$

Υπολογισμός τεμνουσών - αξονικών δυνάμεων.

$$V_{DA} = V_{AD} = \frac{-42.3 - 21.2}{3.0} = -21.2 \text{ kN}$$

$$V_{AB} = 50.0 \times \frac{5.0}{2} + \frac{-107.8 + 42.3}{5.0} = 111.9 \text{ kN} \quad V_{BA} = 111.9 - 50.0 \times 5.0 = -138.1 \text{ kN}$$

$$V_{BC} = 50.0 \times \frac{2.0}{2} + \frac{93.4}{2.0} = 96.7 \text{ kN} \quad V_{CB} = 96.7 - 50.0 \times 2.0 = -3.3 \text{ kN}$$

$$V_{EB} = V_{BE} = \frac{14.4}{3.0} = 4.8 \text{ kN}$$

$$V_{AB} = 111.9 \text{ kN} \Rightarrow N_{DA} = N_{AD} = -111.9 \text{ kN} \quad V_{DA} = -21.2 \text{ kN} \Rightarrow N_{AB} = N_{BA} = -21.2 \text{ kN}$$

$$V_{BA} = -138.1 \text{ kN}, V_{BC} = 96.7 \text{ kN} \Rightarrow N_{EB} = N_{BE} = -138.1 - 96.7 = -234.8 \text{ kN}$$

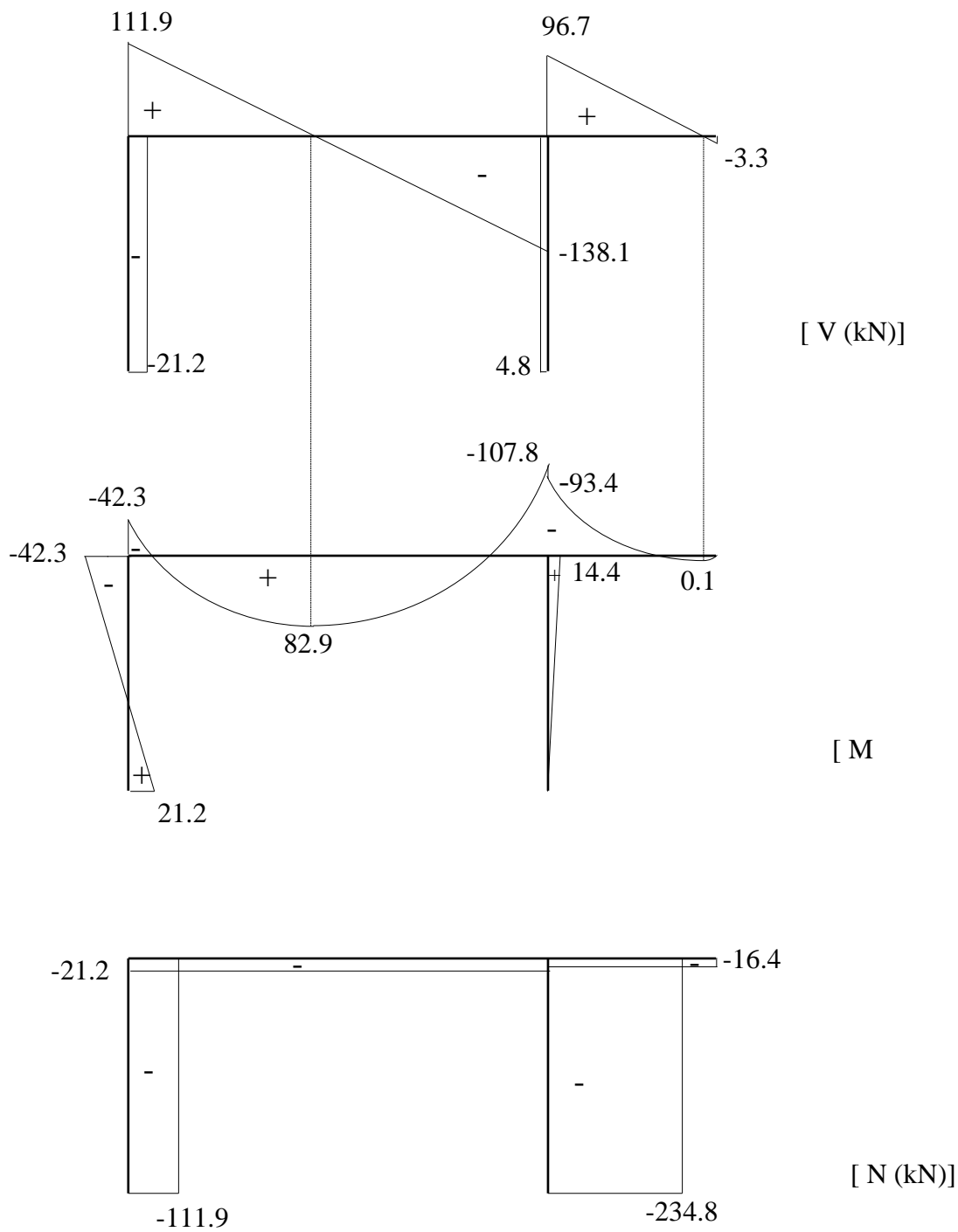
$$V_{EB} = 4.8 \text{ kN} \Rightarrow N_{BC} = -21.2 + 4.8 = -16.4 \text{ kN}$$

Υπολογισμός μέγιστων ροπών ανοιγμάτων.

$$\text{-Ανοιγμα AB : } \max M = -42.3 + \frac{111.9^2}{2 \times 50.0} = 82.9 \text{ kNm}$$

$$\text{-Ανοιγμα BC : } \max M = \frac{3.3^2}{2 \times 50.0} = 0.1 \text{ kNm}$$

Διαγράμματα



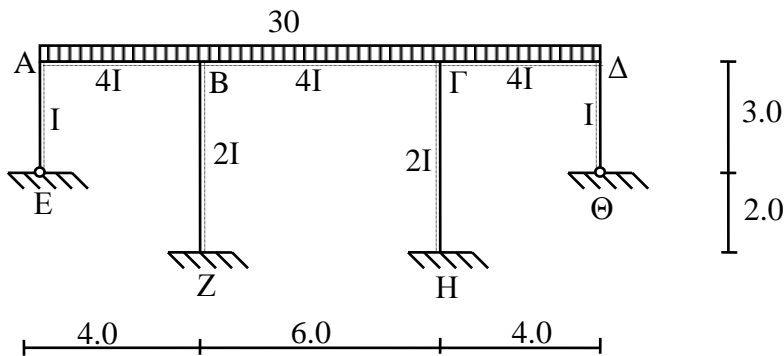
Μέγιστες τάσεις.

Μέγιστη – ελάχιστη ορθή τάση: $\sigma = \pm \frac{-107.8 \times 10^3}{0.4 \times 0.4^2} + \frac{(-21.2 \times 10^3)}{0.4 \times 0.4} \Rightarrow$

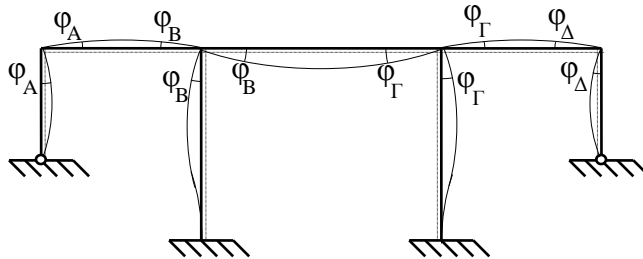
$\max \sigma = \sigma_o = 9.97 \times 10^6 \text{ Pa} = 9.97 \text{ MPa}, \quad \min \sigma = \sigma_u = -10.24 \times 10^6 \text{ Pa} = -10.24 \text{ MPa}$

$$\max \tau = 1.5 \frac{138.1}{0.4 \times 0.4} = 1.29 \text{MPa}$$

9.4.3. Να χαραχθούν τα διαγράμματα V,M,N του φορέα του σχήματος.



Ο φορέας είναι πάγιος λόγω συμμετρίας. Επίσης ισχύει: $\varphi_A = \varphi_\Delta$ και $\varphi_B = \varphi_\Gamma$.



Τίθεται: $EI\varphi_A = EI\varphi_\Delta = A$ και $EI\varphi_B = EI\varphi_\Gamma = B$.

$$M_{AE} = \frac{3 \times A}{3.0} = A \quad M_{AB} = -\frac{30.0 \times 4.0^2}{12} + \frac{2E \times 4I}{4.0}(-2\varphi_A + \varphi_B) = -40.0 - 4.0A + 2.0B$$

$$M_{BA} = -\frac{30.0 \times 4.0^2}{12} + \frac{2E \times 4I}{4.0}(-2\varphi_B + \varphi_A) = -40.0 - 4.0B + 2.0A$$

$$M_{B\Gamma} = -\frac{30.0 \times 6.0^2}{12} + \frac{2E \times 4I}{6.0}(2\varphi_B - \varphi_\Gamma) = -90.0 + 1.33B$$

$$M_{ZB} = \frac{2E \times 2I}{5.0}\varphi_B = 0.8B \quad M_{BZ} = \frac{2E \times 2I}{5.0}(-2\varphi_B) = -1.6B$$

Ισοροπία ροπών γύρω από τους κόμβους:

$$M_{AB} = M_{AE} \Rightarrow -40.0 - 4.0A + 2.0B = A \Rightarrow B = 20.0 + 2.5A$$

$$M_{BA} + M_{BZ} = M_{B\Gamma} \Rightarrow -40.0 - 4.0B + 2.0A - 1.6B = -90.0 + 1.33B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1.33 + 4.0 + 1.6)(20.0 + 2.5A) - 2.0A = 50.0 \Rightarrow 15.33A = 50.0 - 138.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -5.78 \Rightarrow B = 20.0 - 2.5 \times (-5.78) = 5.55$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνεται:

$$M_{AE} = -5.8 \text{ kNm} = M_{\Delta\Theta} \quad M_{AB} = -40.0 - 4.0 \times (-5.78) + 2.0 \times 5.55 = -5.8 \text{ kNm} = M_{\Delta\Gamma}$$

$$M_{BA} = -40.0 - 4.0 \times 5.55 + 2.0 \times (-5.78) = -73.7 \text{ kNm} = M_{\Gamma\Delta}$$

$$M_{B\Gamma} = -90.0 + 1.33 \times 5.55 = -82.6 \text{ kNm} = M_{\Gamma B} \quad M_{BZ} = -1.6 \times 5.55 = -8.9 \text{ kNm} = M_{\Gamma H}$$

$$M_{ZB} = 0.8 \times 5.55 = 4.4 \text{ kNm} = M_{H\Gamma}$$

Υπολογισμός τεμνουσών - αξονικών δυνάμεων.

$$V_{EA} = \frac{-5.78}{3.0} = -1.9 \text{ kN} = V_{AE} \Rightarrow V_{\Theta\Delta} = V_{\Delta\Theta} = 1.9 \text{ kN}$$

$$V_{AB} = \frac{30.0 \times 4.0}{2} + \frac{-73.7 + 5.8}{4.0} = 43.0 \text{ kN} \Rightarrow V_{\Delta\Gamma} = -43.0 \text{ kN}$$

$$V_{BA} = 43.0 - 30.0 \times 4.0 = -77.0 \text{ kN} \Rightarrow V_{\Gamma\Delta} = 77.0 \text{ kN}$$

$$V_{B\Gamma} = \frac{30.0 \times 6.0}{2} + \frac{-73.7 + 73.7}{6.0} = 90.0 \text{ kN} \Rightarrow V_{\Gamma B} = -90.0 \text{ kN}$$

$$V_{ZB} = \frac{-8.9 - 4.4}{5.0} = -2.6 \text{ kN} = V_{BZ} \Rightarrow V_{H\Gamma} = V_{\Gamma H} = 2.6 \text{ kN}$$

$$V_{AB} = 43.0 \text{ kN} \Rightarrow N_{EA} = N_{AE} = N_{\Theta\Delta} = N_{\Delta\Theta} = -43.0 \text{ kN}$$

$$V_{BA} = -77.0 \text{ kN}, V_{B\Gamma} = 90.0 \text{ kN} \Rightarrow N_{ZB} = N_{BZ} = N_{\Gamma H} = N_{H\Gamma} = -77.0 - 90.0 = -167.0 \text{ kN}$$

$$V_{EA} = -1.9 \text{ kN} \Rightarrow N_{AB} = N_{BA} = N_{\Gamma\Delta} = N_{\Delta\Gamma} = -1.9 \text{ kN}$$

$$V_{ZB} = -2.6 \text{ kN} \Rightarrow N_{B\Gamma} = N_{\Gamma B} = -1.9 - 2.6 = -4.5 \text{ kN}$$

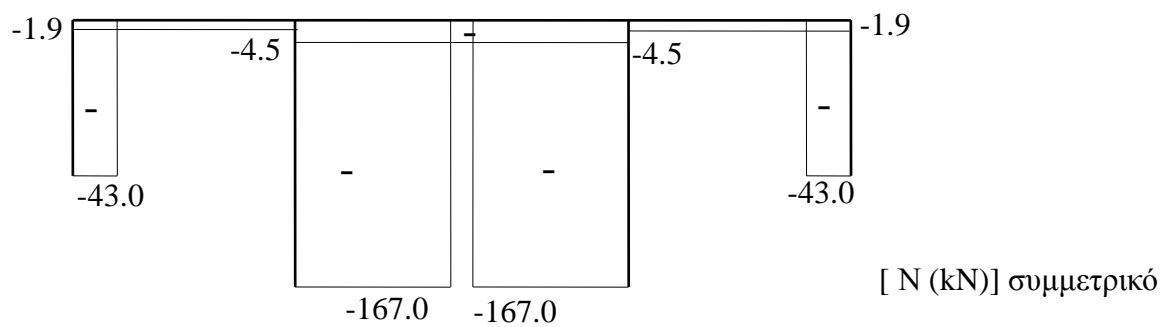
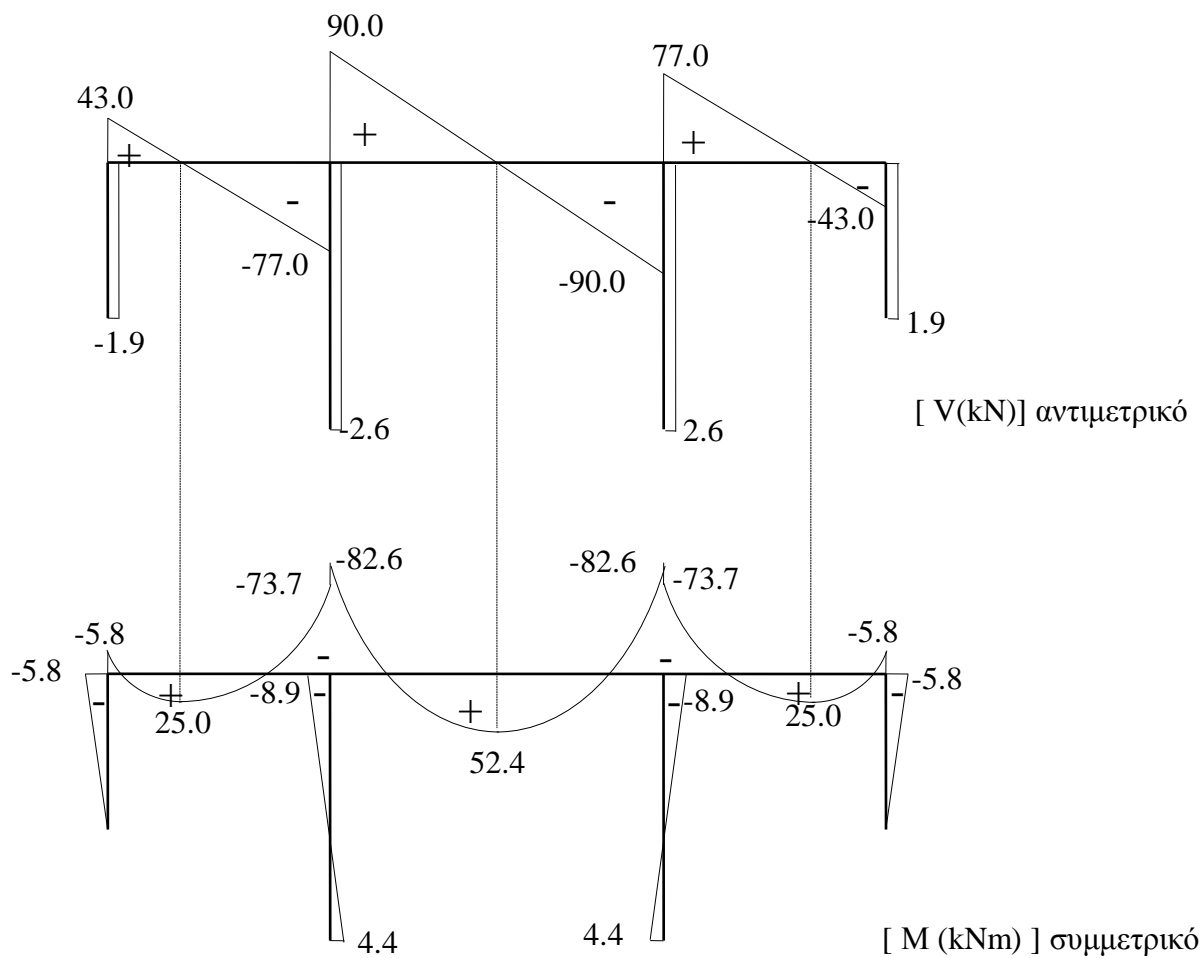
Υπολογισμός μέγιστων ροπών.

$$\text{Άνοιγμα AB: } \max M = -5.8 + \frac{43.0^2}{2 \times 30.0} = 25.0 \text{ kNm}$$

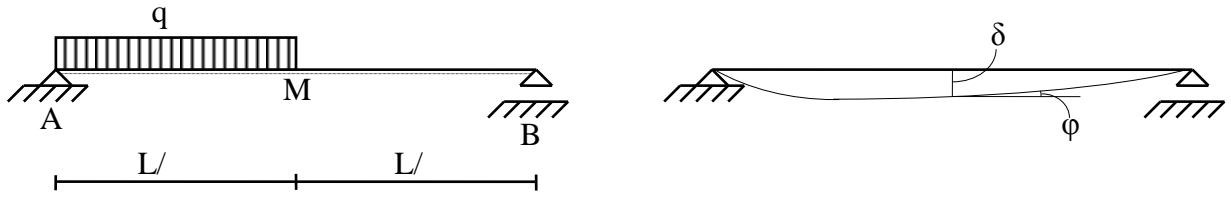
$$\text{Άνοιγμα BΓ: } \max M = -82.6 + \frac{90.0^2}{2 \times 30.0} = 52.4 \text{ kNm}$$

$$\text{Άνοιγμα ΓΔ: } \max M = 25.0 \text{ kNm}$$

Διαγράμματα



9.4.4. Στην αμφιέρειστη δοκό του σχήματος ζητούνται η βύθιση δ και η στροφή φ του μέσου M.



Τίθεται: $EI\varphi/L = \Phi$ και $EI\delta/L^2 = \Delta$

$$M_{MA} = -q \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{8} + \frac{3EI\varphi}{\left(\frac{L}{2}\right)} + \frac{3EI\delta}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = -\frac{qL^2}{32} + 6\Phi + 12\Delta$$

$$M_{MB} = -\frac{3EI\varphi}{\left(\frac{L}{2}\right)} + \frac{3EI\delta}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = -6\Phi + 12\Delta$$

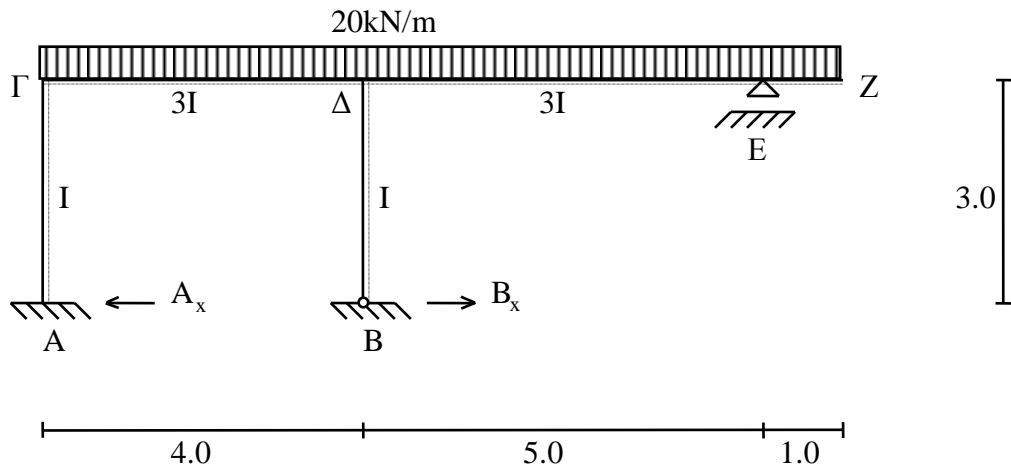
$$M_{MA} = M_{MB} \Rightarrow -\frac{qL^2}{32} + 6\Phi + 12\Delta = -6\Phi + 12\Delta \Rightarrow 12\Phi = \frac{qL^2}{32} \Rightarrow \varphi = \frac{qL^3}{384EI}$$

$$A_y = \frac{3}{4}q \frac{L}{2} = \frac{3qL}{8} \Rightarrow B_y = \frac{qL}{2} - \frac{3qL}{8} = \frac{qL}{8} \Rightarrow$$

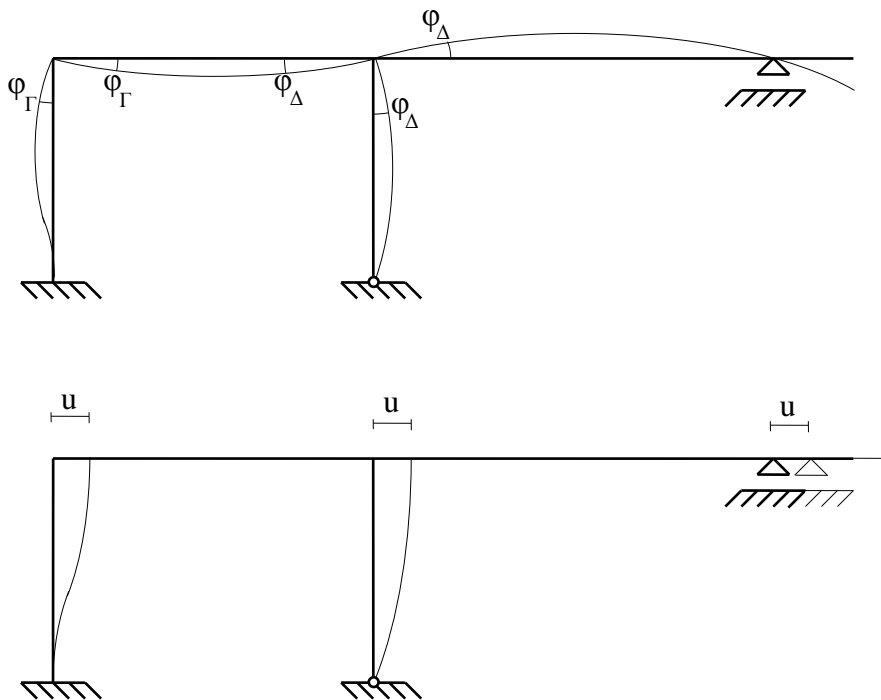
$$\Rightarrow M_{MA} = M_{MB} = \frac{qL}{8} \frac{L}{2} = \frac{qL^2}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\Phi + 12\Delta = \frac{qL^2}{16} \Rightarrow 12\Delta = \frac{qL^2}{16} + 6 \frac{qL^2}{384} \Rightarrow \delta = \frac{5qL^4}{768EI}$$

9.4.5. Στο πλαίσιο του σχήματος ζητείται η χάραξη των διαγραμμάτων V,M,N.



Παρατηρείται ότι ο φορέας δεν είναι πάγιος. Εκτός από τις στροφές των κόμβων υπάρχει και (ομοιόμορφη) οριζόντια μετατόπιση του ζυγώματος ΓΔΕΖ. Για λόγους καλύτερης εποπτείας σχεδιάζονται χωριστά οι στροφές και η μετακίνηση του ζυγώματος.



Τίθεται: $EI\varphi_\Gamma = \Gamma$, $EI\varphi_\Delta = \Delta$ και $EIu = Y$. Από τους πίνακες βασικών επιλύσεων λαμβάνεται:

$$M_{\Gamma A} = -\frac{4\Gamma}{3.0} + \frac{6Y}{3.0^2} = -1.33\Gamma + 0.67Y$$

$$M_{\Delta\Gamma} = \frac{2\Gamma}{3.0} - \frac{6Y}{3.0^2} = 0.67\Gamma - 0.67Y$$

$$M_{\Gamma\Delta} = -20.0 \frac{4.0^2}{12} + \frac{2E \times 3I}{4.0} (2\varphi_{\Gamma} - \varphi_{\Delta}) = -26.7 + 3\Gamma - 1.5\Delta$$

$$M_{\Gamma\Delta} = -20.0 \frac{4.0^2}{12} + \frac{2E \times 3I}{4.0} (2\varphi_{\Delta} - \varphi_{\Gamma}) = -26.7 + 3\Delta - 1.5\Gamma$$

$$M_{EZ} = M_{E\Delta} = -\frac{20.0 \times 1.0^2}{2} = -10.0 \text{ kNm} \quad M_{\Delta B} = \frac{3\Delta}{3.0} + \frac{3Y}{3.0^2} = \Delta + 0.33Y$$

$$M_{\Delta E} = -\frac{20.0 \times 5.0^2}{8} - \frac{(-10.0)}{2} - \frac{3E \times 2I}{5.0} \varphi_{\Delta} = -57.5 - 1.8\Delta$$

Ισορροπία κόμβων - Συνθήκη ισορροπίας κατά x.

$$M_{\Gamma A} = M_{\Gamma\Delta} \Rightarrow -1.33\Gamma + 0.67Y = -26.7 + 3\Gamma - 1.5\Delta \Rightarrow 4.33\Gamma - 1.5\Delta - 0.67Y = 26.7 \quad (\text{I})$$

$$M_{\Delta\Gamma} + M_{\Delta B} = M_{\Delta E} \Rightarrow -26.7 - 1.5\Gamma + 3\Delta + \Delta + 0.33Y = -57.5 - 1.8\Delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1.5\Gamma + 5.8\Delta + 0.33Y = -30.8 \quad (\text{II})$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow A_x = B_x \Rightarrow V_{A\Gamma} = -V_{B\Delta} \Rightarrow \frac{M_{\Gamma A} - M_{A\Gamma}}{3.0} = -\frac{M_{\Delta B}}{3.0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1.33\Gamma + 0.67Y - 0.67\Gamma + 0.67Y + \Delta + 0.33Y = 0 \Rightarrow \Delta = 2.0\Gamma - 1.67Y \quad (\text{III})$$

Επίλυση συστήματος.

$$(\text{I}), (\text{III}) \Rightarrow 4.33\Gamma - 1.5(2.0\Gamma - 1.67Y) - 0.67Y = 26.7 \Rightarrow 1.33\Gamma + 1.83Y = 26.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma = 20.0 - 1.38Y \quad (\text{IV})$$

$$(\text{III}), (\text{IV}) \Rightarrow \Delta = 2.0(20.0 - 1.38Y) - 1.67Y \Rightarrow \Delta = 40.0 - 4.42Y \quad (\text{V})$$

$$(\text{II}), (\text{IV}), (\text{V}) \Rightarrow -1.5(20.0 - 1.38Y) + 5.8(40.0 - 4.42Y) + 0.33Y = -30.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 23.25Y = 232.8 \Rightarrow Y = 10.0$$

$$(\text{IV}) \Rightarrow \Gamma = 20.0 - 1.38 \times 10.0 = 6.2, \Delta = 40.0 - 4.42 \times 10.0 = -4.2$$

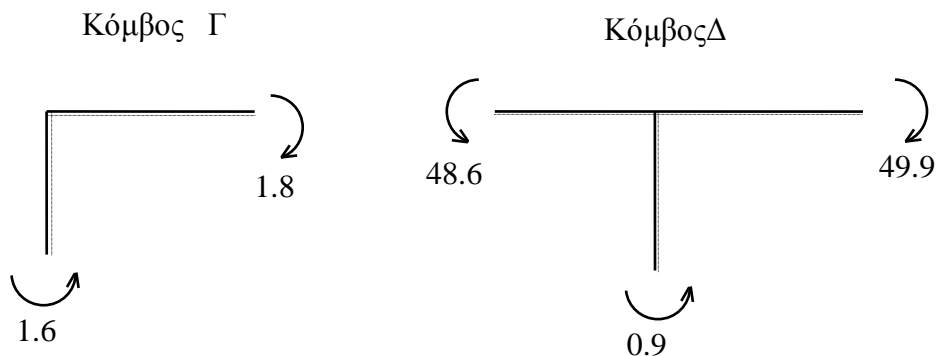
Αντικαθιστώντας τις τιμές των Γ , Δ , Y προκύπτει:

$$M_{\Gamma A} = -1.33 \times 6.2 + 0.67 \times 10.0 = -1.6 \text{ kNm} \quad M_{\Gamma \Delta} = -26.7 + 3.0 \times 6.2 - 1.5 \times (-4.2) = -1.8 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta \Gamma} = 7 - 1.5 \times 6.2 + 3.0 \times (-4.2) = -48.6 \text{ kNm} \quad M_{\Delta E} = -57.5 - 1.8 \times (-4.2) = -49.9 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta B} = -4.2 + 0.33 \times 10.0 = -0.9 \text{ kNm} \quad M_{\Delta \Gamma} = 0.67 \times 6.2 - 0.67 \times 10.0 = -2.5 \text{ kNm}$$

Επαλήθευση ισορροπίας κόμβων:



Με κατανομή σφάλματος: $M_{\Gamma A} = M_{\Gamma \Delta} = -1.7 \text{ kNm}$, $M_{\Delta \Gamma} = -48.8 \text{ kNm}$, $M_{\Delta E} = -49.7 \text{ kNm}$

Υπολογισμός τεμνουσών - αξονικών δυνάμεων.

$$V_{\Delta \Gamma} = \frac{-1.7 + 2.5}{3.0} = 0.3 \text{ kN} = V_{\Gamma A} \quad V_{\Gamma \Delta} = \frac{20.0 \times 4.0}{2.0} + \frac{-48.8 + 1.7}{4.0} = 28.2 \text{ kN}$$

$$V_{\Delta \Gamma} = 28.2 - 20.0 \times 4.0 = -51.8 \text{ kN} \quad V_{B \Delta} = \frac{-0.9}{3.0} = 0.3 \text{ kN} = V_{\Delta B}$$

$$V_{\Delta E} = \frac{20.0 \times 5.0}{2} + \frac{-10.0 + 49.7}{5.0} = 57.9 \text{ kN} \quad V_{E \Delta} = 57.9 - 20.0 \times 5.0 = -42.1 \text{ kN}$$

$$V_{E Z} = 20.0 \times 1.0 = 20.0 \text{ kN}$$

$$N_{\Delta \Gamma} = N_{\Gamma A} = -28.2 \text{ kN} \quad N_{\Gamma \Delta} = N_{\Delta \Gamma} = 0.3 \text{ kN}$$

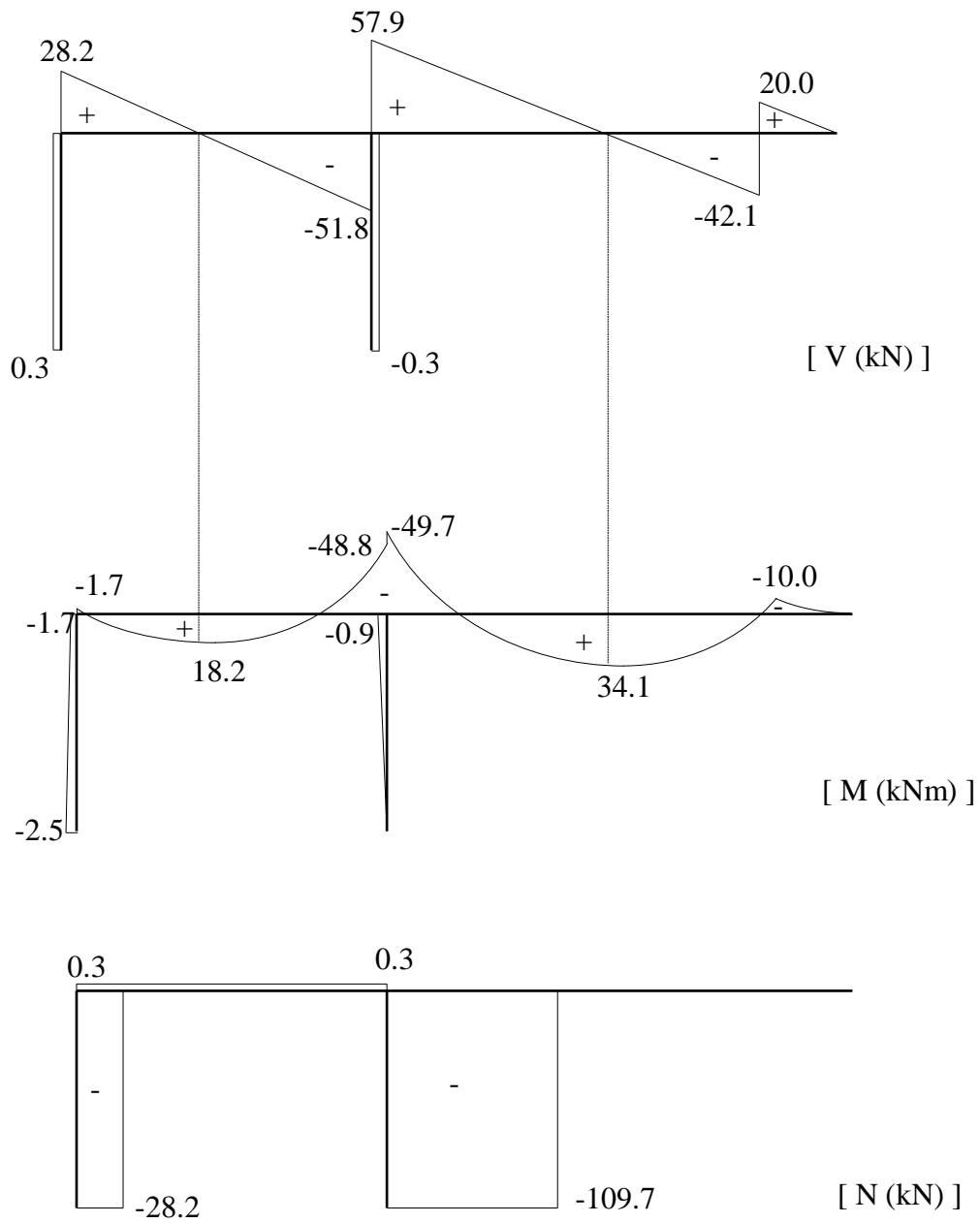
$$N_{B \Delta} = N_{\Delta B} = -51.8 - 57.9 = 109.7 \text{ kN}$$

Υπολογισμός μέγιστων ροπών.

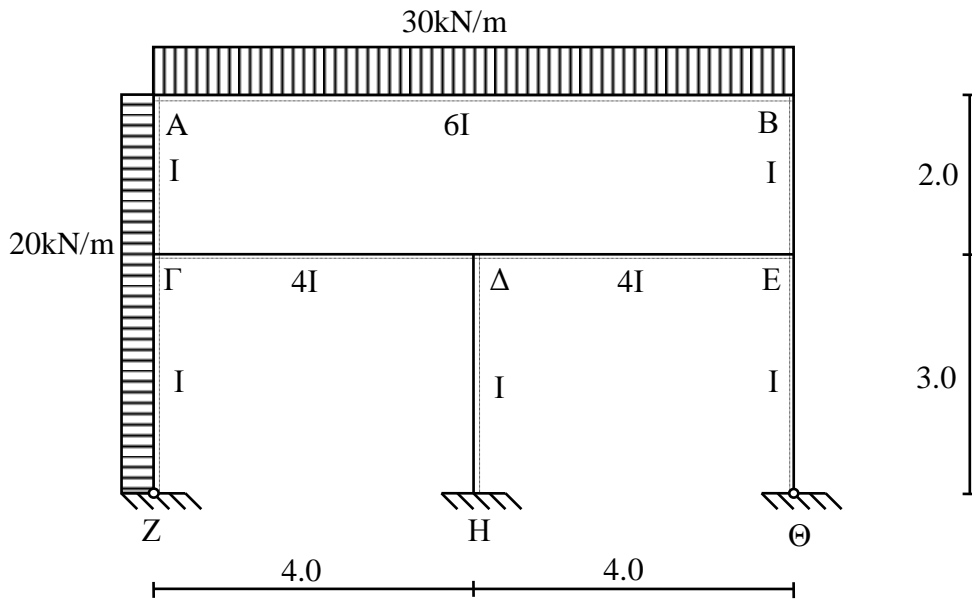
$$\text{Άνοιγμα } \Gamma \Delta : \max M = -1.7 + \frac{28.2^2}{2 \times 20.0} = 18.2 \text{ kNm}$$

$$\text{Άνοιγμα ΔΕ : } \max M = -49.7 + \frac{57.9^2}{2 \times 20.0} = 34.1 \text{ kNm}$$

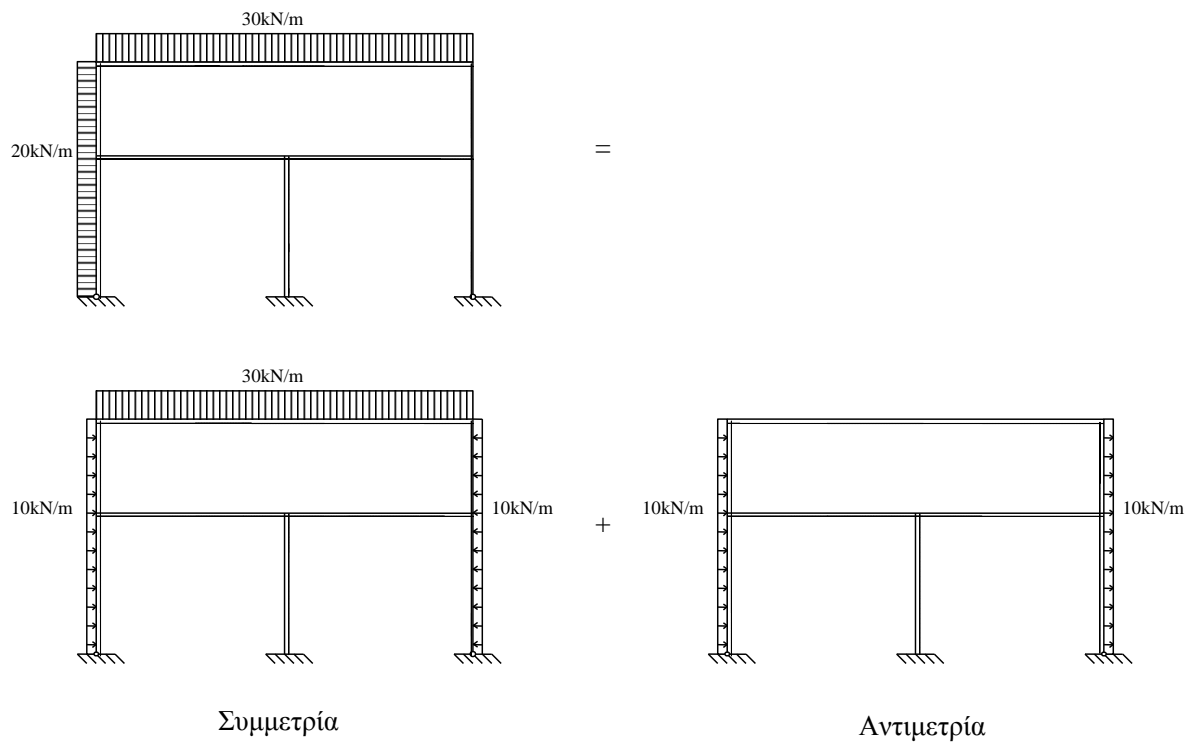
Διαγράμματα



9.4.6. Στο συμμετρικό πλαίσιο του σχήματος ζητείται η χάραξη των διαγραμμάτων V,M,N.



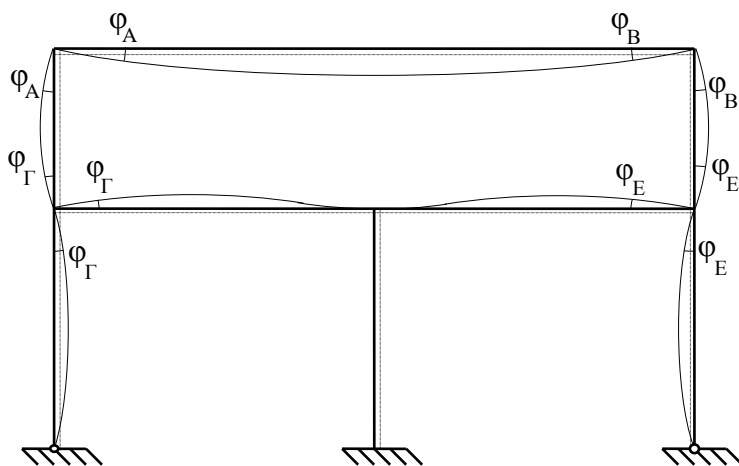
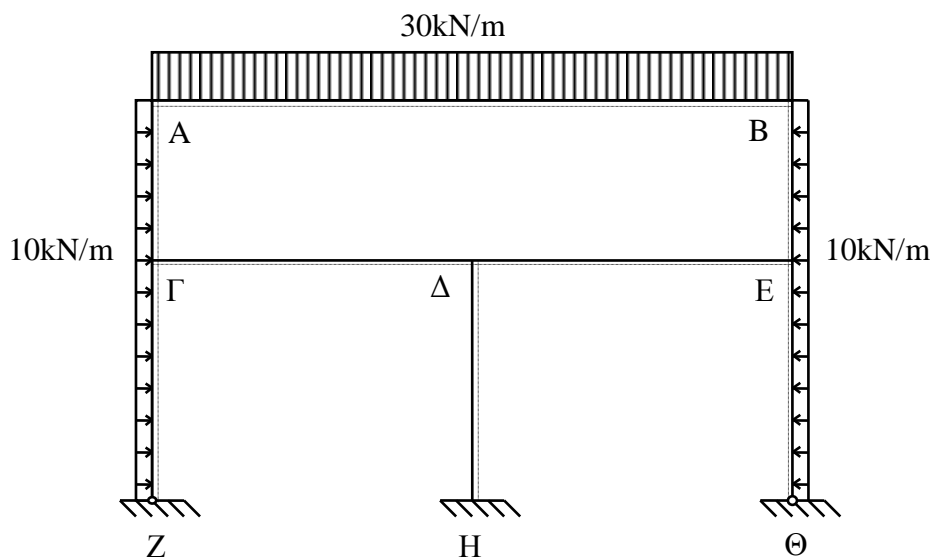
Ανάλυση φόρτισης σε συμμετρική και αντισυμμετρική



Η επίλυση θα γίνει σε δύο φάσεις: Η πρώτη φάση για τη συμμετρική φόρτιση και η δεύτερη για την αντισυμμετρική. Τα τελικά εντατικά μεγέθη θα υπολογισθούν με επαλληλία των δύο φάσεων.

1η Φάση: Επίλυση για τη συμμετρική φόρτιση.

Λόγω συμμετρίας ο φορέας είναι πάγιος και ισχύει: $\varphi_A = \varphi_B$, $\varphi_\Gamma = \varphi_E$ και $\varphi_\Delta = 0$. Τίθεται $EI\varphi_A = EI\varphi_B = A$ και $EI\varphi_\Gamma = EI\varphi_E = \Gamma$.



$$M_{\Gamma Z} = -\frac{10.0 \times 3.0^2}{8} + \frac{3EI\varphi_\Gamma}{3.0} = -11.25 + \Gamma \qquad M_{\Gamma\Delta} = \frac{2E \times 4I}{4.0} (-2\varphi_\Gamma) = -4\Gamma$$

$$M_{\Delta\Gamma} = \frac{2E \times 4I}{4.0} \varphi_\Gamma = 2\Gamma$$

$$M_{\Gamma A} = -\frac{10.0 \times 2.0^2}{12} + \frac{2EI}{2.0} (-2\varphi_\Gamma + \varphi_A) = -3.33 - 2\Gamma + A$$

$$M_{A\Gamma} = -\frac{10.0 \times 2.0^2}{12} + \frac{2EI}{2.0} (-2\varphi_A + \varphi_\Gamma) = -3.33 - 2A + \Gamma$$

$$M_{AB} = -\frac{30.0 \times 8.0^2}{12.0} + \frac{2E \times 6I}{8.0} (2\phi_A - \phi_B) = -160.0 + 1.5A$$

Ισορροπίες κόμβων

$$M_{AG} = M_{AB} \Rightarrow -3.33 + \Gamma - 2A = -160.0 + 1.5A \Rightarrow \Gamma = 3.5A - 156.67$$

$$M_{GZ} = M_{GA} + M_{GD} \Rightarrow -11.25 + \Gamma = -3.33 - 2\Gamma + A - 4\Gamma \Rightarrow 7(3.5A - 156.67) - A = 7.92$$

$$\Rightarrow 23.5A = 1104.59 \Rightarrow \mathbf{A = 47.0}$$

$$\Gamma = 3.5 \times 47.0 - 156.67 \Rightarrow \mathbf{\Gamma = 7.85}$$

Αν αντικατασταθούν οι τιμές των A και Γ, προκύπτουν οι τιμές των ροπών της 1ης φάσης. Λόγω συμμετρίας, οι ροπές της 1ης φάσης είναι συμμετρικές.

$$M_{GZ} = M_{E\theta} = -11.25 + 7.85 = -3.40 \text{ kNm} \quad M_{GD} = M_{ED} = -4.0 \times 7.85 = -31.38 \text{ kNm}$$

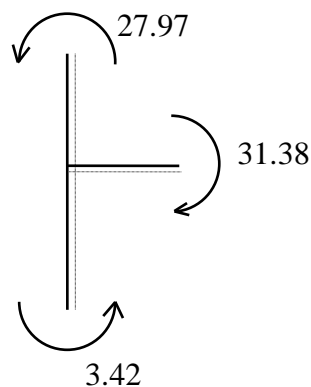
$$M_{GA} = M_{EB} = -3.33 - 2 \times 7.85 + 47.0 = 27.97 \text{ kNm}$$

$$M_{AG} = M_{BE} = -3.33 - 2 \times 47.0 + 7.85 = -89.49 \text{ kNm}$$

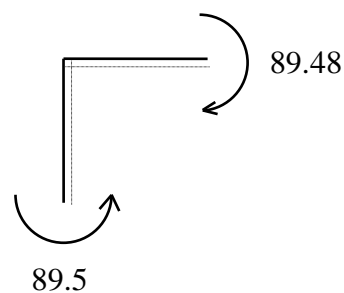
$$M_{AB} = M_{BA} = -160.0 + 1.5 \times 47.0 = -89.50 \text{ kNm} \quad M_{\Delta\Gamma} = M_{\Delta E} = 2 \times 7.85 = 15.69 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta H} = M_{H\Delta} = 0$$

Κόμβος Γ



Κόμβος Α



Με κατανομή σφάλματος: $M_{AB} = M_{BA} = M_{AG} = M_{GA} = -89.49 \text{ kNm}$

$$M_{GD} = M_{ED} = -31.39 \text{ kNm}$$

Υπολογισμός τεμνουσών - αξονικών δυνάμεων 1ης φάσης.

$$V_{ZΓ} = \frac{10.0 \times 3.0}{2} + \frac{-3.42}{3} = 13.9 \text{ kN} \quad V_{ΓZ} = 13.9 - 10.0 \times 3.0 = -16.1 \text{ kN}$$

$$V_{ΓΔ} = \frac{15.69 - (-31.39)}{4.0} = 11.8 \text{ kN} = V_{ΔΓ}$$

$$V_{ΓΑ} = \frac{10.0 \times 2.0}{2} + \frac{-89.49 - 27.97}{2.0} = -48.7 \text{ kN} \quad V_{ΑΓ} = -48.7 - 10.0 \times 2.0 = -68.7 \text{ kN}$$

$$V_{ΑΒ} = \frac{30.0 \times 8.0}{2} + \frac{-89.49 - (-89.49)}{8.0} = 120.0 \text{ kN}$$

Οι παραπάνω τιμές αρκούν για την κατασκευή του αντισυμμετρικού διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων.

$$N_{ZΓ} = N_{ΓZ} = -11.8 - 120.0 = -131.8 \text{ kN} \quad N_{ΓΑ} = N_{ΑΓ} = -120.0 \text{ kN} \quad N_{ΑΒ} = -68.7 \text{ kN}$$

$$N_{ΓΔ} = N_{ΔΓ} = -16.1 + 48.7 = 32.6 \text{ kN} \quad N_{ΔΗ} = N_{ΗΔ} = 11.8 + 11.8 = 23.6 \text{ kN}$$

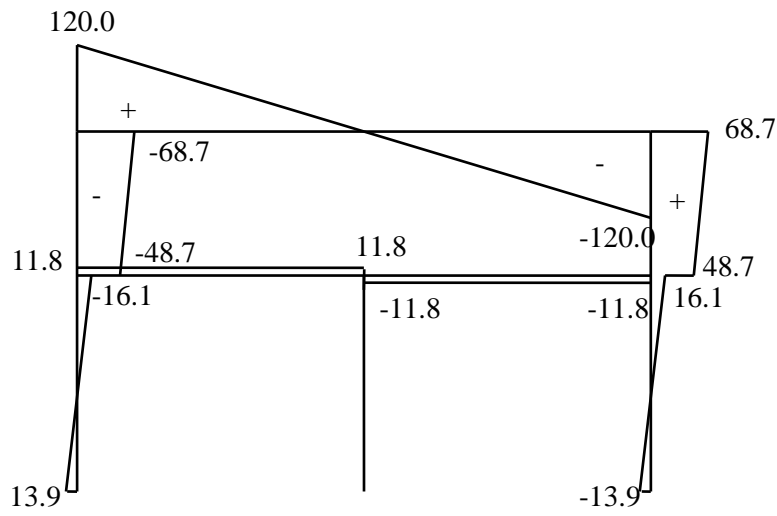
Οι παραπάνω τιμές αρκούν για την κατασκευή του συμμετρικού διαγράμματος αξονικών δυνάμεων.

Υπολογισμός μέγιστων ροπών.

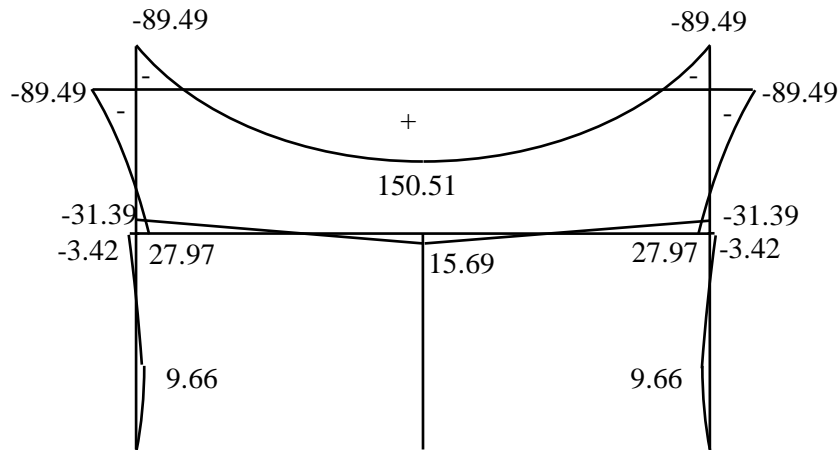
$$\text{Άνοιγμα ΖΓ (ομοίως ΘΕ)} : \max M = \frac{13.9^2}{2 \times 10.0} = 9.66 \text{ kNm}$$

$$\text{Άνοιγμα ΑΒ} : \max M = -89.49 + \frac{120.0^2}{2 \times 30.0} = 150.51 \text{ kNm}$$

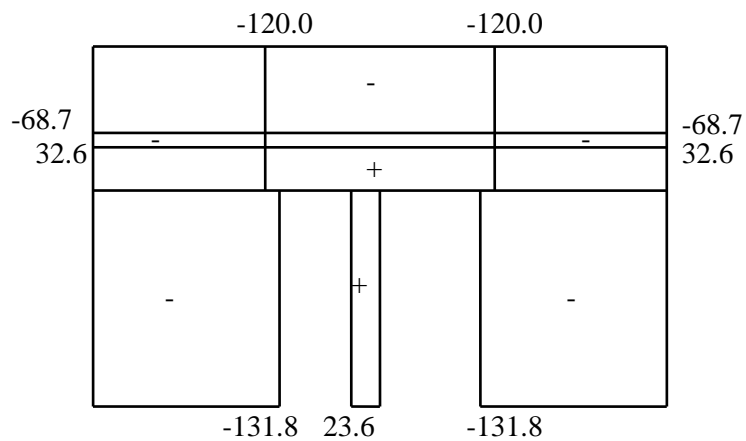
Διαγράμματα 1ης φάσης



[V (kN)]
Αντιμετρικό

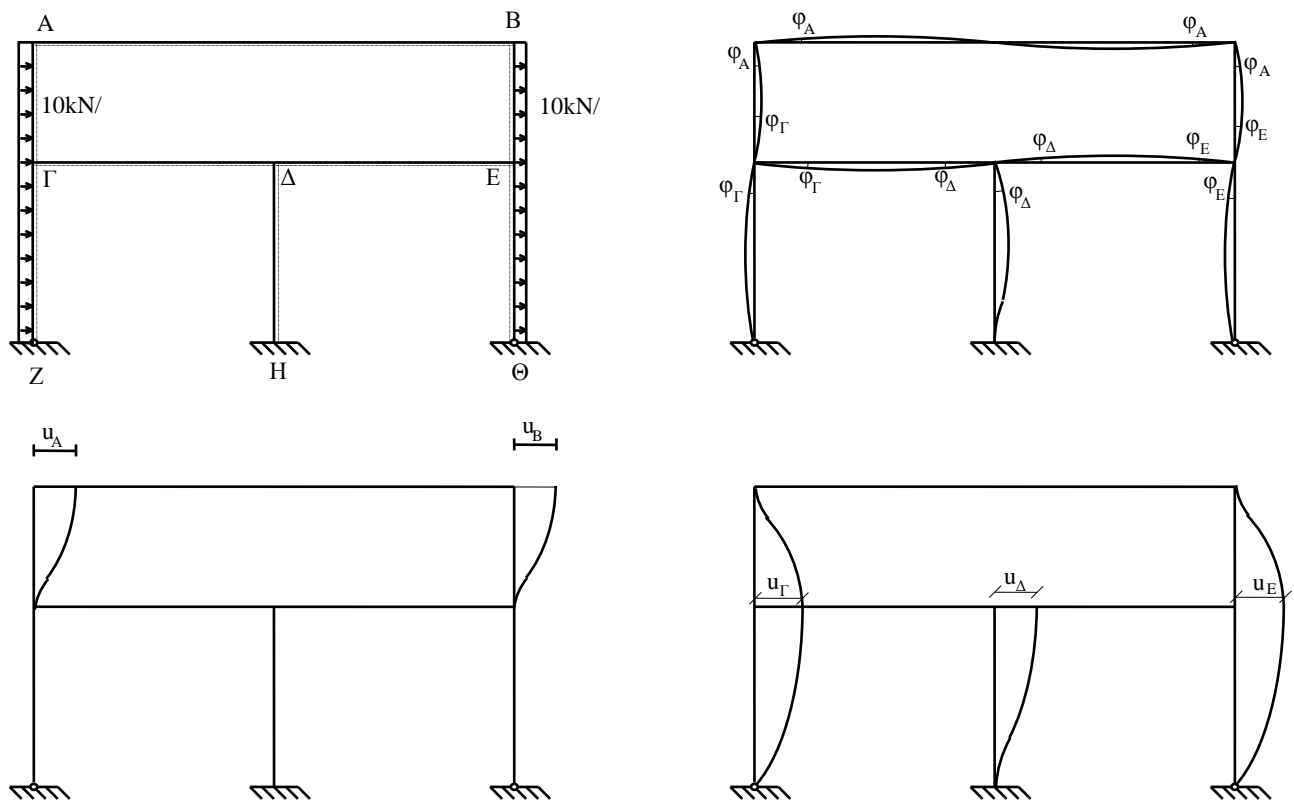


[M (kNm)]
Συμμετρικό



[N (kN)]
Συμμετρικό

2η φάση: Επίλυση για την αντισυμμετρική φόρτιση



Για την αντισυμμετρική φόρτιση ο φορέας δε συμπεριφέρεται σαν πάγιος, δεδομένου ότι υπάρχουν οι οριζόντιες μετατοπίσεις των ζυγωμάτων. Στα παραπάνω σκαριφήματα έχουν σχεδιασθεί χωριστά, με αυθαίρετες φορές, οι στροφές των κόμβων καθώς και οι μετατοπίσεις των ζυγωμάτων για εποπτικότερη εικόνα του φορέα. Είναι σαφές ότι στην τελική εντατική κατάσταση του φορέα συνυπάρχουν οι παραμορφώσεις των παραπάνω σχημάτων.

Λόγω αντισυμμετρίας ισχύει: $\varphi_A = \varphi_B$ και $\varphi_\Gamma = \varphi_E$

Επίσης, λόγω απαραμόρφωτου των μηκών: $u_A = u_B$ και $u_\Gamma = u_\Delta = u_E$

Τίθεται: $EI\varphi_A = EI\varphi_B = A$, $EI\varphi_\Gamma = EI\varphi_E = \Gamma$, $EI\varphi_\Delta = \Delta$,
 $EIu_A = EIu_B = Y$, $EIu_\Gamma = EIu_\Delta = EIu_E = \Psi$

$$M_{\Gamma Z} = -\frac{10.0 \times 3.0^2}{8} - \frac{3EI\varphi_\Gamma}{3.0} + \frac{3EIu_\Gamma}{3.0^2} = -11.25 - \Gamma + 0.333\Psi$$

$$M_{\Gamma\Delta} = \frac{2E \times 4I}{4.0} (2\varphi_\Gamma - \varphi_\Delta) = 4\Gamma - 2\Delta \quad M_{\Delta\Gamma} = \frac{2E \times 4I}{4.0} (2\varphi_\Delta - \varphi_\Gamma) = 4\Delta - 2\Gamma$$

$$M_{\Gamma A} = -\frac{10.0 \times 2.0^2}{12} + \frac{2EI}{2.0}(2\varphi_{\Gamma} - \varphi_A) + \frac{6EI}{2.0^2}u_{\Gamma} - \frac{6EI}{2.0^2}u_A = -3.33 + 2\Gamma - A + 1.5\Psi - 1.5Y$$

$$M_{A\Gamma} = -\frac{10.0 \times 2.0^2}{12} + \frac{2EI}{2.0}(2\varphi_A - \varphi_\Gamma) + \frac{6EI}{2.0^2}u_A - \frac{6EI}{2.0^2}u_\Gamma = -3.33 + 2A - \Gamma + 1.5Y - 1.5\Psi$$

$$M_{AB} = \frac{2E \times 6I}{8.0}(-2\varphi_A - \varphi_B) = -4.5A \quad M_{\Delta H} = \frac{2EI}{3.0}2\varphi_\Delta + \frac{6EI}{3.0^2}u_\Delta = 1.333\Delta + 0.667C$$

$$M_{H\Delta} = \frac{2EI}{3.0}(-\varphi_\Delta) - \frac{6EI}{3.0^2}u_\Delta = -0.667\Delta - 0.667\Psi$$

Εξ άλλου, λόγω αντισυμμετρίας:

$$M_{E\Theta} = 11.25 + \Gamma - 0.333\Psi \quad M_{E\Delta} = -4\Gamma + 2\Delta \quad M_{\Delta E} = -4\Delta + 2\Gamma$$

$$M_{EB} = 3.33 - 2\Gamma + A - 1.5\Psi + 1.5Y \quad M_{BE} = 3.33 - 2A + \Gamma - 1.5Y + 1.5\Psi$$

$$M_{BA} = 4.5A$$

Εξισώσεις ισορροπίας

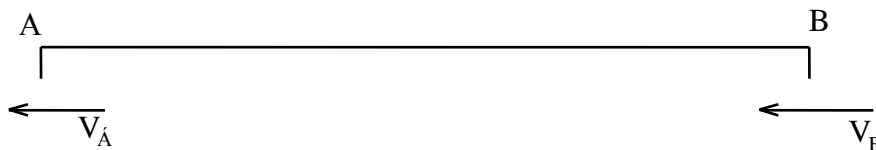
$$M_{AB} = M_{A\Gamma} \Rightarrow -4.5A = -3.33 + 2A - \Gamma + 1.5Y - 1.5\Psi \Rightarrow 6.5A - \Gamma + 1.5Y - 1.5\Psi = 3.33 \quad (I)$$

$$M_{\Gamma Z} = M_{\Gamma\Delta} + M_{\Gamma A} \Rightarrow -11.25 - \Gamma + 0.333\Psi = 4\Gamma - 2\Delta - 3.33 + 2\Gamma - A + 1.5\Psi - 1.5Y \Rightarrow A - 7\Gamma + 2\Delta + 1.5Y - 1.167\Psi = 7.92$$

(II)

$$M_{\Delta\Gamma} + M_{\Delta H} = M_{\Delta E} \Rightarrow 4\Delta - 2\Gamma + 1.333\Delta + 0.667\Psi = -4\Delta + 2\Gamma \Rightarrow 4\Gamma - 9.333\Delta - 0.667\Psi = 0$$

(III)



$$V_{A\Gamma} + V_{BE} = 0 \Rightarrow (\text{λόγω αντισυμμετρίας}) \quad 2V_{A\Gamma} = 0 \Rightarrow V_{A\Gamma} = 0$$

$$\text{Αλλά : } V_{A\Gamma} = V_{\Gamma A} - 10.0 \times 2.0 \quad \text{και} \quad V_{\Gamma A} = \frac{10.0 \times 2.0}{2} + \frac{M_{A\Gamma} - M_{\Gamma A}}{2.0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{A\Gamma} - M_{\Gamma A} - 10 \times 2.0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3.33 + 2A - \Gamma + 1.5Y - 1.5\Psi + 3.33 - 2\Gamma + A - 1.5\Psi + 1.5Y = 20.0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3A - 3\Gamma + 3Y - 3\Psi = 20.0 \Rightarrow A - \Gamma + Y - \Psi = 6.67$$

(IV)

$$\begin{aligned}
Z_x + H_x + \Theta_x &= 2 \times 10.0 \times 5.0 \Rightarrow (\text{λόγω αντισυμμετρίας}) \quad 2Z_x + H_x = 100.0 \Rightarrow \\
\Rightarrow 2V_{Z\Gamma} + V_{H\Delta} &= 100.0 \Rightarrow 2 \left(\frac{10.0 \times 3.0}{2} + \frac{M_{\Gamma Z}}{3.0} \right) + \frac{M_{\Delta H} - M_{H\Delta}}{3.0} = 100.0 \Rightarrow \\
\Rightarrow 90.0 + 2M_{\Gamma Z} + M_{\Delta H} - M_{H\Delta} &= 300.0 \Rightarrow \\
\Rightarrow -22.5 - 2\Gamma + 0.667\Psi + 1.333\Delta + 0.667\Psi + 0.667\Delta + 0.667\Psi &= 210.0 \Rightarrow \\
\Rightarrow -2\Gamma + 2\Delta + 2\Psi &= 232.5 \Rightarrow \Delta = \Gamma - \Psi + 116.25 \\
\text{(V)}
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους η επίλυση του οποίου επιτρέπει τον καθορισμό των αγνώστων μεγεθών παραμόρφωσης A, Γ, Δ, Υ και Ψ.

Επίλυση συστήματος

$$\begin{aligned}
\text{(III)}, \text{(V)} \Rightarrow 4\Gamma - 9.333(\Gamma - \Psi + 116.25) - 0.667\Psi &= 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow -5.333\Gamma + 8.667\Psi &= 1085.0 \Rightarrow \Psi = 125.2 + 0.615\Gamma \\
\text{(VI)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(V)} \Rightarrow \Delta = \Gamma - 125.2 - 0.615\Gamma + 116.25 \Rightarrow \text{(VII)} \quad \Delta &= -8.95 + 0.385\Gamma \\
\text{(VII)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \Rightarrow 6.5A - G + 1.5Y - 1.5(125.2 + 0.615\Gamma) &= 3.33 \Rightarrow 6.5A = 191.13 + 1.923\Gamma - \\
1.5Y \Rightarrow \\
\Rightarrow A = 29.4 + 0.296\Gamma - 0.231Y & \\
\text{(VIII)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(IV)} \Rightarrow 29.4 + 0.296\Gamma - 0.231Y - \Gamma + Y - 125.2 - 0.615\Gamma &= 6.67 \Rightarrow \\
\Rightarrow Y = 133.3 + 1.715\Gamma & \\
\text{(IX)}
\end{aligned}$$

$$\text{(VIII)} \Rightarrow A = 29.4 + 0.296\Gamma - 0.231(133.3 + 1.715\Gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -1.39 - 0.1\Gamma \quad \text{(X)}$$

$$\begin{aligned}
\text{(II)} \Rightarrow -1.39 - 0.1\Gamma - 7\Gamma + 2(-8.95 + 0.385\Gamma) + 1.5(133.3 + 1.715\Gamma) - 1.167(125.2 + \\
0.615\Gamma) = \\
= 7.92 \Rightarrow -4.474\Gamma = -26.63 \Rightarrow \Gamma = 5.95
\end{aligned}$$

$$\text{(X)} \Rightarrow A = -1.39 - 0.1 \times 5.95 = -1.98$$

$$\text{(IX)} \Rightarrow Y = 133.3 + 1.715 \times 5.95 = 143.5$$

$$\text{(VII)} \Rightarrow \Delta = -8.95 + 0.385 \times 5.95 = -6.65$$

$$\text{(VI)} \Rightarrow \Psi = 125.2 + 0.615 \times 5.95 = 128.9$$

Από τις τιμές αυτές των μεγεθών παραμόρφωσης λαμβάνονται οι ροπές της 2ης φάσης με αντικατάσταση:

$$M_{\Gamma Z} = -11.25 - 5.95 + 0.333 \times 128.9 = 25.7 \text{ kNm}$$

$$M_{E\Theta} = -$$

$$M_{\Gamma\Delta} = 4 \times 5.95 - 2 \times (-6.65) = 37.1 \text{ kNm}$$

$$M_{E\Delta} = -$$

$$M_{\Delta\Gamma} = 4 \times (-6.65) - 2 \times 5.95 = -38.5 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta E} =$$

$$M_{\Gamma A} = -3.33 + 2 \times 5.95 - (-1.98) + 1.5 \times 128.9 - 1.5 \times 143.5 = -11.3 \text{ kNm}$$

$$M_{EB} =$$

$$M_{A\Gamma} = -3.33 + 2 \times (-1.98) - 5.95 + 1.5 \times 143.5 - 1.5 \times 128.9 = 8.7 \text{ kNm}$$

$$M_{BE} = -$$

$$M_{AB} = -4.5 \times (-1.98) = 8.9 \text{ kNm}$$

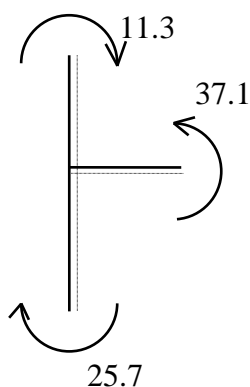
$$M_{BA} = -$$

$$M_{\Delta H} = 1.333 \times (-6.65) + 0.667 \times 128.9 = 77.1 \text{ kNm}$$

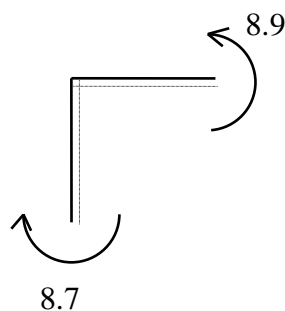
$$M_{H\Delta} = -0.667 \times (-6.65) - 0.667 \times 128.9 = -81.5 \text{ kNm}$$

Ισοροπίες κόμβων

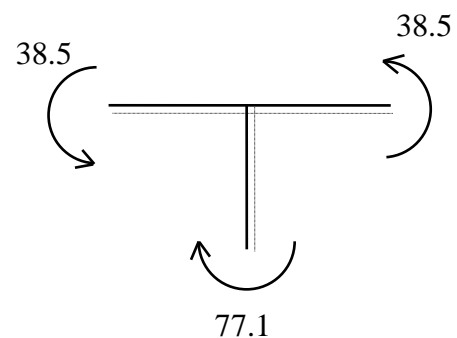
Κόμβος Γ



Κόμβος A



Κόμβος Δ



Με κατανομή σφάλματος:

$$M_{\Gamma\Delta} = 37.0 \text{ kNm}$$

$$M_{AB} = M_{A\Gamma} = 8.8 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta H} = 77.0 \text{ kNm}$$

$$M_{E\Delta} = -37.0 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = M_{B\Delta} = -8.8 \text{ kNm}$$

Υπολογισμός τεμνουσών - αξονικών δυνάμεων 2ης φάσης

$$\begin{aligned}V_{ZI} &= \frac{10.0 \times 3.0}{2} + \frac{25.7}{3.0} = 23.6 \text{ kN} & V_{IZ} &= 23.6 - 10.0 \times 3.0 = -6.4 \text{ kN} \\V_{IA} &= \frac{10.0 \times 2.0}{2} + \frac{8.8 - (-11.3)}{2.0} = 20.0 \text{ kN} & V_{AI} &= 20.0 - 10.0 \times 2.0 = 0 \\V_{AB} &= \frac{-8.8 - (8.8)}{8.0} = -2.2 \text{ kN} & V_{BA} &= \frac{-38.5 - 37.0}{4.0} = -18.9 \text{ kN} \\V_{HA} &= V_{AH} = \frac{77.0 - (-81.5)}{3.0} = 52.9 \text{ kN}\end{aligned}$$

Οι τιμές αυτές αρκούν για το σχεδιασμό του συμμετρικού διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων.

$$V_{AB} = -2.2 \text{ kN} \Rightarrow N_{AI} = 2.2 \text{ kN}$$

$$V_{IZ} = -6.4 \text{ kN}, V_{IA} = 20.0 \text{ kN} \Rightarrow N_{IA} = -26.4 \text{ kN}$$

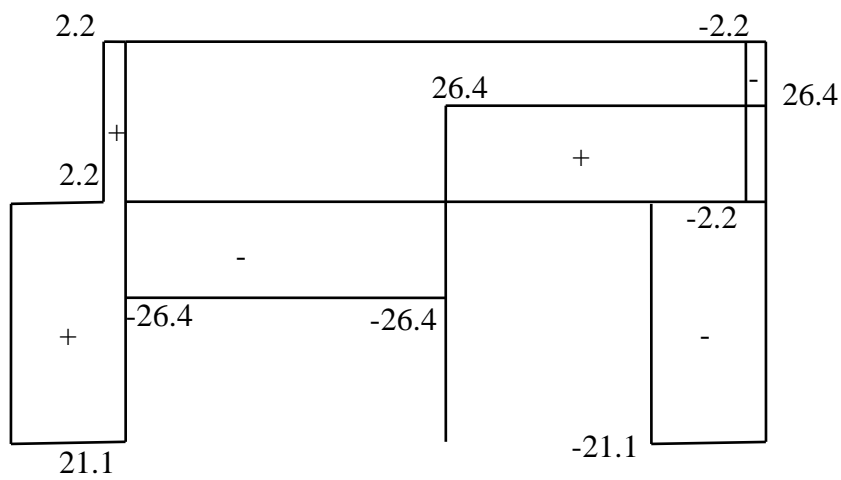
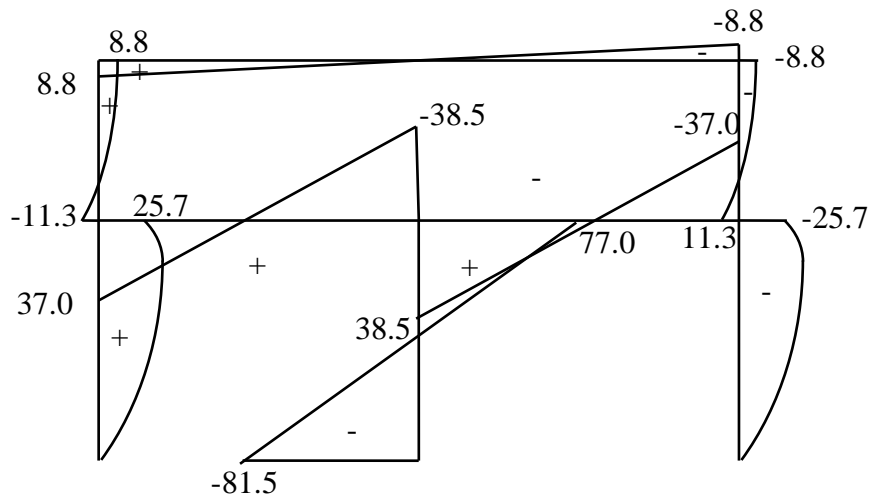
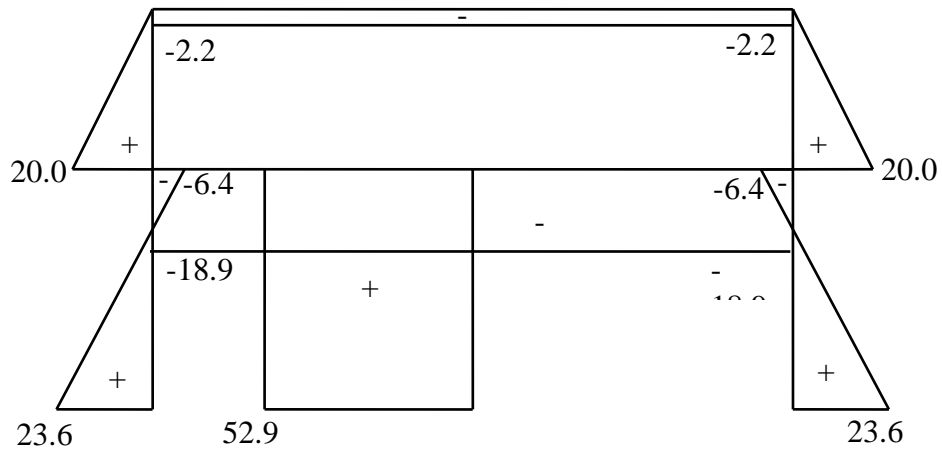
$$V_{BA} = -18.9 \text{ kN} \Rightarrow N_{IZ} = 2.2 + 18.9 = 21.1 \text{ kN}$$

$$V_{AI} = 0 \Rightarrow N_{AB} = 0$$

Οι τιμές αυτές αρκούν για το σχεδιασμό του αντισυμμετρικού διαγράμματος αξονικών δυνάμεων.

Είναι σημαντικό να υπογραμμισθεί εδώ ότι για την επίλυση του φορέα χρειάστηκε να επιλυθούν 2 γραμμικά συστήματα: ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους (1η φάση) και ένα σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους (2η φάση). Αν η φόρτιση δεν είχε αναλυθεί σε συμμετρική και αντισυμμετρική, η επίλυση του φορέα θα οδηγούσε στην επίλυση ενός συστήματος 7 εξισώσεων με 7 αγνώστους, πράγμα πολύ πιο κοπιώδες και πολύπλοκο.

Διαγράμματα 2ης φάσης



Τελικά διαγράμματα: Επαλληλία 1ης και 2ης φάσης.

-Τέμνουσες δυνάμεις

$$V_{AB} = 120.0 - 2.2 = 117.8\text{kN}$$

$$V_{BA} = -120.0 - 2.2 = -122.2\text{kN}$$

$$V_{ZI} = 13.9 + 23.6 = 37.5\text{kN}$$

$$V_{IZ} = -16.1 - 6.4 = -22.5\text{kN}$$

$$V_{\Gamma A} = -48.7 + 20.0 = -28.7\text{kN}$$

$$V_{\Lambda \Gamma} = -68.7\text{kN}$$

$$V_{\Gamma \Delta} = 11.8 - 18.9 = -7.1\text{kN} = V_{\Delta \Gamma}$$

$$V_{\Delta E} = -11.8 - 18.9 = -30.7\text{kN} = V_{E\Delta}$$

$$V_{HA} = 52.9\text{kN} = V_{\Delta H}$$

$$V_{BE} = 68.7\text{kN} = V_{EB}$$

$$V_{E\Theta} = 16.1 - 6.4 = 9.7\text{kN} = V_{\Theta E}$$

-Ροπές κάμψης

$$M_{IZ} = -3.4 + 25.7 = 22.3\text{kNm}$$

$$M_{\Gamma \Delta} = -31.4 + 37.0 = 5.6\text{kNm}$$

$$M_{\Gamma A} = 28.0 - 11.3 = 16.7\text{kNm}$$

$$M_{\Lambda \Gamma} = M_{AB} = -89.5 + 8.8 = -80.7\text{kNm}$$

$$M_{\Delta \Gamma} = 15.7 - 38.5 = -22.8\text{kNm}$$

$$M_{HA} = -81.5\text{kNm}$$

$$M_{\Delta H} = 77.0\text{kNm}$$

$$M_{\Delta E} = 15.7 + 38.5 = 54.2\text{kNm}$$

$$M_{BA} = M_{BE} = -89.5 - 8.8 = -98.3\text{kNm}$$

$$M_{EB} = 28.0 + 11.3 = 39.3\text{kNm}$$

$$M_{E\Theta} = -3.4 - 25.7 = -29.1\text{kNm}$$

$$M_{E\Delta} = -31.4 - 37.0 = -68.4\text{kNm}$$

-Υπολογισμός μέγιστων ροπών

$$\text{Άνοιγμα AB: } \max M = -80.7 + \frac{117.8^2}{2 \times 30.0} = 150.6\text{kNm}$$

$$\text{Άνοιγμα ZI: } \max M = \frac{37.5^2}{2 \times 20.0} = 35.2\text{kNm}$$

-Αξονικές δυνάμεις

$$N_{ZI} = N_{IZ} = -131.8 + 21.1 = -110.7\text{kN}$$

$$N_{\Gamma A} = N_{\Lambda \Gamma} = -120.0 + 2.2 = -117.8\text{kN}$$

$$N_{AB} = N_{BA} = -68.7\text{kN}$$

$$N_{\Gamma \Delta} = N_{\Delta \Gamma} = 32.6 - 26.4 = 6.2\text{kN}$$

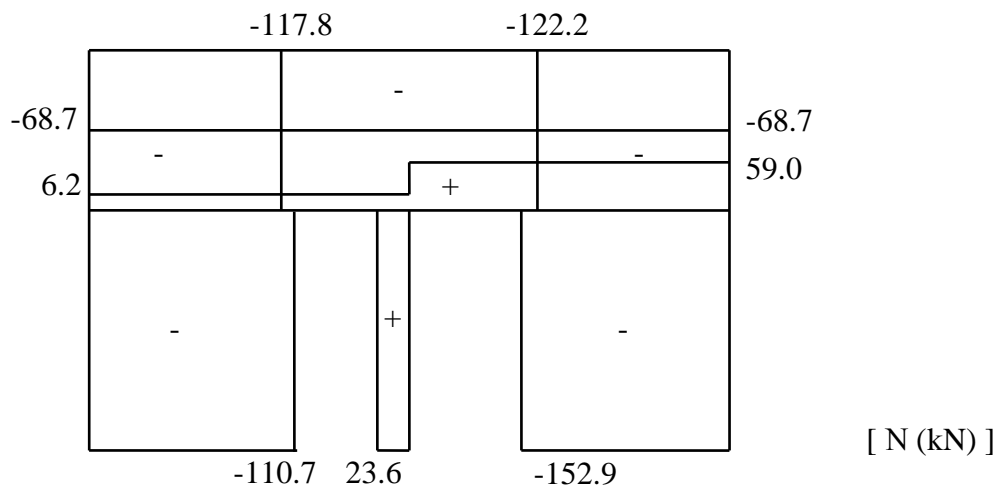
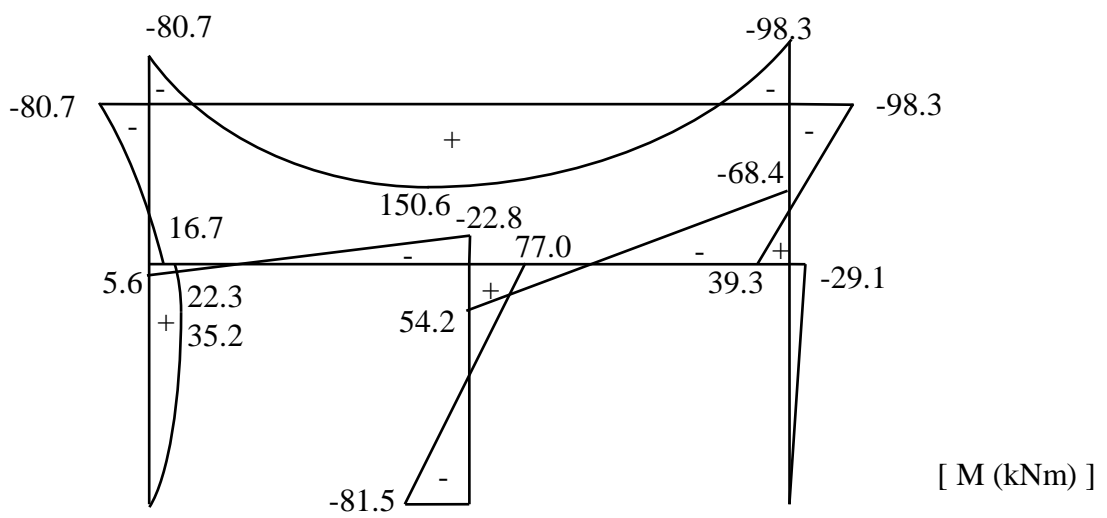
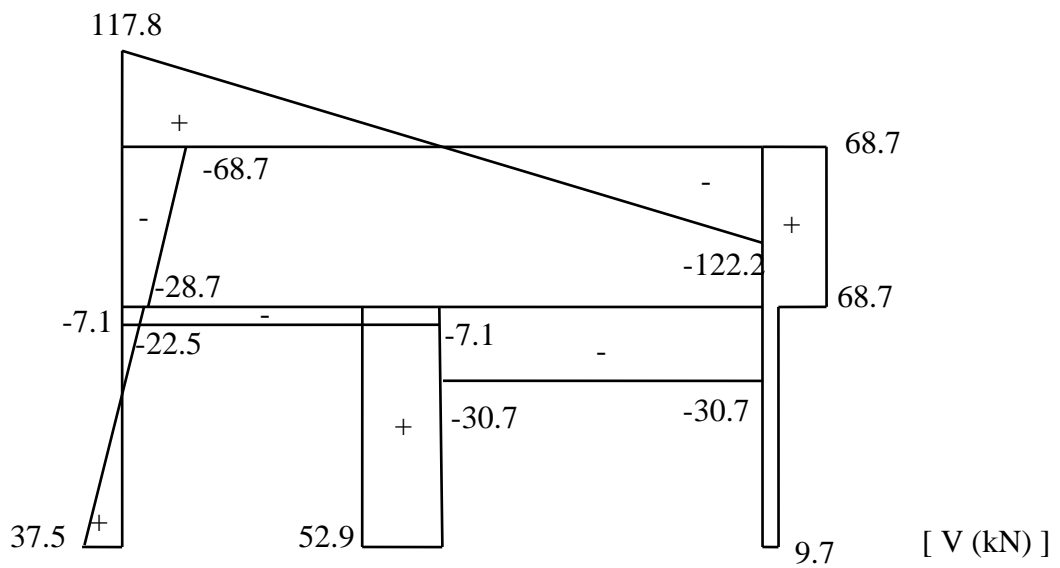
$$N_{\Delta H} = N_{HA} = 23.6\text{kN}$$

$$N_{\Delta E} = N_{E\Delta} = 32.6 + 26.4 = 59.0\text{kN}$$

$$N_{BE} = N_{EB} = -120.0 - 2.2 = -122.2\text{kN}$$

$$N_{E\Theta} = N_{\Theta E} = -131.8 - 21.1 = -152.9\text{kN}$$

Διαγράμματα



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10. Μέθοδος διανομής ροπών Cross.

Η μέθοδος Cross είναι μία προσεγγιστική τεχνική επίλυσης υπερστατικών φορέων, ιδιαίτερα κατάλληλη για υπολογισμούς με το χέρι, δεδομένου ότι για τον υπολογισμό των ροπών δε χρειάζεται να επιλυθεί κανένα σύστημα εξισώσεων. Ας θεωρηθεί ένας φορέας αποτελούμενος από ευθύγραμμα τμήματα, χωρίς φορτία κατ' αρχάς και ας υποθεθεί ότι τα παραγόμενα έργα οφείλονται σε ροπές κάμψης. Αν επιβληθούν στατικά φορτία, ο φορέας αρχίζει να παραμορφώνεται μέχρι μία νέα θέση ισορροπίας δηλαδή μέχρι μία νέα θέση όπου τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη (ροπές) έχουν αναπτυχθεί πλήρως ώστε να ισοσταθμίσουν τις εξωτερικές ροπές που οφείλονται στα φορτία που εφαρμόζονται. Έτσι, οι ροπές κάμψης που αναπτύσσονται συνδέονται απ' ευθείας με τις τελικές παραμορφώσεις του φορέα.

Με τη μέθοδο Cross ακολουθείται μία πορεία διαδοχικών διορθώσεων των τιμών των ροπών των κόμβων και των πακτώσεων. Η αρχική υπόθεση είναι ότι όλοι οι κόμβοι είναι πακτώσεις, πράγμα που βοηθάει το μελετητή να υπολογίσει τις αρχικές ροπές μέσω των πινάκων της μονόπακτης και της αμφίπακτης δοκού. Στην πραγματικότητα οι κόμβοι είναι ελεύθεροι να περιστραφούν και ενδεχομένως να μετατοπισθούν. Το πρώτο βήμα είναι να αφηθεί ελεύθερος να περιστραφεί ένας τυχαίος κόμβος του φορέα. Όλα τα μέλη του φορέα που συντρέχουν στο συγκεκριμένο κόμβο παραμορφώνονται σε μία νέα θέση ισορροπίας ενώ στα άκρα τους αναπτύσσονται πρόσθετες ροπές. Ακολούθως ο κόμβος σταθεροποιείται στη νέα θέση και ένας άλλος κόμβος αφήνεται ελεύθερος να περιστραφεί, και ούτω καθ' εξής. Καθώς η διαδικασία συνεχίζεται από κόμβο σε κόμβο και πίσω πάλι, η διόρθωση των ροπών των άκρων γίνεται ολοένα και μικρότερη. Με τον τρόπο αυτόν, όλες οι ροπές στους κόμβους και τις πακτώσεις διορθώνονται διαδοχικά ώσπου να υπάρξει ισορροπία ροπών σε όλους τους κόμβους του φορέα. Η σύγκλιση επέρχεται γρήγορα και προφανώς ο αριθμός των προσεγγίσεων εξαρτάται από την απαιτούμενη ακρίβεια των υπολογισμών.

Οι βασικές υποθέσεις της μεθόδου Cross είναι:

- Όλα τα μέλη θεωρούνται πρισματικά ή κυλινδρικά (σταθερό EI).
- Τα παραγόμενα έργα οφείλονται σε ροπές κάμψης (αγνοούνται οι αξονικές παραμορφώσεις).
- Ο φορέας συμπεριφέρεται ελαστικά (νόμος του Hooke).
- Οι κόμβοι παραμορφώνονται σε στερεά σώματα.

10.1. Πάγιοι φορείς.

10.1.1. Δείκτες ακαμψίας στοιχείων - Ακαμψίες κόμβων.

Καλείται δείκτης ακαμψίας k_{IJ} στοιχείου IJ η απόλυτη τιμή της ροπής η οποία αναπτύσσεται στο άκρο I όταν το άκρο I στρέφεται κατά $\varphi_I = 1$. Οι δείκτες ακαμψίας υπολογίζονται για όλα τα στοιχεία που συντρέχουν σε κάθε κόμβο. Στη συνηθισμένη περίπτωση φορέων που αποτελούνται από ένα μόνον υλικό, το μέτρο ελαστικότητας E είναι κοινό και παραλείπεται. Από τα προαναφερθέντα προκύπτει:

$$k_{IJ} = n \frac{I_{IJ}}{L_{IJ}}$$

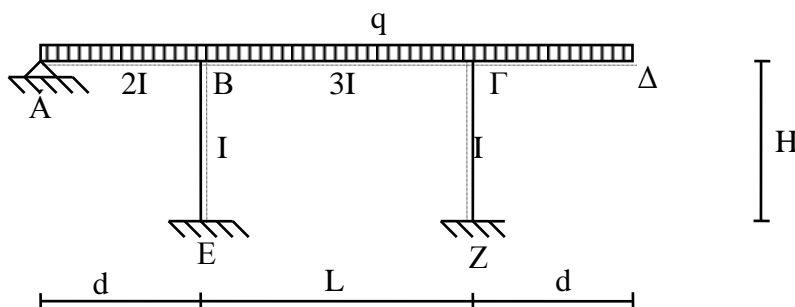
όπου $n = 3$ για μονόπακτη δοκό

$n = 4$ για αμφίπακτη δοκό

$n = 0$ για πρόβολο

Σημειώνεται εδώ ότι οι φορείς "τεμαχίζονται" όπως στη μέθοδο των παραμορφώσεων και το κάθε στοιχείο μπορεί να συμπεριφέρεται ως μονόπακτο ή αμφίπακτο, ανάλογα με τον τρόπο στήριξης του.

Παράδειγμα:



$$k_{BA} = 3 \frac{2I}{d} = \frac{6I}{d} \quad k_{B\Gamma} = k_{\Gamma B} = 4 \frac{3I}{L} = \frac{12I}{L} \quad k_{\Gamma\Delta} = 0$$
$$k_{BE} = k_{\Gamma Z} = 4 \frac{I}{H}$$

Ακαμψία κόμβου s_I ονομάζεται το άθροισμα των δεικτών ακαμψίας των στοιχείων που συντρέχουν σε κάθε κόμβο. Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$s_B = k_{BA} + k_{BE} + k_{B\Gamma} \quad s_{\Gamma} = k_{\Gamma B} + k_{\Gamma Z}$$

10.1.2. Συντελεστές κατανομής

Καλείται συντελεστής κατανομής μ_{IJ} στοιχείου IJ ο λόγος του δείκτη ακαμψίας k_{IJ} του στοιχείου IJ προς την ακαμψία του κόμβου I. Οι συντελεστές

κατανομής υπολογίζονται για τα στοιχεία που έχουν υπολογισθεί οι δείκτες ακαμψίας και δίδονται από τη σχέση:

$$\mu_{\Pi} = \frac{k_{\Pi}}{s_{\Pi}}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\mu_{BA} = \frac{k_{BA}}{s_B}, \quad \mu_{BE} = \frac{k_{BE}}{s_B}, \quad \mu_{BG} = \frac{k_{BG}}{s_B}$$

Είναι προφανές ότι για κάθε κόμβο ισχύει: $\Sigma \mu = 1$

10.1.3. Θεμελιώδεις ή αρχικές ροπές.

Υπολογίζονται συναρτήσει των εξωτερικών φορτίων για κάθε στοιχείο με τη βοήθεια των επιλύσεων των βασικών φορέων (μονόπακτης και αμφίπακτης δοκού). Τα πρόσημα των ροπών δεν εξαρτώνται από την ίνα αναφοράς αλλά θετικές θεωρούνται οι ροπές που είναι δεξιόστροφες (δηλαδή με φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού) ενεργώντας στον κόμβο. Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα:

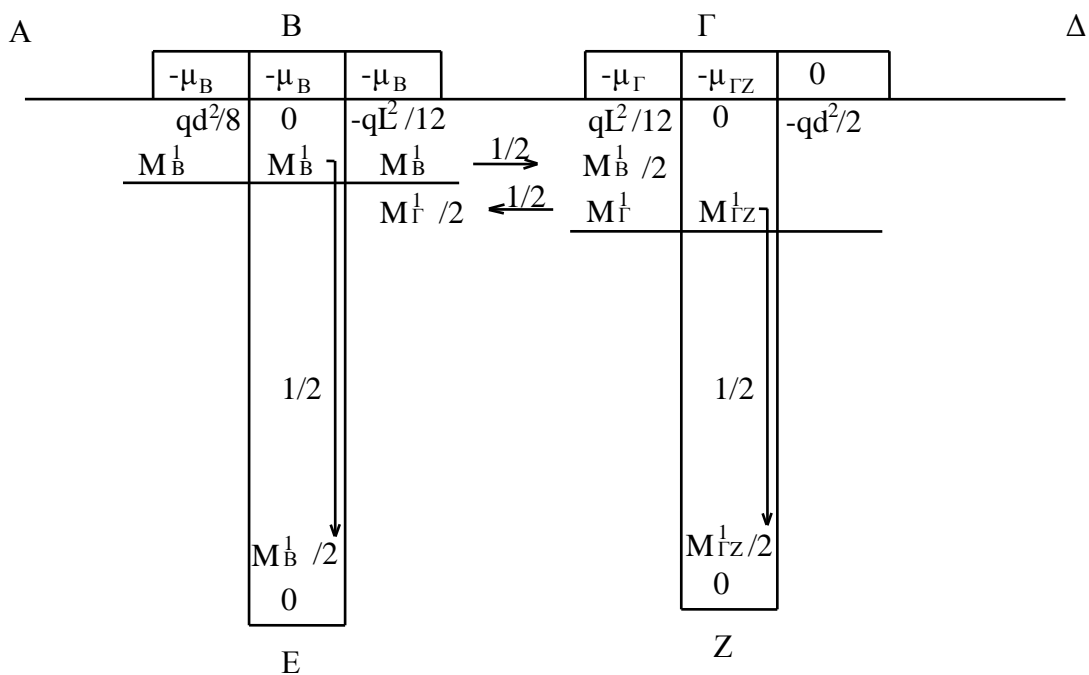
$$M_{BA}^0 = \frac{qd^2}{8} \quad M_{BG}^0 = -\frac{qL^2}{12} \quad M_{GB}^0 = \frac{qL^2}{12} \quad M_{\Gamma\Delta}^0 = -\frac{qd^2}{2}$$

$$M_{BE}^0 = M_{EB}^0 = M_{\Gamma Z}^0 = M_{Z\Gamma}^0 = 0$$

Σημειώνεται ότι κατά πολλούς συγγραφείς, θετικές θεωρούνται οι ροπές με φορά αυτήν των δεικτών του ρολογιού. Η θεώρηση αυτή δεν επηρεάζει καθόλου τα αποτελέσματα.

10.1.4. Επίλυση κατά Cross.

Κατά την επίλυση σχεδιάζεται σχηματικά ο φορέας σε ένα **μεγάλο** σχήμα. Σε κάθε κόμβο γράφονται οι συντελεστές κατανομής (με αρνητικό πρόσημο κατά προτίμηση) και από κάτω οι θεμελιώδεις ροπές. Προφανώς, στις πακτώσεις γράφονται μόνο θεμελιώδεις ροπές. Στο παράδειγμα της παραγράφου 10.1.1:



Η διαδικασία που ακολουθεί είναι η εξής:

α. Ισορρόπηση του κόμβου: Άθροιση όλων των ροπών ενός τυχαίου κόμβου.

Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\Sigma M_B = M_{BA}^0 + M_{BE}^0 + M_{B\Gamma}^0 = \frac{qd^2}{8} + 0 - \frac{qL^2}{12}$$

β. Κατανομή ροπών: Οι ροπές ισορρόπησης του κόμβου ΣM_B πολλαπλασιάζονται επί των συντελεστών κατανομής και τα γινόμενα γράφονται κάτω από τις αντίστοιχες αρχικές ροπές. Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$M_{BA}^1 = \Sigma M_B(-\mu_{BA}) \quad M_{BE}^1 = \Sigma M_B(-\mu_{BE}) \quad M_{B\Gamma}^1 = \Sigma M_B(-\mu_{B\Gamma})$$

γ. Μεταβίβαση: Οι ροπές που προκύπτουν από την κατανομή μεταβιβάζονται, πολλαπλασιασμένες επί 1/2, στους γειτονικούς κόμβους ή πακτώσεις, αν υπάρχουν.

Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται σε άλλο κόμβο. Στο προηγούμενο παράδειγμα:

α. Ισορρόπηση κόμβου Γ:

$$\Sigma M_{\Gamma} = \frac{qL^2}{12} + 0 - \frac{qd^2}{2} + \frac{M_{B\Gamma}^1}{2}$$

β. Κατανομή:

$$M_{\Gamma B}^1 = \Sigma M_{\Gamma}(-\mu_{\Gamma B}) \quad M_{\Gamma Z}^1 = \Sigma M_{\Gamma}(-\mu_{\Gamma Z})$$

γ. Μεταβίβαση.

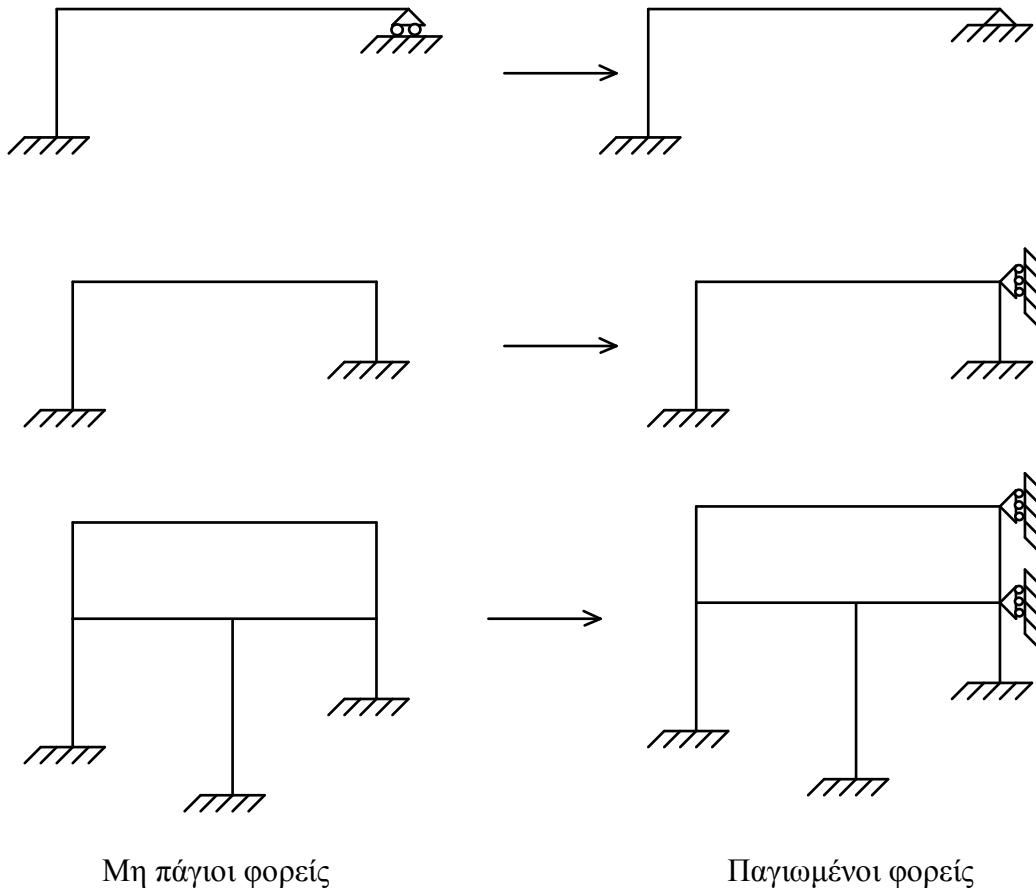
Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι οι τιμές των μεταβιβαζομένων ροπών να γίνουν μικρότερες από την απαιτούμενη ακρίβεια των υπολογισμών (συνήθως τριών ή τεσσάρων σημαντικών ψηφίων).

Σημειώνεται ότι οι ήδη κατανεμημένες ροπές δε συμμετέχουν σε καινούργια ισορρόπηση του κόμβου.

10.2. Μη πάγιοι φορείς.

10.2.1. 1ο Στάδιο: Παγίωση του φορέα.

Η επίλυση μη πάγιων φορέων με τη μέθοδο Cross γίνεται σε στάδια. Κατά το πρώτο στάδιο ο φορέας παγιώνεται με αυθαίρετη εισαγωγή τόσων κυλίσεων, όσες είναι οι δυνατότητες μετατόπισης, οριζόντιας ή κατακόρυφης, του φορέα. Ο παγιωμένος φορέας επιλύεται με τη μέθοδο Cross κατά τα προαναφερθέντα.



10.2.2. 2ο Στάδιο: Επιλύσεις για μετακινήσεις κόμβων.

Κατά το 2ο στάδιο της επίλυσης μη πάγιων φορέων με τη μέθοδο Cross, παραλείπονται τα εξωτερικά φορτία και εισάγεται σε φόρτιση μία αυθαίρετη μετακίνηση δ του πρώτου παγιωθέντος κόμβου (ή ομάδας κόμβων). Οι συντελεστές κατανομής παραμένουν οι ίδιοι με αυτούς του 1ου σταδίου και οι τελικές ροπές είναι όλες συναρτήσεις του δ . Είναι βέβαια δυνατόν να εισαχθεί μοναδιαία μετακίνηση και τα τελικά μεγέθη να πολλαπλασιασθούν εκ των υστέρων επί δ .

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για όλους τους παγιωθέντες κόμβους (ή ομάδες κόμβων) του φορέα.

10.2.3. Υπολογισμός μετακινήσεων.

Οι μετατοπίσεις δ των κόμβων μπορούν να υπολογισθούν, όπως στη μέθοδο των παραμορφώσεων, από τις συνθήκες ισορροπίας του φορέα.

10.2.4. Υπολογισμός τελικής εντατικής κατάστασης.

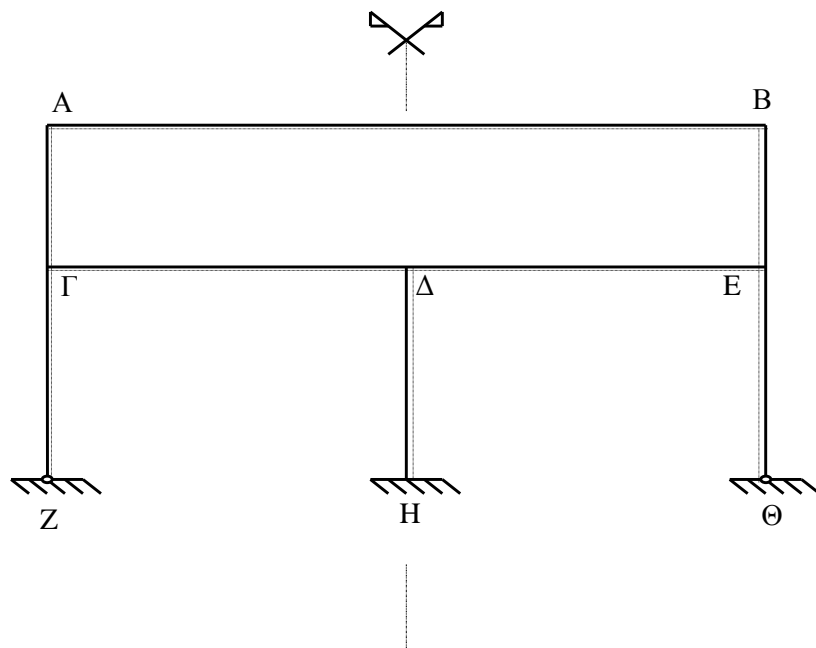
Αφού υπολογισθούν οι μετατοπίσεις δ , υπολογίζονται τα εντατικά μεγέθη του 2ου σταδίου και ακολούθως, με επαλληλία, τα τελικά εντατικά μεγέθη του φορέα.

10.3. Αντιμετώπιση συμμετρικών φορέων.

Η μέθοδος Cross απλοποιείται σημαντικά όταν εφαρμόζεται σε συμμετρικούς φορείς. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οποιαδήποτε περίπτωση φόρτισης μπορεί να αναλυθεί σε μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική. Υπενθυμίζεται ότι συμμετρικοί φορείς με συμμετρική φόρτιση είναι πάγιοι. Η επίλυση γίνεται, όπως και στη μέθοδο των παραμορφώσεων, σε δύο φάσεις:

10.3.1. 1η φάση: Επίλυση για τη συμμετρική φόρτιση.

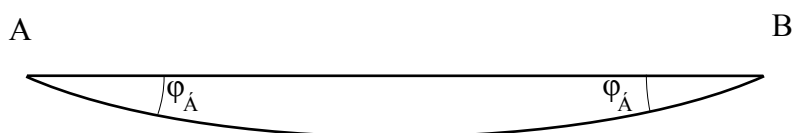
Η επίλυση είναι δυνατόν να περιορισθεί στο μισό φορέα αν τηρηθούν τα παρακάτω:



Οι κόμβοι που βρίσκονται επάνω στον άξονα συμμετρίας, όπως ο κόμβος Δ του φορέα του σχήματος, δε μετακινούνται ούτε στρέφονται λόγω συμμετρίας και

κατά συνέπεια ισοδυναμούν με πακτώσεις. Έτσι ο κόμβος Δ αντικαθίσταται από πάκτωση και ο στύλος ΔΗ που καταπονείται μόνο σε θλίψη παραλείπεται.

Για τα ζυγώματα που βρίσκονται πάνω στον άξονα συμμετρίας, όπως το ζύγωμα AB του φορέα του σχήματος, αν ο κόμβος A στρέφεται κατά φ_A , ο κόμβος B στρέφεται επίσης κατά φ_A , λόγω συμμετρίας.



Συνεπώς μπορεί να γραφεί:

$$M_{AB} = M_{AB}^0 + \frac{2EI_{AB}}{L_{AB}}(2\varphi_A - \varphi_A) = M_{AB}^0 + \frac{2EI_{AB}}{L_{AB}}\varphi_A$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η θεμελιώδης ροπή M_{AB}^0 πρέπει να υπολογισθεί για **ολόκληρο** το άνοιγμα AB ενώ ο δείκτης ακαμψίας k_{AB} δίνεται από τη σχέση:

$$k_{AB} = 2 \frac{I_{AB}}{L_{AB}} \quad \text{για συμμετρική φόρτιση.}$$

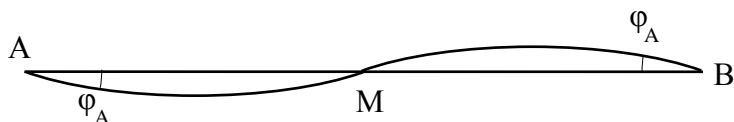
10.3.2. 2η φάση: Επίλυση για την αντισυμμετρική φόρτιση.

Για την αντισυμμετρική φόρτιση ο φορέας παύει γενικά να είναι πάγιος και επομένως η επίλυση του γίνεται σε δύο στάδια κατά τα προαναφερθέντα. Η διαδικασία μπορεί να περιορισθεί στο μισό μόνο φορέα αν παρατηρηθούν τα παρακάτω:

Το μέσο M του ζυγώματος AB δε μετακινείται κατακόρυφα και συγχρόνως στο M η αξονική δύναμη και η ροπή κάμψης μηδενίζονται, λόγω αντισυμμετρίας. Έτσι, το ζύγωμα AB είναι δυνατόν να κοπεί στο M και ο δείκτης ακαμψίας k_{AB} θα ισούται με το δείκτη ακαμψίας της μονόπακτης δοκού ανοίγματος $L_{AB}/2$.

$$k_{AB} = 3 \frac{I_{AB}}{L_{AB}/2} = 6 \frac{I_{AB}}{L_{AB}}$$

Το ίδιο συμπέρασμα εξάγεται αν παρατηρηθεί η παραμόρφωση του ζυγώματος AB λόγω αντισυμμετρικής φόρτισης. Οι κόμβοι A και B στρέφονται κατά φ_A και συνεπώς:



$$M_{AB} = M_{AB}^0 + \frac{2EI_{AB}}{L_{AB}}(2\varphi_A + \varphi_B) = M_{AB}^0 + \frac{6EI_{AB}}{L_{AB}}\varphi_A$$

Οι στύλοι που βρίσκονται πάνω στον άξονα αντισυμμετρίας της φόρτισης, όπως ο στύλος ΔΗ, λαμβάνονται υπόψη με τη μισή ροπή αδράνειας τους. Τα μεγέθη που θα προκύψουν για την ένταση των στύλων αυτών είναι τα μισά των τελικών μεγεθών του ολόκληρου φορέα.

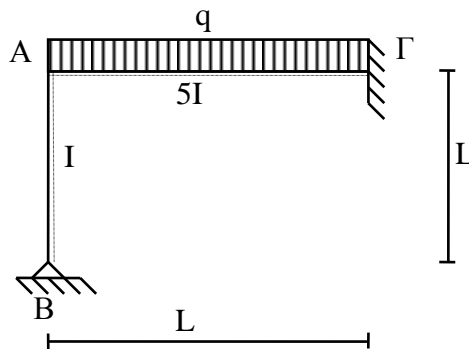
$$k_{\Delta H} = 4 \frac{I_{\Delta H}/2}{L_{\Delta H}} = 2 \frac{I_{\Delta H}}{L_{\Delta H}}$$

$$M_{\Delta H}(\text{πραγματική}) = 2 \times M_{\Delta H}(\text{επίλυσης})$$

$$M_{H\Delta}(\text{πραγματική}) = 2 \times M_{H\Delta}(\text{επίλυσης})$$

10.4. Εφαρμογές

10.4.1. Να υπολογισθούν οι ροπές στον κόμβο και την πάκτωση του φορέα του σχήματος.



- Δείκτες ακαμψίας - Ακαμψία κόμβου.

$$k_{BA} = 3I/L \quad k_{B\Gamma} = 4 \times 5I/L = 20I/L \quad s_B = k_{BA} + k_{B\Gamma} = 23I/L$$

- Συντελεστές κατανομής.

$$\mu_{BA} = \frac{3I/L}{23I/L} = 3/23 \quad \mu_{B\Gamma} = \frac{20I/L}{23I/L} = 20/23 \quad \mu_{BA} + \mu_{B\Gamma} = 1.0$$

- Αρχικές ροπές (προσέλιμανση Cross)

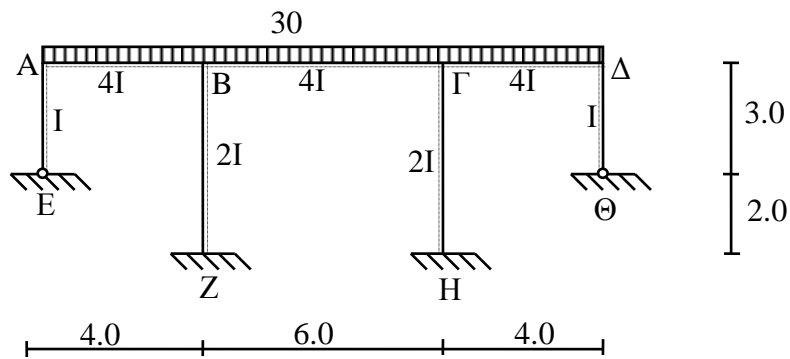
$$M_{BA}^0 = 0 \quad M_{B\Gamma}^0 = -qL^2/12 \quad M_{\Gamma B}^0 = qL^2/12$$

-3/23	-20/23	
0	$-qL^2/12$	$qL^2/12$
$(-3/23) \times (-qL^2/12)$	$(-20/23) \times (-qL^2/12)$	$\xrightarrow{1/2} (-20/23) \times (-qL^2/12)/2$
$qL^2/92$	$-qL^2/92$	$11qL^2/92$

Με κλασσική προσέλιμανση:

$$M_{BA} = M_{B\Gamma} = -qL^2/92 \quad M_{\Gamma B} = -11qL^2/92$$

10.4.2. Να χαραχθούν τα διαγράμματα V,M,N του συμμετρικού φορέα του σχήματος.



- Δείκτες ακαμψίας - Ακαμψίες κόμβων.

$$k_{AE} = 3I/3.0 = I \qquad k_{AB} = k_{BA} = 4 \times 4I/4.0 = 4I \qquad k_{BZ} = 4 \times 2I/5.0 = 1.6I$$

$$k_{B\Gamma} = 2 \times 4I/6.0 = 1.33I \qquad s_A = I + 4I = 5I \qquad s_B = 4I + 1.6I + 1.33I = 6.93I$$

- Συντελεστές κατανομής

$$\mu_{AE} = I/5I = 0.20 \qquad \mu_{AB} = 4I/5I = 0.8 \qquad \mu_{AE} + \mu_{AB} = 1.0$$

$$\mu_{BA} = 4I/6.93I = 0.58 \qquad \mu_{BZ} = 1.6I/6.93I = 0.23 \qquad \mu_{B\Gamma} = 1.33I/6.93I = 0.19$$

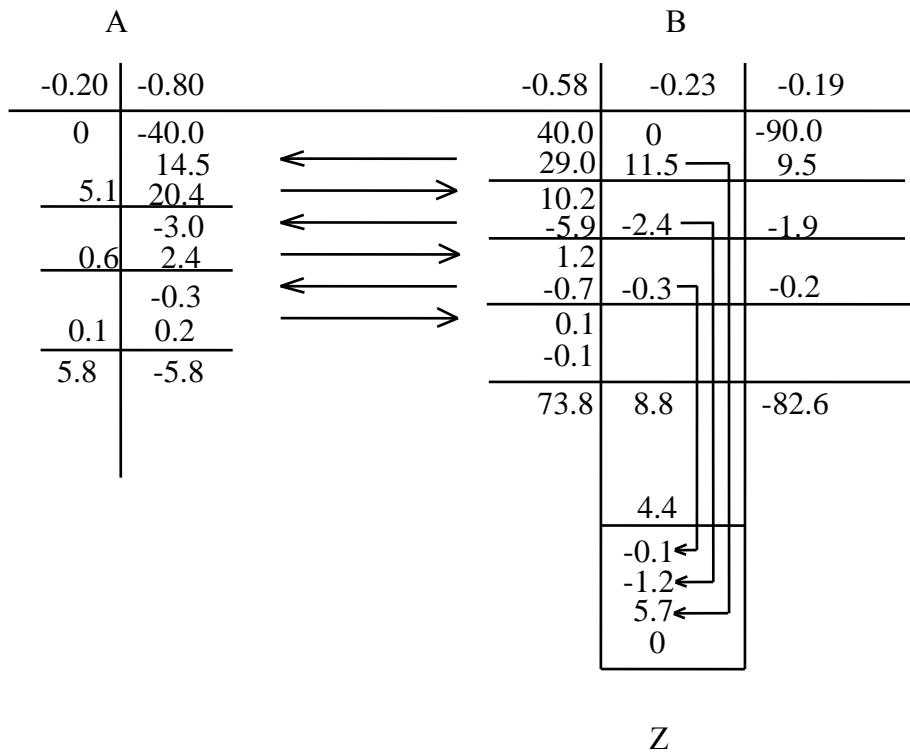
$$\mu_{BA} + \mu_{BZ} + \mu_{B\Gamma} = 1.0$$

- Αρχικές ροπές (προσήμανση Cross)

$$M_{AE}^0 = 0 \qquad M_{AB}^0 = -\frac{30.0 \times 4.0^2}{12} = -40.0 \text{ kNm} \qquad M_{BA}^0 = 40 \text{ kNm}$$

$$M_{B\Gamma}^0 = -\frac{30.0 \times 6.0^2}{12} = -90.0 \text{ kNm} \qquad M_{BZ}^0 = M_{ZB}^0 = 0$$

- Επίλυση κατά Cross



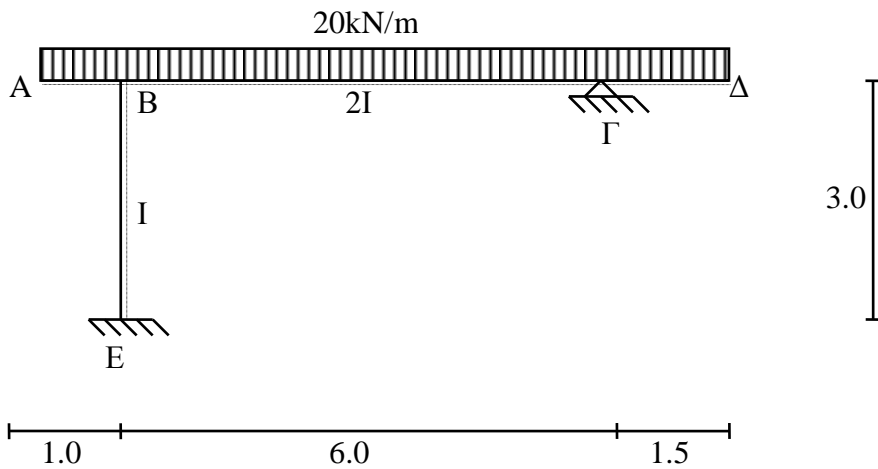
- Τελικές ροπές (κλασσική προσήμανση):

$$M_{AE} = M_{AB} = M_{\Delta\Gamma} = M_{\Delta B} = -5.8\text{kNm} \quad M_{BA} = M_{\Gamma\Delta} = -73.8\text{kNm}$$

$$M_{BZ} = M_{\Gamma H} = -8.8\text{kNm} \quad M_{ZB} = M_{H\Gamma} = 4.4\text{kNm} \quad M_{B\Gamma} = M_{\Gamma B} = -82.6\text{kNm}$$

Τα διαγράμματα V, M και N του φορέα έχουν χαραχθεί στο παράδειγμα 9.4.3.

10.4.3. Να χαραχθούν τα διαγράμματα V, M και N του φορέα του σχήματος.



- Δείκτες ακαμψίας - Ακαμψία κόμβου.

$$k_{BE} = 4I/3.0 = 1.33I \quad k_{B\Gamma} = 3 \times 2I/6.0 = I \quad s_B = 1.33I + I = 2.33I$$

- Συντελεστές κατανομής

$$\mu_{BE} = 1.33I/2.33I = 0.57 \quad \mu_{B\Gamma} = I/2.33I = 0.43 \quad \mu_{BE} + \mu_{B\Gamma} = 1.0$$

- Αρχικές ροπές (προσήμανση Cross)

$$M_{BA} = \frac{20.0 \times 1.0^2}{2} = 10.0 \text{ kNm} \quad M_{\Gamma\Delta} = -\frac{20.0 \times 1.5^2}{2} = -22.5 \text{ kNm}$$

$$M_{B\Gamma}^0 = -\frac{20.0 \times 6.0^2}{8} - \frac{(-22.5)}{2} = -78.8 \text{ kNm} \quad M_{BE}^0 = M_{EB}^0 = 0$$

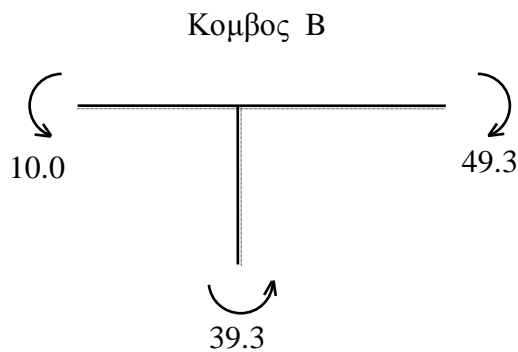
	B	
	-0.57	-0.43
10.0	0	-78.8
	39.3	29.5
10.0	39.3	-49.3
	19.7	
	19.7	0

- Τελικές ροπές (κλασική προσήμανση)

$$M_{BA} = -10.0 \text{ kNm} \quad M_{B\Gamma} = -49.3 \text{ kNm} \quad M_{BE} = -39.3 \text{ kNm}$$

$$M_{EB} = 19.7 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma B} = M_{\Gamma \Delta} = -22.5 \text{ kNm}$$



- Διαγράμματα τεμνουσών - αξονικών δυνάμεων

$$V_{BA} = -20.0 \times 1.0 = -20.0 \text{ kN} \quad V_{B\Gamma} = \frac{20.0 \times 6.0}{2} + \frac{-22.5 - (-49.3)}{6.0} = 64.5 \text{ kN}$$

$$V_{\Gamma B} = 64.5 - 20.0 \times 6.0 = -55.5 \text{ kN} \quad V_{\Gamma \Delta} = 20.0 \times 1.5 = 30.0 \text{ kN}$$

$$V_{EB} = V_{BE} = \frac{-39.3 - 19.7}{3.0} = -19.7 \text{ kN}$$

$$N_{EB} = N_{BE} = -20.0 - 64.5 = -84.5 \text{ kN}$$

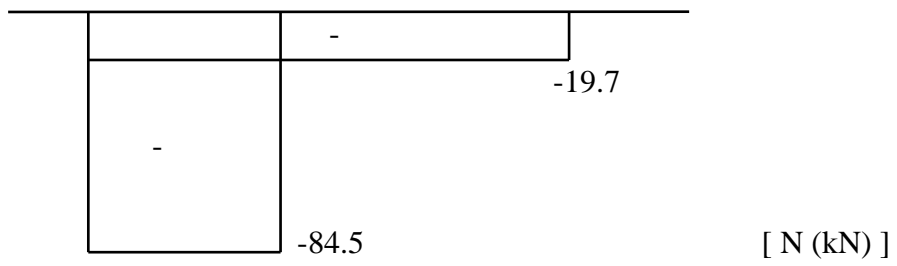
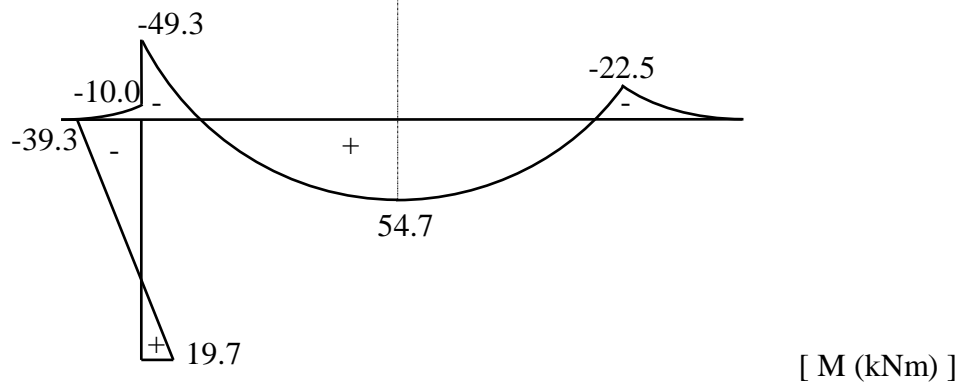
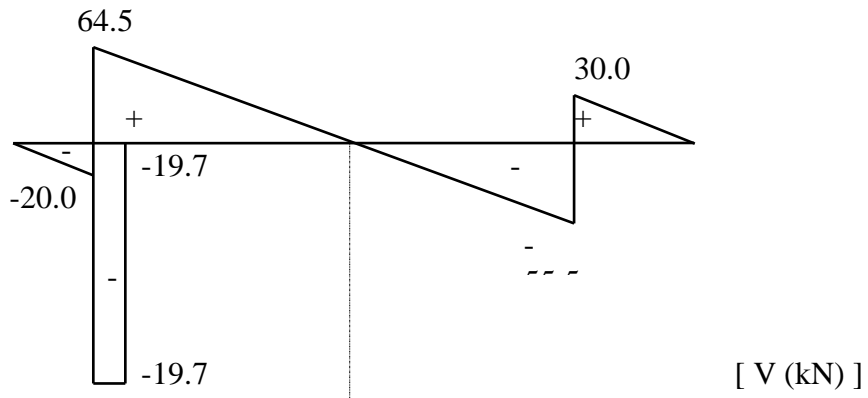
$$N_{BA} = N_{\Gamma \Delta} = 0$$

$$N_{B\Gamma} = -19.7 \text{ kN}$$

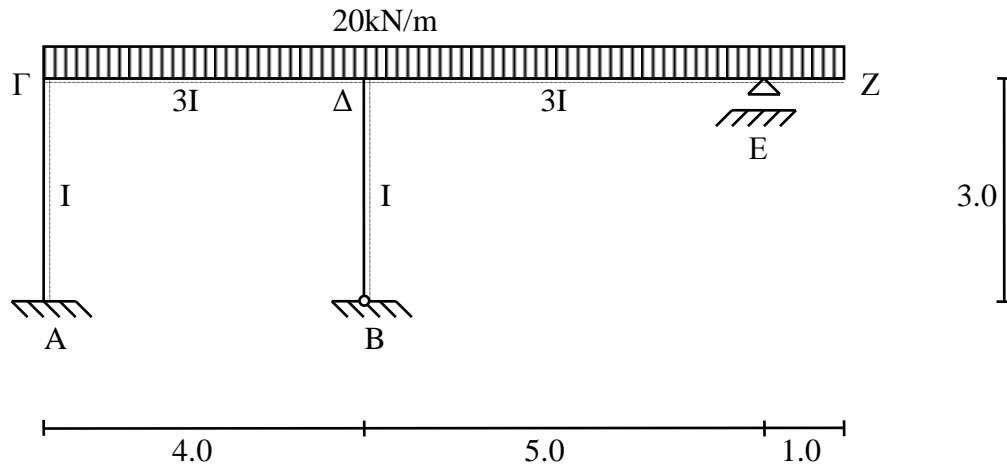
- Υπολογισμός μέγιστης ροπής.

$$\text{Άνοιγμα ΒΓ: } \max M = -49.3 + \frac{64.5^2}{2 \times 20.0} = 54.7 \text{ kNm}$$

- Διαγράμματα

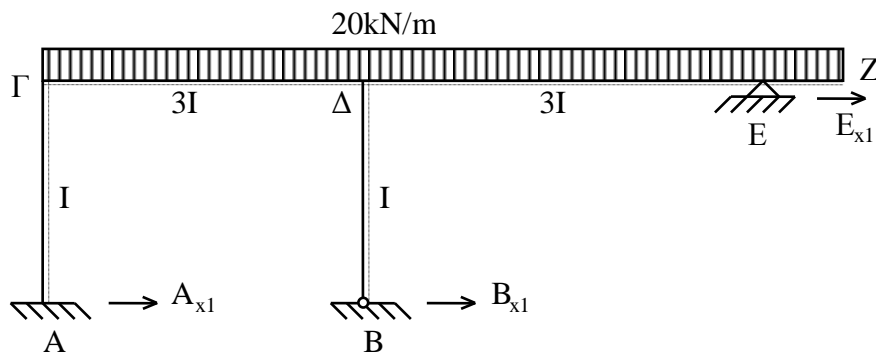


10.4.4. Στο πλαίσιο του σχήματος ζητείται η χάραξη των διαγραμμάτων V,M,N.



Ο φορέας δεν είναι πάγιος και θα επιλυθεί σε δύο στάδια.

1ο στάδιο: Παγίωση του φορέα.



- Δείκτες ακαμψίας - Ακαμψίες κόμβων

$$k_{\Gamma A} = 4I/3.0 = 1.33I$$

$$k_{\Gamma \Delta} = k_{\Delta \Gamma} = 4 \times 3I/4.0 = 3I$$

$$k_{\Delta B} = 3I/3.0 = I$$

$$k_{\Delta E} = 3 \times 3I/5.0 = 1.8I$$

$$s_{\Gamma} = 1.33I + 3I = 4.33I$$

$$s_{\Delta} = 3I + I + 1.8I = 5.8I$$

- Συντελεστές κατανομής

$$\mu_{\Gamma A} = 1.33I/4.33I = 0.31$$

$$\mu_{\Gamma \Delta} = 3I/4.33I = 0.69$$

$$\mu_{\Gamma A} + \mu_{\Gamma \Delta} = 1.0$$

$$\mu_{\Delta \Gamma} = 3I/5.8I = 0.52$$

$$0.31$$

$$\mu_{\Delta B} = I/5.8I = 0.17$$

$$\mu_{\Delta E} = 1.8I/5.8I =$$

$$\mu_{\Delta \Gamma} + \mu_{\Delta B} + \mu_{\Delta E} = 1.0$$

- Αρχικές ροπές (προσήμανση Cross)

$$M_{EZ} = -\frac{20.0 \times 1.0^2}{2} = -10.0 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta\Gamma}^0 = M_{\Gamma\Delta}^0 = M_{\Delta B}^0 = 0$$

$$M_{\Gamma\Delta}^0 = -\frac{20.0 \times 4.0^2}{12} = -26.7 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta\Gamma}^0 = 26.7 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta E}^0 = -\frac{20.0 \times 5.0^2}{8} - \frac{(-10.0)}{2} = -57.5 \text{ kNm}$$

Γ		Δ			E
-0.31	-0.69	-0.52	-0.17	-0.31	
0	-26.7	26.7	0	-57.5	
5.8	8.0	16.1	5.2	9.5	
0.5	12.9	6.5			
	-1.7	-3.4	-1.1	-2.0	
	1.2	0.6			
	-0.1	-0.3	-0.1	-0.2	
	0.1	46.2	4.0	-50.2	
6.3	-6.3				
3.1					
0.2					
2.9					
0					

- Ροπές 1ου σταδίου (κλασσική προσήμανση)

$$M_{\Delta\Gamma} = 3.1 \text{ kNm}$$

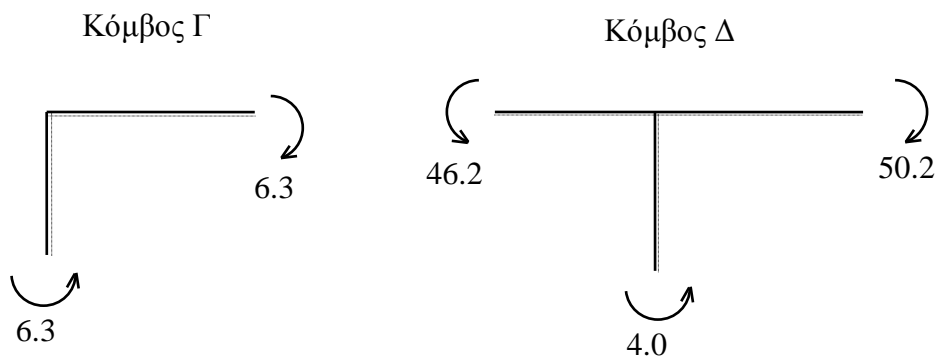
$$M_{\Gamma\Delta} = M_{\Gamma\Delta} = -6.3 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta\Gamma} = -46.2 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta B} = -4.0 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta E} = -50.2 \text{ kNm}$$

$$M_{EZ} = M_{E\Delta} = -10.0 \text{ kNm}$$

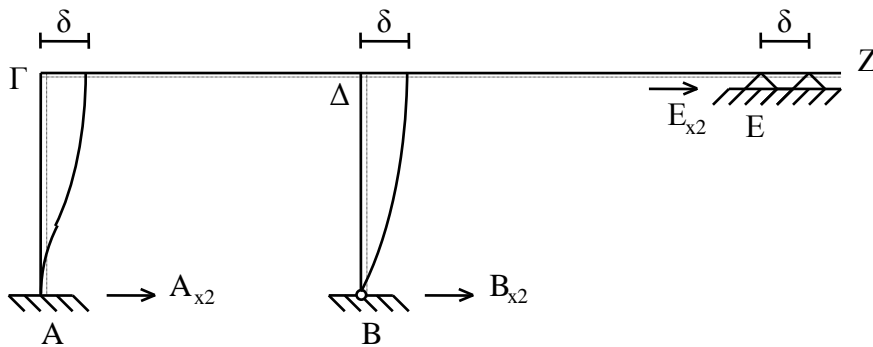


- Συνθήκη ισορροπίας.

$$A_{x1} + B_{x1} + E_{x1} = 0 \Rightarrow E_{x1} = -(A_{x1} + B_{x1}) \Rightarrow E_{x1} = V_{\Delta\Gamma} + V_{B\Delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{x1} = \frac{-6.3 - 3.1}{3.0} + \frac{-4.0}{3.0} = -4.5 \text{ kN}$$

2ο Στάδιο : Επίλυση για οριζόντια μετατόπιση δ του ζυγώματος.



Οι συντελεστές κατανομής παραμένουν οι ίδιοι. Αλλάζουν οι αρχικές ροπές.

- Αρχικές ροπές (προσήμανση Cross).

Οι αρχικές ροπές υπολογίζονται για $\Delta = EI\delta = 1$. Οι τιμές που θα προκύψουν θα πολλαπλασιασθούν επί Δ .

$$M_{A\Gamma}^0 = -\frac{6EI\delta}{3.0^2} = -0.667$$

$$M_{\Gamma A}^0 = -\frac{6EI\delta}{3.0^2} = -0.667$$

$$M_{\Gamma\Delta}^0 = M_{\Delta\Gamma}^0 = M_{\Delta E}^0 = 0$$

$$M_{\Delta B}^0 = -\frac{3EI\delta}{3.0^2} = 0.333$$

Γ		Δ			Α
-0.31	-0.69	-0.52	-0.17	-0.31	
-0.667	0	0	-0.333	0	
0.207	0.460	0.230			
	0.027	0.053	0.018	0.032	
-0.008	-0.019	-0.009			
	0.002	0.005	0.001	0.003	
-0.001	-0.001	0.279	-0.314	0.035	
-0.469	0.469				
-0.568					
-0.004					
0.103					
-0.667					

A B

- Ροπές 2ου σταδίου (κλασσική προσήμανση)

$$M_{\Delta\Gamma} = -0.568\Delta$$

$$M_{\Gamma\Lambda} = M_{\Gamma\Delta} = 0.469\Delta$$

$$M_{\Delta\Gamma} = -0.279\Delta$$

$$M_{\Delta B} = 0.314\Delta$$

$$M_{\Delta E} = 0.035\Delta$$

- Συνθήκη ισοροπίας

$$A_{x2} + B_{x2} + E_{x2} = 0 \Rightarrow E_{x2} = -(A_{x2} + B_{x2}) \Rightarrow E_{x2} = V_{\Delta\Gamma} + V_{B\Delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{x2} = \frac{0.469\Delta + 0.568\Delta}{3.0} + \frac{0.314\Delta}{3.0} = 0.450\Delta$$

- Υπολογισμός Δ.

$$E_x = E_{x1} + E_{x2} = 0 \Rightarrow -4.5 + 0.450\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 10.0$$

- Υπολογισμός ροπών κόμβων - πάκτωσης με επαλληλία

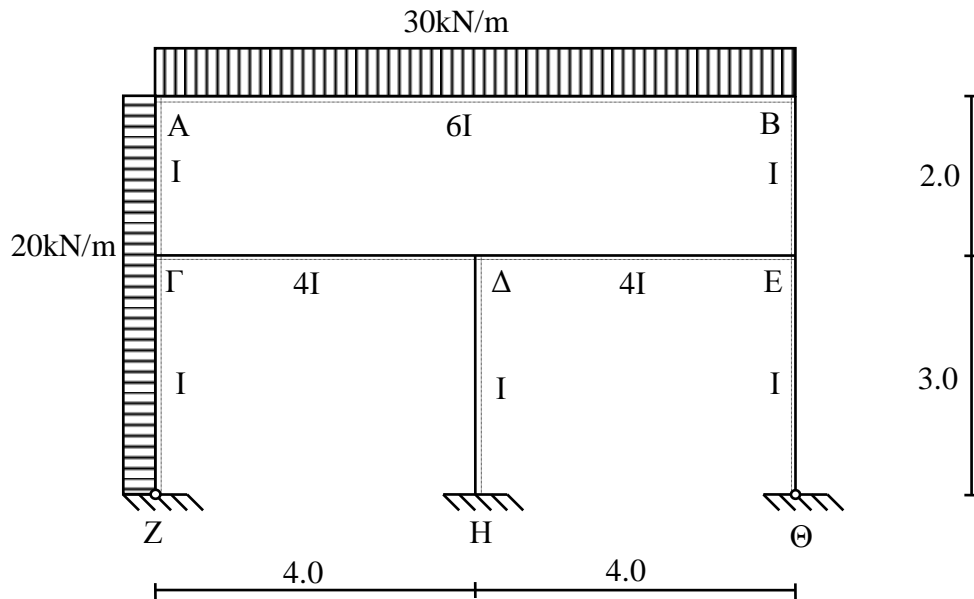
$$M_{\Delta\Gamma} = 3.1 - 0.568 \times 10.0 = -2.586 \text{ kNm} \quad M_{\Gamma\Lambda} = M_{\Gamma\Delta} = -6.3 + 0.469 \times 10.0 = -1.61 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta\Gamma} = -46.2 - 0.2797 \times 10.0 = -48.99 \text{ kNm} \quad M_{\Delta E} = -50.2 + 0.035 \times 10.0 = -49.85 \text{ kNm}$$

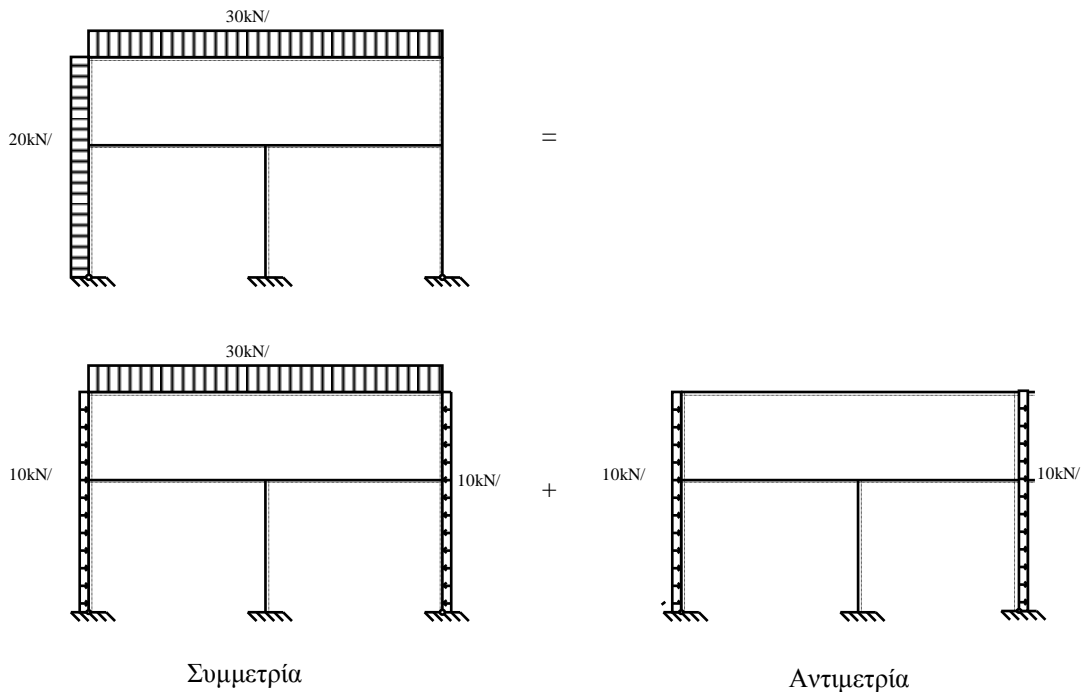
$$M_{\Delta B} = -4.0 + 0.314 \times 10.2 = -0.86 \text{ kNm} \quad M_{E\Delta} = M_{E\Gamma} = -10.0 \text{ kNm}$$

Τα διαγράμματα έχουν χαραχθεί στο παράδειγμα 9.4.5.

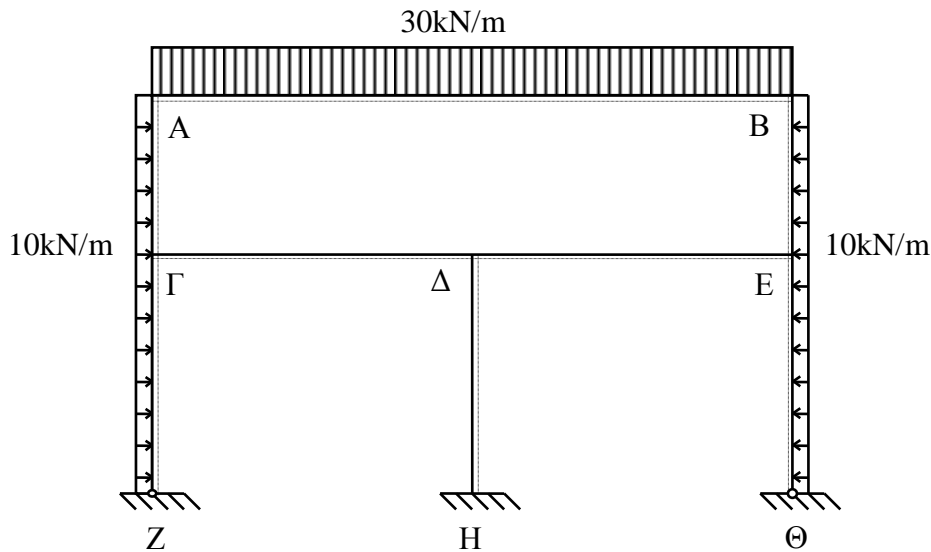
10.4.5. Να υπολογισθούν οι ροπές στους κόμβους και τις πακτώσεις του φορέα του σχήματος.



Ο φορέας είναι συμμετρικός. Η φόρτιση θα αναλυθεί σε μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική, όπως στο παράδειγμα 9.4.6. Η επίλυση θα γίνει σε δύο φάσεις: μία φάση για τη συμμετρική φόρτιση και μία για την αντισυμμετρική. Τα τελικά διαγράμματα θα υπολογισθούν με επαλληλία.



1η Φάση: Επίλυση για τη συμμετρική φόρτιση.



Ο φορέας είναι πάγιος λόγω συμμετρίας. Όπως έχει προαναφερθεί, ο κόμβος Δ ισοδυναμεί με πάκτωση, ενώ για το δείκτη ακαμψίας του τμήματος AB θα χρησιμοποιηθεί η σχέση: $k_{AB} = 2I_{AB}/L_{AB}$

- Δείκτες ακαμψίας - ακαμψίες κόμβων

$$k_{AB} = 2 \times 6I/8.0 = 1.5I \quad k_{A\Gamma} = k_{\Gamma A} = 4 \times I/2.0 = 2.0I \quad k_{\Gamma\Delta} = 4 \times 4I/4.0 = 4.0I$$

$$k_{\Gamma Z} = 3 \times I/3.0 = I \quad s_A = 1.5I + 2.0I = 3.5I \quad s_B = 2.0I + 4.0I + 1.0I = 7.0I$$

- Συντελεστές κατανομής

$$\mu_{AB} = 1.5I / 3.5I = 0.43$$

$$\mu_{\Gamma A} = 2.0I / 7.0I = 0.29$$

$$\mu_{A\Gamma} = 2.0I / 3.5I = 0.57$$

$$\mu_{\Gamma\Delta} = 4.0I / 7.0I = 0.57$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \\ 1.0$$

$$\mu_{\Gamma Z} = 1.0I / 7.0I = 0.14$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \\ 1.0$$

- Αρχικές ροπές (προσήμευση Cross)

$$M_{AB}^0 = -30.0 \frac{8.0^2}{12} = -160.0 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma A}^0 = -10.0 \frac{2.0^2}{12} = -3.3 \text{ kNm}$$

$$M_{A\Gamma}^0 = 10.0 \frac{2.0^2}{12} = 3.3 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma Z}^0 = 10.0 \frac{3.0^2}{8} = 11.2 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma\Delta}^0 = M_{\Delta\Gamma}^0 = 0$$

Γ			Á		E
-0.14	-0.57	-0.29	-0.57	-0.43	
11.2	0	-3.3	3.3	-160.0	
		44.7	89.3	67.4	
-7.4	30.0	-15.3	-7.6		
		2.2	4.3	3.3	
-0.3	-1.3	-0.6	-0.3		
		0.1	0.2	0.1	

- Ροπές 1ης φάσης (κλασσική προσήμανση):

$$M_{\Gamma Z} = -3.5\text{kNm}$$

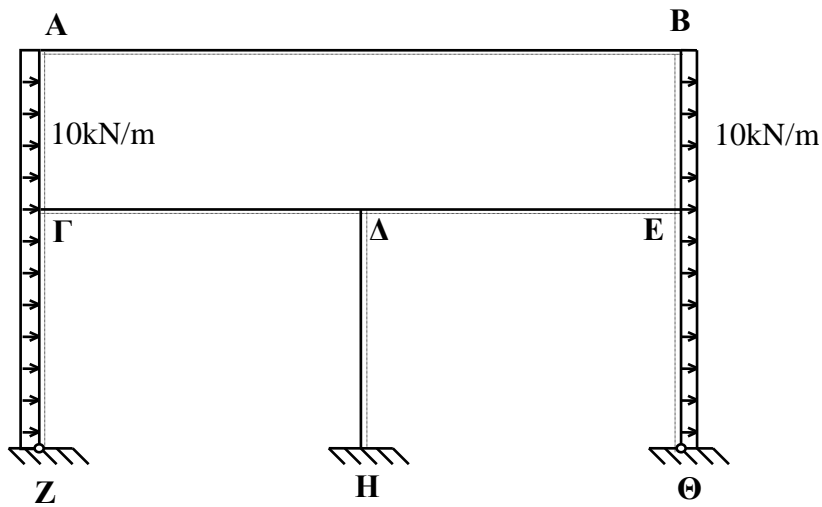
$$M_{\Gamma\Delta} = -31.4\text{kNm}$$

$$M_{\Delta\Gamma} = 15.6\text{kNm}$$

$$M_{\Gamma\Lambda} = 27.8\text{kNm}$$

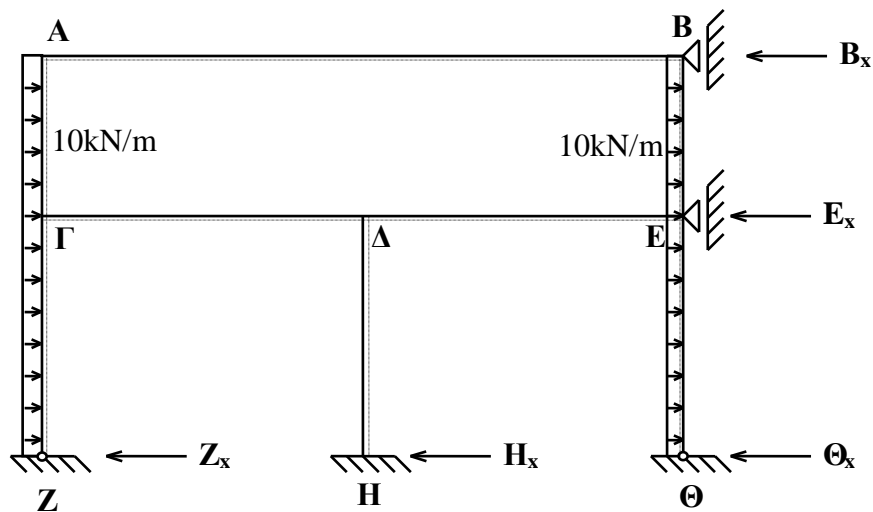
$$M_{\Lambda\Gamma} = M_{\Lambda B} = -89.2\text{kNm}$$

2η φάση: Επίλυση για την αντισυμμετρική φόρτιση



Για την αντισυμμετρική φόρτιση ο φορέας δε συμπεριφέρεται σαν πάγιος, δεδομένου ότι υπάρχουν οι οριζόντιες μετατοπίσεις των ζυγωμάτων. Η επίλυση γίνεται σε τρία στάδια, κατά τα αναφερόμενα στην παράγραφο 10.3.2.

1ο στάδιο: Παγίωση του φορέα



- Δείκτες ακαμψίας - Ακαμψίες κόμβων.

Κατά την παράγραφο 10.3.2. ο δείκτης ακαμψίας του στοιχείου AB πρέπει να υπολογισθεί από τη σχέση: $k_{AB} = 6I_{AB}/L_{AB}$ ενώ ο δείκτης ακαμψίας του στύλου ΔΗ από τη σχέση $k_{\Delta H} = 4I_{\Delta H}/(2L_{\Delta H})$. Επομένως:

$$k_{AB} = 6 \times 6I/8 = 4.5I$$

$$k_{\Delta\Gamma} = k_{\Gamma A} = 40 \times I/2.0 = 2.0I$$

$$k_{\Gamma\Delta} = k_{\Delta\Gamma} = 4 \times 4I/4.0 = 4.0I$$

$$k_{\Gamma GZ} = 3 \times I/3.0 = 1.0I \quad k_{\Delta H} = 4 \times I/(2 \times 3.0) = 0.67I$$

$$s_A = 4.5I + 2.0I = 6.5I$$

$$s_{\Gamma} = 2.0I + 4.0I + 1.0I = 7I$$

$$s_{\Delta} = 4.0I + 0.67I = 4.67I$$

- Συντελεστές κατανομής

$$\mu_{AB} = 4.5I/6.5I = 0.692$$

$$\mu_{\Gamma A} = 2.0I/7.0I = 0.286$$

$$\mu_{\Delta\Gamma} = 4.0I/4.67I = 0.857$$

$$\mu_{\Delta\Gamma} = 2.0I/6.5I = 0.308$$

$$\mu_{\Gamma\Delta} = 4.0I/7.0I = 0.571$$

$$\mu_{\Delta H} = 0.67I/4.67I = 0.143$$

$$\underline{\quad\quad\quad}$$

$$1.0$$

$$\mu_{\Gamma Z} = 1.0I/7.0I = 0.143$$

$$\underline{\quad\quad\quad}$$

$$1.0$$

$$\underline{\quad\quad\quad}$$

$$1.0$$

- Αρχικές ροπές (προσήμανση Cross)

$$M_{AB}^0 = M_{\Gamma\Delta}^0 = M_{\Delta\Gamma}^0 = M_{\Delta H}^0 = M_{H\Delta}^0 = 0$$

$$M_{\Gamma Z}^0 = \frac{10.0 \times 3.0^2}{8} = 11.25 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma A}^0 = -\frac{10.0 \times 2.0^2}{12.0} = -3.33 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta\Gamma}^0 = \frac{10.0 \times 2.0^2}{12.0} = 3.33 \text{ kNm}$$

	H	Δ	Γ	Α				
		-0.143	-0.857	-0.571	-0.143	-0.286	-0.308	-0.692
0		0	0	0	11.25	-3.33	3.33	0
0.16	←	0.32	1.94	0.97	-1.13	-2.27	-1.14	-1.52
0.01	←	0.03	0.15	0.08	-0.09	-0.18	-0.09	0.06
			0.02	0.01	-0.01	-0.03	-0.01	0.01
			0.02	-0.01				
• Ροπές του στοιχείου (κλασσική προσήμανση)	0.17	0.35	-0.35	-3.88	10.02	-6.14	1.45	-1.45

$$M_{H\Delta} = 2 \times 0.17 = 0.35 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta H} = 2 \times (-0.35) = -0.70 \text{ kNm}$$

$$M_{\Delta\Gamma} = 0.35 \text{ kNm}$$

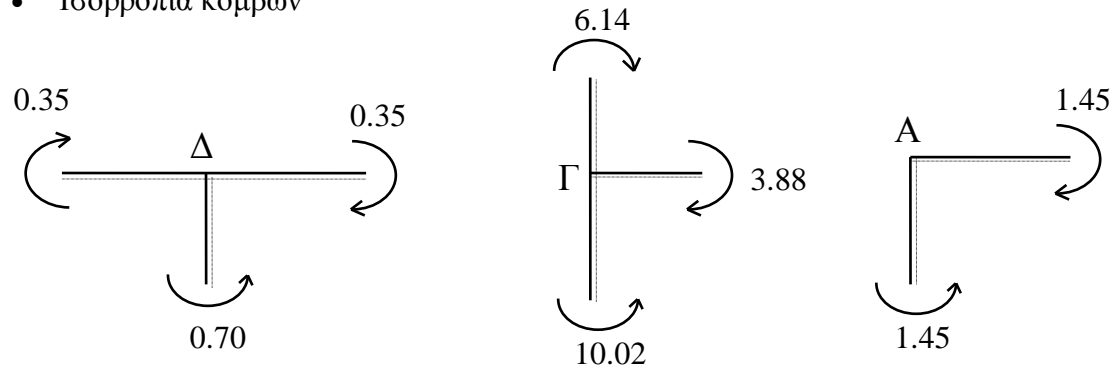
$$M_{\Gamma\Delta} = -3.88 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma Z} = -10.02 \text{ kNm}$$

$$M_{\Gamma A} = -6.14 \text{ kNm}$$

$$M_{A\Gamma} = M_{AB} = -1.45 \text{ kNm}$$

- Ισοροπία κόμβων



Λόγω αντισυμμετρίας:

$$M_{\Delta E} = -0.35 \text{ kNm}$$

$$M_{E\Delta} = 3.88 \text{ kNm}$$

$$M_{E\Theta} = 10.02 \text{ kNm}$$

$$M_{EB} = 6.14 \text{ kNm}$$

$$M_{BE} = M_{BA} = 1.45 \text{ kNm}$$

- Υπολογισμός τεμνουσών - αντιδράσεων κατά x.

$$V_{Z\Gamma} = \frac{10.0 \times 3.0}{2.0} + \frac{-10.02}{3.0} = 11.7 \text{ kN}$$

$$V_{\Gamma Z} = 11.7 - 10.0 \times 3.0 = -18.3 \text{ kN}$$

$$V_{\Gamma A} = \frac{10.0 \times 2.0}{2.0} + \frac{-1.45 - (-6.14)}{2.0} = 12.4 \text{ kN}$$

$$V_{A\Gamma} = 12.4 - 10.0 \times 2.0 = -7.6 \text{ kN}$$

$$7.6 \text{ kN}$$

$$V_{H\Delta} = V_{\Delta H} = \frac{-0.7 - 0.35}{3.0} = -0.4 \text{ kN}$$

Από την ισοροπία του ζυγώματος AB προκύπτει:

$$B_{x0} = -V_{A\Gamma} - V_{BE} = -2V_{A\Gamma} = 15.2 \text{ kN}$$

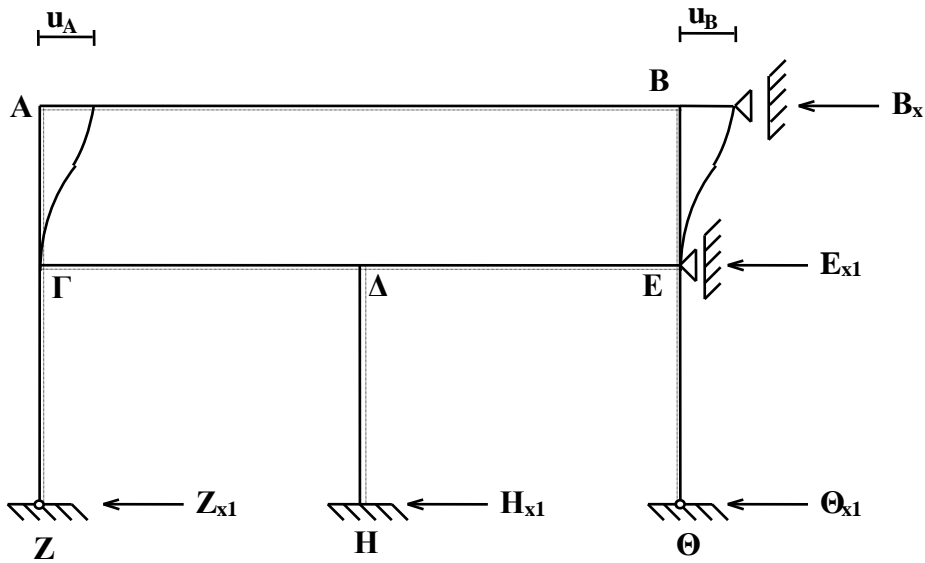
Από την ισοροπία του φορέα κατά x προκύπτει:

$$2 \times 10.0 \times 5.0 - Z_{x0} - H_{x0} - \Theta_{x0} - E_{x0} - B_{x0} = 0 \Rightarrow 100.0 - V_{Z\Gamma} - V_{H\Delta} - V_{\Theta E} - E_{x0} - B_{x0} = 0$$

\Rightarrow

$$\Rightarrow E_{x0} = 100.0 - 11.7 + 0.4 - 11.7 - 15.2 = 61.8 \text{ kN}$$

2ο στάδιο: επίλυση για μετατόπιση του ζυγώματος AB.



Η επίλυση γίνεται για $Y = EIu_A = EIu_B = 1$. Οι συντελεστές κατανομής παραμένουν οι ίδιοι με αυτούς του 1ου σταδίου.

- Αρχικές ροπές (προσήμανση Cross):

$$M_{AB}^0 = M_{\Gamma\Delta}^0 = M_{\Delta\Gamma}^0 = M_{\Delta H}^0 = M_{H\Delta}^0 = M_{\Gamma Z}^0 = 0 \quad M_{\Gamma A}^0 = M_{A\Gamma}^0 = -\frac{6 \times EI u_A}{2.0^2} = -1.5$$

	H	Δ	Γ	Α			
	-0.143	-0.857	-0.571	-0.143	-0.286	-0.308	-0.692
0	0	0	0	0	-1.5	-1.5	0
		0.428 ←	0.857	0.214	0.429 →	0.215	
-0.031 ←	-0.061	-0.367 →	-0.183		0.198 ←	0.396	0.889
		-0.004 ←	-0.009	-0.002	-0.004 →	-0.002	
		0.004 →	0.002			0.001 ←	0.001
		-0.001 ←	-0.002				
	0.001						
-0.031	-0.061	0.061	0.665	0.212	-0.877	-0.89	0.89

- Ροπές 2ου σταδίου για $EI u_A = EI u_B = Y$ (κλασσική προσήμανση).

$$M_{H\Delta} = 2 \times (-0.031Y) = -0.061Y$$

$$M_{\Delta H} = 2 \times 0.061Y = 0.122Y$$

$$M_{\Delta\Gamma} = -0.061Y$$

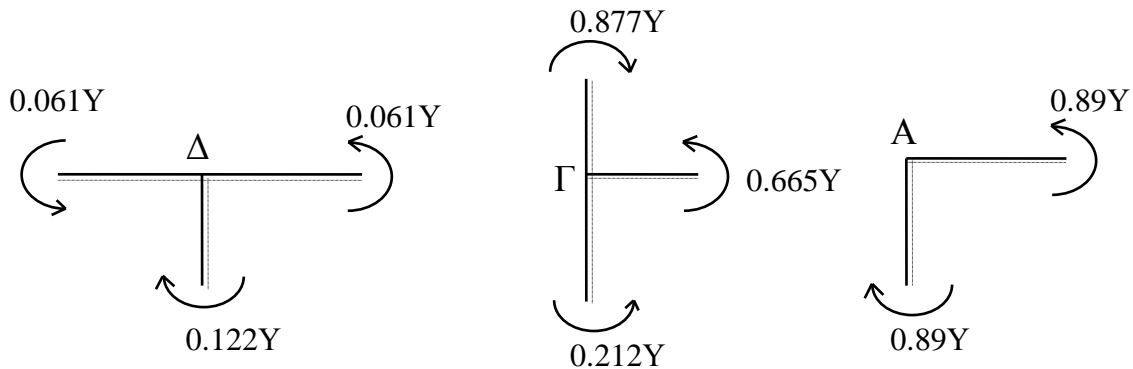
$$M_{\Gamma\Delta} = 0.665Y$$

$$M_{\Gamma Z} = -0.212Y$$

$$M_{\Gamma A} = -0.877Y$$

$$M_{A\Gamma} = M_{AB} = 0.89Y$$

- Ισοροπία κόμβων:



Λόγω αντισυμμετρίας:

$$M_{\Delta E} = 0.061Y$$

$$M_{E\Delta} = -0.665Y$$

$$M_{E\Theta} = 0.212Y$$

$$M_{EB} = 0.877Y$$

$$M_{BE} = M_{BA} = -0.89Y$$

- Υπολογισμός τεμνουσών - αντιδράσεων κατά x.

$$V_{Z\Gamma} = V_{\Gamma Z} = Z_{x1} = \Theta_{x1} = \frac{-0.212Y}{3} = -0.071Y$$

$$V_{\Gamma A} = V_{A\Gamma} = \frac{0.89Y + 0.877Y}{2.0} = 0.884Y$$

$$V_{H\Delta} = V_{\Delta H} = H_{x1} = \frac{0.122Y - (-0.061Y)}{3.0} = 0.061Y$$

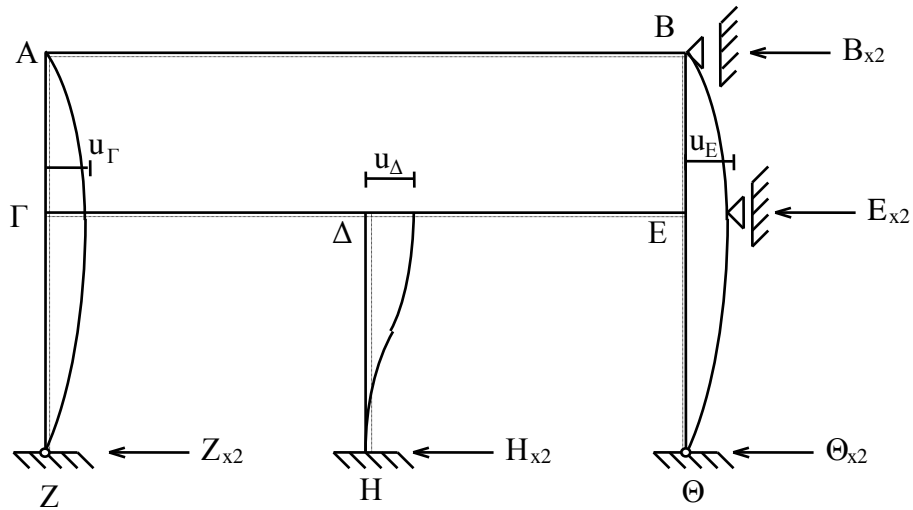
Από την ισοροπία του ζυγώματος AB:

$$B_{x1} = -V_{A\Gamma} - V_{BE} = -2V_{A\Gamma} = -2 \times 0.884Y = -1.768Y$$

Από την ισοροπία του φορέα κατά x:

$$B_{x1} + E_{x1} + Z_{x1} + H_{x1} + \Theta_{x1} = 0 \Rightarrow E_{x1} = 2 \times 0.071Y + 1.768Y - 0.061Y = 1.849Y$$

3ο στάδιο: επίλυση για μετατόπιση του ζυγώματος ΓΔΕ.



Η επίλυση γίνεται για $\Psi = EIu_{\Gamma} = EIu_{\Delta} = EIu_E = 1$. Οι συντελεστές κατανομής παραμένουν οι ίδιοι με αυτούς του 1ου σταδίου.

- Αρχικές ροπές (προσέγγιση Cross - η ροπή αδρανείας του στύλου ΔΗ λαμβάνεται ίση με $I/2$):

$$M_{AB}^0 = M_{\Gamma\Delta}^0 = M_{\Delta\Gamma}^0 = 0 \quad M_{\Gamma A}^0 = 1.5$$

$$M_{\Delta H}^0 = M_{H\Delta}^0 = -\frac{6 \times E(I/2)u_{\Delta}}{3.0^2} = -0.333$$

$$M_{\Gamma Z}^0 = -\frac{3EIu_{\Gamma}}{3.0^2} = -0.333$$

	H	Δ	Γ	A				
		-0.143	-0.857	-0.571	-0.143	-0.286	-0.308	-0.692
-0.333	-0.333	0	0	-0.333	1.5		1.5	0
0.024 ←	<u>0.048</u>	0.285 →	0.142		-0.231 ←		<u>-0.462</u>	<u>-1.038</u>
0.022 ←	<u>0.044</u>	-0.308 ←	-0.616	-0.154	-0.308 →		-0.154	0.107
		<u>0.264</u>	→	0.132	0.023 ←		<u>0.047</u>	<u>0.107</u>
		-0.044 ←	-0.089	-0.022	-0.044 →		-0.022	
0.003 ←	<u>0.006</u>	0.038 →	0.019		0.003 ←		<u>0.007</u>	<u>0.015</u>
		-0.006 ←	-0.013	-0.003	-0.006 →		-0.003	
	<u>0.001</u>	<u>0.005</u>	→	0.002			<u>0.001</u>	<u>0.002</u>
			-0.001		-0.001			
-0.284	-0.234	0.234	-0.424	-0.512	0.936		0.914	-0.914

- Ροπές 3ου σταδίου για $EI u_{\Gamma} = EI u_{\Delta} = EI u_E = \Psi$ (κλασσική προσήμανση).

$$M_{H\Delta} = 2 \times (-0.284\Psi) = -0.568\Psi$$

$$M_{\Delta H} = 2 \times 0.234\Psi = 0.468\Psi$$

$$M_{\Delta\Gamma} = -0.234\Psi$$

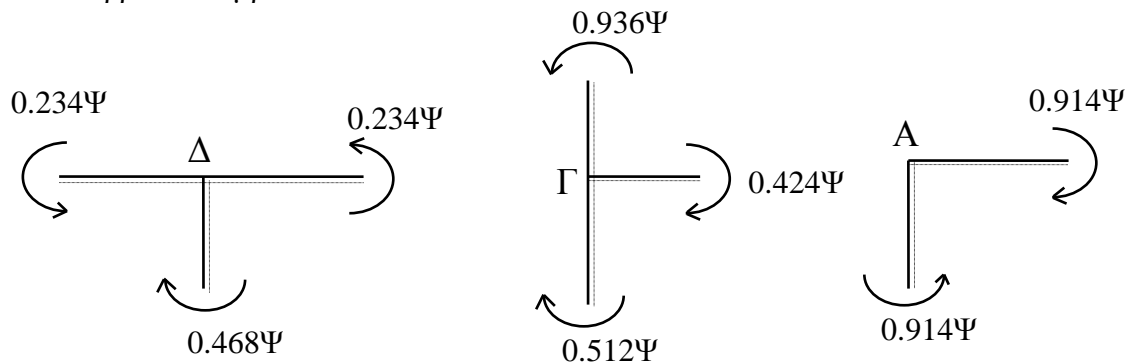
$$M_{\Gamma\Delta} = -0.424\Psi$$

$$M_{\Gamma Z} =$$

$$M_{\Gamma A} = 0.936\Psi$$

$$M_{A\Gamma} = M_{AB} = -0.914\Psi$$

- Ισοροπία κόμβων:



Λόγω αντισυμμετρίας:

$$M_{\Delta E} = 0.234\Psi$$

$$M_{E\Delta} = 0.424\Psi$$

$$M_{E\Theta} = -0.512\Psi$$

$$M_{EB} = -0.936\Psi$$

$$M_{BE} = M_{BA} = -0.914\Psi$$

- Υπολογισμός τεμνουσών - αντιδράσεων κατά x.

$$V_{Z\Gamma} = V_{\Gamma Z} = Z_{x2} = \Theta_{x2} = \frac{0.512\Psi}{3.0} = 0.17\Psi$$

$$V_{\Gamma A} = V_{A\Gamma} = \frac{-0.914\Psi - 0.936\Psi}{2.0} = -0.925\Psi$$

$$V_{H\Delta} = V_{\Delta H} = H_{x2} = \frac{0.468\Psi - (-0.568\Psi)}{3.0} = 0.345\Psi$$

Από την ισοροπία του ζυγώματος AB:

$$B_{x2} = -V_{A\Gamma} - V_{BE} = -2V_{A\Gamma} = -2 \times (-0.925\Psi) = 1.85\Psi$$

Από την ισοροπία του φορέα κατά x:

$$B_{x2} + E_{x2} + Z_{x2} + H_{x2} + \Theta_{x2} = 0 \Rightarrow E_{x2} = 2 \times (-0.171\Psi) - 1.85\Psi - 0.345\Psi = -2.537\Psi$$

- Υπολογισμός Y, Ψ .

$$B_x = 0 \Rightarrow B_{x0} + B_{x1} + B_{x2} = 0 \Rightarrow 15.2 - 1.768Y + 1.85\Psi = 0 \quad (\text{I})$$

$$E_x = 0 \Rightarrow E_{x0} + E_{x1} + E_{x2} = 0 \Rightarrow 61.8 + 1.849Y - 2.537\Psi = 0 \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}) \Rightarrow Y = 8.6 + 1.05\Psi \quad (\text{III})$$

$$(\text{II}) \Rightarrow 61.8 + 1.849(8.6 + 1.05\Psi) - 2.537\Psi = 0 \Rightarrow 77.7 = 0.596\Psi \Rightarrow \Psi = 130.3$$

$$(\text{III}) \Rightarrow Y = 145.4$$

- Ροπές 2ης φάσης

Από τις τιμές των μετατοπίσεων Y και Ψ υπολογίζονται, με επαλληλία, οι τιμές των ροπών της 2ης φάσης.

$$M_{AB} = M_{AG} = -1.45 + 0.89 \times 145.4 - 0.914 \times 130.3 = 8.95 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = M_{BE} = -8.95 \text{ kNm}$$

$$M_{GA} = -6.14 - 0.877 \times 145.4 + 0.936 \times 130.3 = -11.8 \text{ kNm} \quad M_{EB} = 11.8 \text{ kNm}$$

$$M_{GD} = -3.88 + 0.665 \times 145.4 - 0.424 \times 130.3 = 37.6 \text{ kNm} \quad M_{ED} = -37.6 \text{ kNm}$$

$$M_{GZ} = -10.02 - 0.212 \times 145.4 + 0.512 \times 130.3 = 25.9 \text{ kNm} \quad M_{E\theta} = -25.9 \text{ kNm}$$

$$M_{DG} = 0.35 - 0.061 \times 145.4 - 0.234 \times 130.3 = -39.0 \text{ kNm} \quad M_{DE} = 39.0 \text{ kNm}$$

$$M_{DH} = -0.7 + 0.122 \times 145.4 + 0.468 \times 130.3 = 78.0 \text{ kNm}$$

$$M_{HD} = 0.35 - 0.061 \times 145.4 - 0.568 \times 130.3 = -82.5 \text{ kNm}$$

Τα διαγράμματα για την κάθε φάση και τα τελικά διαγράμματα έχουν χαραχθεί στο παράδειγμα 9.4.6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: Μέθοδος τριών ροπών (Clapeyron).

11.1. Τύπος του Bresse.

Από την αντοχή των υλικών είναι γνωστό ότι σε μία διατομή τετμημένης x ενός ευθύγραμμου φορέα, όταν αγνοηθούν τα έργα των αξονικών και διατμητικών δυνάμεων, μπορεί να γραφεί:

$$\text{Γωνία στροφής: } \theta(x) = \theta_0 + \int_0^x \frac{M(s)}{EI(s)} ds$$

$$\text{Βέλος κάμψης: } v(x) = v_0 + \theta_0 \times x + \int_0^x (x-s) \frac{M(s)}{EI(s)} ds$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές τη δεύτερη από τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνεται:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \theta(x) \qquad \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}$$

Αν η δεύτερη σχέση παραγωγισθεί ακόμη δύο φορές:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right) = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

Αν η ροπή αδρανείας I του φορέα είναι σταθερή, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$EI \frac{d^4v(x)}{dx^4} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

Η ελαστική γραμμή μπορεί να υπολογισθεί από την παραπάνω σχέση με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών:

Ακραία στήριξη : $M = 0, v = 0$

Πάκτωση: $v = 0, \theta = 0$.

11.2. Εσωτερικά εντατικά μεγέθη

Ας θεωρηθεί το άνοιγμα $A_{i-1} - A_i = L_i$ μίας συνεχούς δοκού υποκείμενης σε φορτία $q(x)$. Αν $M(x)$ οι ροπές κάμψης και $V(x)$ οι τέμνουσες δυνάμεις της συνεχούς δοκού, τότε, βάσει των τύπων του Bresse, ισχύει:

$$q(x) = -\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

Αν το ίδιο άνοιγμα θεωρηθεί αμφιέριστο με $M_0(x)$ ροπές κάμψης και $V_0(x)$ τέμνουσες δυνάμεις, τότε, αν το φορτίο παραμένει $q(x)$, μπορεί να γραφεί:

$$q(x) = -\frac{d^2M_0(x)}{dx^2}$$

Τα M και M_0 διαφέρουν λοιπόν κατά μία γραμμική ως προς x συνάρτηση, η οποία για $x=0$ ισούται με M_{i-1} και για $x=L_i$ ισούται με M_i . (M_{i-1} και M_i οι ροπές των στηρίξεων A_{i-1} και A_i αντίστοιχα). Κατά συνέπεια:

$$M(x) = M_0(x) + \left(1 - \frac{x}{L_i}\right)M_{i-1} + \frac{x}{L_i}M_i$$

Το διάγραμμα ροπών κάμψης της συνεχούς δοκού είναι το διάγραμμα ροπών κάμψης της αμφιέρειστης, αν "αναρτηθεί" από τη χορδή $M_{i-1} - M_i$. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς x , προκύπτει η σχέση που χρησιμοποιείται για τη χάραξη του διαγράμματος τεμνουσών δυνάμεων:

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i}$$

Το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων της συνεχούς δοκού είναι το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων της αμφιέρειστης, αν σ' αυτό προστεθεί η ποσότητα $\frac{M_i - M_{i-1}}{L_i}$.

11.3. Στροφές ακραίων διατομών ανοίγματος.

Αν ω_{i-1}' και ω_i οι στροφές των ακραίων διατομών αμφιέρειστου ανοίγματος $A_{i-1} - A_i$ υποκείμενου σε φόρτιση $q(x)$, οι τύποι του Bresse δίνουν:

$$\omega_{i-1}' = - \int_0^{L_i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right) \frac{M_0}{EI} dx$$

Η στροφή του ίδιου ανοίγματος θεωρούμενου σαν άνοιγμα συνεχούς δοκού γράφεται:

$$\theta_{i-1}' = - \int_0^{L_i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right) \frac{M}{EI} dx = \omega_{i-1}' - \int_0^{L_i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right)^2 \frac{M_{i-1}}{EI} dx - \int_0^{L_i} \frac{x}{L_i} \left(1 - \frac{x}{L_i}\right) \frac{M_i}{EI} dx$$

Αν το γινόμενο EI παραμένει σταθερό, η παραπάνω σχέση δίνει:

$$\theta_{i-1}' = \omega_{i-1}' - \frac{L_i}{3EI} M_{i-1} - \frac{L_i}{6EI} M_i$$

Με ανάλογο τρόπο λαμβάνεται:

$$\theta_i = \omega_i + \frac{L_i}{6EI} M_{i-1} + \frac{L_i}{3EI} M_i$$

11.4. Θεώρημα τριών ροπών για συνεχείς δοκούς (Clapeyron).

Σε μία συνεχή δοκό, η στροφή δεξιά ενός ανοίγματος $A_{i-1} - A_i$ ισούται με τη στροφή αριστερά του επομένου ανοίγματος $A_i - A_{i+1}$ (συμβιβαστό παραμορφώσεων). Με βάση τα προαναφερθέντα:

$$\begin{aligned}\theta_i = \theta_{i+1}' &\Rightarrow \omega_i + \frac{L_i}{6EI_i} M_{i-1} + \frac{L_i}{3EI_i} M_i = \omega_i' - \frac{L_{i+1}}{3EI_{i+1}} M_i - \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} M_{i+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{L_i}{6EI_i} M_{i-1} + \left(\frac{L_i}{3EI_i} + \frac{L_{i+1}}{3EI_{i+1}} \right) M_i + \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} M_{i+1} &= \omega_i' - \omega_i\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με μία αυθαίρετα εκλεγμένη ροπή I_c και θέτοντας $d_i = L_i \times I_c / I_i$, $d_{i+1} = L_{i+1} \times I_c / I_{i+1}$ προκύπτει:

$$d_i M_{i-1} + 2(d_i + d_{i+1}) M_i + d_{i+1} M_{i+1} = 6EI_c (\omega_i' - \omega_i)$$

Οι στροφές ω_i' και ω_i της αμφιέριστης εξαρτώνται από το φορτίο και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\omega_i' = -\frac{d_i}{6EI_c} R_i \qquad \omega_i = \frac{d_{i+1}}{6EI_c} G_{i+1}$$

τα R_i και G_{i+1} δίνονται σε πίνακες συναρτήσεως της εξωτερικής φόρτισης (πίνακας 3). Έτσι, η τελική μορφή της εξίσωσης των τριών ροπών του Clapeyron είναι:

$$d_i M_{i-1} + 2(d_i + d_{i+1}) M_i + d_{i+1} M_{i+1} = -d_i R_i - d_{i+1} G_{i+1}$$

όπου: $d_i = L_i \times I_c / I_i$, $d_{i+1} = L_{i+1} \times I_c / I_{i+1}$

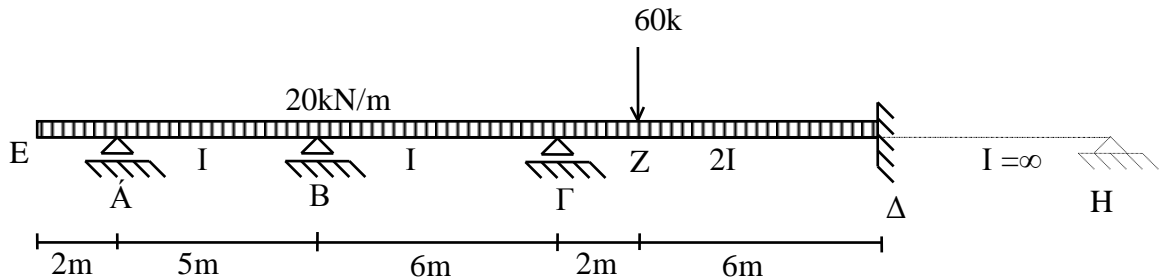
I_c : αυθαίρετα εκλεγμένη ροπή αδρανείας

R_i , G_{i+1} : συντελεστές που υπολογίζονται με βοήθεια πινάκων.

Η εξίσωση Clapeyron που συνδέει τις ροπές τριών διαδοχικών στηρίξεων μιας συνεχούς δοκού, μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλα τα ανοίγματα της δοκού και να προμηθεύσει κανό αριθμό εξισώσεων για τον υπολογισμό των ροπών σε όλες τις στηρίξεις. Σε περίπτωση που μία συνεχής δοκός αρχίζει ή καταλήγει σε πάκτωση, θεωρείται ακόμη ένα υποθετικό άνοιγμα πέραν της πάκτωσης με άπειρη ροπή αδρανείας και η εξίσωση των τριών ροπών εφαρμόζεται κανονικά.

11.5. Εφαρμογή

Να υπολογισθούν οι ροπές των στηρίξεων της συνεχούς δοκού του σχήματος.



$$M_{AE} = M_{AB} = -20.0 \frac{2.0^2}{2} = -40.0 \text{ kNm}$$

Εφαρμόζεται η εξίσωση των τριών ροπών για $i = 1, 2, 3$ δηλαδή για τα ανοίγματα AB, BΓ, ΓΔ. Πέραν του Δ θεωρείται ότι υπάρχει ένα υποθετικό άνοιγμα ΔH άπειρης ροπής αδράνειας.

$$L_1 = L_{AB} = 5\text{m} \quad L_2 = L_{B\Gamma} = 6\text{m} \quad L_3 = L_{\Gamma\Delta} = 8\text{m} \quad L_4 = L_{\Delta H}$$

$$M_0 = M_A = -40 \text{ kNm} \quad M_1 = M_B \quad M_2 = M_{\Gamma} \quad M_3 = M_{\Delta} \quad M_4 = M_H = 0$$

$$I_1 = I_{AB} = I \quad I_2 = I_{B\Gamma} = I \quad I_3 = I_{\Gamma\Delta} = 2I \quad I_4 = I_{\Delta H} = \infty$$

$$i=1 : d_1 M_0 + 2(d_1 + d_2) M_1 + d_2 M_2 = -d_1 R_1 - d_2 G_2$$

$$i=2 : d_2 M_1 + 2(d_2 + d_3) M_2 + d_3 M_3 = -d_2 R_2 - d_3 G_3 \quad (I)$$

$$i=3 : d_3 M_2 + 2(d_3 + d_4) M_3 + d_4 M_4 = -d_3 R_3 - d_4 G_4$$

Λαμβάνεται $I_c = I$

$$d_1 = 5.0 \times I/I = 5.0 \quad d_2 = 6.0 \times I/I = 6.0 \quad d_3 = 8.0 \times I/2I = 4.0 \quad d_4 = L_{\Delta H} \times I/\infty = 0$$

Από τους πίνακες και συναρτήσει της φόρτισης λαμβάνεται:

$$R_1 = \frac{20.0 \times 5.0^2}{4} = 125.0 \text{ kNm} \quad G_2 = R_2 = \frac{20.0 \times 6.0^2}{4} = 180.0 \text{ kNm}$$

$$G_3 = \frac{20.0 \times 8.0^2}{4} + 60.0 \frac{2.0 \times 6.0}{8.0^2} (8.0 + 6.0) = 477.5 \text{ kNm}$$

$$R_3 = \frac{20.0 \times 8.0^2}{4} + 60.0 \frac{2.0 \times 6.0}{8.0^2} (8.0 + 2.0) = 432.5 \text{ kNm}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στις σχέσεις (I) προκύπτει ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους:

$$5.0 \times (-40.0) + 2(5.0 + 6.0) M_B + 6.0 M_\Gamma = -5.0 \times 125.0 - 6.0 \times 180.0$$

$$6.0 M_B + 2(6.0 + 4.0) M_\Gamma + 4.0 M_\Delta = -6.0 \times 180.0 - 4.0 \times 477.5 \quad \Rightarrow$$

$$4.0 M_\Gamma + 2 \times 4.0 M_\Delta = -4.0 \times 432.5$$

Εκφράζοντας τις M_B και M_Δ συναρτήσει της M_Γ (1^η και 3^η εξίσωση αντίστοιχα) και αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση προκύπτει:

$$M_B = -68.4 - 0.27 M_\Gamma$$

$$6.0(-68.4 - 0.27 M_\Gamma) + 20.0 M_\Gamma + 4.0(-21.62 - 0.5 M_\Gamma) = -299.0 \quad \Rightarrow$$

$$M_\Delta = -21.62 - 0.5 M_\Gamma$$

Από όπου:

$$M_B = -40.1 \text{ kNm}$$

$$M_\Gamma = -104.8 \text{ kNm}$$

$$M_\Delta = -163.8 \text{ kNm}$$

Οι τιμές αυτές των ροπών στις στηρίξεις επιτρέπουν τον υπολογισμό των αντιδράσεων και ακολούθως τη χάραξη των διαγραμμάτων V και M της συνεχούς δοκού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12: Άμεση μέθοδος δυσκαμψίας.

Η άμεση μέθοδος δυσκαμψίας είναι η μέθοδος που έχει εξελιχθεί ραγδαία τα τελευταία χρόνια λόγω της ιδιότητας της να προγραμματίζεται εύκολα σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Η βασική ιδέα είναι η ίδια με την ιδέα της μεθόδου παραμορφώσεων. Ο τρόπος με τον οποίο επιλύεται το πρόβλημα αποτέλεσε τη βάση άλλων πιο εξελιγμένων μεθόδων όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

Η άμεση μέθοδος δυσκαμψίας συνίσταται στον τεμαχισμό του φορέα σε στοιχειώδη τμήματα (στοιχεία) τα οποία συνδέονται μεταξύ τους στα άκρα τους (κόμβοι). Οι άγνωστοι του προβλήματος είναι, όπως στη μέθοδο των παραμορφώσεων, οι στροφές και οι μετατοπίσεις των κόμβων.

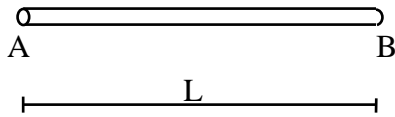
Όλα τα στοιχεία συσχετίζονται με ένα θεμελιώδες στοιχείο, το στοιχείο αναφοράς. Οι νόμοι συμπεριφοράς κάθε στοιχείου θεωρούνται ίδιοι με τους νόμους συμπεριφοράς του στοιχείου αναφοράς. Για κάθε στοιχείο δημιουργείται ένα στοιχειώδες μητρώο δυσκαμψίας. Το συνολικό μητρώο ακαμψίας $[K]$ που αντιστοιχεί σε ολόκληρο το φορέα λαμβάνεται με κατάλληλη άθροιση των στοιχειωδών μητρώων ακαμψίας. Έτσι σχηματίζεται τελικά ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους της μορφής:

$$[K] \{ U \} = \{ P \} \quad (\text{νόμος του Hooke})$$

όπου $[K]$ το συνολικό μητρώο ακαμψίας του φορέα, $\{ P \}$ το μητρώο - στήλη των εξωτερικών φορτίων και $\{ U \}$ το μητρώο - στήλη των άγνωστων μεγεθών παραμόρφωσης (μετατοπίσεων - στροφών) των κόμβων. Η επίλυση του παραπάνω συστήματος και ο καθορισμός του μητρώου $\{ U \}$ οδηγεί στον υπολογισμό των αντιδράσεων και των υπόλοιπων εντατικών μεγεθών του φορέα.

12.1. Στοιχείο αναφοράς.

Ας θεωρηθεί ένα τμήμα AB μήκους L ενός ολόσωμου φορέα σταθερής ορθογωνικής ή κυκλικής διατομής και επομένως σταθερής ροπής αδράνειας I.



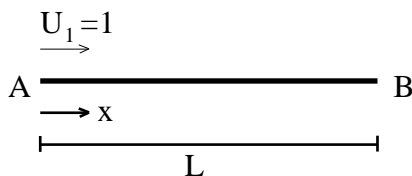
Το τμήμα AB έχει δύο κόμβους (A,B) και 6 βαθμούς ελευθερίας (3 ανά κόμβο):

- Την αξονική μετατόπιση στο A (U_1)
- Την κάθετη στον άξονα μετατόπιση στο A (U_2)
- Τη στροφή στο A (U_3)
- Την αξονική μετατόπιση στο B (U_4)
- Την κάθετη στον άξονα μετατόπιση στο B (U_5)
- Τη στροφή στο B (U_6)

12.2. Συναρτήσεις μορφής.

Ονομάζονται συναρτήσεις μορφής οι συναρτήσεις που εκφράζουν την ελαστική γραμμή του φορέα όταν ο ένας βαθμός ελευθερίας εκλέγεται ίσος με 1 ενώ οι άλλοι 5 παραμένουν ίσοι με 0.

Αν στο A επιβληθεί μοναδιαία αξονική μετατόπιση $U_1=1$ και οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας παραμείνουν μηδενικοί, τότε η ελαστική γραμμή του στοιχείου AB μπορεί να εκφραστεί από μία εξίσωση 1ου βαθμού:



$$f_1(x) = ax + b$$

Ο καθορισμός των σταθερών a και b γίνεται με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών:

$$\text{Για } x=0 \text{ πρέπει } f_1(x) = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$\text{Για } x=L \text{ πρέπει } f_1(x) = 0 \Rightarrow a = -1/L$$

$$\text{Κατά συνέπεια: } f_1(x) = 1 - w \text{ όπου } w = x/L$$

Επιβάλλεται τώρα στο A μία κάθετη στον άξονα μετατόπιση ίση με 1 ενώ οι υπόλοιποι 5 βαθμοί ελευθερίας παραμένουν ίσοι με 0.

Ας υποθεθεί ότι η συνάρτηση $f_2(x)$ που εκφράζει την ελαστική γραμμή του φορέα είναι συνάρτηση 3^{ου} βαθμού ως προς x:

$$f_2(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Η συνάρτηση που εκφράζει τη στρόφη $\varphi_2(x)$ του τμήματος AB είναι η παράγωγος της $f_2(x)$ ως προς x :

$$\varphi_2(x) = f_2'(x) = b + 2cx + 3dx^2$$

Οι σταθερές a, b, c, d υπολογίζονται με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών:

$$f_2(0) = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\varphi_2(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

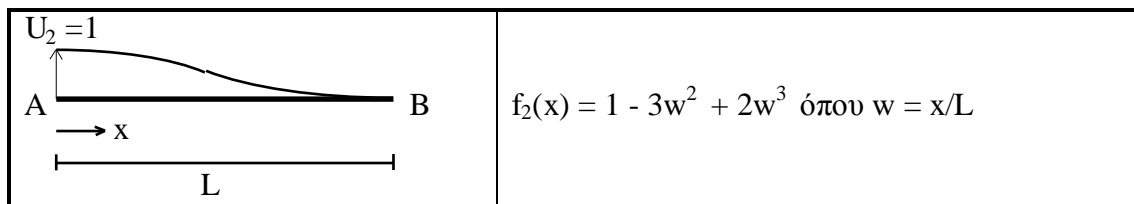
$$f_2(L) = 0 \Rightarrow 1 + cL^2 + dL^3 = 0 \quad (I)$$

$$\varphi_2(L) = 0 \Rightarrow 2cL + 3dL^2 = 0 \Rightarrow c = -\frac{3dL}{2}$$

$$(I) \Rightarrow 1 - \frac{3dL}{2}L^2 + dL^3 = 0 \Rightarrow d = \frac{2}{L^3} \Rightarrow c = -\frac{3}{L^2}$$

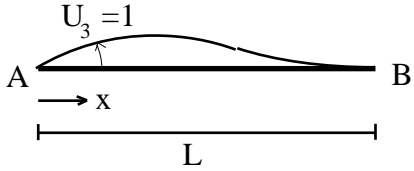
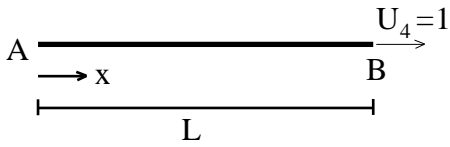
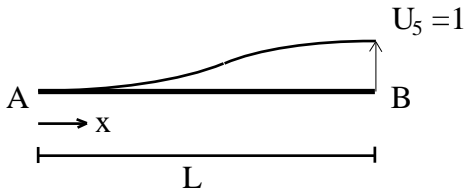
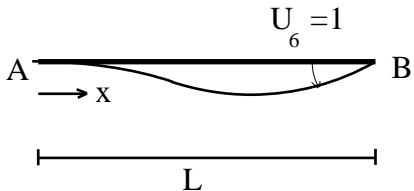
Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών a, b, c, d προκύπτει:

$$f_2(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$



Με ανάλογο τρόπο λαμβάνεται για τους υπόλοιπους βαθμούς ελευθερίας (CLOUGH R.W., PENZIEN J. – [6])

:

	$f_3(x) = x(1-w)^2 \quad \text{όπου } w = x/L$
	$f_4(x) = w$
	$f_5(x) = 3w^2 - 2w^3$
	$f_6(x) = x(-w + w^2)$

Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις f_1 και f_4 αφορούν σε αξονικές μετατοπίσεις ενώ οι υπόλοιπες σε κάθετες στον άξονα μετατοπίσεις του φορέα. Αν $u_1(x)$ είναι η αξονική μετατόπιση σε όλο το μήκος του φορέα και $u_2(x)$ η κάθετη στον άξονα μετατόπιση, μπορεί να γραφεί:

$$u_1(x) = f_1(x)U_1 + f_4(x)U_4$$

$$u_2(x) = f_2(x)U_2 + f_3(x)U_3 + f_5(x)U_5 + f_6(x)U_6$$

ή ακόμη υπό μορφή μητρώων:

$$\{u(x)\} = \begin{Bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) & 0 & 0 & f_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(x) & f_3(x) & 0 & f_5(x) & f_6(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

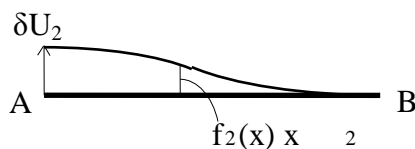
Η παραπάνω σχέση επιτρέπει τον καθορισμό της μετατόπισης σε οποιοδήποτε σημείο του στοιχείου αναφοράς, αν είναι γνωστές οι μετατοπίσεις στα άκρα.

12.3. Στοιχειώδες μητρώο δυσκαμψίας [K_e]

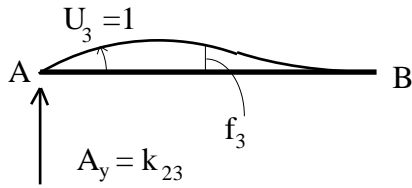
Είναι ένα τετραγωνικό συμμετρικό μητρώο διαστάσεων 6x6, του οποίου τα στοιχεία k_{ij} παριστάνουν τη δύναμη (ή ροπή) που πρέπει να εφαρμοστεί στο βαθμό ελευθερίας i όταν στο βαθμό ελευθερίας j επιβάλλεται μοναδιαία μετατόπιση (ή στροφή) ενώ οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας παραμένουν ίσοι με 0.

Ο υπολογισμός των στοιχείων k_{ij} γίνεται με εφαρμογή του θεωρήματος των δυνατών έργων. Παραδείγματος χάριν για τον υπολογισμό του στοιχείου k_{23} εφαρμόζεται το θεώρημα των δυνατών έργων θεωρώντας:

- Πεδίο δυνατών τάσεων το οφειλόμενο σε τυχούσα κατακόρυφη μετατόπιση δU_2 του κόμβου 1.



- Πεδίο μετατοπίσεων - στροφών το οφειλόμενο σε μοναδιαία στροφή $U_3 = 1$ του κόμβου 1.



- Δυνατό έργο εξωτερικών εντατικών μεγεθών:

$$W_{e1} = \delta U_2 \times A_y = \delta U_2 \times k_{23}$$

- Δυνατό έργο εσωτερικών εντατικών μεγεθών:

$$W_{i1} = \int_0^L \frac{M_1(x) \times M_2(x)}{EI} dx$$

- Από την αντοχή των υλικών είναι γνωστό:

$$M_1(x) = EI \times f_2''(x) \times \delta U_2$$

$$M_2(x) = EI \times f_3''(x)$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνεται:

$$W_{i1} = \delta U_2 \times EI \times \int_0^L f_1''(x) \times f_2''(x) dx$$

$$W_{e1} = W_{i1} \Rightarrow k_{23} = EI \times \int_0^L f_1''(x) \times f_2''(x) dx = \frac{6EI}{L^2}$$

Κατ' αναλογία, μπορεί γενικά να γραφεί:

$$k_{ij} = EI \times \int_0^L f_i''(x) \times f_j''(x) dx$$

Η παραπάνω σχέση επιτρέπει τον καθορισμό όλων των στοιχείων του στοιχειώδους μητρώου ακαμψίας. Είναι προφανές ότι επιβεβαιώνεται η αρχή της αμοιβαιότητας καθόσον $k_{ij} = k_{ji}$.

Το συμμετρικό στοιχειώδες μητρώο ακαμψίας που προκύπτει είναι:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Από τον ορισμό του στοιχειώδους μητρώου ακαμψίας προκύπτει η σχέση:

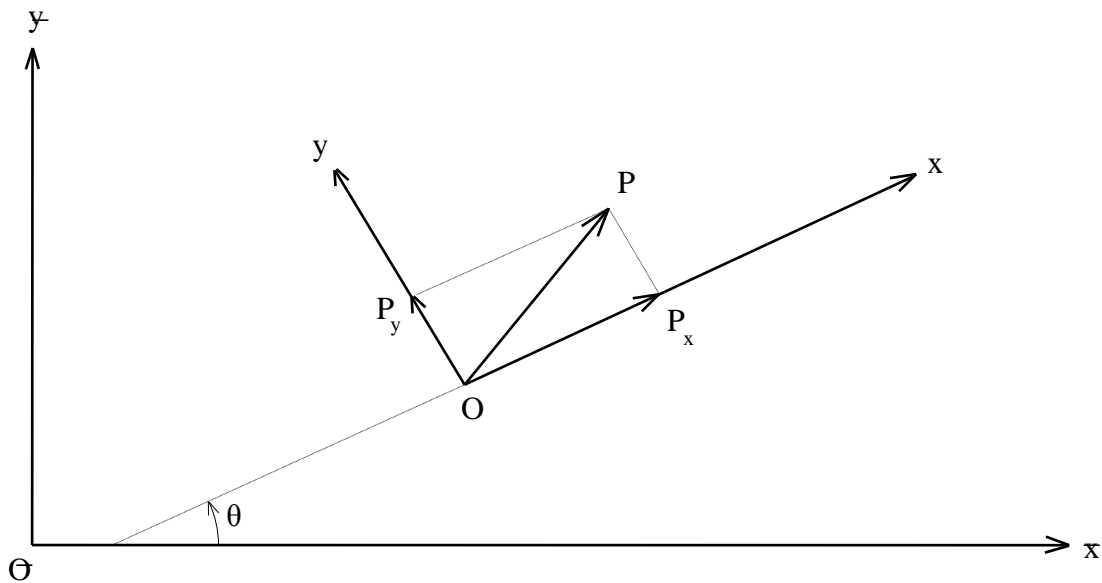
$$[K_e] \{U_e\} = \{P_e\} \quad (\text{νόμος του Hooke})$$

όπου $\{U_e\}$ και $\{P_e\}$ τα στοιχειώδη μητρώα επικομβίων μετατοπίσεων και φορτίσεων αντίστοιχα:

$$\{U_e\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \{P_e\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x^1 \\ P_y^1 \\ M^1 \\ P_x^2 \\ P_y^2 \\ M^2 \end{Bmatrix}$$

12.4. Στοιχειώδες μητρώο μετασχηματισμού

Ας θεωρηθούν 2 συστήματα καρτεσιανών συντεταγμένων: ένα σύστημα $\bar{x}\bar{y}$ (γενικό σύστημα) και ένα σύστημα xOy (τοπικό σύστημα). Έστω θ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των αξόνων \bar{Ox} και Ox . Αν P_x και P_y οι συνιστώσες μίας δύναμης P στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων xOy , τότε οι συνιστώσες της P στο γενικό σύστημα γράφονται:



$$\bar{P}_x = P_x \cos \theta - P_y \sin \theta$$

$$\bar{P}_y = P_x \sin \theta + P_y \cos \theta$$

Οι ροπές δεν εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων, οπότε για οποιαδήποτε ροπή μπορεί να γραφεί:

$$\bar{M} = M$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν υπό μορφή μητρώων:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_x \\ \bar{P}_y \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M \end{Bmatrix}$$

Ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κάθε στοιχείο έχει 6 βαθμούς ελευθερίας, όπου μπορούν να εφαρμοσθούν φορτία. Για τους 6 βαθμούς ελευθερίας μπορεί να γραφεί:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_x^1 \\ \bar{P}_y^1 \\ \bar{M}^1 \\ \bar{P}_x^2 \\ \bar{P}_y^2 \\ \bar{M}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x^1 \\ P_y^1 \\ M^1 \\ P_x^2 \\ P_y^2 \\ M^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{ \bar{P}_e \} = [\Lambda_e] \{ P_e \}$$

Δεδομένου ότι $[\Lambda_e]^T = [\Lambda_e]^{-1}$ μπορεί να γραφεί:

$$\{ P_e \} = [\Lambda_e]^T \{ \bar{P}_e \}$$

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να γραφεί και για το μητρώο - στήλη $\{ U_e \}$ των μετατοπίσεων των κόμβων:

$$\{ \bar{U}_e \} = [\Lambda_e] \{ U_e \} \Rightarrow \{ U_e \} = [\Lambda_e]^T \{ \bar{U}_e \}$$

Το μητρώο :

$$[\Lambda_e] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

καλείται στοιχειώδες μητρώο μετασχηματισμού και επιτρέπει την "αναγωγή" σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων, των φορτίων κάθε στοιχείου. Εξαρτάται από τη γωνία θ η οποία υπολογίζεται συναρτήσει των συντεταγμένων των άκρων του στοιχείου:

$$\sin\theta = \frac{Y_2 - Y_1}{\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}}$$

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να "αναχθεί" στο γενικό σύστημα συντεταγμένων, μέσω του κατάλληλου μετασχηματισμού, το στοιχειώδες μητρώο ακαμψίας.

$$[K_e] \{U_e\} = \{P_e\}, \quad \{U_e\} = [\Lambda_e]^T \{\bar{U}_e\}, \quad \{P_e\} = [\Lambda_e]^T \{\bar{P}_e\} \Rightarrow$$

$$[K_e] [\Lambda_e]^T \{\bar{U}_e\} = [\Lambda_e]^T \{\bar{P}_e\} \Rightarrow [\Lambda_e] [K_e] [\Lambda_e]^T \{\bar{U}_e\} = \{\bar{P}_e\}$$

Τίθεται: $[\bar{K}_e] = [\Lambda_e] [K_e] [\Lambda_e]^T$ (μετασχηματισμός στοιχειώδους μητρώου ακαμψίας), οπότε ισχύει:

$$[\bar{K}_e] \{\bar{U}_e\} = \{\bar{P}_e\}$$

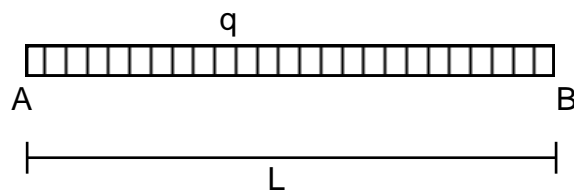
12.5. Ισοδύναμες επικόμβιες φορτίσεις

Όπως έχει ήδη γραφεί, οι φορτίσεις στην άμεση μέθοδο δυσκαμψίας πρέπει να ασκούνται στους κόμβους. Όμως γενικά υπάρχουν φορτία τα οποία ασκούνται σε τυχαία σημεία του φορέα που δεν είναι κατ' ανάγκη κόμβοι. Μία σκέψη θα ήταν να εισαχθούν επιπλέον κόμβοι στα σημεία εφαρμογής όλων των φορτίων, όμως μία τέτοια προοπτική αφ' ενός θα αύξανε σημαντικά τον όγκο των υπολογισμών, αφ' ετέρου δε θα έλυσε το πρόβλημα των κατανεμημένων φορτίων. Για το λόγο αυτό η πρακτική αντιμετώπιση του προβλήματος οδηγεί στην εισαγωγή των ισοδύναμων επικόμβιων φορτίσεων, δηλαδή επικόμβιων φορτίσεων που μπορούν να αντικαταστήσουν τυχαίες, μη επικόμβιες φορτίσεις.

Θετικές θεωρούνται οι οριζόντιες δυνάμεις με φορά από αριστερά προς τα δεξιά (\rightarrow), οι κατακόρυφες δυνάμεις με φορά από κάτω προς επάνω (\uparrow) και οι δεξιόστροφες ροπές, δηλαδή οι ροπές με φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

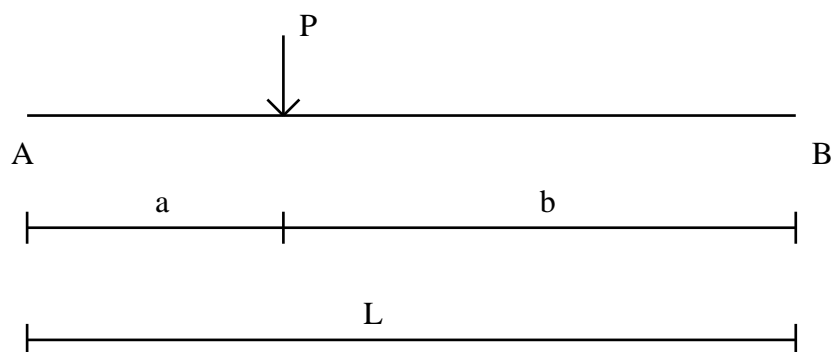
Παρακάτω δίνονται οι ισοδύναμες επικόμβιες φορτίσεις για τις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις φόρτισης.

α. Συνεχές ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο



$$P_A = P_B = -\frac{qL}{2} \quad M_A = -\frac{qL^2}{12} \quad M_B = \frac{qL^2}{12}$$

β. Συγκεντρωμένο φορτίο



$$P_A = -\frac{Pb}{L^3}(L^2 - a^2 + ab) \quad P_B = -\frac{Pa}{L^3}(L^2 - b^2 + ab)$$

$$M_A = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad M_B = \frac{Pa^2b}{L^2}$$

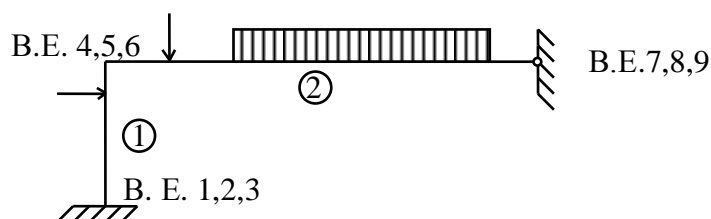
Αν $a=b=L/2$:

$$P_A = P_B = -P/2 \quad M_A = -PL/8 \quad M_B = PL/8$$

12.6. Συνολικά μητρώα φόρτισης { P } και ακαμψίας [K]

12.6.1. Συνολικό μητρώο φόρτισης { P }

Κατασκευάζεται με κατάλληλη άθροιση των μετασχηματισμένων στοιχειωδών μητρώων φόρτισης { \bar{P}_e }. Είναι ένα μητρώο - στήλη με αριθμό σειρών όσοι οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του φορέα.



Στο φορέα του σχήματος το στοιχείο 1 επηρεάζει άμεσα τους βαθμούς ελευθερίας 1,2,3,4,5,6 ενώ το στοιχείο 2 τους βαθμούς ελευθερίας 4,5,6,7,8,9. Το συνολικό μητρώο - στήλη φόρτισης { P } αποτελείται από 9 στοιχεία εκ των οποίων:

- τα τρία πρώτα (1,2,3) είναι τα τρία πρώτα στοιχεία του μητρώου { \bar{P}_1 }.
- τα τρία μεσαία (4,5,6) προκύπτουν από άθροιση των τριών τελευταίων στοιχείων του μητρώου { \bar{P}_1 } με τα τρία πρώτα στοιχεία του μητρώου { \bar{P}_2 }
- τα τρία τελευταία (7,8,9) είναι τα τρία τελευταία στοιχεία του μητρώου { \bar{P}_2 }

σχηματικά αν

$$\{\bar{P}_1\} = \begin{Bmatrix} \# \\ \# \\ \# \\ \# \\ \# \\ \# \end{Bmatrix} \text{ και } \{\bar{P}_2\} = \begin{Bmatrix} \& \\ \& \\ \& \\ \& \\ \& \\ \& \end{Bmatrix} \text{ τότε } \{P\} = \begin{Bmatrix} \# \\ \# \\ \# \\ \#+ \& \\ \#+ \& \\ \#+ \& \\ \& \\ \& \\ \& \end{Bmatrix}$$

12.6.2. Συνολικό μητρώο ακαμψίας [K].

Κατασκευάζεται με κατάλληλη άθροιση των μετασχηματισμένων στοιχειωδών μητρώων ακαμψίας. Είναι ένα συμμετρικό τετραγωνικό μητρώο με διαστάσεις ίσες με τους συνολικούς βαθμούς ελευθερίας του φορέα. Στο προηγούμενο παράδειγμα αν:

$$[\bar{K}_1] = \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \end{bmatrix} \text{ και } [\bar{K}_2] = \begin{bmatrix} \& & \& & \& & \& & \& & \& \\ \& & \& & \& & \& & \& & \& \\ \& & \& & \& & \& & \& & \& \\ \& & \& & \& & \& & \& & \& \\ \& & \& & \& & \& & \& & \& \\ \& & \& & \& & \& & \& & \& \\ \& & \& & \& & \& & \& & \& \end{bmatrix}$$

τότε το συνολικό μητρώο ακαμψίας είναι ένα μητρώο διαστάσεων 9x9:

$$[K] = \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# & 0 & 0 & 0 \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & 0 & 0 & 0 \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# & 0 & 0 & 0 \\ \# & \# & \# & \#+ \& & \#+ \& & \#+ \& & \& & \& \\ \# & \# & \# & \#+ \& & \#+ \& & \#+ \& & \& & \& \\ \# & \# & \# & \#+ \& & \#+ \& & \#+ \& & \& & \& \\ 0 & 0 & 0 & \& & \& & \& & \& & \& \\ 0 & 0 & 0 & \& & \& & \& & \& & \& \\ 0 & 0 & 0 & \& & \& & \& & \& & \& \end{bmatrix}$$

12.7. Επίλυση συστήματος

Μετά το σχηματισμό των συνολικών μητρώων ακαμψίας [K] και φόρτισης [P] μπορεί να γραφεί η γενική εξίσωση στατικής ισορροπίας:

$$\begin{array}{ccc} \text{μετατοπίσεις} & & \text{αντιδράσεις} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathbf{K}] \{ \mathbf{U} \} = \{ \mathbf{P} \} + \{ \mathbf{R} \} \end{array}$$

Προφανώς στις στηρίξεις οι μετατοπίσεις μηδενίζονται και εκεί υπάρχουν αντιδράσεις. Στους κόμβους και γενικά όπου οι μετατοπίσεις δεν είναι μηδενικές, δεν υπάρχουν αντιδράσεις. Τα παραπάνω μητρώα χωρίζονται σε υπομητρώα: σε αυτά που αντιστοιχούν σε μηδενικές μετατοπίσεις και συνεπώς μη μηδενικές αντιδράσεις (δείκτης R) και σε αυτά που αντιστοιχούν σε μηδενικές αντιδράσεις και επομένως μη μηδενικές μετατοπίσεις (δείκτης U).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RU} \\ \mathbf{K}_{UR} & \mathbf{K}_{UU} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_R \\ \mathbf{P}_U \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_R \\ \mathbf{R}_U \end{Bmatrix}$$

Όμως $\{ \mathbf{U}_R \} = 0$ και $\{ \mathbf{R}_U \} = 0$. Έτσι η παραπάνω σχέση γράφεται:

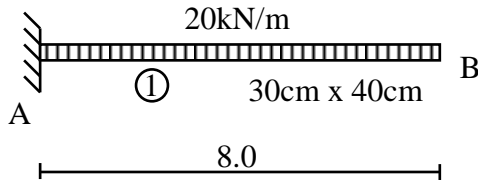
$$[\mathbf{K}_{RU}] \{ \mathbf{U}_U \} = \{ \mathbf{P}_R \} + \{ \mathbf{R}_R \} \quad (\text{I})$$

$$[\mathbf{K}_{UU}] \{ \mathbf{U}_U \} = \{ \mathbf{P}_U \} \quad (\text{II})$$

Επιλύεται κατ' αρχάς το σύστημα (II) και υπολογίζονται οι μετατοπίσεις των κόμβων $\{ \mathbf{U}_U \}$. Ακολούθως οι τιμές $\{ \mathbf{U}_U \}$ αντικαθίστανται στην εξίσωση (I) και υπολογίζονται οι τιμές των αντιδράσεων $\{ \mathbf{R}_R \}$.

12.8. Εφαρμογές.

12.8.1. Στον πρόβολο του σχήματος ζητούνται οι μετατοπίσεις του ελεύθερου άκρου και οι αντιδράσεις αν $E = 10\text{GPa}$.



$$A = 0.3 \times 0.4 = 0.12\text{m}^2$$

$$I = 0.3 \times 0.4^3 / 12 = 1.6 \times 10^{-3}\text{m}^4$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) της παραγράφου 12.3 και σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην παράγραφο 12.5, λαμβάνεται:

$$[K_1] = 10^4 \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 37.5 & 150 & 0 & -37.5 & 150 \\ 0 & 150 & 800 & 0 & -150 & 400 \\ -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & -37.5 & -150 & 0 & 37.5 & -150 \\ 0 & 150 & 400 & 0 & -150 & 800 \end{bmatrix}$$

$$\{P_1\} = 10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -80 \\ -106.67 \\ 0 \\ -80 \\ 106.67 \end{Bmatrix}$$

Υπάρχει ένα μόνον στοιχείο με $\theta = 0$. Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (1) της παραγράφου 12.4., $[\Lambda_1] = [1]$ και:

$$[K] = [\bar{K}_1] = [K_1] \quad \text{και} \quad \{P\} = \{\bar{P}_1\} = \{P_1\}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RU} \\ K_{UR} & K_{UU} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 37.5 & 150 & 0 & -37.5 & 150 \\ 0 & 150 & 800 & 0 & -150 & 400 \\ -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & -37.5 & -150 & 0 & 37.5 & -150 \\ 0 & 150 & 400 & 0 & -150 & 800 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } \{ P \} = \begin{Bmatrix} P_R \\ P_U \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -80 \\ -106.67 \\ 0 \\ -80 \\ 106.67 \end{Bmatrix}$$

Όμως $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ και $R_4 = R_5 = R_6 = 0$, επομένως:

$$[K_{UU}] \{ U_U \} = \{ P_U \} \Rightarrow 10^4 \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -80 \\ 106.67 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & U_4 = 0 & \Rightarrow \quad & U_4 = 0 \\ & 375U_5 - 1500U_6 = -80 & & U_5 = -0.64\text{m} \\ & -1500U_5 + 8000U_6 = 106.67 & & U_6 = -0.107\text{rad} \end{aligned}$$

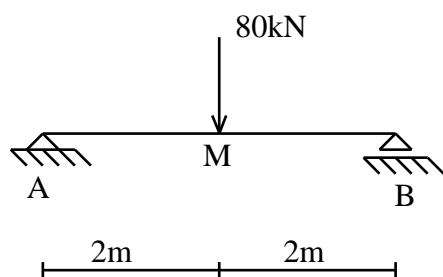
$$[K_{RU}] \{ U_U \} = \{ P_R \} + \{ R_R \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^4 \begin{bmatrix} -15000 & 0 & 0 \\ 0 & -37.5 & 150 \\ 0 & -150 & 400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.64 \\ -0.107 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -80 \\ -106.67 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & R_1 = A_x = 0 \\ \Rightarrow & R_2 = A_y = 160\text{kN} \\ & R_3 = M_A = 640\text{kNm} \end{aligned}$$

12.8.2. Στην αμφιέρειστη δοκό του σχήματος ζητούνται:

- οι στροφές φ_A και φ_B στις στηρίξεις
- η βύθιση και η στροφή στο μέσο



$$A = 0.08\text{m}^2$$

$$I = 2 \times 10^{-3} \text{m}^4$$

$$E = 10\text{GPa}$$

Α' τρόπος (προσεγγιστικά): 1 στοιχείο AB

$$[K_1] = 10^6 \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 \\ 0 & 3.75 & 7.5 & 0 & -3.75 & 7.5 \\ 0 & 7.5 & 20 & 0 & -7.5 & 10 \\ -200 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & -3.75 & -7.5 & 0 & 3.75 & -7.5 \\ 0 & 7.5 & 10 & 0 & -7.5 & 20 \end{bmatrix} \quad \{P_1\} = 10^6 \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.04 \\ -0.04 \\ 0 \\ -0.04 \\ 0.04 \end{Bmatrix}$$

Υπάρχει ένα μόνον στοιχείο με $\theta = 0$. Επομένως $[\Lambda_1] = [1]$ και:

$$[K] = [\bar{K}_1] = [K_1] \quad \text{και} \quad \{P\} = \{\bar{P}_1\} = \{P_1\}$$

$$U_1 = U_2 = U_6 = 0 \quad R_3 = R_4 = R_5 = 0$$

$$[K_{UU}] \{U_U\} = \{P_U\} \Rightarrow 10^6 \begin{bmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 0 & 200 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_6 \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{Bmatrix} -0.04 \\ 0 \\ 0.04 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.004 \\ 0 \\ 0.004 \end{Bmatrix}$$

Συνεπώς $\varphi_A = U_3 = -0.004\text{rad}$ (αρνητικό πρόσημο \rightarrow η φορά της στροφής στο A είναι η φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού) και $\varphi_B = U_6 = 0.004\text{rad}$ (θετικό πρόσημο \rightarrow η φορά της στροφής στο B είναι αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού). Οι στροφές είναι ίσες και αντίθετες, πράγμα αναμενόμενο λόγω συμμετρίας.

Υπολογισμός βέλους κάμψης - γωνίας στροφής στο μέσο M.

$$u_1(x) = f_1(x)U_1 + f_4(x)U_4 = 0$$

$$u_2(x) = f_2(x)U_2 + f_3(x)U_3 + f_5(x)U_5 + f_6(x)U_6 = x(1-w)^2(-0.004) + x(w^2-w)0.004 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2(x) = 0.004 \left(\frac{x^2}{L} - x \right)$$

$$\frac{du_2(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[0.004 \left(\frac{x^2}{L} - x \right) \right] = 0.004 \left(\frac{2x}{L} - 1 \right)$$

Για $x = 2m$ και $L = 4m$:

$$\text{Βύθιση στο M: } \delta_M = u_2(2) = -0.004m$$

$$\text{Στροφή στο M: } \varphi_M = \frac{du_2}{dx}(2) = 0 \text{ (αποτέλεσμα αναμενόμενο λόγω συμμετρίας).}$$

Β' τρόπος (ακριβής υπολογισμός): 2 στοιχεία AM και MB.

$$[K_1] = [K_2] = 10^6 \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 30 & 0 & -30 & 30 \\ 0 & 30 & 40 & 0 & -30 & 20 \\ -400 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -30 & 0 & 30 & -30 \\ 0 & 30 & 20 & 0 & -30 & 40 \end{bmatrix} \quad \{P_1\} = 10^6$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.08 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\{P_2\} = \{0\} \quad [\Lambda_1] = [\Lambda_2] = [1] \Rightarrow$$

$$[\bar{K}_1] = [\bar{K}_2] = [K_1] = [K_2] \quad \{\bar{P}_1\} = \{P_1\} \quad \text{και} \quad \{\bar{P}_2\} = \{P_2\}$$

Συνολικό μητρώο ακαμψίας $[K]$:

$$[K] = 10^6 \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 30 & 0 & -30 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 40 & 0 & -30 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ -400 & 0 & 0 & 800 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -30 & 0 & 60 & 0 & 0 & -30 & 30 \\ 0 & 30 & 20 & 0 & 0 & 80 & 0 & -30 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & -30 & 0 & 30 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 20 & 0 & -30 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\text{Συνολικό μητρώο φόρτισης } \{P\} = 10^6 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.08 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$U_1 = U_2 = U_9 = 0 \quad R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 0$$

$$[K_{UU}] \{U_U\} = \{P_U\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 40 & 0 & -30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 & 0 & -400 & 0 \\ -30 & 0 & 60 & 0 & 0 & 30 \\ 20 & 0 & 0 & 80 & 0 & 20 \\ 0 & -400 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 20 & 0 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \end{Bmatrix} = 10^6$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.08 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.004 \\ 0 \\ -0.0053 \\ 0 \\ 0 \\ 0.004 \end{Bmatrix}$$

όπου:

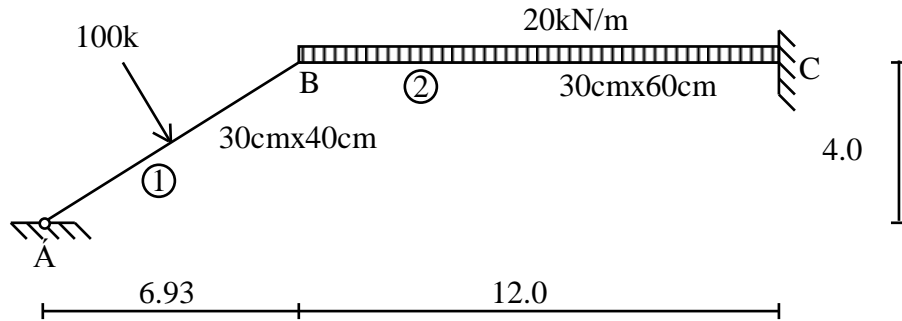
$$\varphi_A = U_3 = -0.004\text{rad}$$

$$\text{από } \varphi_M = U_6 = 0$$

$$\varphi_B = U_9 = 0.004\text{rad}$$

$$\delta_M = U_5 = -0.00533\text{m}$$

12.8.3. Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις του φορέα του σχήματος ($E = 1\text{GPa}$).



$$A_1 = 0.3 \times 0.4 = 0.12\text{m}^2 \quad A_2 = 0.3 \times 0.6 = 0.18\text{m}^2$$

$$I_1 = 0.3 \times 0.4^3 / 12 = 1.6 \times 10^{-3}\text{m}^4 \quad I_2 = 0.3 \times 0.6^3 / 12 = 5.4 \times 10^{-3}\text{m}^4$$

$$[K_1] = 10^3 \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 37.5 & 150 & 0 & -37.5 & 150 \\ 0 & 150 & 800 & 0 & -150 & 400 \\ -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & -37.5 & -150 & 0 & 37.5 & -150 \\ 0 & 150 & 400 & 0 & -150 & 800 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = 10^3 \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 37.5 & 225 & 0 & -37.5 & 225 \\ 0 & 225 & 1800 & 0 & -225 & 900 \\ -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & -37.5 & -225 & 0 & 37.5 & -225 \\ 0 & 225 & 900 & 0 & -225 & 1800 \end{bmatrix}$$

$$\{P_1\} = 10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -50 \\ -100 \\ 0 \\ -50 \\ 100 \end{Bmatrix} \quad \{P_2\} = 10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -120 \\ -240 \\ 0 \\ -120 \\ 240 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_1 = 30^\circ \Rightarrow$$

$$[\Lambda_1] = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = 0 \Rightarrow [\Lambda_2] = [1]$$

$$\{\bar{P}_1\} = [\Lambda_1]\{P_1\} = 10^3 \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -50 \\ -100 \\ 0 \\ -50 \\ 100 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 25 \\ -43.3 \\ -100 \\ 25 \\ -43.3 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{P}_2\} = [\Lambda_2]\{P_2\} = [1]\{P_2\} = \{P_2\} = 10^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -120 \\ -240 \\ 0 \\ -120 \\ 240 \end{Bmatrix}$$

Το συνολικό μητρώο φόρτισης $\{P\}$ λαμβάνεται με κατάλληλη άθροιση των $\{\bar{P}_1\}$ και $\{\bar{P}_2\}$, σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην παράγραφο 12.6.1.

$$\{P\} = 10^3 \begin{Bmatrix} 25 + 0 \\ -43.3 + 0 \\ -100 + 0 \\ 25 + 0 \\ -43.3 - 120 \\ 100 - 240 \\ 0 + 0 \\ 0 - 120 \\ 0 + 240 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 25 \\ -43.3 \\ -100 \\ 25 \\ -163.3 \\ -140 \\ 0 \\ -120 \\ 240 \end{Bmatrix}$$

$$U_1 = U_2 = U_7 = U_8 = U_9 = 0$$

$$R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 0$$

$$[\mathbf{K}_{UU}] \{ \mathbf{U}_U \} = \{ \mathbf{P}_U \} \Rightarrow 10^3 \begin{bmatrix} 800 & 75 & -130 & 400 \\ 75 & 26259 & 6479 & 75 \\ -130 & 6479 & 3815 & 95 \\ 400 & 75 & 95 & 2600 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -100 \\ 25 \\ -163.3 \\ -140 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow

$$\Rightarrow \{ \mathbf{U}_U \} = \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.12454 \\ 0.02205 \\ -0.0837 \\ -0.03226 \end{Bmatrix}$$

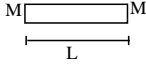
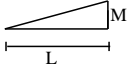
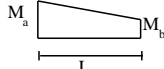
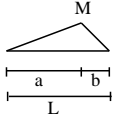
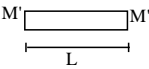
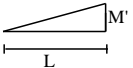
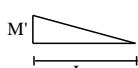
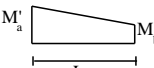
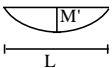
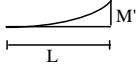
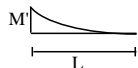
$$[\mathbf{K}_{RU}] \{ \mathbf{U}_U \} = \{ \mathbf{P}_R \} + \{ \mathbf{R}_R \} \Rightarrow$$

$$10^3 \begin{bmatrix} -75 & -11259 & -6479 & -75 \\ 130 & -6479 & -3778 & 130 \\ 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -37.5 & -225 \\ 0 & 0 & 225 & 900 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.12454 \\ 0.02205 \\ -0.0837 \\ -0.03226 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 25 \\ -43.3 \\ 0 \\ -120 \\ 240 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{Bmatrix}$$

$$\{ \mathbf{R}_R \} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ C_x \\ C_y \\ M_C \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 281 \\ 196 \\ -331 \\ 130 \\ -288 \end{Bmatrix}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.

Τιμές των $\int_0^L MM'dx$

		a	b	c	d
					
1	$\int_0^L M^2 dx$	LM^2	$\frac{L}{3} M^2$	$\frac{L}{3} (M_a^2 + M_a M_b + M_b^2)$	$\frac{L}{3} M^2$
2		LMM'	$\frac{L}{2} MM'$	$\frac{L}{12} M' (M_a + 3M_b)$	$\frac{L}{2} MM'$
3		$\frac{L}{2} MM'$	$\frac{L}{3} MM'$	$\frac{L}{6} M' (M_a + 2M_b)$	$\frac{L}{6} MM' \left(1 + \frac{a}{L}\right)$
4		$\frac{L}{2} MM'$	$\frac{L}{6} MM'$	$\frac{L}{6} M' (2M_a + M_b)$	$\frac{L}{6} MM' \left(1 + \frac{b}{L}\right)$
5		$\frac{L}{2} M(M_a' + M_b')$	$\frac{L}{6} M(M_a' + 2M_b')$	$\frac{L}{6} [M_a(2M_a' + M_b') + M_b(M_a' + 2M_b')]$	$\frac{L}{6} M \left[M_a' \left(1 + \frac{b}{L}\right) + M_b' \left(1 + \frac{a}{L}\right) \right]$
6		$\frac{2L}{3} MM'$	$\frac{L}{3} MM'$	$\frac{L}{3} M' (M_a + M_b)$	$\frac{L}{3} MM' \left(1 + \frac{ab}{L^2}\right)$
7		$\frac{L}{3} MM'$	$\frac{L}{4} MM'$	$\frac{L}{12} M' (M_a + 3M_b)$	$\frac{L}{12} MM' \left(\frac{3a}{L} + \frac{b^2}{L^2}\right)$
8		$\frac{L}{3} MM'$	$\frac{L}{12} MM'$	$\frac{L}{12} M' (3M_a + M_b)$	$\frac{L}{12} MM' \left(\frac{3b}{L} + \frac{a^2}{L^2}\right)$

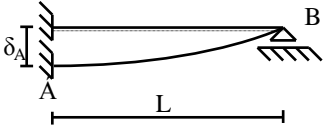
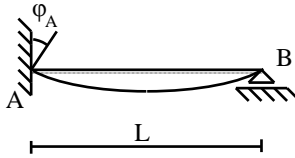
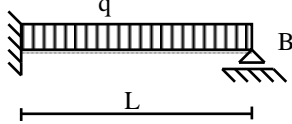
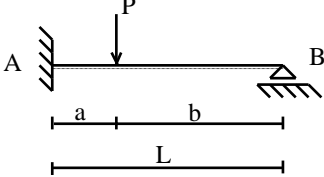
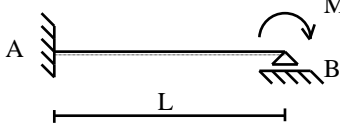
ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Βασικές επιλύσεις αμφίπακτης και μονόπακτης δοκού.

1. Αμφίπακτη δοκός.

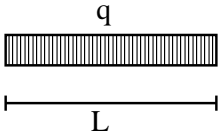
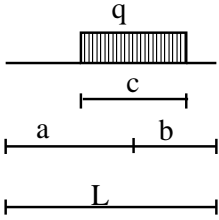
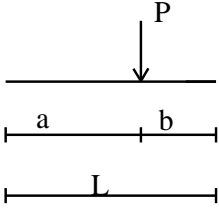
Α		$M_{AB} = \frac{6EI}{L^2} (\delta_A - \delta_B)$ $M_{BA} = \frac{6EI}{L^2} (\delta_B - \delta_A)$
Β		$M_{AB} = \frac{2EI}{L} (2\phi_A - \phi_B)$ $M_{BA} = \frac{2EI}{L} (2\phi_B - \phi_A)$
Γ		$M_{AB} = M_{BA} = -\frac{qL^2}{12}$
Δ		$M_{AB} = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad M_{BA} = -\frac{Pa^2b}{L^2}$ <p style="text-align: center;">$\alpha\nu \ a=b=L/2: M_{AB}=M_{BA}=-\frac{PL}{8}$</p>

2. Μονόπακτη δοκός.

A		$M_{AB} = \frac{3EI}{L^2} \delta_A$
B		$M_{AB} = \frac{3EI}{L} \phi_A$
Γ		$M_{AB} = -\frac{qL^2}{8}$
Δ		$M_{AB} = -\frac{Pab}{2L^2} (L + b)$ αν $a=b=L/2$: $M_{AB} = -\frac{3PL}{16}$
E		$M_{AB} = -\frac{M}{2}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

Φορτικοί συντελεστές G και R

	Φόρτιση	Συντελεστές
1	 <p>A horizontal line representing a beam of length L. Above it, a rectangular area with vertical hatching represents a uniformly distributed load q.</p>	$G = R = qL^2/4$
2	 <p>A horizontal line representing a beam of length L. A segment of length c is marked with a triangular load q above it. The distance from the left end to the start of the load is a, and the distance from the end of the load to the right end is b.</p>	$G = \frac{qabc}{L^2} \left(L + b - \frac{c^2}{4a} \right)$ $R = \frac{qabc}{L^2} \left(L + a - \frac{c^2}{4b} \right)$
3	 <p>A horizontal line representing a beam of length L. A downward arrow labeled P represents a point load. The distance from the left end to the load is a, and the distance from the load to the right end is b.</p>	$G = \frac{Pab}{L^2} (L + b)$ $R = \frac{Pab}{L^2} (L + a)$ <p>Av $a = b = L/2$: $G = R = 3PL/8$</p>