ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ
ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ
και
ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ & ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

Αριθμητική Ανάλυση

Δρ. Σταύρος Παπαϊωάννου

Σεπτέμβριος 2014

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Σερρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.Α. ΜΕ ΤΙ ΑΣΧΟΛΟΥΝΤΑΙ ΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ;

1.Α.1 Γενικά.

Το μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών απευθύνεται σε σπουδαστές που έχουν ήδη γνωρίσει σε γενικές γραμμές τον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό της Μαθηματικής Ανάλυσης. Στο μάθημα αυτό θα γνωρίσουμε μερικά στοιχεία της Μαθηματικής Επιστήμης που λέγεται Αριθμητική Ανάλυση. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να επιλύσουμε κάποια προβλήματα, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της κλασικής Ανάλυσης, είτε κάποιες καθαρά προσεγγιστικές-αριθμητικές μεθόδους λύσης.

Ενδεικτικά ας αναφέρουμε κάποια παραδείγματα προβλημάτων που στην συνέχεια θα προσπαθήσουμε να λύσουμε:

α) Να υπολογισθεί το ορισμένο Ολοκλήρωμα:

$$A = \int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$$

όταν η συνάρτηση y=f(x) είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα (α,β), ενώ δεν μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x). Θα πρέπει επομένως να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την τιμή Α του ορισμένου ολοκληρώματος.

β) Να βρεθεί μία απλή και «γρήγορη» μέθοδος, που να επιλύει το παρακάτω σύστημα ν γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους:

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots\ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu = \beta_1 \\
\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots\ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu = \beta_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{\nu1}\chi_1 + \alpha_{\nu2}\chi_2 + \ldots\ldots + \alpha_{\nu\nu}\chi_\nu = \beta_\nu
\end{gathered}$$

Να υπογραμμίσουμε εδώ πως η διάδοση των προσωπικών υπολογιστών αναγκάζει τις μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης να είναι προσανατολισμένες στη δυνατότητα προγραμματισμού τους.

Θά'ταν όμως λανθασμένο να αντιμετωπισθεί η Αριθμητική Ανάλυση σαν μια παραφυάδα της Μαθηματικής Επιστήμης! Πρόκειται για μία ολοκληρωμένη Επιστήμη, τα πορίσματα της οποίας, συνεργαζόμενα με την Στατιστική και την Πληροφορική, δίνουν αποτελέσματα που αγγίζουν τα όρια του αδύνατου.

Με δεδομένη την εκρηκτική ανάπτυξη της Τεχνολογίας και την είσοδό της στην καθημερινή ζωή, είναι πιθανό στην καριέρα σας σαν τεχνολόγοι να βρεθείτε μπροστά σε δύσκολα υπολογιστικά προβλήματα. Θα είναι επιτυχία για το μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών αν θυμηθείτε πως ανατρέχοντας σε ένα βιβλίο Αριθμητικής Ανάλυσης, κερδίζετε σίγουρα και χρόνο και ακρίβεια. Για τον λόγο αυτό συνήθως τα βιβλία Αριθμητικής Ανάλυσης είναι γραμμένα έτσι ώστε το κάθε τους κεφάλαιο να μπορεί να μελετηθεί ανεξάρτητα από το υπόλοιπο βιβλίο, προϋποθέτοντας βέβαια κάποιες στοιχειώδεις γνώσεις Αριθμητικής Ανάλυσης και φυσικά Γενικών Μαθηματικών.

Οι περισσότερες από τις μεθόδους που θα αναφερθούν στα πλαίσια αυτών των σημειώσεων μπορούν να προσαρμοσθούν ιδιαίτερα εύκολα σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Μάλιστα, στις τελευταίες σελίδες μερικών κεφαλαίων, αναφερόμαστε στον προγραμματισμό των αντίστοιχων μεθόδων με τη βοήθεια του πλέον διαδεδομένου προγράμματος, του Excel. Για να εφαρμόσει κανείς τις υποδείξεις αυτές στον υπολογιστή του, θα πρέπει να έχει μια εντελώς στοιχειώδη γνώση του Excel. Πιστεύουμε πως αξίζει τον κόπο να τα δουλέψετε κι εσείς στον υπολογιστή σας, μια και θα εξασκηθείτε στο χειρισμό του Excel, αλλά (το πιο σημαντικό) θα σας βοηθηθείτε και στην βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

1.Α.2 Δεδομένα και ζητούμενα του προβλήματος. Αλγόριθμος λύσης.

Σε ένα υπολογιστικό πρόβλημα έχουμε συνήθως κάποια στοιχεία που δίνονται και κάποια που ζητούνται. Το δικό μας μέλημα είναι να βρούμε μία μέθοδο λύσης η οποία, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα, να υπολογίζει τα ζητούμενα. Η μέθοδος αυτή, που συνήθως δεν είναι μοναδική για το εν λόγω πρόβλημα, ονομάζεται **αλγόριθμος λύσης.**

Η επιλογή ανάμεσα στις διάφορες μεθόδους λύσης γίνεται για διάφορους κάθε φορά λόγους. Θα προσπαθήσουμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα του αριθμού 133, με την μέθοδο που πρωτομάθαμε στο Σχολείο και για την οποία μας αρκεί ένα μολύβι και χαρτί:

```
133.0000........ |   11.53256
   33            |  1   21   225   2303   23062   230645    2306506
  -21            | x1  x 1   x 5    x 3     x 2      x 5         x 6
   1200  1  21     1125   6909   46124  1153225  13839036
  -1125          |
      7500
     -6909
        59100
       -46124
         1297600
       -1153225
           14437500
          -13839036
               598464 κ.λ.π.
```

Η δεύτερη μέθοδος είναι γενικότερη. Μ' αυτήν υπολογίζουμε οποιαδήποτε ύψωση ενός θετικού αριθμού σε μία ρητή δύναμη και βασίζεται στην παρακάτω ιδιότητα των λογαρίθμων:

$$\ln(x^t) = t\ln x$$

που μετατρέπει την ύψωση σε μία δύναμη, σε γινόμενο. Έτσι:

$$x = \sqrt{133} = 133^{1/2} \quad \Rightarrow$$

$$\ln x = \ln(133^{1/2}) = (\ln 133)/2 = 4.890349128/2 = 2.445174564 \quad \Rightarrow$$

$$x = e^{2.445174564} = 11.5325626$$

Εννοείται βέβαια πως για τον υπολογισμό των λογαρίθμων χρησιμοποιούμε λογαριθμικούς πίνακες. Αυτή άλλωστε η μέθοδος χρησιμοποιείται κι από τους υπολογιστές για την ύψωση σε ρητές δυνάμεις.

Παρατηρούμε πως με την δεύτερη μέθοδο, ο αριθμός των ψηφίων με τα οποία δίνεται η $\sqrt{133}$, άρα και η ακρίβειά της, περιορίζεται από την ακρίβεια των λογαριθμικών πινάκων ή από τα δεκαδικά ψηφία του κομπιούτερ μας. Αντίθετα, η ακρίβεια με την πρώτη μέθοδο εξαρτάται από την υπομονή μας. Η μέθοδος λύσης που θα χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε το προηγούμενο πρόβλημα, είναι ο αλγόριθμος λύσης, ενώ το δεδομένο είναι ο αριθμός 133 και το ζητούμενο, η τετραγωνική του ρίζα. Η επιλογή αλγόριθμου λύσης υπαγορεύεται συνήθως από την φύση του προβλήματος και από τους περιορισμούς που μας επιβάλλει (π.χ. απαίτηση ακρίβειας, ταχύτητας κλπ.)

1.Α.3 Το πρόβλημα της ακρίβειας ή ακριβέστερα το πρόβλημα των σφαλμάτων.

Το πρόβλημα των σφαλμάτων κυριαρχεί στην Αριθμητική Ανάλυση. Από τον απλούστερο υπολογισμό μέχρι τα πιο σύνθετα προβλήματα η ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος αποτελεί κεντρικό ερώτημα στο οποίο η Επιστήμη της Αριθμητικής Ανάλυσης πρέπει να δίνει απάντηση.

Η γραφή ενός αριθμού, ενώ είναι ένα απλό ζήτημα, δημιουργεί ήδη προβλήματα ακρίβειας. Η γραφή για παράδειγμα ενός ρητού αριθμού με δεκαδική μορφή[(1)] δεν εισάγει σφάλμα, μόνον όταν ο αριθμός αυτός έχει πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων:

$$3/4 = 0.75 \quad \text{ή} \quad 2/5 = 0.4$$

[(1)] *Παρ'όλο που στα Μαθηματικά η κλασματική και η δεκαδική μορφή ενός ρητού είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, η Αριθμητική Ανάλυση, προσανατολισμένη προς τις ανάγκες της Πληροφορικής η οποία θέλει αριθμούς σε δεκαδική μορφή, χρησιμοποιεί κατά βάση την δεκαδική μορφή γραφής.*

Αν όμως ο ρητός στην δεκαδική γραφή είναι περιοδικός [1], τότε η γραφή του σε δεκαδική μορφή εισάγει ένα σφάλμα που εξαρτάται από τον αριθμό των ψηφίων που θα κρατήσουμε και που είναι το γνωστό σε όλους **σφάλμα στρογγύλευσης**:

$$\frac{3}{11} = 0.27272727.... \sim 0.272727 \text{ (με σφάλμα } = 0.0000002727.. < 0.0000003)$$

1.A.4 Απόλυτο και σχετικό σφάλμα.

Όπως είπαμε προηγούμενα, ακόμη και μια απλούστατη διαδικασία, όπως είναι η γραφή ενός τυχαίου ρητού αριθμού, του οποίου θεωρητικά γνωρίζουμε όλα τα ψηφία (μια και πρόκειται για περιοδικό αριθμό), εισάγει το σφάλμα που ονομάσαμε σφάλμα στρογγύλευσης. Γίνεται λοιπόν φανερό πως η επίλυση άλλων πολυπλοκότερων προβλημάτων, προκαλεί τη δημιουργία σημαντικών σφαλμάτων τα οποία συχνά είναι δύσκολο να εκτιμηθούν.

Ας υποθέσουμε λοιπόν πως μετρούμε μία απόσταση με τη βοήθεια μιας μετροταινίας και ενός μηχανήματος που χρησιμοποιεί ακτίνες Laser. Θεωρώντας, στην πράξη, τη μέτρηση με Laser σαν ακριβή, καταλήγουμε σε δύο μετρήσεις:

x': μέτρηση με μετροταινία (προσεγγιστική μέτρηση)
x : μέτρηση με Laser (ακριβής μέτρηση)

---

[1] Να θυμίσουμε πως κάθε ρητός αριθμός στην δεκαδική του μορφή ή θάχει πεπερασμένο αριθμό ψηφίων ή θα είναι περιοδικός. Π.χ.:

$$\frac{7}{8} = 0.875 \quad ή \quad \frac{9}{11} = 0.818181818.....$$

Αντίστροφα κάθε περιοδικός δεκαδικός είναι ρητός. Ένας αντιπρόσωπος του ρητού αυτού δίνεται από το κλάσμα που έχει αριθμητή την περίοδο του περιοδικού σε ακέραια μορφή και παρονομαστή έναν ακέραιο με τόσα εννέα όσα και τα ψηφία της περιόδου:

$$0.8181818... = \frac{81}{99} = \frac{9}{11} \quad ή \quad 0.714285714285714.... = \frac{714285}{999999} = \frac{5}{7}$$

Αντίθετα, ένας άρρητος αριθμός δεν μπορεί παρά να γραφεί σαν δεκαδικός, με άπειρα δεκαδικά ψηφία, τα οποία δεν έχουν καμία περιοδικότητα.

Ορισμός: Ονομάζουμε **<u>απόλυτο σφάλμα (σ_α)</u>** της μέτρησης x' την διαφορά τιμών ανάμεσα στην ακριβή και στην προσεγγιστική μέτρηση:

$$\boxed{\sigma_\alpha = x - x'}$$

Όμως, το απόλυτο σφάλμα δεν μας επιτρέπει να αξιολογήσουμε την ποιότητα της ακρίβειας με την οποία έγινε μια μέτρηση. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μία ομάδα σπουδαστών μετρά, με μία μετροταινία, το πλάτος μιας αίθουσας διδασκαλίας, και η μέτρησή της έχει απόλυτο σφάλμα 3 cm, ενώ μία άλλη ομάδα μετρά (με μετροταινία και πάλι) την περίμετρο του κτιρίου της Διοίκησης του ΤΕΙ, με το ίδιο απόλυτο σφάλμα. Είναι προφανές πως η πρώτη ομάδα έκανε μια απρόσεκτη μέτρηση, ενώ η δεύτερη έδωσε ένα ικανοποιητικότατο αποτέλεσμα (για τη μέθοδο που χρησιμοποίησε). Για το λόγο αυτό αξιολογούμε την ακρίβεια μιας μέτρησης, με τη βοήθεια του σχετικού σφάλματος, το οποίο συγκρίνει το απόλυτο σφάλμα της μέτρησης με το μέγεθος που μετριέται:

Ορισμός: Ονομάζουμε **<u>σχετικό σφάλμα ($\sigma_{\sigma\chi}$)</u>** της μέτρησης x', το λόγο του απολύτου σφάλματος σ_α, προς την ακριβή τιμή του μεγέθους x. Το κλάσμα του σχετικού σφάλματος, πολλαπλασιασμένο επί 100, δίνει την επί τοις εκατό έκφραση του σχετικού σφάλματος:

$$\boxed{\sigma_{\sigma\chi} = \frac{x' - x}{x} \qquad \text{και} \qquad \sigma_{\sigma\chi}(\%) = 100\,\frac{x' - x}{x}}$$

Βέβαια είναι πολύ σπάνιες οι φορές που γνωρίζουμε ταυτόχρονα την προσεγγιστική μέτρηση μιας ποσότητας και την ακριβή τιμή της. Συνήθως όμως γνωρίζουμε το μέγιστο σφάλμα που μπορεί να δημιουργηθεί κατά τη διαδικασία μιας μέτρησης. Έτσι για παράδειγμα το φυλλάδιο οδηγιών ενός τοπογραφικού μηχανήματος αναφέρει πως το μηχάνημα μπορεί να μετρήσει αποστάσεις μέχρι των τριών χιλιομέτρων, ενώ το μέγιστο σχετικό του σφάλμα (εφ'όσον τηρηθούν οι τεχνικές προδιαγραφές) είναι 0,1%, πράγμα που σημαίνει πως σε μία απόσταση των 1000 μέτρων θα πέσουμε έξω κατά ένα μέτρο, το πολύ.

Ορισμός: Ονομάζουμε **<u>μέγιστο απόλυτο σφάλμα (E_α)</u>** το μεγαλύτερο σφάλμα που είναι δυνατό να περιέχεται σε μία μέτρηση. Όπως και προηγούμενα, ορίζεται το **<u>μέγιστο σχετικό σφάλμα ($E_{\sigma\chi}$)</u>**. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$E_\alpha = \max(x' - x)$$

$$E_{\sigma\chi} = \frac{\max(x' - x)}{x} \quad \text{και} \quad E_{\sigma\chi}(\%) = 100\,\frac{\max(x' - x)}{x}$$

Παρατήρηση: Όταν δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή x, ενώ γνωρίζουμε το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της μεθόδου μας, αντικαθιστούμε στον παρονομαστή των προηγουμένων σχέσεων, την ακριβή τιμή x, με την προσεγγιστική x'.

$$E_{\sigma\chi} = \frac{\max(x' - x)}{x} \approx \frac{\max(x' - x)}{x'}$$

1.Α.5 Αποκοπή και στρογγύλευση.

Όπως ήδη είπαμε, η συντριπτική πλειοψηφία των πραγματικών αριθμών έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία. Από αυτά μόνον ένα μικρό πλήθος τους μπορεί να γραφεί. Λέμε πως αποκόπτουμε από έναν δεκαδικό αριθμό x, τα ψηφία πέραν του ν-οστού δεκαδικού ψηφίου του, όταν το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο που κρατούμε είναι το ν-οστό, αποκόπτοντας όλα τα επόμενα (από το ν+1 και πέρα).

Στρογγυλεύουμε έναν δεκαδικό αριθμό στο ν-ιοστό δεκαδικό ψηφίο ελέγχοντας το ν+1 δεκ. ψηφίο. Αν το ψηφίο αυτό (το ν+1) είναι κάποιο από τα 0,1,2,3,4, τότε το ν-ιοστό παραμένει ως έχει, ενώ αν το ν+1 ψηφίο είναι κάποιο από τα 5,6,7,8,9, τότε αυξάνουμε κατά μία μονάδα την τιμή του ν-ιοστού δεκαδικού ψηφίου. Π.χ.:

0.93746875 ~ 0.937 (στρογγύλευση στο 3ο δεκαδικό ψηφίο)
~ 0.93747 (στρογγύλευση στο 5ο δεκαδικό ψηφίο)

1.Α.6 Μέγιστο απόλυτο και σχετικό σφάλμα αποκοπής.

Έστω ο πραγματικός αριθμός x, από τον οποίο δίνονται μόνον τα τρία πρώτα δεκαδικά ψηφία του:

$$x = 2{,}345$$

Θεωρώντας πως η στρογγύλευση έχει γίνει σωστά, συμπεραίνουμε πως η πραγματική τιμή του x μπορεί να ανήκει στο διάστημα:

$$(2{,}344500\ldots\ ,\ 2{,}3454999..)\ =\ (2{,}3445\ ,\ 3{,}2455)$$

Εφ'όσον η τιμή που επιλέγουμε για τον x (το 2,345), είναι το μέσον του πιο πάνω διαστήματος, το μέγιστο απόλυτο σφάλμα που θα προκύπτει από την αποκοπή και τη στρογγύλευση θα είναι ίσο με το ήμισυ του πλάτους του διαστήματος αυτού:

Μέγιστο απόλυτο σφάλμα: $E_\alpha = 0{,}0005$

<u>Τελικό συμπέρασμα:</u> Όταν από ένα πραγματικό αριθμό αποκόπτουμε τα ψηφία που βρίσκονται πέρα του ν-οστου δεκαδικού ψηφίου, στρογγυλεύοντας το ν-οστό, το μέγιστο απόλυτο σφάλμα που θα κάνουμε ισούται με 5 μονάδες του ν+1-ψηφίου.

1.Α.7 Σημαντικά ψηφία.

Έστω οι πραγματικοί x και y:

$$x = 1234{,}56789 \quad \text{και} \quad y = 0{,}0000123456789$$

τους οποίους θα γράψουμε διατηρώντας ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων:

$$x = 1234{,}5679 \qquad \text{και} \qquad y = 0{,}0000$$

Παρατηρούμε πως ενώ το μέγιστο απόλυτο σφάλμα αποκοπής είναι κοινό (0,00005), το μέγιστο σχετικό σφάλμα (που είναι και το σημαντικότερο) είναι εντελώς διαφορετικό:

$$E_{\sigma\chi}(x) = \frac{100*0{,}00005}{1234{,}56789} = 0{,}000004\ \%$$

$$E_{\sigma\chi}(y) = \frac{100*0{,}00005}{0{,}0000123456789} = 405\ \%$$

Στην προσπάθεια να διατηρούμε στο ίδιο επίπεδο το σχετικό σφάλμα αποκοπής, είτε πρόκειται για αριθμούς με πολύ μεγάλη απόλυτη τιμή, είτε πρόκειται για αριθμούς πολύ κοντά στο μηδέν, κρατούμε από κάθε αριθμό το ίδιο πλήθος σημαντικών ψηφίων.

Ορισμός: Παρατηρώντας έναν δεκαδικό αριθμό από αριστερά προς τα δεξιά, ονομάζουμε **πρώτο σημαντικό ψηφίο** το αριθμού, το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο που συναντούμε. Το επόμενο δεκαδικό ψηφίο είναι το 2ο σημαντικό κ.λ.π..

Παρατήρηση: Σε κάθε περίπτωση, και ιδιαίτερα όταν εργαζόμαστε με αριθμητική σημαντικών ψηφίων, είναι ιδιαίτερα βολική η εκθετική γραφή των δεκαδικών.

Παραδείγματα:

1ο) Εάν χρησιμοποιήσουμε αριθμητική 6 σημαντικών ψηφίων για τους αριθμούς x και y:

$$x = 1234,57 = 0,123457\ E{+}4 = 0,123457*10^{4}$$

$$y = 0,0000123457 = 0,123457\ E{-}4 = 0,123457*10^{-4}$$

παρατηρούμε πως το μέγιστο σχετικό σφάλμα αποκοπής:

$$E_{\sigma\chi}(x) = \frac{100*0,5E-2}{0,123456789E+4} = \frac{50}{0,123456789E6}\ \%$$

$$E_{\sigma\chi}(y) = \frac{100*0,5E-10}{0,123456789E-4} = \frac{50}{0,123456789E6}\ \%$$

είναι ακριβώς το ίδιο. Βέβαια, αυτό δεν θα συνέβαινε εάν οι αριθμοί δεν είχαν ακριβώς το ίδιο αντίστοιχο σημαντικό ψηφίο. Έτσι, οι αριθμοί: x= 0,0098725 και y=1125,6 δεν θα έχουν το ίδιο σχετικό σφάλμα αποκοπής, μια και το σφάλμα του y θα είναι περίπου 9 φορές μεγαλύτερο. Για το λόγο αυτό λέμε πως: **Η αριθμητική σημαντικών ψηφίων μας βοηθάει κατά την αποκοπή και στρογγύλευση ενός δεκαδικού αριθμού να διατηρούμε στην ίδια τάξη μεγέθους το μέγιστο σχετικό σφάλμα αποκοπής, είτε αυτός έχει μεγάλη απόλυτη τιμή, είτε είναι πολύ κοντά στο μηδέν.**

2ο) Είναι φανερό πως οι υπολογιστές τσέπης, όπως επίσης και οι μεγάλοι υπολογιστές, δεν δουλεύουν με ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων αλλά με ακρίβεια σημαντικών ψηφίων. Αυτή η σκέψη μας κάνει να αναρωτηθούμε για το κατά πόσο είναι ακριβές το τελευταίο ψηφίο που μας δίνεται από τον υπολογιστή τσέπης. Συνήθως είναι πράγματι ακριβές γιατί οι περισσότεροι απ'αυτούς κρατούν στην εσωτερική τους μνήμη δύο ψηφία περισσότερα από αυτά που εμφανίζουν στην οθόνη τους. Ακόμη και όταν τους ζητούμε να εμφανίζουν μικρότερο αριθμό ψηφίων, αυτοί συνεχίζουν να κρατούν στην εσωτερική τους μνήμη την μέγιστη δυνατή ακρίβεια.

Με το κομπιουτεράκι υπολογίζουμε: $\sqrt{133} = 11.53256260$

Στον αριθμό αυτόν προσθέτουμε τον 0.000000002 ο οποίος μπορεί να γραφεί στις 10 θέσεις της οθόνης. Το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός: 11.532562602 με 11 ψηφία (χωρίς το τελευταίο ψηφίο να εμφανίζεται στην οθόνη). Υψώνω στο τετράγωνο και έχω:

$$(11.532562602)^2 = 133.0000001$$

που σημαίνει πως το συγκεκριμένο κομπιούτερ κρατάει στην μνήμη του ένα τουλάχιστον σημαντικό ψηφίο περισσότερο από αυτά που εμφανίζει στην οθόνη του (το ενδέκατο ψηφίο πήρε μέρος στην πράξη).

1.Α.8 Ασκήσεις.

1η) Δύο μεταβλητές x και y παίρνουν τις τιμές:

$$x=1,2 \quad \text{και} \quad y=1,200$$

Θεωρείτε πως οι δύο μεταβλητές είναι ίσες ή όχι. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

2η) Γνωρίζετε δύο πραγματικούς αριθμούς με ακρίβεια 6 σημαντικών ψηφίων. Το μέγιστο σχετικό σφάλμα αποκοπής και στρογγύλευσης είναι ακριβώς ίδιο στους δύο αυτούς αριθμούς; Αν όχι, από τι εξαρτάται;

3η) Έχουμε τους πραγματικούς:

$$x=2,758 \quad \text{και} \quad y=3,426$$

γνωστούς με ακρίβεια (4 σημαντικών) 3 δεκαδικών ψηφίων. Το άθροισμα $x+y$ και το γινόμενο xy, έχουν ακρίβεια πόσων (σημαντικών) δεκαδικών ψηφίων; (Υπόδειξη: Απαντήστε με τη βοήθεια παραδειγμάτων.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.Α ΤΟ ΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ.

2.Α.1. Γενικά για τα πολυώνυμα:

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις ή τα πολυώνυμα, όπως θα τις λέμε στο εξής χάρη της συντομίας, είναι συναρτήσεις πολύ χρήσιμες στην Αριθμητική Ανάλυση, λόγω της απλότητάς τους (σε σύγκριση βέβαια με άλλες ιδιαίτερα πολύπλοκες συναρτήσεις). Πριν όμως εξετάσουμε αναλυτικότερα τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιεί τα πολυώνυμα η Αριθμητική Ανάλυση, αξίζει να ξαναθυμηθούμε μερικές ιδιότητές τους και να εξηγήσουμε το γιατί είναι τόσο αγαπητά. Ας ξεκινήσουμε από το δεύτερο....

Είναι λοιπόν τα πολυώνυμα ιδιαίτερα αγαπητά γιατί:

α) Είναι συναρτήσεις συνεχείς σε όλο το R.
β) Είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες σ'όλο το R και η παράγωγός τους υπολογίζεται αναλυτικά, πολύ εύκολα.
γ) Είναι συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο πεδίο ορισμού τους και το ολοκλήρωμά τους υπολογίζεται αναλυτικά πολύ εύκολα.
δ) Υπάρχουν αναλυτικές μέθοδοι για τον υπολογισμό των ριζών ενός πολυωνύμου μέχρι και τρίτου βαθμού.
ε) Η συμπεριφορά τους είναι πολύ καλά γνωστή.

2.Α.2 Ιδιότητες των πολυωνύμων:

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις (π.σ.) έχουν πολλές και σημαντικές ιδιότητες, από τις οποίες αναφέρουμε κάποιες, που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στη συνέχεια:

i. Η γενική μορφή μιας πολυωνυμικής συνάρτησης (π.σ.) ν-οστού βαθμού είναι η:

$$\boldsymbol{\pi(\chi) = \alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + ... + \alpha_1\chi + \alpha_0}$$

ii. Το όριο της π(χ), όταν το χ τείνει στο άπειρο, ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου της π(χ): $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\pi(\chi)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\alpha_\nu\chi^\nu\right]$

iii. Μία π.σ. ν-ου βαθμού έχει ακριβώς ν ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές).

iv. Αν μία π.σ. έχει σαν ρίζα τον μιγαδικό αριθμό z=a+bi, τότε θα δέχεται σαν ρίζα και τον συζυγή του z=a-bi. Η ιδιότητα αυτή στηρίζεται στην ιδιότητα των συζυγών μιγαδικών, το γινόμενό τους να είναι πραγματικός αριθμός. Επομένως ισχύει για κάθε π.σ. που έχει πραγματικούς (και όχι μιγαδικούς) συντελεστές.

v. (Πόρισμα της προηγούμενης πρότασης) Αν μία π.σ. είναι περιττού βαθμού, τότε θα δέχεται υποχρεωτικά μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

vi. Αν η π.σ. π(χ) δέχεται σαν ρίζες τους αριθμούς ρ_1 ,ρ_2 ,..., ρ_ν, τότε γράφεται με τους παρακάτω δύο ισοδύναμους τρόπους (όπου τον δεύτερο τον ονομάζουμε «γινόμενο παραγόντων»):

$$\pi(\chi) = \alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\chi + \alpha_0$$
$$= \alpha_\nu(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)\ .....(\chi-\rho_\nu)$$

vii. Αν η τιμή ρ είναι ρίζα της π.σ. π(χ), τότε αυτή θα διαιρείται με το (χ-ρ), πράγμα που φαίνεται αμέσως εάν βάλουμε στο κλάσμα π(χ)/(χ-ρ), το π(χ) σαν γινόμενο παραγόντων.

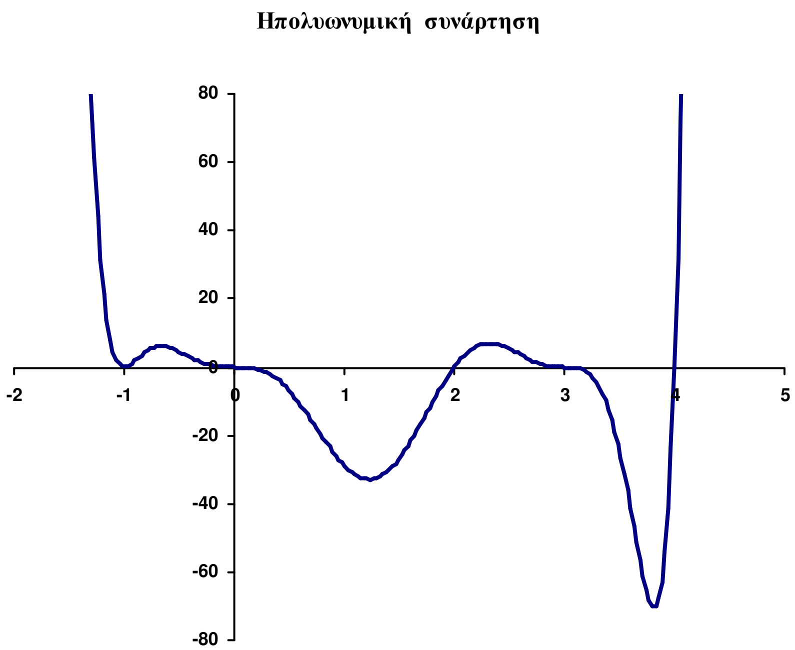
viii. Για τον καθορισμό μιας π.σ. ν-ου βαθμού, χρειάζονται ν+1 τυχαία σημεία του επιπέδου Oxy (από τα οποία να μην διέρχεται πολυώνυμο μικρότερου του ν- βαθμού). Έτσι δύο σημεία ορίζουν μία π.σ. $1^{ου}$ βαθμού (ευθεία), 3 σημεία μια π.σ. $2^{ου}$ βαθμού (παραβολή) κ.ο.κ..

ix. Εάν αναλύοντας σε γινόμενο παραγόντων την π.σ. προκύψει η επόμενη ανάλυση:

$$\pi(\chi) = \alpha_\nu(\chi-\rho_1)^2(\chi-\rho_2)^3(\chi-\rho_2)^4\ .....(\chi-\rho_\nu)$$

τότε λέμε πως η ρίζα ρ_1 είναι βαθμού πολλαπλότητας δύο (διπλή), η ρ_2 είναι βαθμού πολλαπλότητας τρία (τριπλή), η ρ_3 είναι βαθμού πολλαπλότητας τέσσερα (τετραπλή), ενώ η ρ_ν είναι απλή.

x. Η γραφική παράσταση της π(χ) γύρω από μια ρίζα εξαρτάται από το βαθμό πολλαπλότητας της ρίζας:



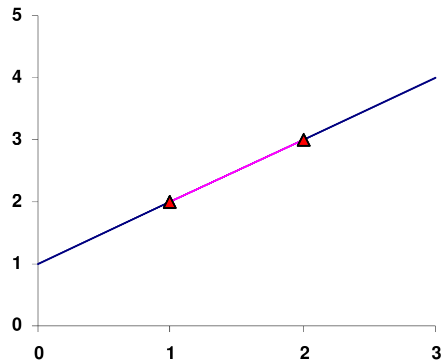
Σχ. 2.Α.1: Γραφική παράσταση μιας π.σ. $10^{ου}$ βαθμού, με ρίζες την ρ_1=-1 (διπλή), ρ_2= 0 (τριπλή), ρ_3=2 (απλή) και ρ_4=3 (τριπλή) και ρ_5=4 (απλή). Άρα έχουμε: $\pi(\chi) = \alpha_{10}(\chi+1)^2\chi^3(\chi-2)(\chi-3)^3(\chi-4)$

Στην προηγούμενη γραφική παράσταση παρατηρούμε πως η γραφική παράσταση της π(χ):

- στις απλές ρίζες τέμνει τον άξονα των χ υπό γωνία,
- στις διπλές (όπως και στις τετραπλές, εξαπλές – άρα άρτιας τάξης ρίζες), εφάπτεται σ' αυτόν χωρίς να αλλάξει πρόσημο, ενώ
- στις τριπλές (όπως και στις πενταπλές, επταπλές – άρα περιττής τάξης ρίζες), εφάπτεται σ' αυτόν αλλάζοντας όμως πρόσημο (με τη μορφή του s).

2.Α.3 Παραδείγματα:

1ο) Έστω τα σημεία $M_1=(1,1)$ και $M_2=(2,3)$ του επιπέδου Oxy.



α) Τι βαθμού είναι η πολυωνυμική συνάρτηση y=π(χ) που περνάει από τα σημεία αυτά; Να υπολογισθεί.

β) Υπάρχει άλλο πολυώνυμο 1ου βαθμ που να περνά από τα σημεία M_1 και M_2;

γ) Υπάρχει πολυώνυμο 2ου βαθμού που να περνά από τα σημεία M_1 και M_2;

Λύση:

α) Σύμφωνα με την ιδιότητα (viii) της προηγούμενης παραγράφου, 2 σημεία του επιπέδου Oxy ορίζουν μία πολυωνυμική συνάρτηση 1ου βαθμού, έστω την **y=π(χ)=αχ+β**. Το ότι η y=π(χ) περνάει από τα σημεία M_1 και M_2, σημαίνει ότι οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν. Άρα ισχύει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$(\Sigma)^{(*)} \quad \left.\begin{array}{l} M_1:\ y_1 = \alpha\chi_1 + \beta \\ M_2:\ y_2 = \alpha\chi_2 + \beta \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = 1\alpha + \beta \\ 3 = 2\alpha + \beta \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{array}$$

Επομένως, η πολυωνυμική συνάρτηση που επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των σημείων M_1 και M_2 είναι η: **y = π(x) = 2χ-1**.

β) Αν και το θέμα αυτό αποτελεί βασικό θεώρημα των πολυωνύμων εμείς θα επισημάνουμε την μοναδικότητα της λύσης του συστήματος (Σ). Πράγματι, εάν υπήρχε

---

* *Η λύση του συστήματος (Σ) στην γενική του μορφή:*

$$y_1 = \alpha\chi_1 + \beta$$
$$y_2 = \alpha\chi_2 + \beta$$

δίνει τις παραμέτρους α και β συναρτήσει των συντεταγμένων των δύο σημείων, M_1 και M_2. Πρόκειται για τις γνωστές σχέσεις:

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \textit{και} \quad \beta = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

και άλλη πολυωνυμική συνάρτηση y=α'x+β', με $\alpha \neq \alpha'$ και $\beta \neq \beta'$, που να επαληθεύονταν από τις συντεταγμένες των σημείων M_1 και M_2, τότε τα α' και β' θα αποτελούσαν μια δεύτερη λύση του συστήματος (Σ), πράγμα άτοπο (Αυτό θα ήταν ισοδύναμο με το ότι δύο διαφορετικές ευθείες μπορούν να τέμνονται σε δύο σημεία).

Φθάνουμε επομένως στο συμπέρασμα: **Η πολυωνυμική συνάρτηση y=π(χ)=2χ-1 είναι <u>η μοναδική</u> πρωτοβάθμια πολυων.συνάρ. που περνάει από τα δύο σημεία M_1 και M_2 του επιπέδου Oxy.**

γ) Έστω το σημείο $M_3(3,1)$ του επιπέδου Oxy. Από τα τρία σημεία M_1,M_2 και M_3 διέρχεται μόνο μία πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού, έστω η:

$$y=\pi(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma.$$

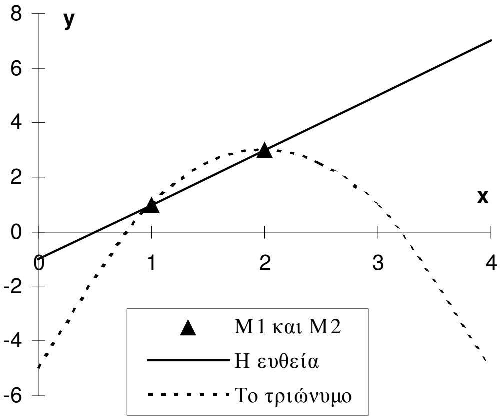
Όπως και προηγούμενα θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους α, β και γ.

$$(\Sigma 2)\quad \left.\begin{array}{l} y_1 = \alpha\chi_1^2 + \beta\chi_1 + \gamma \\ y_2 = \alpha\chi_2^2 + \beta\chi_2 + \gamma \\ y_3 = \alpha\chi_3^2 + \beta\chi_3 + \gamma \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1\alpha + 1\beta + \gamma = 1 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 3 \\ 9\alpha + 3\beta + \gamma = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -2 \\ \beta = 8 \\ \gamma = -5 \end{array}$$

Η π.σ.

$$y=\pi(\chi) = -2\chi^2+8\chi-5$$

είναι η μοναδική δευτεροβάθμια π.σ. που διέρχεται από τα σημεία M_1, M_2 και M_3. Δεν είναι όμως η μοναδική που περνά από τα δύο σημεία M_1 και M_2. Αντίθετα υπάρχουν άπειρες π.σ., όπως άπειρες είναι και οι δυνατότητες επιλογής του σημείου M_3[(*)].



(*)

2ο) Έστω οι πραγματικοί αριθμοί -2,1,3 και 4, πάνω στον άξονα των τετμημένων (των χ). Να βρεθεί μία πολυωνυμική συνάρτηση με μοναδικές ρίζες τους πιο πάνω αριθμούς:

Η ουσία της ερώτησης είναι: Να υπολογισθεί μιά π.σ. που να διέρχεται από τά τέσσερα σημεία: $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(0,3)$ και $M_4(0,4)$. Πρόκειται λοιπόν για μία πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού; **Όχι.** Γιατί τα τέσσερα σημεία είναι συνευθειακά.

Αν λοιπόν δεν θέλουμε την τετριμμένη λύση της ευθείας ψ=π(χ)=0, τότε κάθε φορά που έχουμε ν συνευθειακά σημεία, δεν μπορούμε να τα προσεγγίσουμε με πολυώνυμο ν-1 βαθμού, αλλά με πολυώνυμο ν-οστού βαθμού. Επειδή όμως έχουμε μόνον ν

[*] *Αρκεί να μην διαλέξουμε σαν τρίτο σημείο M_3 κάποιο συνευθειακό των M_1 και M_2, όπως για παράδειγμα το $M_3(3,5)$, οπότε θα καταλήξουμε και πάλι στην πολυων.συνάρτηση 1ου βαθμού y=2χ-1.....*

σημεία, οδηγούμαστε όχι σε ένα μοναδικό πολυώνυμο σαν λύση, αλλά σε μία απειρία πολυωνύμων.

Χρησιμοποιώντας την μορφή γραφής της (στ) ιδιότητας της προηγούμενης παραγράφου έχουμε:

$$
\begin{aligned}
y = \pi(\chi) &= \alpha(\chi\text{-}\rho1)(\chi\text{-}\rho2)(\chi\text{-}\rho3)(\chi\text{-}\rho4) = \\
&= \alpha\chi(\chi\text{-}1)(\chi\text{-}3)(\chi\text{-}4) = \\
&= \alpha[\chi^4 - 8\chi^3 + 19\chi^2 - 12\chi]
\end{aligned}
$$

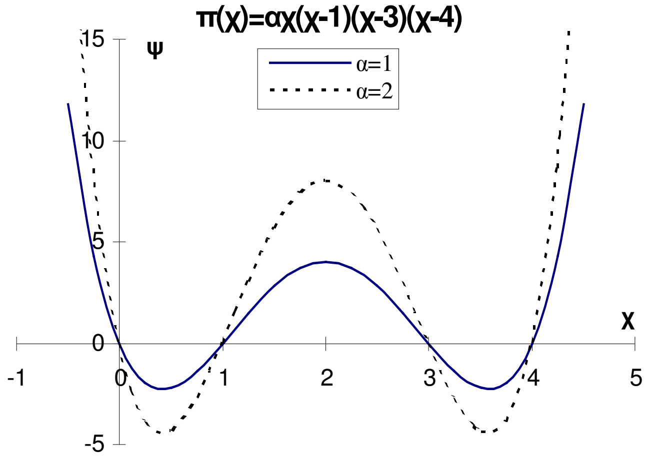
Παρατηρούμε πως το πολυώνυμο:

$$\pi(\chi) = \alpha(\chi+2)(\chi\text{-}1)(\chi\text{-}3)(\chi\text{-}4)$$

περνάει από τα σημεία

(0,-2), (0,1), (0,3) και (0,4),

όποια και αν είναι η τιμή της παραμέτρου α, που δεν είναι παρά μία πολλαπλασιαστική παράμετρος.



2.Α.4 Το συμπτωτικό πολυώνυμο (σ.π.).

Ας υποθέσουμε πως σε ένα πίνακα τιμών (ή σε μία γραφική παράσταση), δίνονται οι τιμές που παίρνει μία μη πολυωνυμική συνάρτηση y=y(x), για κάποιες τιμές της μεταβλητής x.

$\mathbf{x_i}$	x_0	x_1	x_2	x_3	…….	$x_{\nu-1}$	x_ν
$\mathbf{y_i}$	y_0	y_1	y_2	y_3	…….	$y_{\nu-1}$	y_ν

Προφανώς ο πιο πάνω πίνακας περιέχει ν+1 σημεία του επιπέδου Oxy, τα (x_0,y_0), (x_1,y_1), …, (x_ν,y_ν), που ορίζουν μια π.σ. ν-ου βαθμού. Με τον όρο **συμπτωτικό πολυώνυμο (σ.π.) εννοούμε ένα πολυώνυμο π(x), που να παίρνει τις ίδιες ακριβώς τιμές με την συνάρτηση f(x) σε κάποιες από τις τιμές του χ (ή σε όλες) που υπάρχουν στον πίνακα.**

Παρατήρηση: Εάν υποθέσουμε πως το πλήθος των σημείων σύμπτωσης είναι ν, τότε το συμπτωτικό πολυώνυμο θα είναι ν-1 βαθμού. Ονομάζεται συμπτωτικό μια και οι τιμές που παίρνει συμπίπτουν μ'αυτές της συνάρτησης, φυσικά μόνο στα σημεία σύμπτωσης. Ταυτόχρονα πρέπει να τονισθεί πως κάθε μεταβολή του πλήθους ή των σημείων της συνάρτησης που επιλέγουμε για να ορίσουμε το συμπτωτικό πολυώνυμο, το μεταβάλλει εντελώς.

Για το συμπτωτικό πολυώνυμο θα μιλήσουμε πολλές φορές στην συνέχεια. Άλλωστε και στις προηγούμενες παραγράφους και ιδιαίτερα στο 1ο από τα παραδείγματα ουσιαστικά ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα του συμπτωτικού πολυωνύμου και δείξαμε την πιο κλασσική μέθοδο υπολογισμού του, Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με μία άλλη μέθοδο υπολογισμού του συμπτωτικού πολυώνυμου, με τη βοήθεια ενός παραδείγματος.

Θεωρητικό παράδειγμα:

Ο πίνακας 1.Α.1 περιέχει τις τιμές μιας συνάρτησης f(x) σε τέσσερις τιμές του χ. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα πολυώνυμο που να παίρνει τις ίδιες τιμές με την συνάρτηση f(x), στις ίδιες τιμές του χ.

x	-1	1	2	3
f(x)	-7	-3	-1	9

Πινακας 1.Α.1

Πρέπει να υπολογίσουμε μια πολυωνυμική συνάρτηση που να προσεγγίζει τέσσερα σημεία του επιπέδου Oxy. Επομένως το πολυώνυμο αυτό θα ναι 3ου βαθμού, οπότε θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε την τιμή τεσσάρων παραμέτρων. Η προηγούμενη μέθοδος μας οδηγεί σε ένα σύστημα 4 γραμμικών εξισώσεων με 4 αγνώστους, η λύση του οποίου απαιτεί πολλές αριθμητικές πράξεις. Ας εξετάσουμε λοιπόν μία ταχύτερη και ευκολότερη μέθοδο:

Θέτουμε $\chi_1=-1$, $\chi_2=1$, $\chi_3=2$, $\chi_4=3$. Ορίζουμε το πολυώνυμο:

$$\pi(\chi) = \alpha_0 + \alpha_1(\chi-\chi_1) + \alpha_2(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2) + \alpha_3(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)(\chi-\chi_3) =$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1(\chi+1) + \alpha_2(\chi+1)(\chi-1) + \alpha_3(\chi+1)(\chi-1)(\chi-2)\ ^{(*)}.$$

Αυτή η γενική μορφή ενός πολυωνύμου, χρησιμοποιείται συχνά λόγω της ιδιότητάς του

ο 2ος να μηδενίζεται για $\chi=\chi_1$
ο 3ος να μηδενίζεται για $\chi=\chi_1$ και χ_2
ο 4ος να μηδενίζεται για $\chi=\chi_1$, χ_2 και χ_3

---

[*] *Αξίζει να υπογραμμίσουμε πως η σχέση αυτή δεν είναι παρά μία άλλη έκφραση, του τυχαίου τριτοβάθμιου πολυωνύμου. Πράγματι οι εκφράσεις:*

$\pi(\chi) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ και
$\pi(\chi) = \alpha_0 + \alpha_1(\chi-\kappa) + \alpha_2(\chi-\kappa)(\chi-\lambda) + \alpha_3(\chi-\kappa)(\chi-\lambda)(\chi-\mu)$

όπου κ,λ,μ πραγματικές σταθερές, είναι εκ ταυτότητας ίσες αν:

$c_3 = \alpha_3$, $\quad c_2 = \alpha_2-\alpha_3(\kappa+\lambda+\mu)$,
$c_1 = \alpha_1+\alpha_3(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)$ και $\quad c_0 = \alpha_0-\alpha_1\kappa+\alpha_2\kappa\lambda-\alpha_3\kappa\lambda\mu$ *(ας γίνουν οι πράξεις)*

Επομένως ο πιο πάνω τρόπος γραφής αποτελεί μία άλλη μορφή του τριτοβάθμιου πολυώνυμου που δεν περιορίζει την γενικότητα.

Εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα αυτή του πολυωνύμου υπολογίζουμε τις τιμές των παραμέτρων α_0, α_1, α_2 και α_3, δίνοντας στο χ τις τέσσερις τιμές του πίνακα 1.Α.1 και εξισώνοντας κάθε φορά την τιμή του πολυωνύμου π(χ) με την τιμή της συνάρτησης f(x), όπως αυτή δίνεται στον παραπάνω πίνακα. Με τον πρώτο υπολογισμό καθορίζουμε την τιμή της παραμέτρου α_0. Στον δεύτερο, χρησιμοποιώντας την τιμή του α_0 που μόλις βρήκαμε, καθορίζουμε την τιμή της α_1 κ.ο.κ.

$\pi(-1) = -7 = \alpha_0 \quad \Rightarrow \underline{\alpha_0 = -7}$
$\pi(1) = -3 = -7 + \alpha_1{*}2 \quad \Rightarrow \underline{\alpha_1 = 2}$
$\pi(2) = -1 = -7 + 2{*}3 + \alpha_2{*}3 = -1 + 3\alpha_2 \quad \Rightarrow \underline{\alpha_2 = 0}$
$\pi(3) = 9 = -7 + 2{*}4 + 0{*}4{*}2 + \alpha_3{*}4{*}2 = 1 + 8\alpha_3 \quad \Rightarrow \underline{\alpha_3 = 1}$

Άρα η πολυωνυμική συνάρτηση y=π(χ) ισούται με:

$$\begin{aligned} y = \pi(\chi) &= \alpha_0 + \alpha_1(\chi-\chi_1) + \alpha_2(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2) + \alpha_3(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)(\chi-\chi_3) = \\ &= -7 + 2(\chi+1) + 0(\chi+1)(\chi-1) + 1(\chi+1)(\chi-1)(\chi-2) = \\ &= -7 + 2(\chi+1) + (\chi+1)(\chi-1)(\chi-2) = \\ &= \chi^3 - 2\chi^2 + \chi - 3. \end{aligned}$$

Παράδειγμα:

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας της συνάρτησης y=συνx, για 4 σημεία. Να υπολογισθεί το συμπτωτικό πολυώνυμο και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης, του συμπτωτικού πολυωνύμου αλλά και των σημείων σύμπτωσης.

x	1,3	1,5	1,7	1,9
cosx	0,267499	0,070737	-0,12884	-0,32329

Αρχικά ορίζουμε τη μορφή του σ.π.:

$$\begin{aligned} \pi(\chi) &= \alpha_0 + \alpha_1(\chi-\chi_1) + \alpha_2(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2) + \alpha_3(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)(\chi-\chi_3) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(\chi-1,3) + \alpha_2(\chi-1,3)(\chi-1,5) + \alpha_3(\chi-1,3)(\chi-1,5)(\chi-1,7) \end{aligned}$$

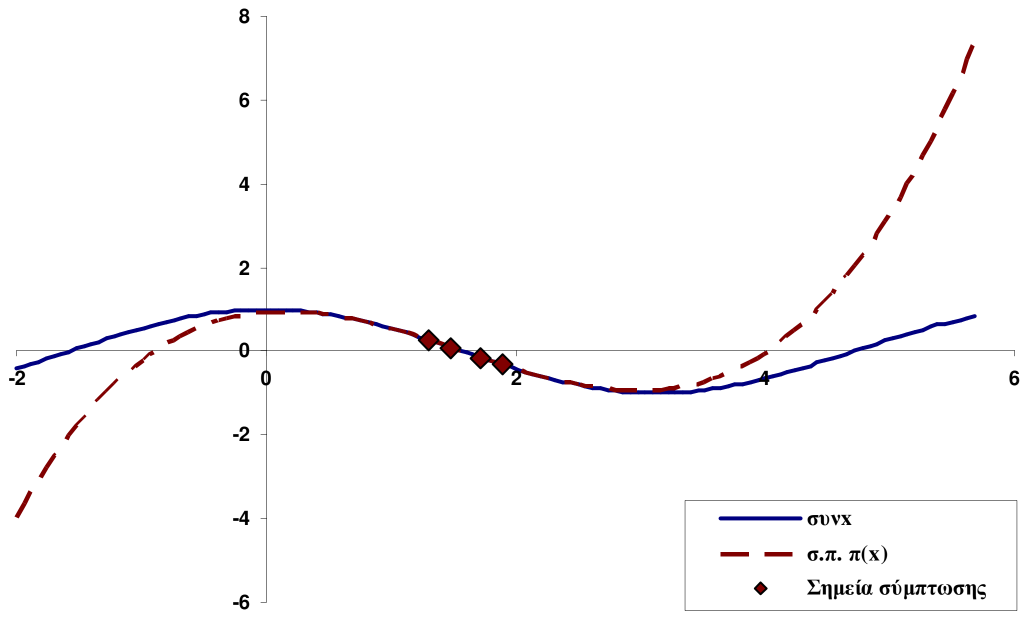
Κάνοντας τις πράξεις εύκολα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \pi(1,3) = 0,267499 &\Rightarrow \alpha_0 = 0,267499 \\ \pi(1,5) = 0,070737 &\Rightarrow \alpha_1 = -0,983808 \\ \pi(1,7) = -0,12884 &\Rightarrow \alpha_2 = -0,035251 \\ \pi(1,9) = -0,32329 &\Rightarrow \alpha_3 = 0,165764 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των α_j στο σ.π. έχουμε:

$$\pi(\chi) = 0,267499 - 0,983808(\chi-1,3) - 0,035251(\chi-1,3)(\chi-1,5) + 0,165764(\chi-1,3)(\chi-1,5)(\chi-1,7)$$

Κάνοντας λοιπόν τη γραφική παράσταση έχουμε:

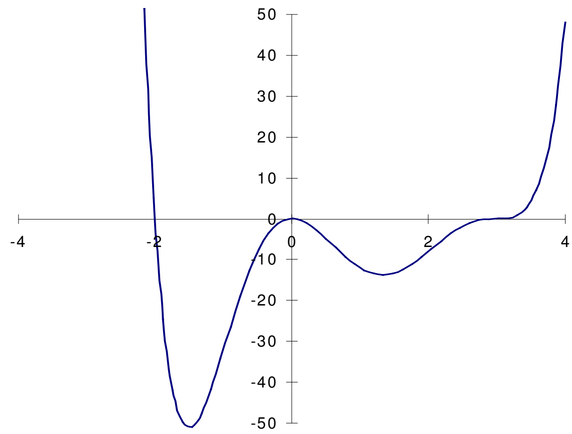


Παρατηρούμε πως το συμπτωτικό πολυώνυμο σχεδόν ταυτίζεται με τη συνάρτηση στις περιοχές που είναι σχετικά κοντά στα σημεία σύμπτωσης (για $1<x<2.5$), ενώ εκτός του διαστήματος αυτού οι δύο παραστάσεις αποκλίνουν απόλυτα…

2.Α.5 Ασκήσεις.

1η) Στη διπλανή γραφ. παράσταση εμφανίζεται μία πολυωνυμική συνάρτηση, της οποίας όλες οι ρίζες είναι πραγματικές. Να βρεθούν:

- Ο βαθμός της πολ.συνάρτησης.
- Το πλήθος των ριζών της.
- Το είδος των ριζών της.



2η) Να υπολογισθεί το συμπτ. πολυώνυμο της συνάρτησης του διπλανού πίνακα.

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	3	3	-1	-3	3

3η) Σχεδιάστε τα πολυώνυμα των οποίων ο βαθμός, καθώς και το πλήθος και το είδος των ριζών τους δίνονται στον επόμενο πίνακα:

	Βαθμός	Είδος πραγματικών ριζών
1	2ος	1 (διπλή)
2	3ος	1 (απλή) και 1 (διπλή)
3	3ος	1 (τριπλή)
4	4ος	2 (διπλές)
5	4ος	1 (απλή) και 1 (τριπλή)

2.Β ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΤΟΥ TAYLOR.

Το πρόβλημα της ανάπτυξης μιας συνάρτησης σε σειρά Taylor ίσως να είναι γνωστό στους περισσότερους. Η χρησιμότητά του όμως στην αριθμητική ανάλυση μας αναγκάζει να αναφερθούμε σ'αυτό εν συντομία.

2.Β.1 Το πρόβλημα.

Ζητούμε να υπολογίσουμε μία πολυωνυμική συνάρτηση $\psi=\pi(\chi)$, η οποία να προσεγγίζει την συνάρτηση $\psi=f(\chi)$ στην περιοχή[*] κάποιου σημείου χ_o του πεδίου ορισμού της f, με αποτέλεσμα να είναι, στην εν λόγω περιοχή, δυνατή η αντικατάσταση της συνάρτησης $f(\chi)$ με το πολυώνυμο $\pi(\chi)$. Το πολυώνυμο αυτό το αποκαλούμε πολυώνυμο Taylor, ή ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης $f(\chi)$ στην περιοχή κάποιου σημείου χ_o. Το σημείο χ_o αποκαλείται **κέντρο του αναπτύγματος**.

Η διερεύνηση του προβλήματος, οδηγεί στα παρακάτω συμπεράσματα:

- το πολυώνυμο θα πρέπει να παίρνει την ίδια τιμή με τη συνάρτηση στο χ_o, δηλαδή:

$$f(\chi_o) = \pi(\chi_o)$$

- η κλίση του πολυωνύμου και της συνάρτησης στο σημείο χ_o θα πρέπει να ταυτίζονται:

$$f'(\chi_o) = \pi'(\chi_o)$$

- πως ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης του πολυωνύμου και της συνάρτησης στο χ_o (δηλαδή οι παράγωγοι $2^{ης}$ τάξης στο σημείο χ_0), θα πρέπει να ταυτίζονται:

$$f''(\chi_o) = \pi''(\chi_o)$$

- πως σε τελική ανάλυση, οι τιμές των παραγώγων της συνάρτησης στο σημείο χ_o θα πρέπει να είναι ίσες με τις τιμές των αντιστοίχων παραγώγων του πολυωνύμου:

$$\boxed{f^{(\nu)}(\chi_o) = \pi^{(\nu)}(\chi_o)}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα ο περιορισμός, σύμφωνα με τον οποίο για να αναπτυχθεί μία συνάρτηση f(x) σε σειρά Taylor στην περιοχή του σημείου χ_o, θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη με συνεχείς παραγώγους στην περιοχή σύμπτωσης.

---

[*] *Με τον όρο περιοχή του σημείου χ_o, εννοούμε ένα διάστημα (υποσύνολο του R) της μορφής: $(\chi_o -\varepsilon ,\chi_o +\varepsilon) = \Pi(\chi_o ,\varepsilon)$, ένα διάστημα δηλαδή με κέντρο το σημείο χ_o και "ακτίνα" ίση με ε.*

2.Β.2 Υπολογισμός του πολυωνύμου π(χ).

Θα διαλέξουμε την γενική μορφή του πολυωνύμου π(χ) με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνονται οι πράξεις. Χωρίς λοιπόν να περιορίζεται η γενικότητα της λύσης διαλέγουμε μια μορφή που θυμίζει αρκετά αυτήν που χρησιμοποιήσαμε στην παράγραφο 1.Α.4:

$$\pi(\chi) = \alpha_0 + \alpha_1(\chi-\chi_o) + \alpha_2(\chi-\chi_o)^2 + \alpha_3(\chi-\chi_o)^3 + \ldots + \alpha\nu(\chi-\chi_o)^\nu + \ldots$$

Σύμφωνα με όσα λέχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο έχουμε πως:

$$f(\chi_o) = \pi(\chi_o) = \alpha_0 \qquad \Rightarrow \alpha_0 = f(\chi_o)$$
$$f'(\chi_o) = \pi'(\chi_o) = [\alpha_1+2a_2(x-x_o)+3a_3(x-x_o)^2+\ldots]_{xo} = a_1 \qquad \Rightarrow \alpha_1 = f'(\chi_o)$$
$$f''(\chi_o) = \pi''(\chi_o) = [2a_2+6a_3(x-x_o)+\ldots]_{xo} = 2a_2 \qquad \Rightarrow \alpha_2 = f''(\chi_o)/2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(\nu)}(\chi_o) = \pi^{(\nu)}(\chi_o) = \nu!\alpha_\nu \qquad \Rightarrow \alpha_\nu = f^{(\nu)}(\chi_o)/\nu!$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

οπότε το πολυώνυμο του Taylor παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\boxed{\pi(\chi) = f(\chi_o) + (\chi-\chi_o)f'(\chi_o) + \frac{(\chi-\chi_o)^2}{2!}f''(\chi_o) + \frac{(\chi-\chi_o)^3}{3!}f'''(\chi_o) + \ldots + \frac{(\chi-\chi_o)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(\chi_o) + \ldots}$$

Τώρα πλέον μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην περιοχή του χ_o την συνάρτηση f(χ) με το πολυώνυμο. Φθάνουμε λοιπόν στις σχέσεις (όπου στην τελευταία αντικαταστάθηκε το $\chi-\chi_o$ με το h ($\chi=\chi_o+h$)):

$$\begin{aligned} f(\chi) &= f(\chi_o) + (\chi-\chi_o)f'(\chi_o) + \frac{(\chi-\chi_o)^2}{2!}f''(\chi_o) + \frac{(\chi-\chi_o)^3}{3!}f'''(\chi_o) + \ldots = \\ &= \sum_{j=0} \frac{(\chi-\chi_o)^j}{j!} f^{(j)}(\chi_o) = \\ &= f(\chi_o) + h*f'(\chi_o) + \frac{h^2}{2!}f''(\chi_o) + \frac{h^3}{3!}f'''(\chi_o) + \ldots \end{aligned}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως εάν ισχύει ο περιορισμός $h=\chi-\chi_o<1$, τότε η σειρά συγκλίνει ταχύτατα στην τιμή της f(χ), μέσα σε πολύ λίγους όρους (διότι το h^ν τείνει γρήγορα στο 0, όταν h<1).

2.Β.3. Το σφάλμα αποκοπής.

Παρατηρούμε πως το πολυώνυμο Taylor μιας συνάρτησης f(x), είναι μία σειρά με άπειρους όρους. Στη συνέχεια θα δεχθούμε πως για τις στοιχειώδεις συναρτήσεις, η σειρά αυτή συγκλίνει στην συνάρτηση f(x), για κάθε χ που να ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Στην πράξη βέβαια δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν παρά πεπερασμένου πλήθους όροι. Όλοι οι υπόλοιποι παραλείπονται (αποκόπτονται). Η χρήση όμως ενός μικρού αριθμού όρων, αυτόματα μικραίνει το διάστημα στο οποίο η σειρά μπορεί να προσεγγίσει τη συνάρτηση f(χ), το οποίο γίνεται μία περιοχή του χ_o, η ακτίνα της οποίας εξαρτάται από τον αριθμό των όρων που χρησιμοποιούνται. Στην πράξη μάλιστα, όπως ειπώθηκε ήδη, η απόλυτη τιμή του $h=\chi-\chi_o$ είναι μικρότερη του 1 (Εάν $|h|<1 \Rightarrow h^6<<1$) .

Η τάξη του κάθε όρου καθορίζεται από τον εκθέτη της παρένθεσης $(\chi-\chi_o)$, ή από την τάξη της παραγώγου $f^{(\nu)}(x)$. Έτσι λοιπόν όταν μιλάμε για ανάπτυγμα Taylor στο οποίο διαγράφτηκαν όλοι οι μεγαλύτεροι της δεύτερης τάξης όροι, εννοούμε το:

$$f(\chi_o+h) = f(\chi_o) + hf'(\chi_o) + \frac{h^2}{2!}f''(\chi_o) + \mathbf{O(h^3)}$$

Είναι επομένως σημαντικό να έχουμε μία εκτίμηση για τη διαφορά που θα προκύψει ανάμεσα στην τιμή του πολυωνύμου και την τιμή της συνάρτησης σε κάποιο σημείο χ (της περιοχής του χ_o), η οποία θα οφείλεται στην αποκοπή των όρων της σειράς.

Ορίζουμε λοιπόν το σφάλμα αποκοπής Ε με τη σχέση: $\mathbf{E = f(\chi)-\pi(\chi)}$. Είναι φανερό πως το σφάλμα Ε εξαρτάται από την τάξη ν του τελευταίου όρου της σειράς που κρατήθηκε στον υπολογισμό, από το σημείο χ, αλλά και από την επιλογή του σημείου χ_o. Αποδεικνύεται(*) πως το σφάλμα που προκύπτει από την αποκοπή όλων των όρων τάξης μεγαλύτερης του n, δίνεται από τη σχέση:

$$E(\nu,\chi_o,\chi) = \frac{h^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\xi)$$

όπου το ξ είναι κάποιο σημείο (συγκεκριμένο μεν αλλά άγνωστο) ανάμεσα στα σημεία χ και χ_o (**).

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως ο τύπος του σφάλματος θυμίζει έντονα τον ν+1 όρο της σειράς. Σε τελική ανάλυση επομένως ο ν+1 όρος του αναπτύγματος Taylor αποτελεί μία προσέγγιση του σφάλματος αποκοπής.

---

* *Η απόδειξη του τύπου που δίνει το $E(\chi_o ,\chi)$ ξεφεύγει από τα πλαίσια των σημειώσεων αυτών.*

** *Το ξ προέρχεται από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.*

2.B.4. Ανάπτυγμα κατά Mac-Laurin.

Στην ιδιαίτερη περίπτωση που αναπτύσσεται μία συνάρτηση f(χ) κατά Taylor στο σημείο $\chi_o=0$, το ανάπτυγμα ονομάζεται ανάπτυγμα κατά Mac Laurin. Στην περίπτωση αυτή (η οποία άλλωστε χρησιμοποιείται και πιο συχνά) ο τύπος του αναπτύγματος παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + ...$$

2.B.5. Παράδειγμα.

Να υπολογισθεί το ανάπτυγμα κατά Mac-Laurin της συνάρτησης **y=f(x)=συνx**. Με τη βοήθεια του αναπτύγματος αυτού να υπολογισθεί με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων(*) το συνημίτονο της γωνίας φ=0.2 rad. Τέλος με τη βοήθεια του υπολογιστή να επιβεβαιωθεί το αποτέλεσμα.

Λύση:

Εφ'όσον ζητιέται το ανάπτυγμα κατά Mac-Laurin, αναπτύσσουμε με κεντρικό σημείο το $\chi_o=0$:

Πίνακας παραγώγων

$y = \sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow y_o = [\sigma\upsilon\nu\chi]_o = 1$
$y' = -\eta\mu\chi \Rightarrow y_o' = [-\eta\mu\chi]_o = 0$
$y'' = -\sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow y_o'' = [-\sigma\upsilon\nu\chi]_o = -1$
$y''' = \eta\mu\chi \Rightarrow y_o''' = [\eta\mu\chi]_o = 0$
$y^{(4)} = \sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow y_o^{(4)} = [\sigma\upsilon\nu\chi]_o = 1$
$y^{(5)} = -\eta\mu\chi \Rightarrow y_o^{(5)} = [-\eta\mu\chi]_o = 0$
$y^{(6)} = -\sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow y_o^{(6)} = [-\sigma\upsilon\nu\chi]_o = -1$
κ.λ.π.

Καταλήγουμε επομένως στο ανάπτυγμα:

$$\sigma\upsilon\nu\chi = 1 - \frac{\chi^2}{2!} + \frac{\chi^4}{4!} - \frac{\chi^6}{6!} + ...$$

ενώ το σφάλμα αποκοπής είναι ίσο με:

$$E(n,\chi) = \frac{\chi^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\,\sigma\upsilon\nu^{(\nu+1)}(\xi)$$

Παρατηρούμε πως η απόλυτη τιμή του σφάλματος αποκοπής είναι πάντα μικρότερη της ποσότητας:

$$M = \left|\ \chi^{\nu+1}/(\nu+1)!\ \right|$$

μια και η τιμή του $\sigma\upsilon\nu^{(\nu+1)}(\xi)$ ανήκει πάντα στο διάστημα [-1,1]. Θα θεωρήσουμε επομένως πως το Μ αποτελεί μια εκτίμηση (απαισιόδοξη) του σφάλματος αποκοπής.

---

* *Αναφερόμαστε σε ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων και όχι σημαντικών μια και γνωρίζουμε καλά την τάξη μεγέθους του αριθμού που αναζητούμε (Το συν0.2 (rad) είναι κοντά στο 1).*

Ας υπολογίσουμε τώρα το συν(0.2) με τη βοήθεια του αναπτύγματος:

$$συν(.2) = 1 - \frac{0.2^2}{2} + \frac{0.2^4}{24} - \frac{0.2^6}{720} = 1 - .02 + 6.6666667*10^{-5} - 8.8888889*10^{-8} =$$

= .98 διατηρώντας όρους μέχρι και 2ης τάξης,
= .980066667 διατηρώντας όρους μέχρι και 4ης τάξης,
= .980066577778 διατηρώντας όρους μέχρι και 6ης τάξης,

Τέλος η ποσότητα M παίρνει τις τιμές:

$M_2 = .2^3/3! = .0013333$ $M_4 = .2^5/5! = .00000266667$ $M_6 = 2^7/7! = 2.5397*10^{-9}$

όπου το M_i δίνει το μέγιστο σφάλμα αποκοπής της κάθε μιας από τις παραπάνω προσεγγίσεις.

Με δεδομένο ότι η ακριβής τιμή είναι η:

συν(0.2 rad) = 0.9800665778412

και συμβολίζοντας με $Σ_i$ το πραγματικό σφάλμα αποκοπής στην περίπτωση που διατηρήσαμε μέχρι i-ης τάξης όρους, έχουμε:

$Σ_2$ = 0.9800665778412 - 0.98 = 0.00006657784...
$Σ_4$ = 0.9800665778412 - 0.980066667 =-0.0000000888254...
$Σ_6$ = 0.9800665778412 - 0.980066577778 = 0.0000000000634...

Παρατηρούμε πως σε κάθε περίπτωση το μέγιστο σφάλμα αποκοπής M_i παραμένει μεγαλύτερο από το πραγματικό.

2.Β.6. Γενικός τρόπος χρήσης του αναπτύγματος του Mac Laurin.

Η γενική μορφή του αναπτύγματος του Mac Laurin αναφέρεται σε σύνθετες συναρτήσεις, στις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ήδη γνωστά αναπτύγματα, διευκολύνοντας πολύ τους υπολογισμούς. Για παράδειγμα το ανάπτυγμα της συνάρτησης συν(π(x)), εάν η π(x) είναι πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύει πως π(0)=0, δίνεται από τη σχέση:

$$συν(\pi(x)) = 1 - \frac{\pi(x)^2}{2!} + \frac{\pi(x)^4}{4!} - \frac{\pi(x)^6}{6!} + ...$$

από την οποία προκύπτει ο τρόπος χρήσης του αρχικού αναπτύγματος της συνάρτησης συνx. Το ίδιο αποτέλεσμα, προφανώς, προκύπτει και με πράξεις, οι οποίες όμως είναι συχνά ιδιαίτερα περίπλοκες.

2.Β.7. Επίλυση ορισμένων ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων.

Συχνά, όταν σε ένα ολοκλήρωμα, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση αποτελείται από ένα τμήμα πολυωνυμικό και ένα τμήμα μη πολυωνυμικό, αντικαθιστούμε το μη πολυωνυμικό τμήμα με το ανάπτυγμά του (κατά Taylor) και ολοκληρώνουμε το πολυώνυμο που προκύπτει.

Παραδείγματα:

1^{o}) Να υπολογισθεί η τιμή του ολοκληρώματος: $\mathrm{I} = \int_0^1 e^{x^2}\,dx$

Λύση: Πρόκειται για ένα ορισμένο ολοκλήρωμα, για το οποίο δεν υπάρχει το αντίστοιχο αόριστο. Πράγματι δεν υπάρχει συνάρτηση η οποία παραγωγιζόμενη να δώσει τη συνάρτηση e^{x^2}. Παρόλα αυτά θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το αόριστο και το ορισμένο ολοκλήρωμα, με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων. Αρχικά ας υπολογίσουμε το ανάπτυγμα της εν λόγω συνάρτησης:

Με δεδομένο το ανάπτυγμα:

$e^{x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$ έχουμε

$e^{x^2} = 1 + \left(x^2\right) + \dfrac{\left(x^2\right)^2}{2!} + \dfrac{\left(x^2\right)^3}{3!} + \ldots$ οπότε το αόριστο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int e^{x^2}dx = \int\left[1 + \left(x^2\right) + \frac{\left(x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(x^2\right)^3}{3!} + \ldots\right]dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} + \frac{x^7}{3!7} + \ldots$$

Συχνά, η μοναδικότητα του αναπτύγματος της κάθε συνάρτησης, μας κάνει, αναφερόμενοι σ' αυτό, να μιλάμε για το δακτυλικό αποτύπωμα της εν λόγω συνάρτησης. Παρατηρούμε λοιπόν πως το αόριστο ολοκλήρωμα της e^{x^2} έχει ανάπτυγμα (αποτύπωμα) ενώ δεν έχει αναλυτική έκφραση. Αντικαθιστώντας στη συνέχεια στο ανάπτυγμα τα όρια ολοκλήρωσης, βρίσκουμε το αποτέλεσμα του ορισμένου ολοκληρώματος, με όση ακρίβεια θελήσουμε:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} + \frac{x^7}{3!7} + \ldots\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2!5} + \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} + \ldots - 0 =$$

$$= 1 + 0.33333 + 0.1 + 0.023809524 + 0.00462963 + 0.000757576 +$$

$$+0.000106838 + 0.0000132275 + 0.00000145892 = 1.4626516$$

όπου αναγκαστήκαμε να φτάσουμε στον 9^{o} όρο για να επιτύχουμε μια ακρίβεια της τάξης του 0,000001.

2°) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ με ακρίβεια ε=0,001

Λύση: Πρόκειται για ένα πρόβλημα αντίστοιχο του προηγουμένου, όπου βρίσκουμε άμεσα το ανάπτυγμα της e^{-x}, και στη συνέχεια το αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα. Βέβαια, το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα λύνεται και αναλυτικά, κι έτσι μπορούμε να βεβαιωθούμε για το ακριβές αποτέλεσμα.

Εύκολα αποδεικνύεται πως το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης e^{-x} δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$e^{-x} = 1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \ldots$$

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \int_0^1 x^2 (1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \ldots) dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3 + x^4/2! - x^5/3! + \ldots) dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5*2!} - \frac{x^6}{6*3!} + \frac{x^7}{7*4!} - \frac{x^8}{8*5!} + \ldots \right|_0^1$$

$$= 1/3 - 1/4 + 1/10 - 1/36 + 1/168 - 1/960 = 0{,}1605$$

Παρατηρούμε πως σταματήσαμε τον υπολογισμό στον όρο 1/960, (περίπου 0,001), θεωρώντας ιδιαίτερα μικρότερους της απαιτούμενης ακρίβειας τους επόμενους όρους. Επιλύοντας το ολοκλήρωμα με την κλασσική μέθοδο (διπλή κατά παράγοντες ολοκλήρωση) βρίσκουμε:

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \left. -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) \right|_0^1 = -5e^{-1} + 2 = 0{,}1606$$

Επομένως, το απόλυτο σφάλμα είναι μικρότερο της απαιτούμενης ακρίβειας, κάτι που δείχνει πως ο απλός τρόπος εκτίμησης του απόλυτου σφάλματος του αναπτύγματος (σταματούμε όταν φθάνουμε σε όρο μικρότερο ή ίσο της απαιτούμενης ακρίβειας) είναι αρκετά αποτελεσματικός.

2.Β.8. Ασκήσεις.

1η) Να αποδειχθεί πως ισχύουν τα παρακάτω αναπτύγματα:

i) $e^{\chi} = 1 + \chi + \chi^2/2! + \chi^3/3! + \ldots$

ii) $\eta\mu\chi = \chi - \chi^3/3! + \chi^5/5! - \ldots.$

iii) $\ln(\chi+1) = \chi - \chi^2/2 + \chi^3/3 - \chi^4/4 + \ldots$

iv) $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1*3}{2^3}\frac{x^3}{3!} - \frac{1*3*5}{2^4}\frac{x^4}{4!} + \frac{1*3*5*7}{2^5}\frac{x^5}{5!} - \ldots$

2η) Με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων των συναρτήσεων e^{χ}, ημχ και συνχ να αποδειχθεί ο τύπος του Euler:

$$e^{ix} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x$$

3η) Ολοκληρώστε το ανάπτυγμα της συνάρτησης ψ=f(χ)=ημχ και δείξτε πως επιλέγοντας την σταθερά ολοκλήρωσης c, σαν -1, οδηγείστε στο ανάπτυγμα της συνάρτησης ψ=f(χ)=-συνχ.

4η) Να υπολογίσετε, με ακρίβεια ε=0,001, την τιμή του ολοκληρώματος:

$$A = \int_0^1 x\ln(x+1)\, dx$$

2.Γ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

2.Γ.1 Γενικά.

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μιά απάντηση στο πρόβλημα του προσδιορισμού της ή των ριζών μιας εξίσωσης f(x)=0. Για την επίλυση του παλαιού αυτού προβλήματος, υπάρχουν πολλές μέθοδοι ανάμεσα από τις οποίες διαλέγουμε κάθε φορά αυτήν που μας επιβάλλει η φύση του προβλήματος αλλά και τα υλικοτεχνικά μέσα που διαθέτουμε. Για παράδειγμα, κάποιοι παράγοντες που μπορούν να καθορίσουν τον αλγόριθμο λύσης είναι...

α) Αν είναι εύκολος ο αναλυτικός υπολογισμός της παραγώγου f'(x).

β) Αν είναι εύκολο να υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης f(x) στα σημεία του πεδίου ορισμού.

γ) Αν έστω και χοντρικά είναι γνωστή η περιοχή μέσα στην οποία υπάρχει η ρίζα της συνάρτησης f που ψάχνουμε.

δ) Αν η τιμή της κλίσης της f (δηλαδή η f') είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη κατ' απόλυτη τιμή του 1.

ε) Αν η ρίζα που αναζητούμε είναι περιττής ή άρτιας τάξης.

στ) Αν έχουμε στη διάθεσή μας υπολογιστή. κ.λ.π.

Ένας όμως από τους παράγοντες που μπορεί να βοηθήσει σε μεγάλο βαθμό την δουλειά αυτή, είναι η εμπειρία μας πάνω στη συμπεριφορά των συναρτήσεων. Αν για παράδειγμα ζητούμε όλες τις ρίζες της συνάρτησης: $f(x) = x^2 - x\ln x - 5$, πρέπει να θυμόμαστε πως:

- $\lim_{x\to 0}[x\ln x] = 0$ (δοκιμάστε με De l' Hopital)
- $\lim_{x\to 0}[f(x)] = -5$
- $\lim_{x\to\infty}[f(x)] = \lim_{x\to\infty}\left[x^2\right] = \infty$

Όπου η τελευταία σχέση δείχνει πως όταν το x τείνει στο άπειρο, η ποσότητα x^2 είναι σαφώς ισχυρότερη από την $x\ln x$. Με τα δεδομένα αυτά καταλαβαίνουμε πού περίπου μπορούμε να περιμένουμε την ύπαρξη μιας ρίζας (ή τριών σε ειδικές περιπτώσεις) που θα παρουσιάζει η συνάρτηση μια και πρέπει υποχρεωτικά με τρόπο συνεχή (είναι συνεχής για x>0) να περάσει από τις αρνητικές τιμές που παίρνει στην περιοχή του μηδενός, σε θετικές…

2.Γ.2 Μέθοδος γραμμικής παρεμβολής (regula falsi).

Με την μέθοδο αυτή υπολογίζουμε μόνον περιττής τάξης ρίζες. Στο ξεκίνημά της προϋποθέτει:

(α) πως έχουμε βρει δύο σημεία χ_1 και χ_2 του πεδίου ορισμού της f(x) στα οποία οι τιμές της f είναι ετερόσημες και

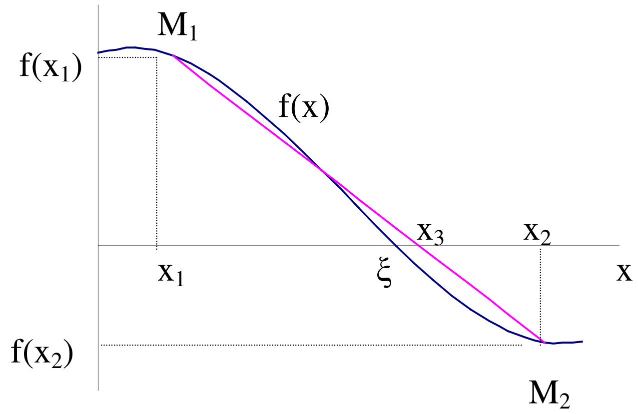
(β) πως η συνάρτηση f(X) είναι συνεχής στο διάστημα $[\chi_1,\chi_2] \in$ Π.Ο.

Έχουμε δηλαδή:

$$\mathbf{f(x_1)f(x_2) < 0}$$

Επομένως η f έχει τουλάχιστον μιά ρίζα περιττής τάξης ανάμεσα στα δύο σημεία χ_1 και χ_2, έστω η **χ=ξ.**

Η μέθοδος του υπολογισμού της ρίζας της συνάρτησης f με γραμμική παρεμβολή, προσπαθεί να μειώσει με διαδοχικά βήματα το διάστημα που την περιέχει. Ξεκινώντας από τα σημεία χ_1 και χ_2, υπολογίζω το σημείο χ_3, που είναι το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 με τον άξονα των χ με την βοήθεια της σχέσης:



$$x_3 = x_1 + \frac{(x_2 - x_1) f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)} \quad (*)$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε την σχετική θέση της ρίζας χ=ρ της συνάρτησης f ως προς το σημείο χ_3. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

	Αν συμβαίνει...	...ή ισοδύναμα	Θέση της ρίζας ρ
1η	$f(\chi_3)*f(\chi_1) > 0$	$f(\chi_3)*f(\chi_2) < 0$	$\xi \in (\chi_3,\chi_2)$
2η	$f(\chi_3)*f(\chi_2) > 0$	$f(\chi_3)*f(\chi_1) < 0$	$\xi \in (\chi_1,\chi_3)$
3η	$f(\chi_3)*f(\chi_1) = 0$	$f(\chi_3)*f(\chi_2) = 0$	$\xi = \chi_3$

Έτσι λοιπόν επαναλαμβάνουμε μερικές φορές την προηγούμενη διαδικασία καταλήγοντας σε μία ακολουθία χ_3, χ_4, χ_5, ... η οποία συγκλίνει στο ρ. Ο υπολογισμός όρων της ακολουθίας αυτής σταματά όταν η ρίζα ρ προσεγγιστεί με την ζητούμενη ακρίβεια, όταν δηλαδή το διάστημα στο οποίο περιορισθεί η ρίζα γίνει μικρότερο ή ίσο με το διπλάσιο της απαιτούμενης ακρίβειας.

---

* *Η ομοιότητα των τριγώνων μας οδηγεί στην σχέση:*

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{f(x_1)}{-f(x_2)} \Rightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

απ' όπου προκύπτει η σχέση για το x_3 ..

2.Γ.3 Η μέθοδος του Newton.

(α) Το πρόβλημα και η ερμηνεία του τύπου:

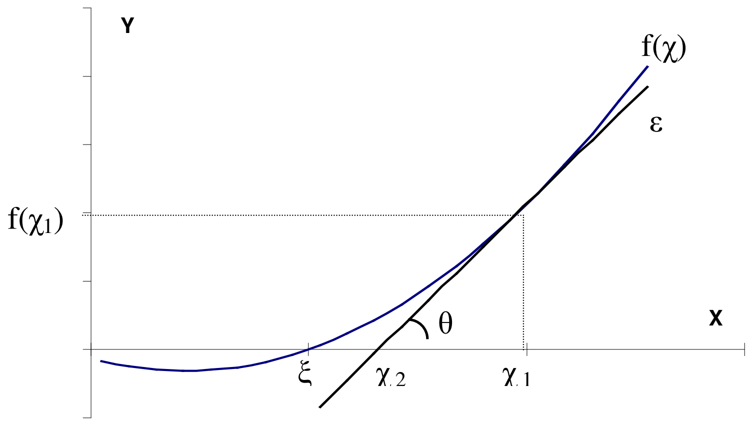
Για τον υπολογισμό μιας πραγματικής ρίζας της συνάρτησης y=f(x), θα πρέπει να ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Η f(x) πρέπει να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, σε μία περιοχή (π_0), γύρω από τη ρίζα ξ, που αναζητούμε.
- Γνωρίζουμε μια πρώτη προσέγγιση x_1, της ρίζας ξ, η οποία ανήκει στην π_0.

Τότε η τιμή x_2, που προκύπτει από τον επόμενο τύπο, είναι (κατά κανόνα) μια καλύτερη προσέγγιση της ρίζας ξ, απ'ότι ήταν η x_1.

$$\boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του τύπου φαίνεται στο διπλανό σχήμα, όπου παρατηρούμε πως η νέα προσέγγιση της ξ (η χ_2) γίνεται με την ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη της f(x) στο σημείο: (χ_1 , $f(\chi_1)$)



Η γεωμετρική ερμηνεία του τύπου του Newton.

Στη συνέχεια, υιοθετώντας σαν προσεγγιστική ρίζα το χ_2, επαναλαμβάνουμε τις πράξεις του τύπου, υπολογίζοντας μια νέα προσέγγιση χ_3 κ.ο.κ.. Αυτή η διαδικασία σταματά όταν η διαφορά ανάμεσα στην προηγούμενη και στην τελευταία προσέγγιση πλησιάζει την απαιτούμενη ακρίβεια.

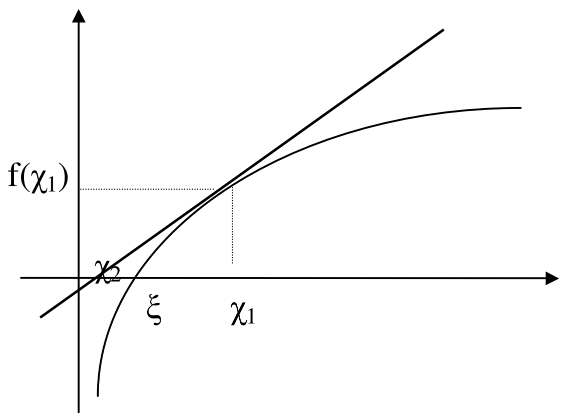
(β) Απόδειξη του τύπου.

Η ευθεία ε (στο προηγούμενο σχήμα) είναι εφαπτομένη της καμπύλης της f(χ), στο σημείο (χ_1 , $f(\chi_1)$). Επομένως ο συντελεστής κατεύθυνσής της (η κλίση της) θα είναι ίσος με την εφφ, αλλά και με την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο χ_1. Από το μικρό τριγωνάκι που σχηματίζεται προκύπτει η σχέση:

$$f'(x_1) = \varepsilon\varphi\theta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Παρατηρήσεις:

1η) Ο τύπος του Newton δεν μπορεί να λειτουργήσει όταν η παράγωγος της συνάρτησης f, στο x_1, ή σε κάποιο άλλο από τα x_j, είναι ίσο με το μηδέν (ή, στην πράξη, πολύ κοντά στο μηδέν). Αν διαπιστωθεί πως κάτι τέτοιο συμβαίνει, τότε πρέπει να αλλαχθεί η πρώτη προσεγγιστική τιμή x_1.



2η) Στην περίπτωση του διπλανού σχήματος, η πρώτη προσέγγιση της ρίζας ξ (χ_1) οδηγεί στην χ_2, η οποία βρίσκεται από την άλλη πλευρά της ρίζας. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατό η απόλυτη τιμή της συνάρτησης στο χ_2 να είναι μεγαλύτερη της τιμής στο χ_1. Αυτό είναι τελικά φυσιολογικό και το αντιλαμβανόμαστε από την αλλαγή του προσήμου της τιμής της f.

Εάν τώρα θεωρήσουμε πως υπάρχει η λάθος και η σωστή πλευρά προσέγγισης θα πούμε τα εξής:

- Όταν η καμπύλη της f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, βολεύει να ξεκινούμε δεξιά της ρίζας (εκεί όπου η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές).
- Όταν η καμπύλη της f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, βολεύει να ξεκινούμε αριστερά της ρίζας (εκεί όπου η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές).

Τα προηγούμενα μπορούν να ειπωθούν και ως εξής: Η πρώτη προσέγγιση χ_1 βρίσκεται από τη «σωστή» πλευρά της ρίζας ξ, όταν ισχύει η σχέση:

$$f(\chi_1) f''(\chi 1) > 0$$ [*]

(γ) Παράδειγμα.

Να υπολογισθεί μία ρίζα της συνάρτησης:

$$\mathbf{y = f(x) = x^3 - xLn(x) - e^{-x} - 20 \qquad [\ x \rangle 0\ ]}$$

με ακρίβεια ε=0,00001

---

[*] *Να θυμίσουμε πως όταν η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης είναι θετική, αυτή στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, ενώ εάν είναι αρνητική, στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.*

Ένας αναγνώστης που έχει ευχέρεια στην «αναγνώριση» και την κατανόηση των μαθηματικών συναρτήσεων, θα ξεχώριζε ενδεχόμενα πως στη συνάρτηση: $f(x) = \chi^3 - \chi Ln(\chi) - e^{-x} - 20$

- όταν το χ αυξάνει, ο ισχυρότερος όρος (μεγαλύτερος σε τιμή) είναι ο χ^3. Όλοι οι υπόλοιποι είναι είτε πολύ μικροί (ο e^{-x}), είτε σταθεροί (ο -20), είτε αύξοντες μεν αλλά ασθενέστεροι του χ^3 (ο $\chi Ln(\chi)$).
- τα κοίλα στρέφονται προς τα άνω (για χ μεγαλύτερο του 1)
- η ρίζα πρέπει να είναι κοντά στο 3 (όπου το χ^3 αντισταθμίζει το -20)

Θεωρώντας όμως πως ο αναγνώστης δεν έχει την ευχέρεια να «αναγνωρίζει» τις μαθηματικές συναρτήσεις, ξεκινούμε κάνοντας έναν μικρό πίνακα τιμών της συνάρτησης:

χ_k	1	2	3
y_k	-19,37	-13,52	3,65

από τον οποίο προκύπτει πως η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα (2 , 3), στα άκρα του οποίου η f παίρνει τιμές ετερόσημες.

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε τη συνάρτηση f:

$$y' = f'(x) = (x^3 - xLn(x) - e^{-x} - 20)' = 3x^2 - Ln(x) + e^{-x} - 1$$

οπότε ο τύπος του Newton (που υπολογίζει το χ_2 από την πρώτη προσέγγιση χ) γίνεται:

$$x_2 = x - \frac{x^3 - xLn(x) - e^{-x} - 20}{3x^2 - Ln(x) + e^{-x} - 1}$$

Τέλος κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών, στον οποίο συμμετέχουν όλες οι ποσότητες που παίρνουν μέρος στον τύπο, ξεκινώντας από την τιμή χ=3 (βρίσκεται από τη σωστή πλευρά σύμφωνα με τα προηγούμενα):

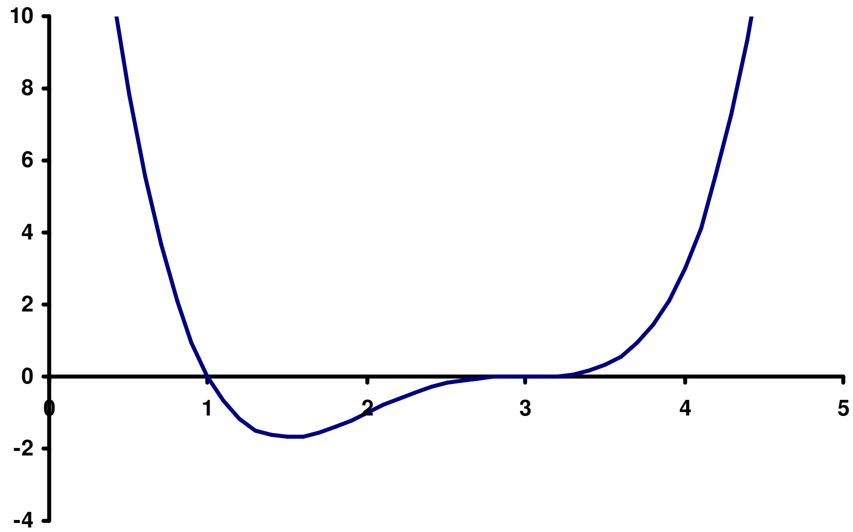
x=	3	2,853539	2,845262	2,845236
f=	3,654376	0,18572	0,000572	
f '=	24,95117	22,43713	22,299	

Θεωρούμε πως έχουμε υπολογίσει τη ρίζα με την απαιτούμενη ακρίβεια, όταν η απόσταση ανάμεσα στην τελευταία προσέγγιση (χ_ν) και στην προηγούμενη ($\chi_{\nu-1}$) είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη από την απαιτούμενη ακρίβεια:

$$|x_\nu - x_{\nu-1}| < \varepsilon$$

Βέβαια, μια ισχυρή ένδειξη ακρίβειας είναι και η τιμή της συνάρτησης $f(\chi_\nu)$ (δηλαδή πόσο κοντά είναι στο μηδέν), μόνο που δεν είναι απόλυτη ένδειξη για το πόσο κοντά είμαστε στην ρίζα που αναζητούμε.

Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε πως η ακρίβεια της κάθε επόμενης προσέγγισης βελτιώνεται κατά δύο επιπλέον δεκαδικά…



Για παράδειγμα, στο πιο πάνω γράφημα, η συνάρτηση εμφανίζει 2 ρίζες, στο χ=1 και στο χ=3. Και όσον αφορά στο χ=1, η τιμή της f(χ) είναι ικανοποιητικός δείκτης για την ακρίβεια υπολογισμού της ρίζας (όταν, δηλαδή, το f(χ) πλησιάζει στο μηδέν, τότε και η προσέγγιση της ρίζας χ_ν πλησιάζει όμοια την ρίζα. Αντίθετα, στην περιοχή του χ=3, έχουμε την τιμή της f(χ) να είναι πολύ κοντά στο μηδέν, ενώ η προσέγγιση της ρίζας να είναι ακόμη ιδιαίτερα μακριά απ’ αυτήν.

(δ) Διαχείριση του τύπου του Newton, με το Excel.

Αναζητούμε λοιπόν όλες τις πραγματικές ρίζες μιας συνάρτησης f(χ). Αρχικά, μια και το Excel μας δίνει τη δυνατότητα να κάνουμε εύκολα ακριβείς γραφικές παραστάσεις, αξίζει να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f(χ). [Προφανώς δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών της f(χ), στο πεδίο ορισμού που μας ενδιαφέρει, τον οποίο μετατρέπουμε σε γραφική παράσταση…]

Το κύριο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε κατά την αναζήτηση μιας πραγματικής ρίζας της f(χ), είναι να δημιουργήσουμε έναν πίνακα τιμών σαν τον παρακάτω, ο οποίος θα περιέχει τις διαδοχικές προσεγγίσεις της ρίζας ξ, καθώς και τις τιμές f(x) και f ’(x).

Πίνακας τιμών.

	D	E	F	G
1	x_1	$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$	$x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2)$	$x_4 =$ ....
2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	....	....
3	$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	....	....
4				

Βέβαια, τα κελιά έχουν διαλεχθεί στην τύχη. Η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι η εξής:

1. Τοποθετούμε την πρώτη προσεγγιστική τιμή χ_1, στο κελί D1.
2. Τοποθετούμε τον τύπο της συνάρτησης f(x), στο κελί D2, χρησιμοποιώντας σαν μεταβλητή την τιμή του κελιού D1.
3. Τοποθετούμε τον τύπο της παραγώγου της συνάρτησης f’’(x), στο κελί D3, χρησιμοποιώντας και πάλι σαν μεταβλητή την τιμή του κελιού D1.
4. Τοποθετούμε τέλος στο κελί E1, τον τύπο: = D1 - D2/D3.
5. Μαυρίζουμε τα κελιά D2 - D3, και σύρουμε την κάτω δεξιά γωνία, μία στήλη πιο δεξιά, έτσι ώστε να υπολογισθούν οι τιμές $f(x_2)$ και $f'(x_2)$.
6. Τελειώνουμε τη δημιουργία του πίνακα, μαυρίζοντας την περιοχή: E1;E3, και σύροντας την κάτω δεξιά γωνία προς τα δεξιά.

Παρατηρήσεις:

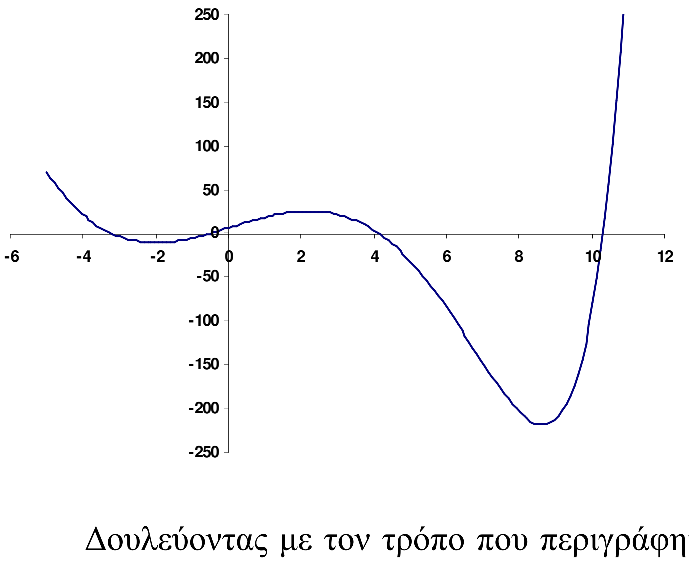
1η) Αλλάζοντας την τιμή του κελιού D1 (δηλ. του x_1), μεταβάλλονται όλες οι τιμές του πίνακα, όπως άλλωστε θα έπρεπε να συμβεί.

2η) Αλλάζοντας τους τύπους των κελιών D2 και D3, με μια νέα συνάρτηση και την παράγωγό της και σέρνοντάς τους προς τα δεξιά, υπολογίζουμε την (ή τις) ρίζα της νέας συνάρτησης.

ε) Παραδείγματα:

1°) Να υπολογισθεί μία ρίζα της συνάρτησης:

$$\mathbf{y = f(x) =} \ e^{2x/3} - x^3 + 12x + 5$$



Αρχικά, κάνουμε τη γραφική παράσταση της f(x), όπου παρατηρούμε πως η f έχει 4 απλές ρίζες, οι οποίες είναι (κατά προσέγγιση) ίσες με:

$\rho_1 = -3$
$\rho_1 = -0,4$
$\rho_1 = 4,1$
$\rho_1 = 10,3$

όλες βαθμού πολλαπλότητας 1.

Δουλεύοντας με τον τρόπο που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο και τοποθετώντας στα κατάλληλα κελιά την συνάρτηση και την παράγωγό της:

$$y' = f'(x) = \frac{2}{3}e^{2x/3} - 3x^2 + 12$$

κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x=	-3	-3,2592034	-3,2276743	-3,22716778	-3,2271677	-3,22716765
f(x)=	-3,86466	0,62400162	0,0097137	2,4911E-06	1,634E-13	0
f '(x)=	-14,9098	-19,791315	-19,176127	-19,1662917	-19,166289	

πράγμα που σημαίνει πως η δοθείσα συνάρτηση έχει στην περιοχή του σημείου -3 την ρίζα ρ_1=-3,22716765, όπου όλα τα ψηφία είναι σωστά…

Εάν είχαμε ξεκινήσει από ένα λάθος σημείο: χ = 2 (σημείο που βρίσκεται αρκετά κοντά στο τοπικό ελάχιστο της περιοχής), τότε η επόμενη πρόβλεψη θα ήταν πολύ μακριά από τη ρίζα που ψάχνουμε. Αυτό γίνεται φανερό από τον επόμενο πίνακα τιμών

x=	2	-7,8033099	-5,5385926	-4,18298964	-3,48938655	-3,25591922
f(x)=	24,79367	386,522157	108,46371	28,0570806	5,711159204	0,55910909
f '(x)=	2,529112	-170,67126	-80,011416	-40,4512046	-24,4623484	

όπου η $2^{η}$ προσέγγιση απομακρύνεται σημαντικά από τη ρίζα, για να επιστρέψει ξανά κοντά της μετά από πέντε περιστροφές.

Τώρα, εάν αντικαταστήσουμε την $1^{η}$ προσέγγιση (χ=-3) με τις προσεγγίσεις των υπολοίπων ριζών, παίρνουμε αμέσως τις τρεις επόμενες ρίζες (με 9 σωστά δεκαδικά ψηφία):

$1^{η}$ προσέγγιση	Ρίζα
-0,4	-0,486513177
4,1	4,123363116
10,3	10,31304647

Παρατηρήσεις:

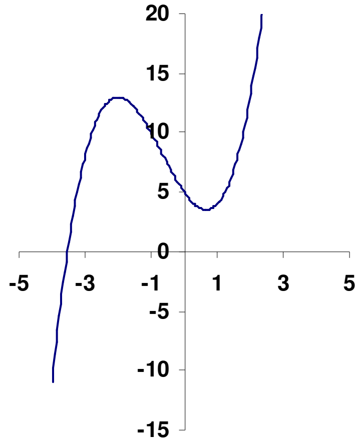
1η) Οι τιμές της συνάρτησης f, πλησιάζουν πολύ σύντομα στο μηδέν. Δεν συνέβη κάτι τέτοιο μονό κατά την πρώτη «περιστροφή» του τύπου, όπου όμως παρατηρούμε πως υπήρξε αλλαγή προσήμου (υπήρξε πέρασμα από την άλλη πλευρά της ρίζας, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παρατήρηση).

2η) Η ακρίβεια της προσέγγισης της ρίζας δεν κρίνεται από το πόσο κοντά στο μηδέν πλησιάζει η τιμή της f (χρησιμοποιείται μόνον ενδεικτικά), αλλά από την απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές προσεγγίσεις ($dx = x_j - x_{j-1}$). Για άλλη μία φορά παρατηρούμε πως σε κάθε επανάληψη του τύπου, η προσέγγιση βελτιώνεται κατά δύο δεκαδικά ψηφία.

2°) Να υπολογισθούν και οι τρεις ρίζες της τριτοβάθμιας π.σ.:

$$\pi(\chi) = \chi^3 + 2\chi^2 - 4\chi + 5$$

Λύση: Αρχικά, κάνουμε έναν πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση της π(χ). Από αυτήν διαπιστώνουμε πως η π(χ) έχει μία μόνο πραγματική ρίζα (στην περιοχή του 3,5 και δύο μιγαδικές…



i) Υπολογισμός της πραγματικής ρίζας: Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Newton

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + 2x_1^2 - 4x_1 + 5}{3x_1^2 + 4x_1 - 4}$$

και με πρώτη προσέγγιση το $\chi_1 = -3{,}5$ έχουμε:

x	-3,5	-3,533333333	-3,532842573	-3,532842466
f(x)	0,625	-0,009481481	-2,07115E-06	-1,03029E-13
f ‘(x)	18,75	19,32	19,31155965	

την ρίζα ρ = -3,532842466.

ii) Υπολογισμός των δύο μιγαδικών ριζών: Όπως είπαμε, εάν η τιμή ρ είναι ρίζα της π.σ. π(χ), τότε αυτή θα διαιρείται με τον παράγοντα (χ-ρ). Οπότε, μετά τη διαίρεση, το πηλίκο θα είναι μια π.σ. $2^{ου}$ βαθμού, το οποίο θα έχει ρίζες τις υπόλοιπες δύο ρίζες του π(χ):

$$\frac{\pi(\chi)}{(\chi-\rho_1)} = \frac{(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)(\chi-\rho_3)}{\chi-\rho_1} = (\chi-\rho_2)(\chi-\rho_3) = \pi\eta\lambda\iota\kappa o(x)$$

Άρα εκτελούμε τη διαίρεση της π(χ) με τον παράγοντα (χ+3,532842466):

$\chi^3 + \quad 2\chi^2 - \quad 4\chi \; + \quad 5$	$\chi + 3{,}532842466$
$-[\chi^3 + 3{,}532842466\,\chi^2]$	$\chi^2 - 1{,}532842466\chi$
$-\,1{,}532842466\,\chi^2 - \quad 4\chi \; + \quad 5$	
$-\,[-\,1{,}532842466\,\chi^2$	

2.Γ.4 Άσκηση:

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση: $\boldsymbol{\psi = f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x}$

i) Τι μορφή πιστεύετε πως θα έχει η γραφική της παράσταση; Πόσα τοπικά μέγιστα και πόσα τοπικά ελάχιστα θα διαθέτει; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

ii) Υπολογίστε τα σημεία όπου η f(x) παίρνει ακρότατες τιμές.

iii) Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

2.Δ. ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.

2.Δ.1 Υπενθυμίσεις για τα γραμμικά συστήματα.

Το πρόβλημα της λύσης των γραμμικών συστημάτων έχει ήδη αντιμετωπισθεί στο μάθημα των Μαθηματικών Ι. Το μεγάλο όμως ενδιαφέρον που παρουσιάζει, μας αναγκάζει να ασχοληθούμε εν συντομία, προσανατολίζοντας το ενδιαφέρον του αναγνώστη στην επεξεργασία του προβλήματος με το Excel. Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε πως ο αναγνώστης γνωρίζει για τις ορίζουσες και τον τρόπο υπολογισμού τους.

α) Ορισμός ενός γραμμικού συστήματος.

Οι ν-επόμενες εξισώσεις ορίζουν ένα σύστημα με k-αγνώστους:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{1k}x_k = \beta_1 \\
&\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{2k}x_k = \beta_2 \\
&\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{3k}x_k = \beta_3 \qquad (1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \alpha_{\nu3}x_3 + \ldots\ldots + \alpha_{\nu k}x_k = \beta_\nu
\end{aligned}$$

Αναζητούμε τις k-άδες αριθμών της μορφής:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k)$$

οι οποίες να επαληθεύουν το σύστημα (1), και οι οποίες ονομάζονται λύσεις του γραμμικού συστήματος (1).

Ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις:

1. **k $\succ$ ν**, όπου οι άγνωστοι είναι περισσότεροι από τις εξισώσεις. Ως γνωστόν, στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να βρούμε μία και μόνη λύση, αλλά καταλήγουμε σε μία συνάρτηση k-ν μεταβλητών, άρα σε άπειρες λύσεις (άπειρες k-άδες αριθμών που επαληθεύουν το σύστημα (1)).
2. **k = ν.** Στην περίπτωση αυτή (όταν οι k-εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους), αποδεικνύεται πως υπάρχει ακριβώς μία λύση για τους αγνώστους x_j.
3. **k $\prec$ ν**, όπου οι εξισώσεις είναι περισσότερες από τους αγνώστους. Στην περίπτωση αυτή, παίρνουμε τις k πρώτες εξισώσεις, τις επιλύουμε και διαπιστώνουμε το εάν συναληθεύουν για τη λύση που βρήκαμε οι υπόλοιπες ν-k εξισώσεις.

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε πως το πλήθος των αγνώστων είναι ακριβώς ίσο με το πλήθος των εξισώσεων.

γ) Επίληση των γρ.συστημάτων με τη βοήθεια οριζουσών. Διερεύνηση.

Ορίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

η οποία συμβολίζεται με το Δ, διότι παίζει το ρόλο της διακρίνουσας κατά τη διερεύνηση της λύσης.

Στη συνέχεια, ορίζουμε τις ορίζουσες: Δx_1 , Δx_2 ,..., Δx_ν, οι οποίες προκύπτουν από την Δ, όταν αντικατασταθεί η στήλη των συντελεστών του αντίστοιχου αγνώστου, με τη στήλη των σταθερών όρων. Σαν παράδειγμα δίνεται δίπλα η ορίζουσα Δx_1.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1\nu} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_\nu & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \dots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Ως γνωστό, η λύση του συστήματος δίνεται από τις ν-σχέσεις:

$$\boxed{\mathbf{x_j = \Delta x_j / \Delta}}$$

Η διερεύνηση του προβλήματος έχει να κάνει με την τιμή της ορίζουσας των συντελεστών των αγνώστων: Δ. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $\mathbf{\Delta \neq 0}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μία και μοναδική λύση του συστήματος. Είναι η περίπτωση που κυρίως μας ενδιαφέρει.
ii) **$\mathbf{\Delta = 0}$ και $\mathbf{\Delta x_j = 0}$ για κάθε j.** Στην περίπτωση αυτή το σύστημα καλείται αόριστο και έχει άπειρες λύσεις. Συμβαίνει όταν οι εξισώσεις του συστήματος δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
iii) **$\mathbf{\Delta = 0}$ και ένα τουλάχιστον $\mathbf{\Delta x_j \neq 0}$.** Στην περίπτωση αυτή το σύστημα καλείται αδύνατο και δεν έχει καμμία λύση.

δ) Παράδειγμα.

Το σύστημα (Σ1) είναι αόριστο, μια και η 2η εξίσωση προκύπτει από την 1η με ένα πολλαπλασιασμό επί 2. Άρα δεν έχουμε σύστημα 2 εξισώσεων με δύο αγνώστους αλλά μία συνάρτηση y=f(x).

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 5 \\ 4x - 8y &= 10 \end{aligned} \qquad (\Sigma 1)$$

Αντίθετα το σύστημα (Σ2) είναι αδύνατο. Τπ αριστερό μέλος της 2ης εξίσωσης προέρχεται απ'αυτό της 1ης, ενώ το β' μέλος της είναι λανθασμένο (αδύνατο).

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 5 \\ 4x - 8y &= -3 \end{aligned} \qquad (\Sigma 2)$$

2.Δ.2 Η μέθοδος Gauss-Cholevsky.

Πρόκειται για μια εκδοχή της μεθόδου η οποία διδάσκεται στο Λύκειο, με την ονομασία «μέθοδος του επαυξημένου πίνακα». Ορίζουμε λοιπόν τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος (1). Πρόκειται για τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, στον οποίο έχει προστεθεί η στήλη των σταθερών όρων β_i.

$$G = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots\ldots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots\ldots & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots\ldots & \alpha_{3\nu} & \beta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \ldots\ldots & \alpha_{\nu\nu} & \beta_\nu \end{bmatrix}$$

Ουσιαστικά πρόκειται για μια απεικόνιση του συστήματος (1), γιαυτό και ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, οι οποίες καθορίζουν κάποιες επιτρεπτές πράξεις που συχνά ονομάζονται «επιτρεπτές γραμμοπράξεις».

i) Μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τις γραμμές του G, όπως θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τη σειρά με την οποία εμφανίζονται οι εξισώσεις του συστήματος (1). Αντίθετα αποφεύγουμε να αντιμεταθέσουμε τις στήλες του G, μια και θα αντιστοιχούσαν σε αντιμετάθεση των μεταβλητών του (1).

ii) Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε γραμμή του G με κάποιο σταθερό αριθμό, (η κάθε γραμμή συμβολίζει μια εξίσωση -ισότητα- της οποίας τα μέλη μπορούν να πολλαπλασιασθούν επί έναν σταθερό αριθμό). Αντίθετα **δεν** πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία μιας στήλης.

iii)Μπορούμε να αντικαταστήσουμε μία γραμμή με το γραμμικό συνδυασμό αυτής με κάποιες άλλες (π.χ. να πολλαπλασιάσουμε κάποια γραμμή με ένα σταθερό αριθμό και να την προσθέσουμε σε μιαν άλλη).

Βασισμένοι στις προηγούμενες ιδιότητες, μετατρέπουμε τον προηγούμενο πίνακα στον:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \omega_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 & \omega_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & \omega_\nu \end{bmatrix}$$

που ισοδυναμεί με το σύστημα-λύση των εξισώσεων (1):

$$x_1 = \omega_1 \ , \quad x_2 = \omega_2 \ , \quad x_3 = \omega_3 \ , \quad \ldots\ldots , \quad x_\nu = \omega_\nu$$

Η διαδικασία αυτή περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια, όταν περιγράφουμε την επίλυση με τη βοήθεια του Excel.

2.Δ.3 Οι ορίζουσες και τα γρ.συστήματα στο Excel.

α) Μαθηματικές υπενθυμίσεις.

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα Α, είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που προσαρτάται στον πίνακα. Πρόκειται δηλαδή για μία τιμή που αποδίδεται σ'έναν πίνακα και προκύπτει από πράξεις ανάμεσα στα στοιχεία του. Συμβολίζεται με την έκφραση:

$$\det(A) = |A|$$

Υπολογίζεται με την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης. Για να συμβεί αυτό πρέπει να δοθεί ο επόμενος ορισμός:

Ονομάζουμε **ελάσσονα ορίζουσα του τυχαίου στοιχείου α_{ij},** της ορίζουσας det(A), την ορίζουσα A_{ij}, η οποία προκύπτει από την det(A) με την αφαίρεση των στοιχείων της i-γραμμής και της j-στήλης, της γραμμής δηλαδή και της στήλης του στοιχείου α_{ij}.

Έχουμε λοιπόν πως η ορίζουσα det(A) αναπτύσσεται ως εξής:

$$\det(A) = (-1)^{i+1}\alpha_{i1} A_{i1} + (-1)^{i+2}\alpha_{i2} A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+\nu}\alpha_{i\nu} A_{i\nu}$$

Ο υπολογισμός όμως μιας ορίζουσας με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ορίζουσας μικρότερης τάξης είναι ιδιαίτερα επίπονος, για ν μεγαλύτερο του 4. Γιαυτό επιχειρούμε να την υπολογίσουμε στηριζόμενοι στις παρακάτω ιδιότητες:

i) Η τιμή μιας ορίζουσας αλλάζει πρόσημο κάθε φορά που αντιμεταθέτουμε μία γράμμη με κάποια άλλη (το ίδιο συμβαίνει και με αντιμετάθεση δύο στηλών).
ii) Η τιμή μιας ορίζουσας δεν μεταβάλλεται εάν στα στοιχεία κάποιας γραμμής προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία κάποιας άλλης γραμμής, πολλαπλασιασμένα επί τον ίδιο σταθερό αριθμό.
iii) Η τιμή μιας ορίζουσας, της οποίας τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω ή (και) κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι όλα ίσα με το μηδέν, ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ιδιότητες, προσπαθούμε να μηδενίσουμε τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο. Αρχικά, μηδενίζουμε, με το στοιχείο α_{11} (το πρώτο της πρώτης γραμμής), τα πρώτα στοιχεία των παρακάτω γραμμών (τα α_{21}, α_{31} κ.λ.π.). Ο μηδενισμός του στοιχείου α_{21} επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με τη σταθερά:

$$\boldsymbol{\kappa = -\alpha_{21}/\alpha_{11},}$$

και προσθέτοντας τα στοιχεία της στα αντίστοιχα της δεύτερης:

$$A = \begin{array}{c} {}^{*}\!-\alpha_{21}/\alpha_{11} \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots\ldots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots\ldots & \alpha_{2\mu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots\ldots & \alpha_{3\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \alpha_{\nu3} & \ldots\ldots & \alpha_{\nu\mu} \end{bmatrix} {}^{*}\!-\alpha_{31}/\alpha_{11}$$

Στη συνέχεια, με παρόμοιο τρόπο, το στοιχείο α_{22} (αυτό που θα προκύψει μετά τις προηγούμενες πράξεις στη θέση αυτή), μηδενίζει τα κάτω απ'αυτό στοιχεία (τα α_{32}, α_{42}, κ.λ.π.). Εάν συμβεί το στοιχείο α_{22} να είναι ίσο με το μηδέν, τότε αντιμεταθέτουμε τη 2η σειρά με κάποια από τις παρακάτω, έτσι ώστε το α_{22} να γίνει διάφορο του μηδενός. Εάν αυτό είναι αδύνατο να συμβεί, οπότε το α_{22} θα είναι ούτως ή άλλως μηδέν, συμπεραίνουμε πως η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν (γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου από τα οποία το ένα θα είναι μηδέν).

β) Εφαρμογή στο Excel.

Στο φύλλο του Excel θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε έτσι τις πράξεις, ώστε να είναι δυνατό να τις επεκτείνουμε μηχανικά. Και πάλι είναι σημαντικό να σκεφθούμε τις πράξεις που θέλουμε να ορίσουμε σε κάθε κελί. Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα δίνονται οι επιθυμητές πράξεις για έναν πίνακα 3x3.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		2	3	4		
3	A=	1	-2	3	=	
4		3	2	2		
5						
6		**=B2**	=C2	=D2		
7	=	**=B3-B2*B3/B2**	**=C3-C2*B3/B2**	=D3-D2*B3/B2		
8		**=B4-B2*B4/B2**	=C4-C2*B4/B2	=D4-D2*B4/B2		
9						
10						

Μια προσεκτικότερη ματιά μας επιτρέπει να αντιληφθούμε πως οι απαιτούμενες ενέργειες είναι οι παρακάτω:

i) Ορισμός του κελιού B6 (=B2),
ii) σύρσιμο του κελιού B6, έως το τέλος της 1ης γραμμής του πίνακα.
iii) Τοποθέτηση του τύπου που αντιστοιχεί στο κελί B7 (=B3-B2*B3/B2).
iv) Τοποθέτηση του συμβόλου **$,** στις συντεταγμένες των κελιών που εμφανίζονται στο κελί B7 (προηγούμενη ενέργεια), έτσι ώστε σύροντας το κελί προς τα δεξιά (ώς το τέλος της γραμμής), και στη συνέχεια ολόκληρη τη γραμμή προς τα κάτω, να υπολογίζονται όλα όσα θέλουμε.

Από τις προηγούμενες ενέργειες, μόνον η (iv) θέλει κάποια σκέψη, που νομίζουμε πως αξίζει τον κόπο... Στη συνέχεια με τον ίδιο τρόπο μηδενίζονται και τα υπόλοιπα στοιχεία, έτσι ώστε η τιμή της ορίζουσας να δίνεται από το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.

Σαν άσκηση, λοιπόν, υπολογίστε την ορίζουσα του παρακάτω πίνακα.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		1	2	1	0		1	2	1	0	
3		2	2	3	1	=	0	-2	1	1	=
4		3	1	5	1		0	-5	2	1	
5		2	1	3	2		0	-3	1	2	
6											
7		1	2	1	0		1	2	1	0	
8		0	-2	1	1	=	0	-2	1	1	= 2
9		0	0	-0,5	-1,5		0	0	-0,5	-1,5	
10		0	0	-0,5	0,5		0	0	0	2	
11											

γ) Λύση γραμμικών συστημάτων με το Excel.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τον «προγραμματισμό» της μεθόδου των Gauss-Cholevsky, με το Excel. Η μαθηματική περιγραφή της μεθόδου έχει ήδη γίνει. Το μόνο που μένει να πούμε είναι πως ο μηδενισμός των συντελεστών του επαυξημένου πίνακα, στο Excel, γίνεται όμοια με το μηδενισμό των συντελεστών της ορίζουσας, στην προηγούμενη παράγραφο.

Στη συνέχεια, σας ζητούμε να υπολογίσετε τη λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= -13 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 30 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= -17 \end{aligned}$$

Αξίζει να προσπαθήσετε να παρακολουθήσετε τη σειρά των πράξεων που σας προτείνουμε στη συνέχεια, όπου σε κάθε πέρασμα κάνουμε δύο δουλειές: Μονάδα το στοιχείο της διαγωνίου και μηδενισμό των υπολοίπων της στήλης. Αξίζει επίσης να τονίσουμε πως με τον ίδιο τρόπο μηδενίζουμε και το άνω τριγωνικό τμήμα του πίνακα των συντελεστών, μια και το Excel επιτρέπει το προς τα πάνω «σύρσιμο»...

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	2	-1	3	4	2		1	-0,5	1,5	2	1	
3	1	-2	2	1	-13	=	0	-1,5	0,5	-1	-14	=
4	3	3	2	4	30		0	4,5	-2,5	-2	27	
5	-2	-3	4	6	-17		0	-4	7	10	-15	
6												
7	1	-0,5	1,5	2	1		1	-0,5	1,5	2	1	
8	0	1	-0,333	0,667	9,333	=	0	1	-0,333	0,667	9,333	=
9	0	0	-1	-5	-15		0	0	1	5	15	
10	0	0	5,667	12,667	22,333		0	0	0	-15,667	-62,667	
11												
12	1	-0,5	1,5	0	-7		1	-0,5	0	0	0,5	
13	0	1	-0,333	0	6,6667	=	0	1	0	0	5	=
14	0	0	1	0	-5		0	0	1	0	-5	
15	0	0	0	1	4		0	0	0	1	4	
16												
17				1	0	0	0	3				
18				0	1	0	0	5				
19				0	0	1	0	-5				
20				0	0	0	1	4				
21												

Τελειώνοντας το φύλλο εργασίας (έχοντας υπολογίσει σωστά τα αποτελέσματα) ξαναεπιχειρείστε να υπολογίσετε τη λύση του συστήματος:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 38\\
5x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 70\\
9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 &= 186\\
-5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

2.Δ.4 Συστήματα εξισώσεων 2 μεταβλητών.

α) Μαθηματική ανάλυση:

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη λύση 2 μη γραμμικών εξισώσεων, με 2 αγνώστους. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε το πιο κάτω σύστημα:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 0 \qquad (\Sigma 1)\\
g(x,y) &= 0
\end{aligned}
$$

όπου οι συναρτήσεις f και q (συναρτήσεις 2 μεταβλητών) συμβολίζουν το αριστερό μέλος των εξισώσεων.

Για το σύστημα αυτό υπάρχει μία ορίζουσα (Δ), που ονομάζεται Ιακωβιανή, η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική και που ορίζεται μέσω των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων f και g, ως προς τις μεταβλητάς x και y.

$$\Delta = \frac{D(f,g)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Για να υπάρχει λύση του συστήματος (Σ1) σε μια περιοχή που καθορίζεται από τα διαστήματα (x_o-a ,x_o+a) και (y_o-b , y_o+b), θα πρέπει στην περιοχή αυτή η Ιακωβιανή να είναι διάφορη του μηδενός.

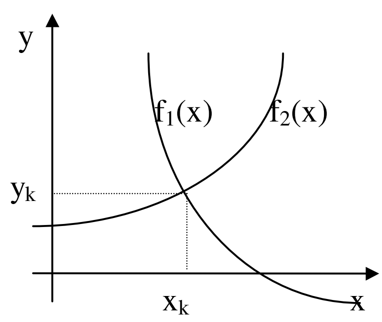
Οι λύσεις του συστήματος (Σ1) είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων δυάδων (x_j , y_j), οι οποίες επαληθεύουν το σύστημα.

β) Γραφική μέθοδος.

Για να μπορέσουμε να υλοποιήσουμε την γραφική μέθοδο προσδιορισμού των λύσεων του συστήματος (Σ1), θα πρέπει να μπορούμε να επιλύσουμε τις δύο εξισώσεις ως προς μία από τις δύο μεταβλητές x ή y. Θεωρούμε λοιπόν ότι το (Σ1) μετατρέπεται στο επόμενο:

$$(\Sigma 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{array}$$

Η λύση του συστήματος θα είναι μία δυάδα η οποία επαληθεύει, ταυτόχρονα και τις δύο συναρτήσεις. Άρα, κάνοντας το γράφημα των f_1 και f_2, έχουμε τη δυάδα λύσης, η οποία δεν είναι παρά η δυάδα των συντεταγμένων του σημείου τομής: (x_k,y_k).



γ) Η μέθοδος του Newton.

Η μέθοδος του Newton λειτουργεί παρόμοια με την αντίστοιχη, που υπολογίζει τις ρίζες μιας συνάρτησης. Για να ξεκινήσει χρειάζεται μια πρώτη προσέγγιση (x_o,y_o) της λύσης την οποία προσπαθούμε να υπολογίσουμε, ενώ ταυτόχρονα θα πρέπει η Ιακωβιανή να είναι διάφορη του μηδενός στην περιοχή του σημείου (x_o,y_o), που περιέχει τη λύση.

Ξεκινώντας λοιπόν από την πρώτη προσέγγιση (x_o,y_o), φθάνουμε σε μία καλύτερη προσέγγιση (x_1,y_1), με τη βοήθεια των τύπων:

$$x_1 = x_o + a \quad \text{και} \quad y_1 = y_o + b$$

όπου τα a και b αποτελούν τη λύση του επόμενου γραμμικού συστήματος:

$$f(x_o,y_o) + a\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + b\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

$$g(x_o,y_o) + a\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} + b\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας σαν σημείο εκκίνησης το (x_1,y_1), υπολογίζουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο την επόμενη προσέγγιση: (x_2,y_2).

Παρατηρήσεις:

- Μία ένδειξη πως βαδίζουμε προς τη σωστή κατεύθυνση μας δίνουν οι τιμές των συναρτήσεων: $f(x_j,y_j)$ και $g(x_j,y_j)$, οι οποίες πρέπει διαρκώς να τείνουν προς το μηδέν. Κάποιες φορές, ειδικά στο ξεκίνημα της διαδικασίας, μπορεί κάποιο από τα x ή y να κινηθούν έτσι ώστε οι συναρτήσεις f και g να μην μειώνουν τις απόλυτες τιμές τους. Αυτό συμβαίνει συχνά και στην περίπτωση όπου η μία από τις δύο προσέγγιστικές τιμές, x_o ή y_o, είναι πολύ κοντά στη λύση, ενώ η άλλη όχι.
- Σταματούμε την επαναληπτική διαδικασία όταν, και για τις δύο μεταβλητές, η διαφορά ανάμεσα στην προηγούμενη και στην επόμενη προσεγγιστική τιμή είναι μικρότερη της απαιτούμενης ακρίβειας.

$$|x_j - x_{j-1}| \le \varepsilon$$

$$|y_j - y_{j-1}| \le \varepsilon$$

δ) Παράδειγμα.

Δίνεται το σύστημα των εξισώσεων:

$$\mathbf{f(x,y) = x^2 + xy^3e^x - 15 = 0}$$
$$\mathbf{g(x,y) = xy + x^2 ημx - 3 = 0}$$

Ζητούνται:

i) Με τη γραφική λύση να υπολογισθεί μια πρώτη προσέγγιση της λύσης του, όταν το x ανήκει στο διάστημα (1,4).

ii) Με τη μέθοδο του Newton να υπολογισθεί η λύση του συστήματος, ξεκινώντας από την προηγούμενη προσέγγιση και ακρίβεια ε=0.001.

Λύση:

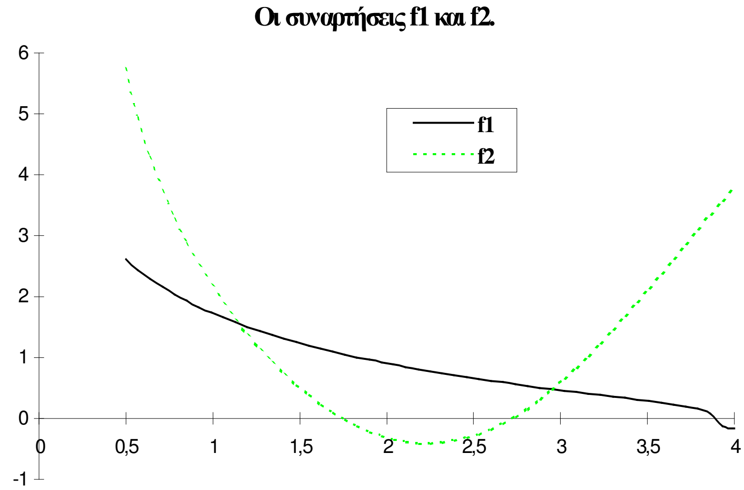
i) Γραφική Λύση: Λύνοντας τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς y έχουμε:

$$y = f_1(x) = \sqrt[3]{\frac{15 - x^2}{xe^x}}$$

$$y = f_2(x) = \frac{3 - x^2 \eta\mu x}{x}$$

Στη συνέχεια κάνουμε τον πίνακα τιμών για τις δύο αυτές συναρτήσεις, καθώς και τη γραφική τους παράσταση, από την οποία κάνουμε μια πρώτη πρόβλεψη για τη δυάδα των τιμών της λύσης.

x	f1	f2
1	1,727	2,159
2	0,906	-0,319
3	0,463	0,577
4	-0,166	3,777



Βέβαια, η γραφική παράσταση που έγινε με τη βοήθεια υπολογιστή είναι πολύ ακριβέστερη απ'αυτήν που θα κάναμε με τη βοήθεια του πίνακα τιμών. Όμως, ακόμη και από την προσεγγιστική των τεσσάρων σημείων, θα μπορούσαμε να εξάγουμε ικανοποιητικά συμπεράσματα. Παρατηρούμε λοιπόν πως στο διάστημα (1,4) για το x, υπάρχουν δύο λύσεις (δύο σημεία τομής των f_1 και f_2). Αποφασίζουμε να υπολογίσουμε τη δυάδα που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο x. Δίνουμε λοιπόν σαν προσεγγιστικές τιμές τις:

$$x_o = 2,9 \quad \text{και} \quad y_o = 0,5$$

ii) Μέθοδος του Newton: Αρχικά υπολογίζουμε τις τέσσερις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων f και g.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (x^2+xy^3e^x-15)}{\partial x} = 2x+y^3e^x(x+1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (x^2+xy^3e^x-15)}{\partial y} = 3xy^2e^x$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial (xy + x^2\eta\mu x - 3)}{\partial x} = y+2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial (xy + x^2\eta\mu x - 3)}{\partial y} = x$$

Για να συστηματοποιήσουμε την επίλυση του προβλήματος, λύνουμε το γραμμικό σύστημα που έχει σαν αγνώστους τις ποσότητες a και b. Γράφοντας παραστατικά τις μερικές παραγώγους υπό τη μορφή: f'_x , f'_y , g'_x , g'_y , και τις τιμές των συναρτήσεων f και g στο σημείο (x_o,y_o) σαν f_o και g_o, έχουμε:

$$a = \frac{f_o * g'_y - g_o * f'_y}{f'_y * g'_x - f'_x * g'_y} \quad \text{και} \quad b = \frac{-f_o - a * f'_x}{f'_y}$$

Για άλλη μια φορά, δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών, στον οποίο ξεκινούμε από τις τιμές x_o και y_o (επιλέγουμε τις στρογγυλεμένες τιμές x_o=3 και y_o=0,5), υπολογίζουμε στη συνέχεια τις τιμές των συναρτήσεων $f(x_o,y_o)$ και $g(x_o,y_o)$, και των τεσσάρων μερικών παραγώγων (πάντα στο σημείο (x_o,y_o)). Χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους τύπους υπολογίζουμε τα a και b. Τέλος βρίσκουμε με μια άθροιση τις νέες προσεγγίσεις x_1 και y_1.

Από την περιγραφή των πράξεων που έχουμε να κάνουμε, γίνεται φανερό πως πρόκειται για μια μέθοδο που χρειάζεται μάλλον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Πίνακας τιμών.

x	3	2,961565	2,95966	2,959654
y	0,5	0,479743	0,478129	0,478121
f(x,y)	1,532076	0,091172	0,000399	7,96E-09
g(x,y)	-0,22992	-0,00873	-2E-05	-2E-10
f_x	16,04277	14,37754	14,26876	14,26827
f_y	45,19246	39,52308	39,15771	39,15609
g_x	-7,56321	-7,0888	-7,0659	-7,06583
g_y	3	2,961565	2,95966	2,959654
a	-0,03843	-0,00191	-6,2E-06	-9,8E-11
b	-0,02026	-0,00161	-7,9E-06	-1,7E-10

Από τον πίνακα τιμών προκύπτει πως η λύση του πιο πάνω συστήματος είναι η δυάδα (2,95965 , 0,47812).

Παρατηρήσεις.

- Η μέθοδος αυτή προγραμματίζεται με τρόπο προφανή στο Excel. Άλλωστε ο πίνακας τιμών που παραθέσαμε σαν λύση του προβλήματος προέρχεται αυτούσιος από το Excel.

- Η λύση που βρίκαμε έχει σαφώς μεγαλύτερη ακρίβεια από την απαιτούμενη. Αυτό φαίνεται από τον τρόπο που συγκλίνουν οι ακολουθίες των τιμών x_j και y_j.
- Το ότι είμασταν σε καλό δρόμο, γινόταν φανερό κι από τη σύγκλιση των τιμών των συναρτήσεων f και g προς το μηδέν.
- Όποιος έχει τη διάθεση να περάσει το πιο πάνω πρόβλημα στο Excel, θα διαπιστώσει πως αλλάζοντας τις αρχικές προσεγγιστικές τιμές, μπορεί να υπολογίσει και άλλες λύσεις. Έτσι, για παράδειγμα, εάν θέσει

$$x_o = 1{,}3 \quad \text{και} \quad y_o = 1{,}6$$

θα βρεί σαν λύση:

$$x_o = 1{,}151237 \quad \text{και} \quad y_o = 1{,}554504$$

όπου μάλιστα όλα τα ψηφία είναι ακριβή.

2.Δ.5 Ασκήσεις.

1η) Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z + t &= 4 \\ x - 2y + 3z - 2t &= -2 \\ -x + 2y + z + t &= 7 \\ x + y + z + t &= 6 \end{aligned}$$

Να επιλυθεί,

- με τη μέθοδο των Gauss-Cholevski
- με τη βοήθεια των οριζουσών.

2η) Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 + 4y^2 = 0 \\ g(x,y) &= x\eta\mu x - 2\sqrt{y} = 0 \end{aligned}$$

- Να υπολογισθεί πρόχειρα η λύση του, με τη γραφική μέθοδο.
- Να υπολογισθεί η λύση του με τη μέθοδο του Newton και ακρίβεια μεγαλύτερη του ε=0,001

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ - ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ.

3.Α. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ.

Αν και με την παρεμβολή θα ασχοληθούμε διεξοδικότερα στο 3ο Κεφάλαιο, εν τούτοις θα πούμε δύο λόγια και σ'αυτήν την παράγραφο. Προτιμούμε να αναφερθούμε και να ορίσουμε τώρα την έννοια της παρεμβολής, γιατί έχει άμεση σχέση με τα πολυώνυμα. Στο κεφάλαιο αυτό, και για διδακτικούς μόνο λόγους, θα περιγράψουμε την παρεμβολή με έναν τρόπο ιδιαίτερα απλό, ο οποίος όμως, όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια δεν είναι ο συντομότερος, ούτε ο αποτελεσματικότερος.

3.Α.1 Γενικά.

Πολλές φορές συγχέουμε την έννοια της συνάρτησης με την ύπαρξη ενός Μαθηματικού τύπου που να καθορίζει την τιμή της συνάρτησης σε κάθε σημείο του Πεδίου Ορισμού της. Πολύ συχνά όμως στις πρακτικές εφαρμογές, μία συνάρτηση μπορεί να ορισθεί με έναν πίνακα τιμών ή την γραφική της παράσταση. Αυτό συμβαίνει γιατί ο Μαθηματικός τύπος με τον οποίο ορίζεται η συνάρτηση είτε είναι πολύπλοκος, είτε δεν υπάρχει[(1)].

Σε καμμιά από τις περιπτώσεις αυτές η τιμή της συνάρτησης δεν ορίζεται με τρόπο συνεχή πάνω στο πεδίο ορισμού της. Συχνά λοιπόν έχουμε την τιμή της συνάρτησης για κάποιες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, ενώ συνήθως την χρειαζόμαστε σε κάποιες άλλες. Αντιμετωπίζουμε επομένως το πρόβλημα του καθορισμού μιας μεθόδου με την οποία να υπολογίζουμε την τιμή μιας συνάρτησης -π.χ. πινακοποιημένης- για τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές του πίνακα. Η πράξη αυτή λέγεται παρεμβολή γιατί προσπαθεί να παρεμβάλει νέες τιμές ανάμεσα στις ήδη υπάρχουσες.

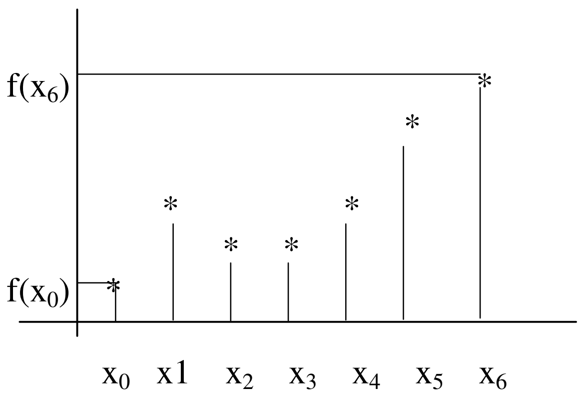
Το πρόβλημα της παρεμβολής έχει απασχολήσει από παλιά τους Μαθηματικούς, μια και οι τομείς στους οποίους μπορεί να εφαρμοσθεί είναι πάρα πολλοί. Στην σημερινή εποχή της τεράστιας τεχνολογικής προόδου και της ανάπτυξης της Πληροφορικής με βάση τις μεθόδους της παρεμβολής επιλύνονται προβλήματα πολύπλοκα, όπως υπολογισμός πολύπλοκων ολοκληρωμάτων, ολοκληρώσεις συστημάτων Διαφορικών Εξισώσεων, διόρθωση και εμπλουτισμός δεδομένων κ.λ.π.

[(1)] *Πολύ συχνά δεν υπάρχει Μαθηματικός τύπος γιατί η συνάρτηση περιγράφει κάποια πειραματικά αποτελέσματα.*

Στην βάση των περισσότερων μεθόδων παρεμβολής υπάρχει η αντικατάσταση της άγνωστης ή πολύπλοκης συνάρτησης με κάποιο πολυώνυμο. Πρόκειται βέβαια για το πολυώνυμο που παίρνει τις ίδιες τιμές με την συνάρτηση, σε κάποια από τα σημεία που αυτή είναι γνωστή και που το ονομάσαμε ήδη **συμπτωτικό.**

3.Α.2 Εκλογή του συμπτωτικού πολυωνύμου.

Παρ'όλον ότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι σχετικά απλές, τα προβλήματα που συνοδεύουν την παρεμβολή είναι πολλά και σημαντικά. Ετσι πρέπει: **(i)** να αποφασίσουμε γιά τον βαθμό του πολυωνύμου με το οποίο θα παρεμβάλουμε (άρα για τον αριθμό των σημείων σύμπτωσης πολυωνύμου και συνάρτησης), **(ii)** να εκτιμήσουμε το μέγιστο σφάλμα στο τελικό αποτέλασμα.



Υποθέτουμε λοιπόν πως η συνάρτηση f δίνεται με την διπλανή γραφική παράσταση και ζητούμε την τιμή της σε κάποιο χ_0 του διαστήματος (χ_3,χ_4). Προσπαθώντας να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο χ_0 με παρεμβολή, έχουμε την δυνατότητα να διαλέξουμε τον βαθμό του πολυώνυμου σύμπτωσης, άρα και τον αριθμό των σημείων σύμπτωσης, καθώς και τα συγκεκριμένα σημεία σύμπτωσης.

Αν επιλέξουμε να παρεμβάλουμε με πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού, είναι σαν να αντικαθιστούμε στο διάστημα $(\chi_3\ ,\ \chi_4)$ τη συνάρτηση f με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία. Από το τμήμα αυτό θα "δανεισθούμε" την τιμή του $f(\chi_0)$. Εάν θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε και τα 7 σημεία που μας δίνονται, θα χρειαστούμε το συμπτωτικό τους πολυώνυμο, το οποίο θα είναι $6^{ου}$ βαθμού. Όμως οι πράξεις που απαιτούνται για τον καθορισμό των 7 παραμέτρων του πολυωνύμου αυτού είναι ασύγκριτα περισσότερες σε σύγκριση μ'αυτές του πρωτοβαθμίου, ενώ η ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος μπορεί να μην είναι αντίστοιχα σημαντικότερη. Χρειαζόμαστε λοιπόν κάποια ένδειξη που να μας βοηθάει στην εκλογή του βαθμού του συμπτωτικού πολυωνύμου, που αποτελεί τη χρυσή τομή ανάμεσα στην ακρίβεια του υπολογισμού και στην ποσότητα των πράξεων που πρέπει να γίνουν.

3.A.3 Παράδειγμα.

Στο διπλανό πίνακα δίνονται τέσσερις τιμές μιας συνάρτησης y=f(x), και πρέπει να υπολογίσουμε με πολυωνυμική παρεμβολή κάποιων ενδιάμεσων τιμών.

x	0	1	4	9
f(x)	0	1	2	3

Èα δοθούν δύο λύσεις. Στην πρώτη θα διαλέξουμε πρωτοβάθμια πολυώνυμα, ενώ στη δεύτερη θα υπολογίσουμε το τριτοβάθμιο συμπτωτικό πολυώνυμο, που ορίζεται από τα τέσσερα σημεία του πίνακα.

i) Πρωτοβάθμια πολυώνυμα.

(α) Για το διάστημα [0,1] τα σημεία (0,0) και (1,1) ορίζουν το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 0\alpha + \beta = 0 \\ 1\alpha + \beta = 1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \alpha=1 \\ \beta=0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{ Η ευθεία: } y = x$$

(β) Για το διάστημα [1,4] τα σημεία (1,1) και (4,2) ορίζουν το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 1\alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + \beta = 2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \alpha=1/3 \\ \beta=2/3 \end{array}\right| \Rightarrow \text{ Η ευθεία: } y = x/3 + 2/3$$

(γ) Για το διάστημα [4,9] τα σημεία (4,2) και (9,3) ορίζουν το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 4\alpha + \beta = 2 \\ 9\alpha + \beta = 3 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \alpha=1/5 \\ \beta=6/5 \end{array}\right| \Rightarrow \text{ Η ευθεία: } \mathbf{y = x/5 + 6/5}$$

ii) Τριτοβάθμιο πολυώνυμο.

Ακολουθώντας τη μέθοδο της παραγράφου 1.A.5, ορίζουμε το πολυώνυμο:

$$\pi(\chi) = \alpha + \beta(\chi-\chi_0) + \gamma(\chi-\chi_0)(\chi-\chi_1) + \delta(\chi-\chi_0)(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)$$

υιοθετώντας τα εξής χ: $\chi_0=0$, $\chi_1=1$, $\chi_2=4$. Έτσι το προηγούμενο πολυώνυμο παίρνει τη μορφή:

$$\pi(\chi) = \alpha + \beta\chi + \gamma\chi(\chi-1) + \delta\chi(\chi-1)(\chi-4)$$

οπότε αντικαθιστώντας τα 4 σημεία του πίνακα, υπολογίζουμε τις τιμές των αγνώστων παραμέτρων:

$$\begin{array}{ll} \pi(0) = 0 = \alpha & \Rightarrow \mathbf{\alpha=0} \\ \pi(1) = 1 = \beta & \Rightarrow \mathbf{\beta=1} \\ \pi(4) = 2 = 4 + 12\gamma & \Rightarrow \mathbf{\gamma=-1/6} \\ \pi(9) = 3 = 9 - 9*8/6 + 9*8*5*\delta & \Rightarrow \mathbf{\delta=1/60} \end{array}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων α, β, γ και δ στη σχέση του πολυωνύμου και κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε:

$$\pi(\chi) = \frac{1}{60}[\chi^3 - 15\chi^2 + 74\chi]$$

Ας υπολογίσουμε στη συνέχεια την τιμή f(2) με τα δύο είδη παρεμβολής:

Με την πρωτοβάθμια (γραμμική).

$$f(2) = [x/3 + 2/3\,]_{x=2} = 2/3 + 2/3 = 4/3 = 1{,}333$$

Με την τριτοβάθμια (πλήρη).

$$f(2) = \frac{1}{60}[\chi^3 - 15\chi^2 + 74\chi]_{x=2} = 96/60 = 1{,}6$$

Παρατήρηση: Είναι κατανοητό πως τα όσα ειπώθηκαν στην παράγραφο αυτή αφήνουν αρκετά σημεία αδιευκρίνιστα. Όμως θα επανέλθουμε σε επόμενη παράγραφο.

2.Α.4 Οι πεπερασμένες διαφορές.

Υποθέτουμε πως γνωρίζουμε τη συνάρτηση f(x) με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών, στον οποίο οι τιμές της ανεξάρτητης ισαπέχουν μεταβλητής (ισχύει δηλαδή $\mathbf{x_{i+1}}$-$\mathbf{x_i}$ = **h** = σταθ.).

x_i	x_0 x_1 x_2 .... x_ν
y_i	y_0 y_1 y_2 .... y_ν

Ένας τέτοιος πίνακας καλείται **πίνακας ισαπεχόντων ορισμάτων.**

Προσπαθώντας να κατανοήσουμε τη φύση, τη συμπεριφορά και τις ιδιότητες αυτής της συνάρτησης, ορίζουμε τις διαφορές των τιμών της. Αφαιρούμε λοιπόν από κάθε επόμενη τιμή την αμέσως προηγούμενη και την γράφουμε από κάτω τους και ανάμεσά τους, ονομάζοντάς τες **διαφορές πρώτης τάξης**. Στη συνέχεια, με όμοιο τρόπο, ορίζουμε τις διαφορές των διαφορών (τις οποίες ονομάζουμε διαφορές δεύτερης τάξης) κ.λ.π., προχωρώντας σε διαφορές μεγαλύτερης τάξης.

Πίνακας πεπερασμένων διαφορών
της συνάρτησης y=f(x).

x_i	x_0		x_1		x_2		x_3		x_4 ...
$y_i=f(x_i)$	y_0		y_1		y_2		y_3		y_4 ...
		Δy_0		Δy_1		Δy_2		Δy_3	...
			$\Delta^2 y_0$		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^2 y_2$	...	
				$\Delta^3 y_0$		$\Delta^3 y_1$	...		
					$\Delta^4 y_0$	...			

όπου έχουμε τις σχέσεις:

Γενική έκφραση	Παράδειγμα
$\Delta y_i \ = y_{i+1}-y_i$	$\Delta y_0 \ = y_1-y_0$
$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1}-\Delta y_i = y_{i+2}-2y_{i+1} +y_i$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1-\Delta y_0 = y_2-y_1 - y_1+y_0 = y_2-2y_1 +y_0$
$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1}-\Delta^2 y_i =$ $= y_{i+3} -3y_{i+2}+3y_{i+1} -y_i$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0 = \ y_3 -3y_2+3y_1 -y_0$

Παράδειγμα: Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές μιας συνάρτησης f(x), για 9 τιμές του ορίσματος x. Από κάτω έχουμε υπολογίσει τον πίνακα των πεπερασμένων διαφορών.

x_i	-3		-2		-1		0		1		2		3		4		5
y_i	157		44		13		10		5		-8		-11		38		205
Δy_i		-113		-31		-3		-5		-13		-3		49		167	
$\Delta^2 y_i$			82		28		-2		-8		10		52		118		
$\Delta^3 y_i$				-54		-30		-6		18		42		66			

3.A.5 Ιδιότητες των πεπερασμένων διαφορών.

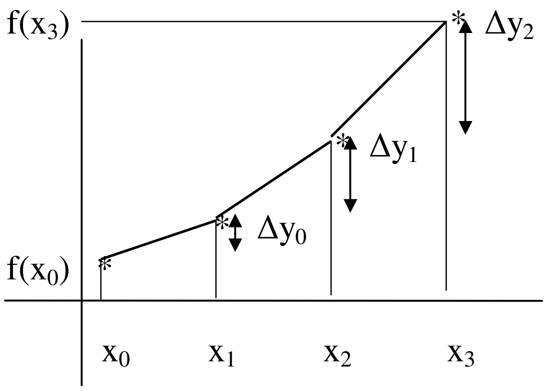
Οι πεπερασμένες διαφορές έχουν κάποιες σημαντικές ομοιότητες με τις παραγώγους. Αναφέρουμε στη συνέχεια κάποιες ιδιότητες, αναλύοντάς τες αλλά χωρίς να τα αποδεικνύουμε:

i) Όταν οι διαφορές πρώτης τάξης (Δy_i) είναι μεγαλύτερες του μηδενός, τότε οι τιμές της συνάρτησης y_i είναι αύξουσες (να θυμηθούμε πως ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη παράγωγο). Όμοια, εάν οι δεύτερης τάξης διαφορές είναι θετικές (αρνητικές), τότε οι τιμές y_k δημιουργούν ένα γράφημα που στρέφει τα κοίλα άνω (κάτω). Άλλωστε δεν θα πρέπει να ξεχνούμε πως το κλάσμα $\Delta y_i /h$, είναι μια πρώτη προσέγγιση της τιμής της παραγώγου της f στο σημείο x_i.

ii) Εάν οι τιμές y_i δίνονται από μία πολυωνυμική συνάρτηση ν-οστού βαθμού, τότε οι πρώτης τάξης διαφορές δίνονται από κάποια πολυωνυμική συνάρτηση ν-1 βαθμού, οι δεύτερης τάξης διαφορές δίνονται από κάποια πολυωνυμική συνάρτηση ν-2 βαθμού, κ.ο.κ.. (Και η ιδιότητα αυτή ισχύει για τις παραγώγους: $y=x^4$, $y' =4x^3$, $y''=12y^2$ ...)

iii) (Πόρισμα της προηγούμενης) Εάν οι τιμές y_i δίνονται από μία πολυωνυμική συνάρτηση ν-οστού βαθμού, τότε οι διαφορές ν-ής τάξης δίνονται από κάποια πολυωνυμική συνάρτηση μηδενικού βαθμού, δηλαδή είναι σταθερές. Μάλιστα, η τιμή των σταθερών διαφορών ν-τάξης, διηρημένη με το βήμα h του πίνακα, υψωμένο εις την ν [$\Delta^{\nu} y_j /h^{\nu}$], είναι ακριβώς ίση με την τιμή της παραγώγου ν-οστής τάξης, η οποία είναι επίσης σταθερή.

iv) Εάν οι τιμές y_i δίνονται από μία μη πολυωνυμική συνάρτηση ν-οστού βαθμού, τότε δεν καταλήγουμε ποτέ σε σταθερές διαφορές (αντίστοιχα μία μη πολυωνυμική συνάρτηση έχει άπειρες παραγώγους).



Στη διπλανή γραφική παράσταση έχουμε:

(α) διαφορές θετικές και
(β) αύξουσες διαφορές.

Παρατηρούμε λοιπόν πως η συνάρτηση f είναι:

(α) αύξουσα και
(β) στρέφει τα κοίλα προς τα άνω.

3.Α.6. Παράδειγμα.

Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης του προηγουμένου παραδείγματος:

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y_i	157	44	13	10	5	-8	-11	38	205

i) Είναι πολυωνυμική;
ii) Εάν είναι πολυωνυμική, τότε ποιός είναι ο βαθμός της και ποιός είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου της;
iii) Να υπολογισθεί το εν λόγω πολυώνυμο.

Λύση:

Ξανακάνουμε τον προηγούμενο πίνακα διαφορών, επεκτείνοντας τον σε μεγαλύτερης τάξης διαφορές.

x_i	-3		-2		-1		0		1		2		3		4		5
y_i	157		44		13		10		5		-8		-11		38		205
Δy_i		-113		-31		-3		-5		-13		-3		49		167	
$\Delta^2 y_i$			82		28		-2		-8		10		52		118		
$\Delta^3 y_i$				-54		-30		-6		18		42		66			
$\Delta^4 y_i$					24		24		24		24		24				

i) Οι τέταρτης τάξης διαφορές είναι σταθερές, άρα οι τιμές y_i προέρχονται από μία πολυωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού.

ii) Οι σταθερές διαφορές τέταρτης τάξης θα είναι ίσες με την τιμή της τετάρτης παραγώγου (μια και το βήμα h του πίνακα με το οποίο πρέπει να διαιρεθούν είναι ίσο με το 1). Για να την υπολογίσουμε, ορίζουμε τον τεταρτοβάθμιο όρο σαν: ax^4. Ενθυμούμενοι πως οι όροι μικρότερης τάξης θα χαθούν κατά την παραγώγιση, έχουμε:

$$y = ax^4+\ldots \quad / \quad y' = 4ax^3+\ldots \quad / \quad y'' = 12ax^2+\ldots \quad / \quad y''' = 24ax+c \quad / \quad y^{(4)} = 24a$$

Εξισώνοντας τη σταθερή 4η παράγωγο με τη σταθερή 4η διαφορά έχουμε:

$$24a = 24 \quad \Rightarrow \quad a=1$$

iii) Για να ορίσουμε ένα πολυώνυμο 4ου βαθμού χρειαζόμαστε 5 σημεία. Διαλέγουμε λοιπόν 5 από τα σημεία του πίνακα (τα οποία ονομάζουμε x_0, x_1, x_2, x_3 και x_4), μ'όποια σειρά θέλουμε. Όπως κάναμε σε ανάλογο πρόβλημα του προηγουμένου κεφαλαίου, ορίζουμε το συμπτωτικό πολυώνυμο με τη βοήθεια των τεσσάρων από τις πέντε τιμών (των x_0, x_1, x_2 και x_3).

$$\pi(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + $$
$$+ a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) =$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x(x-1) + a_3x(x-1)(x+1) + a_4x(x-1)(x+1)(x-2)$$

επιλέξαμε δηλαδή $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ και $x_3 = 2$. Τοποθετούμε τις 5 τιμές (x_i,y_i) στο συμπτωτικό πολυώνυμο:

$$\left.\begin{array}{lll} \pi(0) = 10 = a_0 & \Rightarrow & a_0 = 10 \\ \pi(1) = 5 = 10+a_1 & \Rightarrow & a_1 = -5 \\ \pi(-1) = 13 = 10+5+2a_2 & \Rightarrow & a_2 = -1 \\ \pi(2) = -8 = 10 - 10 - 2 + 6a_3 & \Rightarrow & a_3 = -1 \\ \pi(3) = -11 = 10-15-6-24+24a_4 & \Rightarrow & a_4 = 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\pi(x) = 10 + -5x - x(x-1) - x(x-1)(x+1) + x(x-1)(x+1)(x-2) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\pi(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x + 10}$$

Παρατήρηση: Επειδή ο πίνακας μιας συνάρτησης έχει πεπερασμένου πλήθους σημεία (έστω ν), ο πίνακας διαφορών μπορεί να φθάσει μέχρι ττις διαφορές ν-1 τάξης. Εάν λοιπόν οι αρχικές τιμές y_i δίνονται από πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου του ν, τότε δεν θα συναντήσουμε πουθενά τις σταθερές διαφορές. Επομένως δεν θα μπορούμε να αποφανθούμε για το εάν οι τιμές y_i προέρχονται από πολυωνυμική ή μή πολυωνυμική συνάρτηση.

3.A.7 Το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton.

Ο προηγούμενος προσδιορισμός του συμπτωτικού πολυωνύμου είναι επίπονος και αρκετά δύσκολος στο να προγραμματισθεί. Για το λόγο αυτό πιο βολικός είναι ο προσδιορισμός του με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών.

Ας υποθέσουμε πως το συμπτωτικό πολυώνυμο γράφεται υπό τη μορφή:

$$y_k = \pi(x_k)$$

όπου με το x_k συμβολίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή του, αλλά και της συνάρτησης. Κατά τον υπολογισμό του συμπτωτικού πολυωνύμου εμφανίζεται η παράσταση $(x_k-x_0)/h$, οπότε εκτελούμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$k = \frac{(x_k-x_0)}{h} \quad {}^{(1)}$$

Το πολυώνυμο αυτό του Newton είναι όντως το συμπτωτικό, μια και παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση του πίνακα: $y_k = f(x_k) = \pi(k)$. Πράγματι:

$$\pi(0) = y_0 + 0$$
$$\pi(1) = y_0 + \Delta y_0 + 0 = y_0 + y_1 - y_0 = y_1$$
$$\pi(2) = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 + 0 = y_0 + 2y_1 - 2y_0 + \Delta y_1 - \Delta y_0 =$$
$$= y_0 + 2y_1 - 2y_0 + y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 \qquad \text{κ.λ.π.}$$

Παρατήρηση: Ο βαθμός του συμπ.πολυωνύμου του Newton μπορεί να επιλεγεί από το χρήστη. Το σκεπτικό σύμφωνα με το οποίο επιλέγεται θα παρουσιαστεί στην επόμενη άσκηση. Η τελική μορφή του πολυωνύμου(2) δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{y_k = \pi(x_k) = \pi(k) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots}$$

---

(1) *Όπου h είναι το σταθερό βήμα του πίνακα τιμών. Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς x_k έχουμε:*

$$x_k = x_0+kh \qquad (\pi.\chi.\quad x_3 = x_0+3h)$$

Επομένως με τη σχέση αυτή αντικαθιστούμε την κανονική μεταβλητή x_k με το δείκτη της k.

(2) *Ένας εύκολος τρόπος για να καταλήξει κανείς στο πολυώνυμο του Newton είναι να γράψει το y_k, συναρτήσει των διαφορών $\Delta^j y_k$.*

$$y_1 = y_0+\Delta y_0$$
$$y_2 = y_1+\Delta y_1 = y_0+\Delta y_0+\Delta y_0+\Delta^2 y_0 = y_0+2\Delta y_0+\Delta^2 y_0$$
$$y_3 = y_2+\Delta y_2 = \ldots = y_0+3\Delta y_0+3\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0$$
$$y_4 = y_3+\Delta y_3 = \ldots = y_0+4\Delta y_0+6\Delta^2 y_0+4\Delta^3 y_0+\Delta^4 y_0$$

....

Παρατηρούμε πως εμφανίζονται οι διωνυμικοί συντελεστές, οι συντελεστές δηλαδή του αναπτύγματος $(\alpha+\beta)^k$. Έτσι λοιπόν γράφουμε:

$$y_k = y_{k-1}+\Delta y_{k-1} = \ldots = \binom{k}{0} y_0+\binom{k}{1}\Delta y_0+\binom{k}{2}\Delta^2 y_0+ \ldots +\binom{k}{k-1}\Delta^{k-1} y_0+\binom{k}{k}\Delta^k y_0 =$$

$$= y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + k\Delta^{k-1} y_0 + \Delta^k y_0$$

2.A.8 Παρεμβολή με το συμπτ.πολυώνυμο του Newton.

Με τη χρήση του συμπτ.πολυωνύμου του Newton, η πλήρης παρεμβολή γίνεται απλούστερη. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε ένα πίνακα τιμών της συνάρτησης f και ζητούμε την τιμή της συνάρτησης σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο του πίνακα $\mathbf{x_k}$. Εργαζόμαστε λοιπόν ως εξής:

- Επιλέγουμε το βαθμό του συμπτωτικού πολυωνύμου που θα χρησιμοποιήσουμε για παρεμβολή. Ο βαθμός του πολυωνύμου μας επιβάλλει και το πλήθος των σημείων σύμπτωσης (τα οποία προφανώς είναι πολύ λιγότερα από το σύνολο των σημείων του πίνακα).
- Επιλέγουμε τα σημεία σύμπτωσης από τον πίνακα έτσι ώστε: **(α)** να είναι διαδοχικά και **(β)** το σημείο παρεμβολής (x_k) να βρίσκεται όσο πιο κεντρικότερα γίνεται ανάμεσα στα σημεία.
- Ονομάζουμε το πρώτο από τα επιλεγμένα σημεία x_0 (το οποίο προφανώς δεν είναι αναγκαίο να ταυτίζεται με το πρώτο σημείο του πίνακα), και ορίζουμε την τιμή του δείκτη k του σημείου παρεμβολής από τη σχέση:

$$k = (x_k - x_0)/h$$

- Υπολογίζω την τιμή y_k, από τον τύπο του Newton.

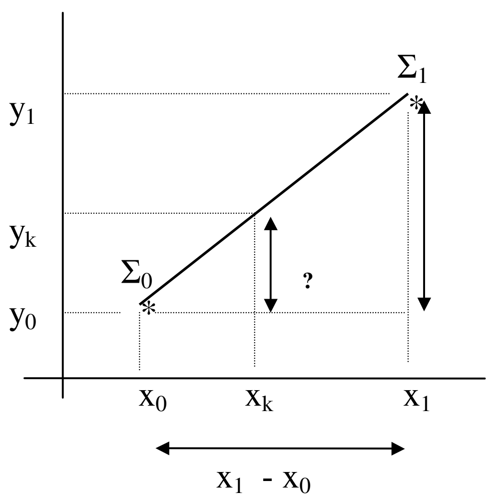
2.A.9 Γραμμική παρεμβολή.

Η γραμμική παρεμβολή είναι μία μερική περίπτωση της πλήρους παρεμβολής. Χρησιμοποιεί τους δύο πρώτους όρους του συμπτ.πολυωνύμου του Newton.

$$y_k = \pi(x_k) = \pi(k) = y_0 + k\Delta y_0$$

όπου και πάλι:

$$k = (x_k - x_0)/h$$



Ο τύπος της γραμμικής παρεμβολής προκύπτει πολύ εύκολα και με απλές πράξεις (απλή μέθοδος των τριών). Έστω πως γνωρίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία :

$$\Sigma_0\ (x_0,y_0) \text{ και } \Sigma_1\ (x_1,y_1)$$

και ζητούμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο (x_k,y_k). Ενώνουμε τα δύο γνωστά σημεία με ένα ευθύγραμμο τμήμα (το $\Sigma_0\Sigma_1$) και υπολογίζουμε το y_k με τη βοήθειά του. Επομένως στη γραμμική παρεμβολή αντικαθιστούμε τη συνάρτηση με μία ευθεία (ένα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο).

Έχουμε λοιπόν:

Για $\Delta x = (x_1 - x_0)$ έχουμε $\Delta y = (y_1 - y_0)$
Για $\Delta x = (x_k - x_0)$ έχουμε $\Delta y =$?

$$? = (y_1 - y_0) * (x_k - x_0) / (x_1 - x_0) = \Delta y_0 * (x_k - x_0)/h =$$
$$= \Delta y_0 * k$$

οπότε: $y_k = y_0 + ? = y_0 + k * \Delta y_0$

Παράδειγμα:

Η συνάρτηση f ορίζεται με τον παρακάτω πίνακα:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_i	0	0,09950	0,19601	0,28660	0,36842	0,43879	0,49520	0,53539	0,55737
	9950	9651	9059	8182	7037	5641	4019	2198	
	-299	-593	-876	-1146	-1396	-1622	-1821		
	-294	-284	-269	-250	-227	-199			
	10	15	19	24	27				

όπου οι διαφορές έχουν γραφεί σαν ακέραιες για ευκολία. Το ψηφίο των μονάδων τους όμως αντιστοιχεί στο τελευταίο δεκαδικό ψηφίο των δεδομένων (5ο). Επομένως, η διαφορά -294 είναι στην πραγματικότητα το -0,00294.

i) Τι βαθμού είναι το πολυώνυμο με το οποίο θα περεμβάλετε ανάμεσα στις τιμές του πίνακα;
ii) Να υπολογίσετε την τιμή f(0,43) χρησιμοποιώντας την πλήρη παρεμβολή.
iii) Να υπολογίσετε την τιμή f(0,43) χρησιμοποιώντας τη γραμμική παρεμβολή.
iv) Εάν η συνάρτηση του πίνακα είναι η f(x) = xσυνx, να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα των δύο προσεγγιστικών υπολογισμών του f(0,43).

Λύση:

i) Στο ερώτημα αυτό υπάρχουν δύο απαντήσεις: Εάν γράψουμε τις διαφορές τρίτης τάξης με τρία δεκαδικά ψηφία διαπιστώνουμε πως είναι σχεδόν ίσες (κυμαίνονται από 0,003 έως το 0,002). Εάν τις θεωρήσουμε λοιπόν σταθερές, είναι σαν να δεχόμαστε πως η εν λόγω συνάρτηση προσεγγίζεται από ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο (μια και το τριτοβάθμιο πολυώνυμο παρουσιάζει σταθερές τις διαφορές τρίτης τάξης).

Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε σανσταθερές τις διαφορές 4ης τάξης, των οποίων οι τιμές κυμαίνονται από το 0,0001 έως το 0,0003, οπότε θα υιοθετήσουμε τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο για να περεμβάλουμε στο εσωτερικό του πίνακα.

ii) Επιλέγουμε να παρεμβάλουμε με τη βοήθεια του τριτιβάθμιου συμπτ. πολυωνύμου, οπότε θα χρειασθούμε 4 σημεία, το οποία θα είναι διαδοχικά και θα έχουν στο κέντρο τους το σημείο παρεμβολής (0,43). Προφανώς, θα επιλέξουμε δύο σημεία αριστερά και δύο δεξιά του σημείου παρεμβολής.

$$x_0 = 0,3 \ , x_1 = 0,4 \ , x_2 = 0,5 \ \text{και} \ x_3 = 0,6$$

οπότε

$$k = (x_k - x_0)/h = (0,43-0,3)/0,1 = 0,13/0,1 = 1,3$$

$$y_k = \pi(k{=}1,3) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 =$$

$$= 0,2866 + 1,3*0,08182 + 1,3*0,3*(-0,01146)/2 +$$
$$+ 1,3*0,3*(-0,7)*(-0,0025)/6 =$$

$$= 0,39085$$

iii) Για τη γραμμική παρεμβολή έχουμε:

$$x_0 = 0,4 \ , x_1 = 0,5 \quad \text{οπότε} \quad k = (x_k - x_0)/h = (0,43-0,4)/0,1 = 0,3$$

Άρα:

$$y_k = \pi(k{=}1,3) = y_0 + k\Delta y_0 = 0,36842 + 0,3*0,07037 = 0,38953$$

iv) Η ακριβής τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$y_k = f(0,43 \text{ rad}) = [x\text{συν}x]_{x=0,43} = 0,39086$$

οπότε το σχετικό σφάλμα των προηγουμένων υπολογισμών για την πλήρη παρεμβολή:

$$\sigma_{\sigma\chi} = 100*(0,39086 - 039085)/0,39086 = 0,00256 \ \%$$

και για τη γραμμική:

$$\sigma_{\sigma\chi} = 100*(0,39086 - 0,38953)/0,39086 = 0,339 \ \%$$

Είναι φανερό πως η γραμμική παρεμβολή είναι πράξη λιγότερο ακριβής απ’ότι η πλήρη παρεμβολή. Ηταν κάτι που το περιμέναμε, μια και δεν είναι δυνατό ένα ευθύγραμμο τμήμα να ακολουθεί την καμπύλη μιας συνάρτησης με την ίδια ακρίβεια που την ακολουθεί η καμπύλη ενός τριτιβάθμιου πολυωνύμου.

3.J .10 Η παρεμβολή στο Excel.

Οι υπολογισμοί που απαιτούνται για την παρεμβολή, προγραμματίζονται ιδιαίτερα εύκολα με το Excel. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε τον πίνακα τιμών mias συνάρτησης f, στο εσωτερικό του οποίου θέλουμε να παρεμβάλουμε, σε κάποιο σημείο x_k. Στο παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζεται ένα φύλλο του Excel, όπου:

- Υπάρχουν 6 τιμές από τον πίνακα τιμών της συνάρτησης f (προφανώς περιέχονται σημεία γύρω από το σημείο παρεμβολής)
- Υπολογίζεται ο πίνακας διαφορών της συνάρτησης f, ο οποίος φθάνει μέχρι και τη διαφορά πέμπτης τάξης.
- Δίνεται το σημείο παρεμβολής x_k (στο παράδειγμα το 0,485).
- Υπολογίζεται ο δείκτης k του σημείου παρεμβολής (k=2,425).
- Υπολογίζεται η τιμή $f(x_k)$, με τη βοήθεια του πολυωνύμου του Newton, πέμπτου βαθμού (αφού έχουμε 6 σημεία)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			**Παρεμβολή**					
2								
3		Πίνακας Διαφορών της πινακοποιημένης συνάρτησης						
4								
5	x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	
6	f(x)	1	0,960789	0,852144	0,697676	0,527292	0,367879	
7	Δy	-0,03921	-0,10865	-0,15447	-0,17038	-0,15941		
8	Δ2y	-0,06944	-0,04582	-0,01592	0,010971			
9	Δ3y	0,023613	0,029905	0,026887				
10	Δ4y	0,006292	-0,00302					
11	Δ5y	-0,00931						
12								
13			Xk=	0,485	k=	2,425		
14			Yk=	0,790399				
15								

Έχοντας το προηγούμενο φύλλο σε κάποιο αρχείο του Excel, μπορούμε να παρεμβάλλουμε σε οποιοδήποτε άλλο πίνακα. Απλώς πληκτρολογούμε τις νέες τιμές του πίνακα, καθώς και το νέο x_k. Αυτόματα στη θέση του y_k εμφανίζεται το νέο αποτέλεσμα.

2.Α.11 Διπλή γραμμική παρεμβολή.

Έστω η συνάρτηση δύο μεταβλητών $z = f(x,y)$, η οποία ορίζεται με έναν πίνακα τιμών, σαν τον διπλανό.

Η διπλή γραμμική παρεμβολή χρησιμοποιείται για να παρεμβάλουμε ανάμεσα στις τιμές του πίνακα αυτού.

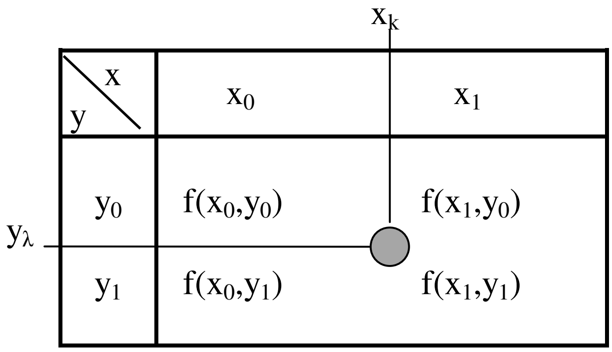
Ας υποθέσουμε πως ζητούμε την τιμή της f στο σημείο (x_k,y_λ).

y \ x	x_0	x_1	.....	x_v
y_0	$f(x_0,y_0)$	$f(x_1,y_0)$	.....	$f(x_v,y_0)$
y_1	$f(x_0,y_1)$	$f(x_1,y_1)$	.....	$f(x_v,y_1)$
..	....			
..	....			
y_v	$f(x_0,y_v)$	$f(x_1,y_v)$	.....	$f(x_v,y_v)$

Αρχικά επιλέγουμε την τετράδα των σημείων του πίνακα που βρίσκονται πλησιέστερα στο σημείο παρεμβολής. Προφανώς, από τις τιμές x_i του πίνακα, θα διαλέξουμε σαν x_0 και x_1 , το προηγούμενο και το επόμενο σημείο του x_k, ενώ ε σαν y_0 και y_1 , το προηγούμενο και το επόμενο σημείο του y_λ.

Ο υπολογισμός του $f(x_k,y_\lambda)$ γίνεται με τη βοήθεια τριών γραμμικών παρεμβολών, δύο ως προς x και μιας ως προς y, ή δύο ως προς y και μιας ως προς x.

Αρχικά υπολογίζουμε την τιμή των δεικτών του σημείου παρεμβολής:



$$k = (x_k - x_0)/h_x$$
$$\lambda = (y_\lambda - y_0)/h_y$$

όπου h_x και h_y είναι το βήμα του πίνακα στα x και στα y (δηλαδή $h_x= x_1-x_0$ και $hy= y_1-y_0$).

Εκτελώντας δύο παρεμβολές ως προς x και μία ως προς y, καταλήγουμε εύκολα στις σχέσεις:

$$f(x_k,y_0) = f(x_0,y_0) + k[f(x_1,y_0) - f(x_0,y_0)]$$
$$f(x_k,y_1) = f(x_0,y_1) + k[f(x_1,y_1) - f(x_0,y_1)]$$
$$f(x_k,y_\lambda) = f(x_k,y_0) + \lambda[f(x_k,y_1) - f(x_k,y_0)]$$

Παράδειγμα.

Η συνάρτηση $z=f(x,y)$ δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

y \ x	1	1,1	1,2	1,3	1,4
2	5,3069	5,4115	5,5245	5,6445	5,7704
2,2	6,2515	6,3762	6,5092	6,6492	6,7951
2,4	7,2845	7,4292	7,5822	7,7422	7,9081
2,6	8,4045	8,5692	8,7422	8,9221	9,1080
2,8	9,6104	9,7951	9,9881	10,1880	10,3939

i) Να υπολογισθεί η τιμή f(1,13 , 2,44).

ii) Με δεδομένο πως η έκφραση της συνάρτησης του πίνακα είναι:

$$f(x,y) = xy + y^2 - \ln(xy)$$

να υπολογισθεί το σχετικό σφάλμα της παρεμβολής.

Λύση.

i) Ξεκινούμε διαλέγοντας την τετράδα των σημείων πάνω στα οποία θα στηριχθεί η διπλή παρεμβολή:

y \ x	1,1	1,2
2,4	7,4292	7,5822
2,6	8,5692	8,7422

Υπολογίζουμε τους δείκτες k και λ:

$$k = (x_k-x_0)/h_x = (1,13-1,1)/0,1 = 0,3$$
$$\lambda = (y_\lambda-y_0)/h_y = (2,44-2,4)/0,2 = 0,2$$

και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους τύπους της διπλής παρεμβολής:

$$f(1,13\ ,\ 2,4) = f(x_0,y_0) + k[f(x_1,y_0) - f(x_0,y_0)] = 7,4293 + 0,3*0,153 = 7,4752$$
$$f(1,13\ ,\ 2,6) = f(x_0,y_1) + k[f(x_1,y_1) - f(x_0,y_1)] = 8,5692 + 0,3*0,173 = 8,6211$$
$$f(1,13\ ,\ 2,44) = f(x_k,y_0) + \lambda[f(x_k,y_1) - f(x_k,y_0)] = 7,4752 + 0,2*1,146 = 7,7044$$

ii) Η ακριβής τιμή της f:

$$f(1,13\ ,\ 2,44) = [xy + y^2 - \ln(xy)]_{(x=1,13\ ,\ y=2,44)} = 7,6966$$

οπότε το σχετικό σφάλμα της παρεμβολής είναι ίσο με:

$$\sigma_{\sigma\chi} = 100(7,6966-7,7044)/7,6966 = 0,062\ \%$$

Άσκηση:

Η συνάρτηση f ορίζεται με τον παρακάτω πίνακα:

x_i	5	5,25	5,5	5,75	6	6,25	6,5	6,75
y_i	8,04719	8,70570	9,37611	10,05790	10,75056	11,45363	12,16671	12,88941

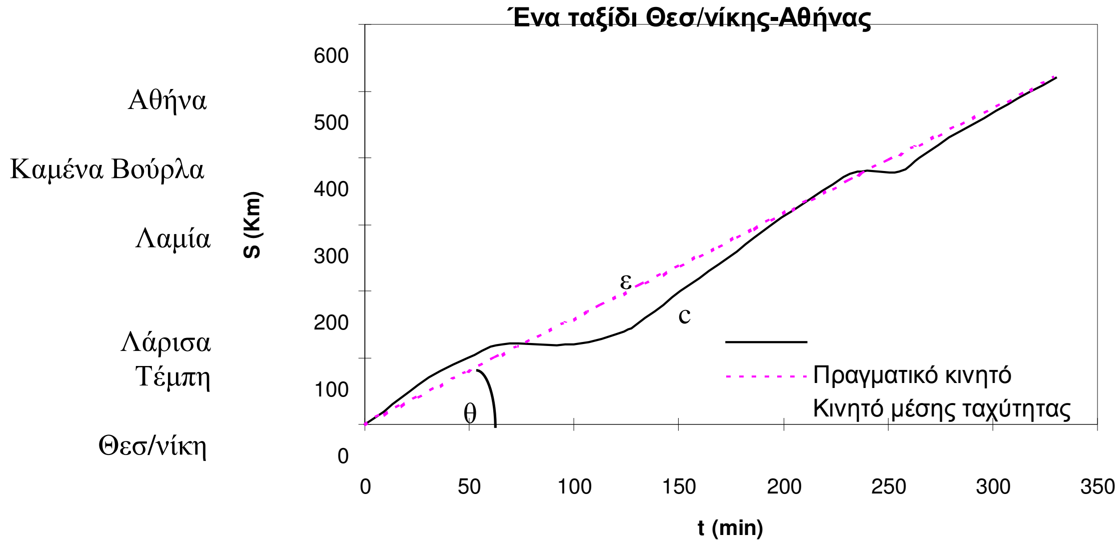
65851	67042	68178	69266	70308	71308	72270
1191	1137	1087	1042	1000	962	926
-54	-49	-45	-42	-38	-36	

i) Τι βαθμού είναι το πολυώνυμο με το οποίο θα περεμβάλετε ανάμεσα στις τιμές του πίνακα;
ii) Να υπολογίσετε την τιμή f(5,68) χρησιμοποιώντας την πλήρη παρεμβολή.
iii) Να υπολογίσετε την τιμή f(5,68) χρησιμοποιώντας τη γραμμική παρεμβολή.
iv) Εάν η συνάρτηση του πίνακα είναι η f(x) = xlnx, να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα των δύο προσεγγιστικών υπολογισμών του f(5,68).

3.Β Αριθμητική παραγώγιση.

3.Β.1 Γενικά.

Η παραγώγιση είναι μια πολύ σημαντική πράξη των συναρτήσεων. Η σημαντικότητά της έγκειται στο ότι αποτελεί στα Μαθηματικά την γενίκευση της έννοιας της ταχύτητας. Στο επόμενο σχήμα δίνουμε ένα πολύ απλό παράδειγμα, της μετακίνησης ενός αυτοκινήτου από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα.



Παρατηρήσεις:

- Η μετακίνηση του κινητού λαμβάνει χώρα πάνω στον άξονα των διαστημάτων S και όχι πάνω στην καμπύλη c, η οποία βοηθά στο να γνωρίζουμε τη θέση του κινητού ανά πάσα χρονική στιγμή. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στην καμπύλη c [η s=s(t)] ονομάζεται συνάρτηση θέσης του κινητού.
- Διαιρώντας τη απόσταση που διανύθηκε συνολικά με το χρόνο που απαιτήθηκε για τη μετακίνηση, υπολογίζουμε τη μέση ταχύτητα του κινητού:

$$V_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} = \frac{S^{\sigma\upsilon\nu}}{t^{\sigma\upsilon\nu}}$$

- Η μέση ταχύτητα στο γράφημα ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας την οποία σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των t), το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία αρχής και τέλους της μετακίνησης.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία εκκίνησης και τέλους της μετακίησης είναι το γραφημα που αντιστοιχεί στην κίνηση ενός φανταστικού κινητού που κινείται διαρκώς με τη μέση ταχύτητα και διανύει τη συνολική απόσταση στον ίδιο χρόνο με το πραγματικό κινητό.

- Η κλίση της ευθείας ε ισούται με την ταχύτητα μετακίνησης (του φανταστικού κινητού).
- Η ταχύτητα του πραγματικού κινητού μεταβάλλεται διαρκώς. Η ταχύτητά του σε κάποια χρονική στιγμή ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα, και είναι η κλίση της συνάρτησης θέσης (της καμπύλης c) στο αντίστοιχο t. Η κλίση όμως μιας καμπύλης σε ένα σημείο ορίζεται σαν η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη στο εν λόγω σημείο.

Στα Μαθηματικά, ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση μιας συνάρτησης f(x), μιαν άλλη συνάρτηση [που συμβολίζεται με το f '(x)] η οποία δίνει σε κάθε σημείο x την κλίση της f.

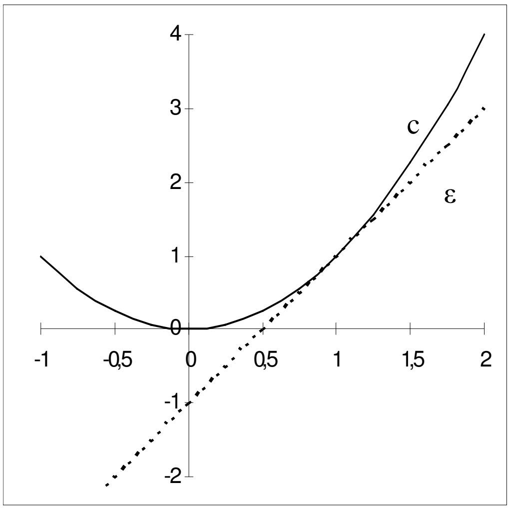
Παράδειγμα: Έστω πως $f(x) = x^2$. Αναζητούμε τη συνάρτηση η οποία να "δίνει" τις κλίσεις της f. Αυτή είναι η παράγωγος της f η:

$$f'(x) = (x^2)' = 2x.$$

Άρα η κλίση της f στη σημείο x=1 ισούται με:

$$f'(1) = (2x)_{x=1} = 2$$

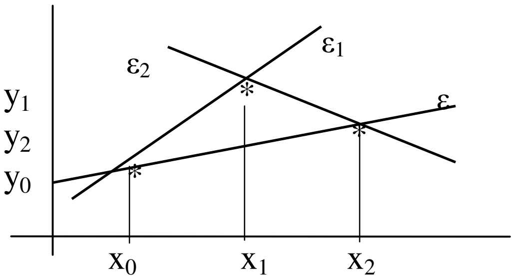
Αυτή ακριβώς είναι η κλίση της ευθείας (ε) που εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης (c).



3.Β.2 Γραμμικός υπολογισμός της παραγώγου.

Συνήθως υπολογίζουμε με αριθμητικές μεθόδους την παράγωγο μιας συνάρτησης όταν η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη μ'έναν πίνακα τιμών. Το συνηθέστερο πρόβλημα είναι να αναζητούμε την παράγωγο σε κάποιο από τα σημεία του πίνακα (και όχι κάπου ενδιάμεσα).

Ο αριθμητικός υπολογισμός στηρίζεται σε τρεις απλούστατους τύπους, οι οποίοι υπολογίζουν την κλίση ευθειών και εφαρμόζονται, ο πρώτος στην αρχή του πίνακα, ο δεύτερος στο τέλος και ο τρίτος σ'όλα τα ενδιάμεσα σημεία (μια και δίνει τα ακριβέστερα αποτελέσματα).



$$f'(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad \text{(κλίση της } \varepsilon_1\text{)}$$

$$f'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{(κλίση της } \varepsilon_2\text{)}$$

$$f'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \qquad \text{(κλίση της } \varepsilon\text{)}$$

Γίνεται φανερό πως ο τρίτος τύπος πρέπει να είναι πλησιέστερα στην πραγματική τιμή της παραγώγου (θεωρούμε δηλαδή την κλίση της ε πλησιέστερη στην κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης στο σημείο x_1).

3.B.3 Πλήρης αριθμητική παραγώγιση.

Στην πλήρη αριθμητική παραγώγιση επαναλαμβάνουμε τη λογική της πλήρους παρεμβολής. Αντικαθιστούμε την συνάρτηση του πίνακα με το συμπτωτικό πολυώνυμο και παραγωγίζουμε το πολυώνυμο στη θέση της συνάρτησης. Μάλιστα για να μην ταλαιπωρούμαστε με τον υπολογισμό του συμπτωτικού πολυωνύμου, παραγωγίζουμε κατ'ευθείαν το πολυώνυμο του Newton:

$$y_k = \pi(x_k) = \pi(k) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

Δεν πρέπει να ξεχνούμε βέβαια πως η προηγούμενη σχέση προέκυψε με την αλλαγή μεταβλητής (από την κανονική x_k στον δείκτη της k), μέσω της σχέσης:

$$k = (x_k - x_0)/h$$

Επομένως, στην συνέχεια το πολυώνυμο του Newton (που θα παραγωγισθεί φυσικά ως προς x_k) θα παραγωγισθεί σαν σύνθετη συνάρτηση.[1]

Όταν έχουμε τη συνάρτηση f(z) όπου όμως το z είναι συνάρτηση του x [z=z(x)], τότε ισχύει ο παρακάτω τύπος παραγώγισης:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} * \frac{dz}{dx}$$

Έχουμε επομένως:

$$\frac{dy_k}{dx_k} = \frac{d\pi(k)}{dk} * \frac{dk}{dx_k} = \frac{1}{h} * \left[\Delta y_0 + \frac{2k-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3k^2-6k+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \right]^{(1)}$$

Παράδειγμα:

Επανερχόμαστε στη συνάρτηση του παραδείγματος της παρεμβολής:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_i	0	0,09950	0,19601	0,28660	0,36842	0,43879	0,49520	0,53539	0,55737
		9950	9651	9059	8182	7037	5641	4019	2198
		-299	-593	-876	-1146	-1396	-1622	-1821	
			-294	-284	-269	-250	-227	-199	
			10	15	19	24	27		

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου της f, στο σημείο x_k=0,4, χρησιμοποιώντας τους τρεις τύπους της γραμμικής προσέγγισης.
ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου της f, στο σημείο x_k=0,4, χρησιμοποιώντας την παράγωγο του συμπτ.πολυωνύμου του Newton.
iii) Με δεδομένο πως η συνάρτηση του πίνακα είναι η f(x)=xσυνx, να υπολογισθεί η ακριβής τιμή της παραγώγου καθώς και τα σχετικά σφάλματα των υπολογισμών.

Λύση:

i) Όπως ήδη εξηγήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, ο πρώτος τύπος στηρίζεται στο τρέχον σημείο (το 0,4) και στο προηγούμενο, ο δεύτερος στο τρέχον και στο επόμενο, ενώ ο τρίτος στο προηγούμενο και στο επόμενο του τρέχοντος σημείου. Υπολογίζουμε λοιπόν:

f ‘(0,4) = (0,36842-0,28660)/0,1 = 0,8182 (α’ τύπος)

f ‘(0,4) = (0,43879-0,36842)/0,1 = 0,7037 (β’ τύπος)

f ‘(0,4) = (0,43879-0,28660)/0,2 = 0,76095 (γ’ τύπος)

---

(1) *Όπου έχουμε:*

$$\frac{dk}{dx_k} = \frac{d[(x_k - x_0)/h]}{dx_k} = \frac{1}{h}$$

ii) Όπως ειπώθηκε στο παράδειγμα της παρεμβολής, επιλέγουμε τριτοβάθμιο συμπτ.πολυώνυμο, θεωρώντας τις τρίτης τάξης διαφορές περίπου σταθερές. Επιλέγουμε επομένως από τον πίνακα τέσσερα σημεία σύμπτωσης (διαδοχικά που έχουν κεντρικό το σημείο 0,4), ξεκινώντας από το x0=0,2. Βέβαια, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από το x0=0,3. Έχουμε λοιπόν:

$$x_0=0{,}2 \qquad x_k=0{,}4 \quad \text{êáé} \quad h=0{,}1$$

οπότε:

$$k = (0{,}4-0{,}2)/0{,}1 = 2$$

άρα:

$$f'(0{,}4) = \frac{1}{h} * \left[\Delta y_0 + \frac{2k-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3k^2-6k+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \ldots \right]_{k=2} =$$

$$= \frac{1}{0{,}1} * \left[0{,}09059 + \frac{3}{2} (-0{,}00876) + \frac{2}{6} (-0{,}00269)\right] =$$

$$= 0{,}76508$$

iii) Η ακριβής τιμή της παραγώγου:

$$f'(0{,}4 \text{ rad}) = [x\sigma\upsilon\nu x]'_{x=0,4} = [\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x]_{x=0,4} = 0{,}76529$$

Εκτιμούμε λοιπόν τα σχετικά σφάλματα των τεσσάρων προσεγγιστικών υπολογισμών:

$\sigma_{\sigma\chi}$(α'τύπου) = 100(0,76529-0,8182)/ 0,76529 = 6,91 %
$\sigma_{\sigma\chi}$(α'τύπου) = 100(0,76529-0,7037)/ 0,76529 = 6,16 %
$\sigma_{\sigma\chi}$(α'τύπου) = 100(0,76529-0,76095)/ 0,76529 = 0,57 %
$\sigma_{\sigma\chi}$(α'τύπου) = 100(0,76529-0,76508)/ 0,76529 = 0,027 %

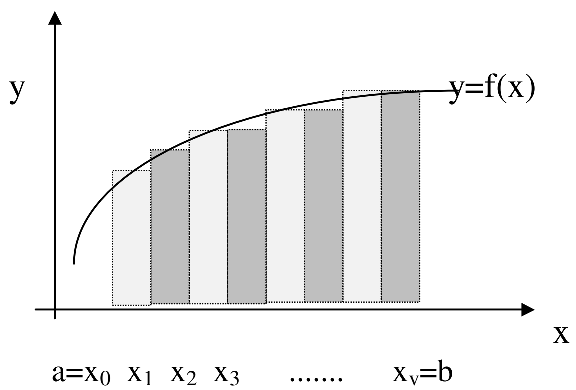
Παρατηρούμε το πόσο σημαντικότερα ακριβής είναι ο τρίτος γραμμικός τύπος σε σχέση με τους προηγούμενους δύο. Αντίθετα, ήταν απόλυτα αναμενόμενη η ακρίβεια του τύπου που προήλθε από την παραγώγιση του συμπτ. πολυωνύμου.

3.Γ. Η αριθμητική ολοκλήρωση.

3.Γ.1. Γενικά.

Μάθαμε την αόριστη ολοκλήρωση σαν την αντίστροφη πράξη της παραγώγισης. Είδαμε πως επειδή η παράγωγος της συνάρτησης $F(x)=x^2+c$ είναι η $f(x)=2x$, αντίστροφα το αόριστο ολοκλήρωμα (ή η αρχική) της f(x) είναι η $F(x)=x^2+c$.

Στη συνέχεια μάθαμε για την ορισμένη ολοκλήρωση πως συμβολίζει μια πολλαπλή άθροιση γινομένων, το καθένα από τα οποία είναι απειροελάχιστο. Το τελικό όμως άθροισμα είναι ένας πραγματικός αριθμός, συνήθως διάφορος του μηδενός, λόγω του ότι το πλήθος των γινομένων είναι πολύ μεγάλο,



Αναλύοντας το διάστημα ολοκλήρωσης (a,b) σε ν υποδιαστήματα μήκους dx, με τη βοήθεια των ν+1 σημείων:

$$x_0\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ ......\ ,\ x_\nu$$

Σε κάθε υποδιάστημα ορίζουμε το γινόμενο του μήκους του επί το μέσο όρο των τιμών της συ άρτησης στο υποδιάστημα. Έτσι στο τυχαίο i-οστό διάστημα έχουμε το γινόμενο::

$$S_i = f(\xi_i)dx_i$$

Αθροίζοντας τα γινόμενα αυτά υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της f(x) στο διάστημα (a,b). Έχουμε δηλαδή:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\nu} f(\xi_i)dx_i$$

Καταλήξαμε λοιπόν στη γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος I: Το ορισμένο ολοκλήρωμα I μιας συνεχούς και παντού θετικής συνάρτησης, στο διάστημα (a,b), είναι ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από την καμπύλη της f(x), τον άξονα των x και τις ευθείες x=a και x=b.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής δείξαμε πως εάν η F(x) είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x), τότε η τιμή I του ορισμένου ολοκληρώματος δίνεται από τη σχέση:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ιδιότητες:

i) Όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται από το a έως το b είναι παντού αρνητική, τότε το τελικό αποτέλεσμα ισούται κατ'απόλυτη τιμή με το αντίστοιχο εμβαδό, όμως έχει αρνητικό πρόσημο.

ii) Εύκολα γίνονται κατανοητές οι σχέσεις:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

3.Γ.2 Η αριθμητική ολοκλήρωση.

Η αριθμητική ολοκλήρωση περιλαμβάνει μεθόδους οι οποίες προσπαθούν να υπολογίσουν προσεγγιστικά την τιμή ενός ~~ορισμένου~~ ολοκληρώματος. Συνήθως καταφεύγουμε σε τέτοιες μεθόδους στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών.
- Όταν δεν είναι δυνατό να υπολογίσουμετο αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης που ολοκληρώνεται.
- Όταν η κλασσική μέθοδος ολοκλήρωσης είναι ιδιαίτερα δύσκολη και χρονοβόρα.

Ήδη γνωρίσαμε μία μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης, στο κεφάλαιο των αναπτυγμάτων Taylor και Mac-Laurin. Εκεί αντικαθιστούσαμε το μη πολυωνυμικό τμήμα της υπό το ολοκλήρωμα συνάρτησης, με το ανάπτυγμά του, ολοκληρώνοντας το ανάπτυγμα που προκύπτει. Για παράδειγμα:

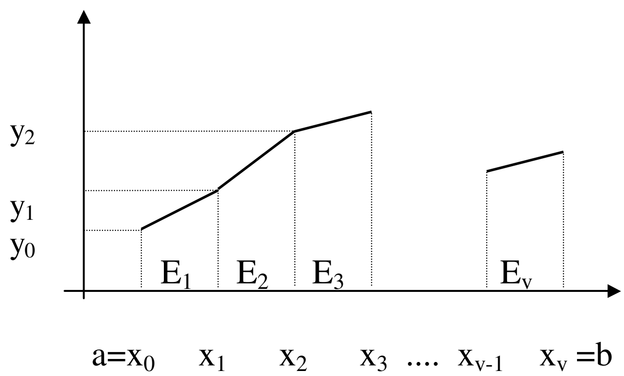
$$I = \int_a^b \frac{\eta\mu x}{x}\,dx = \int_b^a \frac{[x - x^3/3! + x^5/5! - ...]}{x}\,dx = ...$$

όπου αντικαταστήσαμε τη συνάρτηση ημx με το ανάπτυγμά της κατά Mac-Laurin.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε μια μέθοδο, η οποία στηρίζεται στην ίδια αρχή στην οποία στηρίζονταν η παρεμβολή και η αριθμητική παραγώγιση. **Αντικαθιστούμε τη συνάρτηση που ολοκληρώνεται με το συμπτωτικό της πολυώνυμο και αντί για τη συνάρτηση ολοκληρώνουμε το πολυώνυμο.**

Για να συμβούν τα παραπάνω θα πρέπει να υπάρχει ο πίνακας τιμών της συνάρτησης. Εάν αυτός δεν υπάρχει, τότε πρέπει να τον κατασκευάσουμε.

3.Γ.3 Ολοκλήρωση με τη μέθοδο του τραπεζίου.



Υποθέτουμε πως χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης (a,b), σε ν υποδιαστήματα, με τη βοήθεια ν+1 σημείων:

$$(x_0,y_0=f(x_0))\ ,\ (x_1,y_1=f(x_1))\ ,\ ...,\ (x_\nu,y_\nu=f(x_\nu))$$

Ενώνοντας τα σημεία αυτά (αντικαθιστώντας δηλαδή στο ενδιάμεσο τη συνάρτηση με ευθύγραμμα τμήματα - πρωτοβάθμια πολυώνυμα), δημιουργούμε ν μικρά τραπέζια.

Θεωρούμε πως η τιμή του αόριστου ολοκληρώματος δίνεται προσεγγιστικά από το άθροισμα των εμβαδών των τραπεζίων:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{X_o}^{X_\nu} f(x)\,dx = E_1 + E_2 + E_3 + ... + E_\nu =$$

$$= \frac{h(y_0+y_1)}{2} + \frac{h(y_1+y_2)}{2} + \frac{h(y_2+y_3)}{2} + ... + \frac{h(y_{\nu-1}+y_\nu)}{2} =$$

$$= (h/2)[\ y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + ...+ 2y_{\nu-1}+y_\nu\ ]$$

όπου θέσαμε το h στη θέση του κοινού πλάτους των υποδιαστημάτων:

$$h = x_{j+1} - x_j$$

Παρατηρήσεις:

i) Όσο μικρότερο είναι το πλάτος h των υποδιαστημάτων[1], τόσο ακριβέστερος είναι ο προσεγγιστικός υπολογισμός του ολοκληρώματος.
ii) Όταν οι τιμές της συνάρτησης y_i είναι αρνητικές, τότε η τιμή του ολοκληρώματος που υπολογίζεται από τον τύπο του τραπεζίου είναι κι'αυτή αρνητική.
iii) Όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (άνω), ο τύπος του τραπεζίου δίνει μία τιμή μικρότερη (μεγαλύτερη) της πραγματικής.

3.Γ.4 Οι τύποι του Cotes.

Η γενίκευση της μεθόδου του τραπεζίου αναφέρεται στην αντικατάσταση της συνάρτησης από το συμπτωτικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί στις τιμές του πίνακα και η ολοκλήρωση του πολυωνύμου αυτού. Ο Cotes συστηματοποίησε τη μέθοδο αυτή. Υπολόγισε τον τύπο που προκύπτει κατά την ολοκλήρωση πρωτοβαθμίων πολυωνύμων[2], τον τύπο που προκύπτει από την ολοκλήρωση πολυωνύμων 2ου, 3ου, 4ου και 6ου βαθμού.

Υπολόγισε δηλαδή (μέσω του συμπτ.πολυωνύμου του Newton) το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_\nu} \pi(x_k)\,dx_k = \int_o^\nu \pi(k)\,dk$$

όπου αφού αντικατέστησε τη συνάρτηση με το πολυώνυμο, στη συνέχεια έκανε και τη γνωστή αλλαγή μεταβλητής $k=(x_k-x_0)/k$, για να χρησιμοποιήσει το πολυώνυμο του Newton. Φυσικά, η αλλαγή μεταβλητής προκάλεσε και την αντίστοιχη αλλαγή των ορίων ολοκλήρωσης. Προφανώς, ο προηγούμενος τύπος χρησιμοποιεί πολυώνυμο ν-οστού βαθμού, γιαυτό και χρησιμοποιεί ν+1 σημεία. Οι πράξεις της ολοκλήρωσης δεν έχουν ιδιαίτερη δυσκολία, γιαυτό και παραλείπονται. Δίνονται όμως οι τύποι στους οποίους καταλήγουν.

---

(1) *Το οποίο το ονομάσαμε προηγουμένως σαν βήμα του πίνακα τιμών. Η επιλογή του h σαν σταθερό για όλον τον πίνακα σημαίνει πως έχουμε πίνακα ισαπεχόντων ορισμάτων.*
(2) *Και κατέληξε στον τύπο του τραπεζίου.*

Ορισμός και οι τύποι: Ολοκληρώνοντας το συμπτ.πολυώνυμο του ν-οστού βαθμού, χρησιμοποιώντας ν+1 σημεία (τα x_0, x_1, x_2, ... , $x_ν$), καταλήγουμε στην τύπο:

$$\mathbf{I = \int_{x_o}^{x_ν} y(x_k)\, dx_k = Ch[c_0y_0 + c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ν y_ν]}$$

όπου οι συντελεστές C και c_i , καθώς και το μέγιστο σφάλμα του κάθε τύπου, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

ν	C	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	Σφάλμα
1	1/2	1	1						$-(h^3/12)y''(\xi)$
2	1/3	1	4	1					$-(h^5/90)y^{(4)}(\xi)$
3	3/8	1	3	3	1				$-(3h^5/80)y^{(4)}(\xi)$
4	2/45	7	32	12	32	7			$-(8h^7/945)y^{(6)}(\xi)$
6	1/140	41	216	27	271	27	216	41	$-(9h^9/1400)y^{(8)}(\xi)$

Παρατηρήσεις:

- Το σφάλμα αποκοπής δείχνει να μειώνεται, όσο ο βαθμός του πολυωνύμου αυξάνεται, ιδιαίτερα εάν το πλάτος h των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζεται το διάστημα ολοκλήρωσης είναι μικρότερο της μονάδας.
- Οι τύποι του σφάλματος περιέχει την παράγωγο της συνάρτησης που ολοκληρώνεται, σε κάποιο σημείο ξ που είναι συνήθως άγνωστο. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε σαν ξ, το σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης για το οποίο μεγιστοποιείται η τιμή της παραγώγου (δηλαδή δυσμενέστερο για την εκτίμηση του σφάλματος).
- Ας υποθέσουμε πως επιλέξαμε τον τύπο για ν=4, και ότι γνωρίζουμε την τιμή της 6ης παραγώγου στον τύπο του σφάλματος. Εξισώνοντας το μέγιστο αυτό σφάλμα, με την απαιτούμενη ακρίβεια προκύπτει μία οριακή τιμή για το πλάτος h των υποδιαστημάτων. Εάν το τελικό h που επιλέγουμε είναι μικρότερο του οριακού, τότε το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης θα είναι μέσα στα πλαίσια της απαιτούμενης ακρίβειας.
- Εάν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι ιδιαίτερα μεγάλο, αναγκαζόμαστε να περάσουμε τον τύπο ολοκλήρωσης περισσότερες από μία φορές (όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα). Για παράδειγμα, ο τύπος του τραπεζίου, τον οποίο αντιμετωπίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι ο τύπος του Cotes για ν=1, ο οποίος επαμαλαμβάνεται πολλές φορές.

Τρόπος δουλειάς:

Αρχικά θα υποθέσουμε πως πρέπει να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση f, η οποία δίνεται με έναν πίνακα τιμών. Στην περίπτωση αυτή οι τύποι του Cotes μπορούν να λειτουργήσουν, όταν τα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης είναι δύο από τα σημεία του πίνακα.

Η συνέχεια εξαρτάται από το πλήθος των σημείων του πίνακα που υπάρχουν στο εσωτερικό του διαστήματος ολοκλήρωσης. Εάν για παράδειγμα ολοκληρώνουμε από το x_0 μέχρι το x_6, τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο ν=6. Αντίθετα, εάν ολοκληρώνουμε από το x_0 έως το x_9, τότε μας βολεύει να χρησιμοποιήσουμε δύο φορές τον τύπο για ν=4 (μία φορά από το x_0 έως το x_5, και μία δεύτερη από το x_5 έως το x_9).

Αντίθετα, όταν η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται με μαθηματικό τύπο, τότε είμαστε υποχρεωμένοι να δημιουργήσουμε τον πίνακα τιμών. Κάνουμε λοιπόν τις παρακάτω εργασίες:

- Επιλέγουμε των τύπο του Cotes με τον οποίο θα εργαστούμε (συνήθως τον ακριβέστερο ν=6).
- Υπολογίζουμε την οριακή τιμή (h_{op}) του βήματος του πίνακα τιμών.
- Δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών, του οποίου το πλήθος των σημείων του δίνεται από τον τύπο:

$$j = \kappa * \nu + 1$$

όπου ν είναι η τάξη του τύπου που χρησιμοποιούμε, ενώ το κ ισούται με το πλήθος των φορών που επαναλαμβάνουμε τον τύπο. Προφανώς, τα j σημεία ορίζουν j-1 (=κ*ν) υποδιαστήματα των οποίων το πλάτος είναι:

$$h = (b-a)/(\kappa * \nu)$$

- Υπολογίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος από τον τύπο του Cotes.

Παράδειγμα 1ο.

Στο διπλανό πίνακα εμφανίζεται ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

x_k	y_k
0	0,00000
0,5	0,38940
1	0,36788
1,5	0,15810
2	0,03663

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx$$

i) Με τη βοήθεια του τύπου του τραπεζίου.
ii) Όσο ακριβέστερα μπορείτε.
iii) Εάν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι η:

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα των υπολογισμών.

Λύση.

i) Αρχικά υπολογίζουμε με τον τύπο του τραπεζίου:

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx = (h/2)*[\,f(0) + 2f(0,5) + 2*f(1) + 2\,f(1,5) + f(2)\,] =$$

$$= (0,25)*1,86739 = 0,46685$$

ii) Εφ'όσον έχουμε στη διάθεσή μας πέντε σημεία, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για ν=4:

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx = (2h/45)*[7f(0) + 32f(0,5) + 12*f(1) + 32\,f(1,5) + 7f(2)\,] =$$

$$= (1/45)*22,19095 = 0,49313$$

iii) Ολοκληρώνοντας θεωρητικά έχουμε:

$$I = \int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = (1/2)\int e^{-t}\,dt = -0,5\,e^{-x^2}\Big|_0^2 = 0,0091578 + 0,5 =$$

$$= 0,49084$$

οπότε έχουμε τα σχετικά σφάλματα:

για ν=1 $\sigma_{\sigma\chi} = 100(0,49084-0,46685)/\,0,49084 = 4,89\ \%$

για ν=4 $\sigma_{\sigma\chi} = 100(0,49084-0,49313)/\,0,49084 = 0,47\ \%$

Τελειώνοντας, αξίζει να παρατηρήσουμε πως ο τύπος για ν=4 είναι πολύ ακριβέστερος του τύπου του τραπεζίου, παρ'όλον ότι και οι δύο τύποι απαιτούν το ίδιο πλήθος πράξεων.

Παράδειγμα 2ο.

Να υπολογισθεί αριθμητικά το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^2 xe^{-x^2}\,dx$

με ακρίβεια ε=0,0001, όταν δίνεται πως $f^{(8)}(\xi) \le 1500$.

Λύση.

(i) Ξεκινούμε με τον υπολογισμό του οριακού βήματος του πίνακα, έτσι ώστε να επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια:

$$(9h^9/1400)*y^{(8)}(\xi) \le (9h^9/1400)*1500 = 0{,}0001$$

απ'όπου προκύπτει: $h \le 0{,}2794$, πράγμα που σημαίνει πως επιλέγοντας το βήμα του πίνακα μικρότερο του 0,28 θα επιτύχουμε την ακρίβεια που μας ζητείται.

(ii) Επιλέγουμε τον τύπο του Cotes για ν=6. Εάν τον εφαρμόσουμε μία μόνο φορά πάνω στο διάστημα ολοκλήρωσης (0,2), τότε θα το υποδιαιρέσουμε σε 6 υποδιαστήματα, οπότε το βήμα του πίνακα θα είναι: h=(b-a)/6=2/6=0,33333 , το οποίο ξεπερνά το οριακό βήμα που υπολογίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αναγκαζόμαστε λοιπόν να εφαρμόσουμε δύο φορές τον τύπο, οπότε:

$$h = (b-a)/(2*6) = 1/6 \quad (\le h_{op} \text{ δεκτό!})$$

(iii) Δημιουργούμε στη συνέχεια τον πίνακα τιμών, με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος.

$$I = \int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx + \int_1^2 xe^{-x^2}\,dx =$$

$$= (h/140)*[\ 41y(0)+216y(1/6)+27y(2/6)+272y(3/6)+ +27y(4/6)+216y(5/6)+41y(1)\ ] +$$
$$+ (h/140)*[\ 41y(1)+216y(7/6)+27y(8/6)+272y(9/6)+ +27y(10/6)+216y(11/6)+41y(2)\ ] =$$

$$= (h/140)*[\ 41y(0)+216y(1/6)+ \ldots\ldots +82y(1)+ +216y(7/6)+ \ldots\ldots + 41y(2)\ ] =$$

$$=[(1/6)/140] * 412{,}30867 = 0{,}49084$$

Πίνακας τιμών

x_k	y_k
0	0
1/6	0,16210
2/6	0,29828
3/6	0,38940
4/6	0,42745
5/6	0,41613
1	0,36788
7/6	0,29911
8/6	0,22535
9/6	0,15810
10/6	0,10363
11/6	0,06361
2	0,03663

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με το ακριβές αποτέλεσμα που υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, διαπιστώνουμε πως η ακρίβεια του προσεγγιστικού υπολογισμού είναι απόλυτη.

3.Γ.5 Εφαρμογή στο Excel.

Αξίζει να προσπαθήσουμε να καθορίσουμε με τέτοιο τρόπο το φύλλο εργασίας μας, έτσι ώστε να μπορούμε εύκολα να μεταβάλλουμε το πλήθος κ των φορών επανάληψης του τύπου.

Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να υπολογίσουμε το επόμενο ολοκλήρωμα:

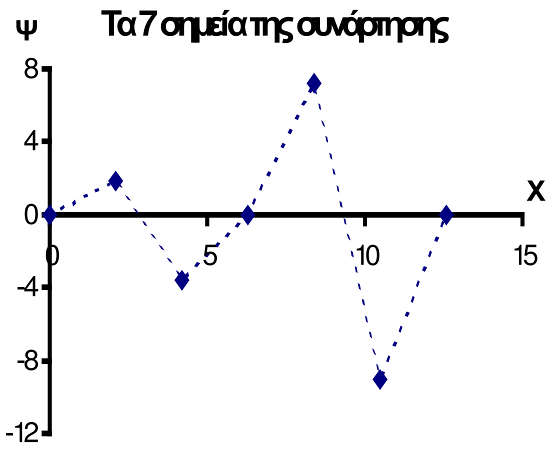
$$I = \int_0^{4\pi} \text{xημx dx}$$

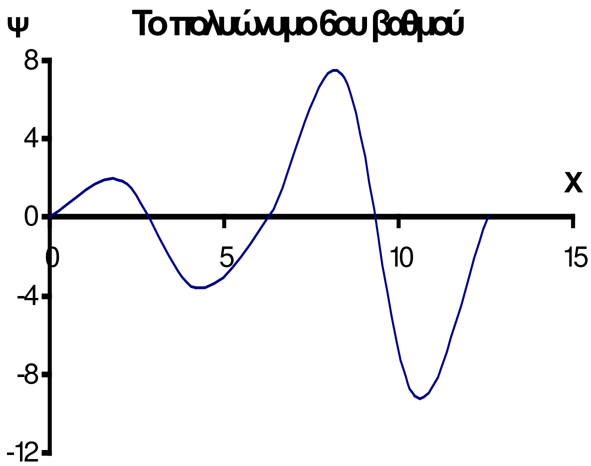
Η μορφή του φύλλου εργασίας θα είναι κατά βάση η επόμενη (υιοθετούμε k=1):

	A	B	C	D	E	F
1						
2		α=	0			
3		β=	12,56637061	h=	=(C3-C2)/(6*C4)	
4		κ=	1			
5						
6		x	f(x)	Συν/στης c	c*f(x)	
7						
8		αρχ.τιμή α	Η τιμή της	41	Τα γινόμενα	
9		προηγ.+ h	συνάρτησης	216	που θα	
10		κ.λ.π.	που	27	αθροιστούν	
11			αντιστοιχεί	272		
12			στα διπλανά χ	27		
13				216		
14				41		
15		.....	.....	.....	.....	
16					Άθροισμα	
17						
18		Τελ.αποτέλ.	....			
19						

Εάν οι πράξεις τοποθετηθούν σωστά στο φύλλο εργασίας, τότε το τελικό αποτέλεσμα θα είναι: I = -21,98. Το ακριβές όμως αποτέλεσμα είναι ίσο με $I_{ακρ.}$ = -12,566. Διαπιστώνουμε λοιπόν πως η προσέγγιση που επιτύχαμε είναι κάκιστη. Για να εμηνεύσουμε αυτό το προσεγγιστικό σφάλμα παρατηρούμε αρχικά το βήμα ολοκλήρωσης (h=2,09) το οποίο είναι τεράστιο. Στη συνέχεια κάνουμε τη γραφική παράσταση της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης στηριζόμενοι στα επτά σημεία του πίνακα ολοκλήρωσης.

Στην αριστερή από τις δύο επόμενες γραφικές παραστάσεις εμφανίζονται τα επτά σημεία ολοκλήρωσης της συνάρτησης f(x)=xημx. Παρατηρούμε πως τα σημεία αυτά δυσκολεύονται να εκφράσουν την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση. Στη δεξιά γραφική παράσταση παρατηρούμε το πολυώνυμο έκτου βαθμού που ορίζεται από τα προηγούμενα επτά σημεία. Η προσέγγιση τώρα είναι εμφανώς καλύτερη αλλά και πάλι απέχει από την ακριβή λύση.





Τα επτά σημεία της συνάρτησης που ολοκληρώνεται (αριστερά)
και το πολυώνυμο 6ου βαθμού που τα προσεγγίζει (δεξιά).

Αντίθετα, εάν εφαρμόσουμε τρείς φορές τον τύπο ολοκλήρωσης (εάν δηλαδή διαμελίσουμε σε 18 υποδιαστήματα το διάστημα ολοκλήρωσης, με τη βοήθεια 19 σημείων) τότε υπολογίζουμε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος:

I = -12,568 αντί του ακριβούς $I_{ακρ.}$ = -12,566

Για ευκολία ενοποιούμε τον τελευταίο συντελεστή του πρώτου περάσματος με τον πρώτο του δεύτερου, όπως και τον τελευταίο συντελεστή του δεύτερου περάσματος με τον πρώτο του τρίτου. Αντί να έχουμε δηλαδή:

$$[41y_0+...+216y_5+41y_6] + [41y_6+...+216y_{11}+41y_{12}] +[41y_{12}+...+216y_{17}+41x_{18}]$$

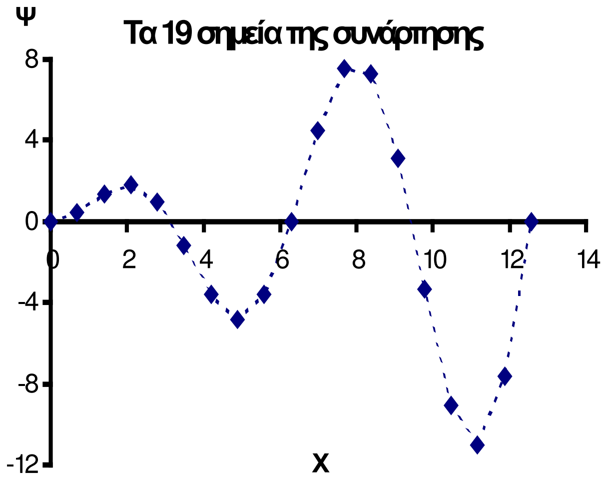
έχουμε:

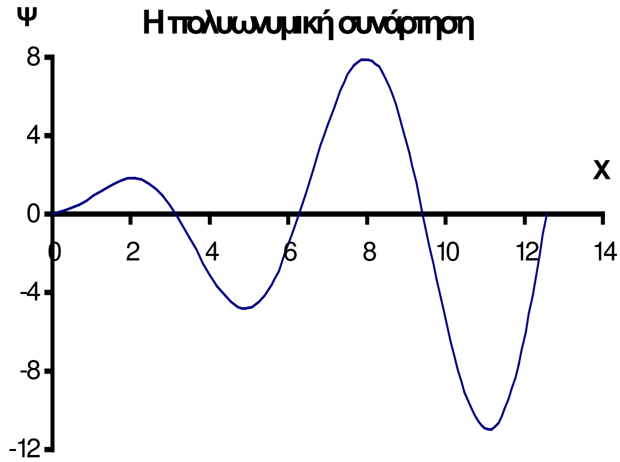
$$[41y_0+...+216y_5+82y_6+...+216y_{11}+82y_{12}+...+216y_{17}+41x_{18}]$$

41
216
27
272
27
216
82
216
27
...
216
82
216
27
...
216
41

όπως δείχνει και ο διπλανός πίνακας.

Τα παρακάτω γραφήματα φανερώνουν το «μυστικό της επιτυχίας». Παρατηρούμε πως η προσέγγιση της συνάρτησης f(x)=xημx με τη βοήθεια των 19 σημείων είναι πολύ ακριβέστερη, οπότε και τα τρία πολυώνυμα 6ου βαθμού που προσαρμόζονται πάνω σ' αυτά ακολουθούν πιστά τη συνάρτηση. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται ένα ακριβέστατο αποτέλεσμα.





Τα 19 σημεία της συνάρτησης που ολοκληρώνεται (αριστερά)
και τα τρία πολυώνυμα 6ου βαθμού που τα προσεγγίζουν (δεξιά).

Να παρατηρήσουμε πως επαναλαμβάνοντας μερικές φορές τον τύπο του Cotes, επιτυγχάνουμε εντυπωσιακή ακρίβεια. Το πόσες επαναλήψεις χρειάζονται υπολογίζεται θεωρητικά από τον τύπο του σφάλματος. Στην πράξη, για τις τρέχουσες ανάγκες, και εφ'όσον πρόκειται για συναρτήσεις που δεν έχουν πολύ γρήγορες και μεγάλες αυξομοιώσεις τιμών, αρκεί να διατηρούμε ένα βήμα h μικρότερο του 0,5.

3.φ Λύση Διαφορικών Εξισώσεων.

3.φ1 Γενικά γύρω από τις Διαφορικές Εξισώσεις (Δ.Ε).

Οι Δ.Ε. αποτελούν ένα σημαντικότατο εργαλείο στην προσπάθειά μας να εκφράσουμε τα φυσικά φαινόμενα με μαθηματικές σχέσεις. Σε προηγούμενα μαθήματα έχει ήδη αναλυθεί η έννοια των Δ.Ε. και έχουν λυθεί κάποιες μορφές τους. Στην παράγραφο αυτή θα ξαναθυμηθούμε κάποιες βασικές έννοιες των Δ.Ε., οι οποίες θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε τις μεθόδους αριθμητικής επίλυσής τους.

Αρχικά να θυμίσουμε πως το ζητούμενο σε μία Δ.Ε., η άγνωστη ποσότητα δηλαδή που πρέπει να προσδιορισθεί, είναι μία συνάρτηση, η οποία συνήθως περιγράφει ένα φυσικό πρόβλημα. **Η λύση λοιπόν μιας Δ.Ε. είναι μία συνάρτηση.**

Η Δ.Ε. ν-οστης τάξης δίνεται παραστατικά με μία σχέση της μορφής:

$$F(\, x, y(x), y'(x) ,..., y^{(\nu)}(x)\,) = 0 \quad (1)$$

Πρόκειται δηλαδή για μία σχέση, που αναπαρίσταται με το F, η οποία συνδέει την μεταβλητή x, με την άγνωστη συνάρτηση y(x) και με τις παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης: $y'(x) ,..., y^{(\nu)}(x)$. **Η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου ισούται με την τάξη της Δ.Ε..**

Δηλαδή, μία Δ.Ε. περιγράφει, με τη βοήθεια των παραγώγων της, μία συνάρτηση y=y(x), η οποία είναι και η λύση της. Μία συνάρτηση όμως για να είναι λύση της Δ.Ε. (1), θα πρέπει να την επαληθεύει, πράγμα που σημαίνει πως εάν αντικαταστήσουμε στην (1) τη συνάρτηση y(x) και τις παραγώγους της, η (1) πρέπει να παραμένει ισότητα.

Παράδειγμα: Δίνεται η παρακάτω Δ.Ε.. Να δειχθεί πως η συνάρτηση $y(x) = e^x ημx$, είναι λύση της.

$$f(x,y,y',y'') = y'' - 2y' + y + e^x ημx = 0 \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = e^x ημx \\ y'(x) = e^x\,(ημx+συνx) \\ y''(x) = 2e^x συνx \end{array}\right] \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad 2e^x συνx - 2\, e^x\,(ημx+συνx) + e^x ημx + e^x ημx = 0$$

Παρατηρούμε πως η τελευταία αυτή σχέση αληθεύει, κάτι που μαρτυρά πως η συνάρτηση $y(x) = e^x ημx$ είναι πράγματι λύση της Δ.Ε. (2).

3.φ2 Γεωμετρική ερμηνεία της Δ.Ε. 1ης τάξης.

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε, η Δ.Ε. 1ης τάξης συμβολίζεται με τη σχέση:

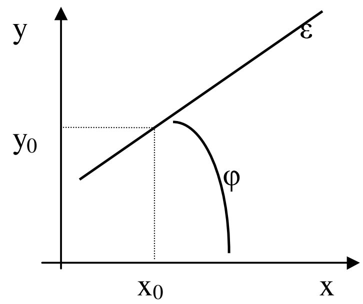
$$F(x,y,y') = 0$$

Στη συνέχεια θεωρούμε πως η προηγούμενη σχέση είναι αρκετά βολική, έτσι ώστε να μπορούμε να τη λύσουμε ως προς y ', μετατρέποντάς την στην:

$$y' = f(x,y) \quad (1)$$

Η σχέση (1) ορίζει με πεπλεγμένο τρόπο την πρώτη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης y(x), από την οποία πρέπει να υπολογίσουμε την y(x). Εάν λοιπόν θέσουμε στην (1) τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου (x_0,y_0) του επιπέδου Oxy (στο οποίο το β' μέλος της Δ.Ε. -το f(x,y)- να λειτουργεί), έχουμε:

$$y' = f(x_0,y_0) = \lambda = \text{σταθ.}$$



Δηλαδή η Δ.Ε. (1) μας επιτρέπει να γνωρίζουμε την τιμή της παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης, σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου. Για παράδειγμα, στο σημείο (x_0,y_0) η τιμή της παραγώγου είναι ίση με το λ [1].

Μια νέα απορία μας γεννιέται τώρα: «Τί είδους συνάρτηση είναι αυτή η οποία διέρχεται απ'όλα τα σημεία του επιπέδου Oxy; »[2] Στην ερώτηση αυτή θα δοθεί μία απάντηση στην επόμενη παράγραφο, όπου ξαναθυμίζουμε τις έννοιες της γενικής και της μερικής λύσης μιας Δ.Ε..

---

[1] *Επομένως λ είναι η κλίση της καμπύλης της άγνωστης συνάρτησης y(x), ή αλλοιώς λ είναι η κλίση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην άγνωστη συνάρτηση στο σημείο (x_0 , y_0), ή τέλος εάν ονομάσουμε θ τη γωνία της ε με τη θετική προέκταση του άξονα τωνx, θα ισχύει λ=εφθ.*

[2] *Εφ'όσον γνωρίζουμε την κλίση της y(x) σε κάθε σημείο του επιπέδου Oxy, συμπεραίνουμε πως αυτή θα διέρχεται από κάθε σημείο του επιπέδου.*

3.φ3 Η γενική και η μερική λύση μιας Δ.Ε. 1ης τάξης.

Ξαναγυρνούμε στη Δ.Ε. της μορφής $y' = f(x,y)$. Ας πάρουμε σαν παράδειγμα την εξίσωση:

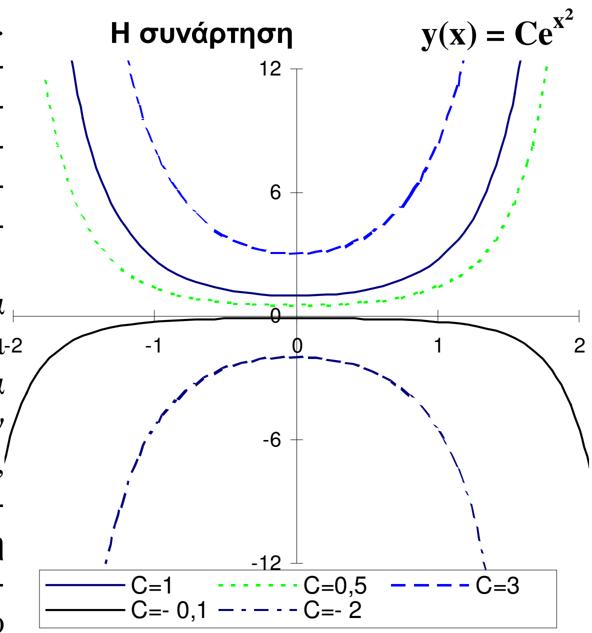
$$y' = f(x,y) = 2xy \qquad (1)$$

Παρατηρούμε (κάνοντας την αντικατάσταση στη σχέση), πως λύση της (1) είναι η συνάρτηση[1] $y(x) = e^{x^2}$. Όμως λύσεις της είναι και όλες οι συναρτήσεις της μορφής (επαληθεύουν την (1)):

$$y(x) = Ce^{x^2} \qquad (2)$$

όπου το C είναι μια αυθαίρετη σταθερή ποσότητα.

Επομένως η λύση μιας Δ.Ε. 1ης τάξης δεν είναι μία και μόνη συνάρτηση αλλά μια οικογένεια συναρτήσεων που διαφέρουν κατά μία σταθερή, της οποίας το γράφημα για πέντε τιμές του C εμφανίζεται στη διπλανή γραφική παράσταση.



Παρατηρούμε λοιπόν πως για κάθε σημείο του επιπέδου υπάρχει μία καμπύλη της οικογένειας, η οποία διέρχεται απ'αυτό. Όταν μας δοθούν οι συντεταγμένες ενός σημείου (x_0 , y_0), εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του C, για την οποία η καμπύλη της συνάρτησης να διέρχεται απ'αυτό. Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού τις ονομάζουμε «αρχική συνθήκη».

Εάν για παράδειγμα στην προηγούμενη Δ.Ε. δοθεί σαν αρχική συνθήκη το σημείο (0,1), ή όπως συνηθέστερα γράφεται $y(0)=1$, υπολογίζουμε το C:

$$1 = Ce^0 \quad \Rightarrow \quad C=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Η συνάρτηση: } \; y(x) = e^{x^2}}$$

---

[1] *Πρόκειται για μία απλή Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, η λύση της οποίας διδάχθηκε σε προηγούμενο μάθημα.*

Διαπιστώνουμε λοιπόν πως:

Η **<u>γενική λύση</u>** μιας Δ.Ε. 1ης τάξης (...ν-οστής τάξης) είναι μια μονοπαραμετρική (...ν-παραμετρική) οικογένεια συναρτήσεων, της μορφής:

$$y=y(x,c) \qquad (\ldots\ y=y(x,c_1,c_2,\ldots,c_\nu)\ )$$

Από τη γενική λύση προκύπτει μία και μόνη λύση, με τη βοήθεια μιας αρχικής συνθήκης, η οποία **<u>ονομάζεται μερική λύση που αντιστοιχεί στη δοσμένη αρχική συνθήκη</u>**:

$$y(x_0)=y_0$$

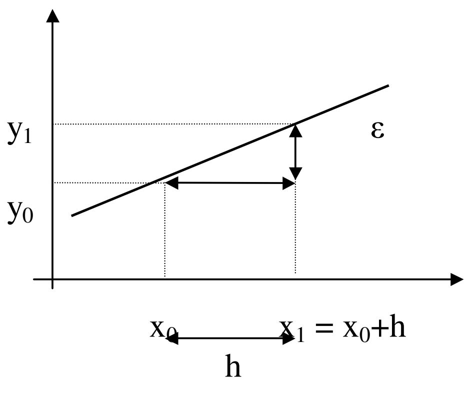
(... των αρχικών συνθηκών $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $y''(x_0)=y''_0$,..., $y^{(\nu)}(x_0)=y^{(\nu)}_0$)

3.φ4 Η αριθμητική λύση της Δ.Ε. y'=f(x,y). Η μέθοδος του Euler.

Καταφεύγουμε στην αριθμητική λύση μιας Δ.Ε. 1ης τάξης της μορφής $y'=f(x,y)$, όταν δεν είναι δυνατή η ολοκλήρωσή της με τις κλασσικές μεθόδους λύσης των Δ.Ε.. Όταν μιλούμε για αριθμητική λύση της $y'=f(x,y)$ μιλούμε για:

- μερική λύση της Δ.Ε., κι'όχι για γενική λύση,
- για ορισμό της άγνωστης συνάρτησης $y(x)$ με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών κι'όχι με μαθηματικό τύπο.

Επομένως είναι απαραίτητο να δίνεται μαζί με την Δ.Ε. και η αρχική συνθήκη $y(x_0)=y_0$. Από την αρχική συνθήκη ξεκινά η μέθοδος του Euler, η οποία υπολογίζει, από τη Δ.Ε., την κλίση (λ) της άγνωστης συνάρτησης, στο σημείο (x_0,y_0). Στη συνέχεια, αντικαθιστά την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$, με την ευθεία ε (της οποίας η κλίση είναι λ), που εφάπτεται στην καμπύλη της $y(x)$, στο σημείο (x_0, y_0). Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε την τιμή της $y(x)$, στο σημείο $x_1=x_0+h$, με την προϋπόθεση πως το h ειναι ιδιαιτερα μικρο. Ευκολα προκυπτει ο τυπος του Euler:



$$y_1 = y_0+\Delta y = y_0+h\lambda = y_0+hy'(x_0) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y_1 = y_0 + hf(x_0,y_0)}$$

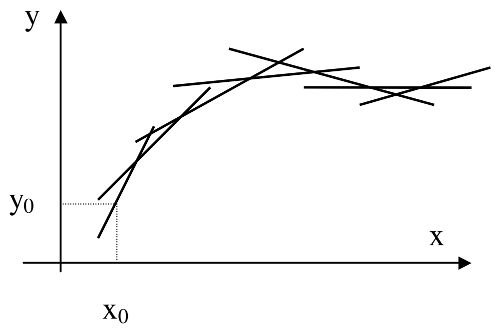
Παρατηρήσεις:

i) Γίνεται φανερό πως όσο μικρότερο είναι το βήμα ολοκλήρωσης της Δ.Ε. h, τόσο ακριβέστερος είναι ο υπολογισμός των τιμών y_1, y_2, κ.λ.π..

ii) Συνήθως επιλέγουμε ιδιαίτερα μικρό h όταν έχουμε μεγάλη και γρήγορη διακύμανση των τιμών της άγνωστης συνάρτησης y(x). Αυτό μπορούμε να το συμπεράνουμε από το μέγεθος και τη διακύμανση των τιμών της παραγώγου (η οποία δίνεται από την Δ.Ε.). Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της παραγώγου και όσο ταχύτερα μεταβάλλεται, τόσο μικρότερη πρέπει να είναι η τιμή του h.

iii) Το κάθε επόμενο σημείο στηρίζεται στο αμέσως προηγούμενο. Επομένως το μοναδικό σημείο που δεν περιέχει σφάλμα είναι το πρώτο (x_0,y_0), της αρχικής συνθήκης. Το επόμενο σημείο (x_1,y_1) περιέχει το σφάλμα που οφείλεται στην αντικατάσταση της καμπύλης, από την εφαπτόμενη ευθεία. Το μεθεπόμενο σημείο (x_2,y_2) επαναλαμβάνει τον προηγούμενο υπολογισμό, θεωρώντας το σημείο (x_1,y_1) σαν αρχική συνθήκη. Άρα στο τρίτο σημείο έχουμε άθροιση του σφάλματος λόγω του υπολογισμού κι του σφάλματος που εμπεριέχεται στην τιμή του y_1. Επομένως κατά την αριθμητική ολοκλήρωση των Δ.Ε., το σφάλμα του υπολογισμού διαρκώς μεγαλώνει.

iv) Η μέθοδος του Euler ουσιαστικά χρησιμοποιεί τη λογική της σκίασης στη ζωγραφική, όπου με εφαπτόμενες ευθείες «καθορίζεται» η θέση μιας καμπύλης, όπως αυτό φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Παράδειγμα: Να επιλυθεί με τη μέθοδο του Euler η Δ.Ε.:

$$\mathbf{x^2y' - xy - x^4e^x = 0}$$

με αρχική συνθήκη την τιμή y(1)=1, φθάνοντας μέχρι το σημείο x=1,5, με βήμα ολοκλήρωσης της Δ.Ε. h=0,1. Στη συνέχεια, λύνοντας θεωρητικά την εν λόγω Δ.Ε. να υπολογίσει το σχετικό σφάλμα του προσεγγιστικού υπολογισμού, για την τιμή x=1,5.

Λύση: Λύνοντας την δοθείσα Δ.Ε. ως προς y ‘, έχουμε:

$$y' = f(x,y) = \frac{y}{x} + x^2e^x$$

Αμέσως μετά δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα τιμών, ξεκινώντας από το σημείο της αρχικής συνθήκης και συνεχίζοντας βήμα-βήμα, μια και κάθε φορά τα προηγούμενα δεδομένα επιτρέπουν τον υπολογισμό του επόμενου σημείου:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	1	1,3718	1,8600	2,4931	3,3050	4,3359
y' = f(x,y) = $y/x+x^2e^x$	3,7183	4,8821	6,3310	8,1189	10,3089	12,974

Παράδειγμα υπολογισμού:

$x_1 = x_0 + h = 1+0,1 = 1,1$
$y(1,1) = y(1) + hf(1,1) = 1 + 0,1*3,7183 = 1,3718$
κ.λ.π.

Θεωρητική λύση: Η Δ.Ε. που δόθηκε είναι μία γραμμική Δ.Ε. 1ης τάξης, της οποίας η γενική μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Η γενική της λύση δίνεται (Μαθηματικά ΙΙ) από τον τύπο:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}[c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx]$$

Στην συγκεκριμένη Δ.Ε. έχουμε σαν P και Q τις συναρτήσεις:

$$P(x) = y/x \quad \text{και} \quad Q(x) = x^2e^x$$

οπότε, λύνουμε τα ολοκληρώματα:

$$\int P(x)\,dx = -\int 1/x\,dx = -\ln x$$

$$\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}\,dx = \int x^2e^xe^{-\ln x}\,dx = \int xe^x\,dx = e^x(x-1)$$

οπότε η γενική λύση παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{y(x,c) = cx + e^x(x^2 - x)}$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις τιμές της αρχικής συνθήκης στη γενική λύση, υπολογίζουμε την τιμή του c που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη.

$$1 = c*1 + e^1*1(1-1) \quad \Rightarrow \quad c=1$$

και η μερική λύση:

$$\mathbf{y(x) = x + e^x\,(x^2 - x)}$$

Θέτοντας τώρα την τιμή x=1,5 στη θεωρητική λύση, βρίσκουμε την ακριβή τιμή της συνάρτησης y(x), στο σημείο αυτό:

Ακριβής λύση : 4,861267
Προσεγ.λύση : 4,335929

$$\sigma_{\sigma\chi} = 100*\frac{4,861267-4,335929}{4,861267} = 10,74\ \%$$

Να παρατηρήσουμε πως η μέθοδος του Euler είναι εύκολη και σύντομη, όμως δεν είναι ιδιαίτερα ακριβής, ιδιαίτερα όταν προσπαθεί να ακολουθήσει μια συνάρτηση εκθετική. Εάν επιζητούσαμε μεγαλύτερη ακρίβεια, τότε το πρώτο που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι το να μειώσουμε την τιμή του βήματος h. Για παράδειγμα, εάν υιοθετούσαμε την τιμή h=0,025, τότε η νέα προσεγγιστική τιμή θα ήταν:

$$y(1,5) = 4,722622$$

με σχετικό σφάλμα: $\sigma_{\sigma\chi} = 2,85\ \%$.

3.φ5. Η μέθοδος του Taylor.

Η μέθοδος του Taylor χρησιμοποιεί το γνωστό ανάπτυγμα του Taylor. Να θυμίσουμε πως πρόκειται για ένα πολυώνυμο το οποίο παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση. Η κατασκευή του στηρίζεται στην ιδιότητά του, η τιμή του καθώς και οι τιμές των παραγώγων του σε κάποιο σημείο χ_o (το κέντρο του αναπτύγματος) να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες της συνάρτησης. Όπως είδαμε, δίνεται από τη σχέση:

$$f(\chi_o+h) = f(\chi_o) + h*f'(\chi_o) + \frac{h^2}{2!}f''(\chi_o) + \frac{h^3}{3!}f'''(\chi_o) + \ldots$$

Το ...μειονέκτημά του είναι πως έχει άπειρους όρους. Στην πράξη, μπορούμε να γνωρίζουμε την τιμή της συνάρτησης, σε κάποιο διπλανό σημείο του χ_o (το χ_o+h), χρησιμοποιώντας έναν μικρό σχετικά αριθμό όρων.

Στην περίπτωση της Δ.Ε. 1ης τάξης (της $y' = f(x,y)$), μπορούμε να ορίσουμε το ανάπτυγμα της άγνωστης συνάρτησης $y(x)$, με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης ($y(x_o)$), της πρώτης παραγώγου ($y'(x_o)=f(x_o,y_o)$), αλλά και των υπολοίπων παραγώγων οι οποίες προκύπτουν από την παραγώγιση της σχέσης της Δ.Ε.. Βέβαια θα πρέπει να θυμηθούμε την πεπλεγμένη παραγώγιση[(1)].

Ολοκληρώνοντας τη γραφή του αναπτύγματος στο σημείο x_o, υπολογίζουμε την τιμή του $y(x_1) = y(x_o+h)$, υπολογισμό τον οποίο επαναλαμβάνουμε με κέντρο το σημείο (x_1,y_1), για να βρούμε τα σημεία (x_2,y_2), (x_3,y_3), κ.λ.π..

Παράδειγμα: Επανερχόμαστε στο παράδειγμα της Δ.Ε.:

$$\mathbf{x^2y' - xy - x^4e^x = 0}$$

με αρχική συνθήκη την τιμή $y(1)=1$, την οποία θα ολοκληρώσουμε με τη βοήθεια του δευτεροβαθμίου αναπτύγματος του Taylor, φθάνοντας μέχρι το σημείο $x=1,5$, με βήμα ολοκλήρωσης της Δ.Ε. $h=0,1$, υπολογίζοντας στη συνέχεια το σχετικό σφάλμα του προσεγγιστικού υπολογισμού, για την τιμή $x=1,5$.

---

(1) Η πεπλεγμένη παραγώγιση χρησιμοποιείται σε μία συνάρτηση η οποία δεν είναι λυμένη ως προς την εξαρτημένη της μεταβλητή, της μορφής $f(x,y)=0$. Σαν απλό μνημονικό κανόνα αναφέρουμε το: «παραγωγίζουμε κανονικά τη σχέση f, ως προς x και y, γνωρίζοντας πως το y δεν είναι μία μεταβλητή, αλλά μία συνάρτηση. Τέλος, λύνουμε ως προς το y'». Παράδειγμα:

$$f(x,y) = x^2 + y^3 + x\eta\mu y = 0$$

οπότε:

$$2x + 3y^2y' + \eta\mu y + xy'\sigma\upsilon\nu y = 0 \quad \Rightarrow$$
$$2x + \eta\mu y + y'(3y^2 + x\sigma\upsilon\nu y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{2x + \eta\mu y}{3y^2 + x\sigma\upsilon\nu y}$$

Λύση: Αρχικά παραγωγίζουμε τη Δ.Ε., για να βρούμε τη δεύτερη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης y(x):

$$y' = y/x + x^2e^x \quad \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{xy' - y}{x^2} + 2xe^x + x^2e^x$$

Να παρατηρήσουμε πως στη σχέση της δεύτερης παραγώγου είναι δυνατό να αντικαταστήσουμε το y' με το ίσο του από την πρώτη παράγωγο, κάτι που συνήθως αποφεύγουμε διότι όταν υπολογίζουμε την τιμή της 2ης παραγώγου, γνωρίζουμε ήδη την τιμή της 1ης, την οποία και αντικαθιστούμε. Δημιουργούμε λοιπόν και πάλι τον επόμενο πίνακα τιμών, ξεκινώντας από το σημείο της αρχικής συνθήκης και συνεχίζοντας βήμα-βήμα, μια και κάθε φορά τα προηγούμενα δεδομένα επιτρέπουν τον υπολογισμό του επόμενου σημείου:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	1,0000	1,4262	1,9871	2,7145	3,6459	4,8261
y'=f(x,y)= =y/x+x2ex	3,7183	4,9316	6,4369	8,2892	10,5524	13,3012
y''=(xy'-y)/x2 +2xex+x2ex	10,8731	13,5488	16,7334	20,5114	24,9800	30,2514

Παράδειγμα υπολογισμού:

$x_1 = x_0 + h = 1+0,1 = 1,1$

$y(1,1) = y(1) + hf(1,1) + h^2y''(1)/2! = 1 + 0,1*3,7183 + 0,1^2*10,8731/2$

$= 1,4262$

κ.λ.π.

Από το προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε θεωρητικά τη γενική λύση της Δ.Ε.:

$$\mathbf{y(x) = x + e^x (x^2 - x)}$$

απ'όπου προκύπτει το σχετικό σφάλμα του υπολογισμού της τιμής της y(1,5):

$$\sigma_{\sigma\chi} = 100*(4,8613-4,8261)/4,8613 = 0,723 \%$$

Παρατηρήσεις.

- Η μέθοδος του Euler ουσιαστικά αντικαθιστούσε την άγνωστη συνάρτηση y(x) με την ευθεία που εφάπτονταν στην καμπύλη της y(x). Η μέθοδος του Taylor κάνει κάτι αντίστοιχο: Αντικαθιστά την άγνωστη συνάρτηση y(x) με ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού (3ου, 4ου, κ.λ.π.), το οποίο:
  1. παίρνει την ίδια τιμή με την y(x) στο σημείο x_o
  2. έχει την ίδια 1η παράγωγο με την y(x) στο σημείο x_o
  3. έχει την ίδια 2η παράγωγο με την y(x) στο σημείο x_o (ίδια 3η, 4η κ.λ.π. παράγωγο...)

  πρόκειται δηλαδή για μία καμπύλη η οποία περνά από το σημείο (x_o,y_0), όπως και η y(x), έχοντας την ίδια κλίση, αλλά και την ίδια «καμπυλότητα» με την y(x).
- Η μέθοδος του Taylor, ακόμη κι όταν χρησιμοποιούμε μέχρι και τον όρο 2ης τάξης, υπερέχει αισθητά σε ακρίβεια της μεθόδου του Euler (η οποία ουσιαστικά είναι ο πρωτοβάθμιος τύπος του Taylor). Εάν μάλιστα δουλεύουμε με ηλεκτρονικό υπολογιστή, τότε εύκολα παίρνουμε περισσότερους όρους (φθάνοντας για παράδειγμα μέχρι τους όρους 4ης τάξης), επιτυγχάνοντας μεγάλη ακρίβεια.
- Το δυσκολότερο σημείο της μεθόδου είναι συνήθως ο υπολογισμός των παραγώγων 2ης, 3ης, κ.λ.π. τάξης, ιδιαίτερα όταν είναι πολύπλοκο το 2ο μέλος της Δ.Ε. (το f(x,y)). Το μειονέκτημα αυτό προσπαθούν να το θεραπεύσουν οι τύποι των Runge-Kutta, που περιγράφονται στην επόμενη παράγραφο.

3.φ6 Η μέθοδος των Runge-Kutta.

Η μέθοδος των Ινδών μαθηματικών Runge και Kutta, δίνει τύπους με ακρίβεια αντίστοιχη των τύπων του Taylor (2ης, 3ης, κ.λ.π. τάξης), αποφεύγοντας όμως τον σκόπελο της παραγώγισης της Δ.Ε.. Θα εξηγήσουμε θεωρητικά τον τύπο 2ης τάξης, ο οποίος αντιστοιχεί στον τύπο 2ης τάξης του Taylor.

Η μέθοδος των Runge-Kutta 2ης τάξης, αντί να χρησιμοποιεί τη δεύτερη παράγωγο της y(x), χρησιμοποιεί δύο φορές την 1η παράγωγο, ως εξής:

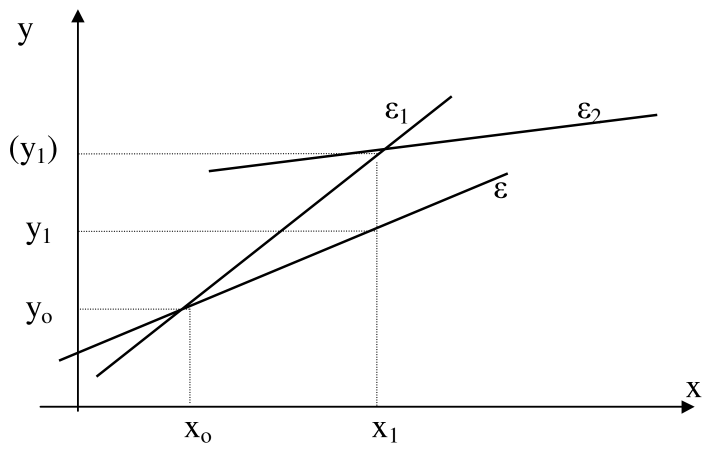
- Ξεκινώντας από την αρχική συνθήκη (x_o,y_o), υπολογίζουμε το επόμενο σημείο (x_1,y_1), με τον τύπο του Euler, το οποίο βέβαια δεν έχει την απαιτούμενη ακρίβεια.
- Στη συνέχεια υπολογίζουμε την κλίση της y(x) στο σημείο (x_1,y_1), την τιμή δηλαδή $y'=f(x_1,y_1)$.

- Γυρνώντας, τέλος, στο αρχικό σημείο (x_o,y_o), ξαναπαίρνουμε τον τύπο του Euler, υιοθετώντας σαν παράγωγο το ημιάθροισμα των κλίσεων που βρήκαμε στα σημεία (x_o,y_o) και (x_1,y_1).

Ο τύπος:

$y_1 = y(x_1) = y(x_o) + h\dfrac{K_1 + K_2}{2}$ όπου $K_1 = f(x_o\,,\, y_o)$ και $K_2 = f(x_o+h\,,\, y_o+hK_1)$

Γεωμετρική ερμηνεία.



Στο διπλανό γράφημα βλέπουμε παραστατικά τον τρόπο λειτουργίας του τύπου:

- Υπολογίζουμε την κλίση K_1 της $y(x)$ στο (x_o,y_o), άρα την κλίση της ευθείας ε_1, που εφάπτεται στην $y(x_o)$. Γράφουμε: $K_1=f(x_o,y_o)$, και με τον τύπο του Euler υπολογίζουμε το προσωρινό (y_1)
$$(y_1) = y_0+hK_1$$
- Υπολογίζουμε την κλίση K_2 της $y(x)$ στο $(x_1,(y_1))$, άρα την κλίση της ευθείας ε_2. που εφάπτεται στην $y(x)$, στο σημείο $(x_1,(y_1))$.
- Γράφουμε: $K_2 = f(x_1,(y_1)) = f(x_o+h,\, y_0+hK_1))$
- Επανερχόμαστε στο αρχικό σημείο (x_o,y_o), χαράσσουμε την ευθεία ε της οποίας η κλίση είναι το ημιάθροισμα των κλίσεων των ε_1 και ε_2:
$$\lambda=(K_1+K_2)/2\ )$$
- Χρησιμοποιούμε για δεύτερη φορά τον τύπο του Euler, με κέντρο το (x_o,y_o), υιοθετώντας σαν παράγωγο (κλίση) το λ, και φθάνουμε στον τύπο που προαναφέραμε:

$$\boxed{y_1 = y(x_1) = y_o + h\lambda = y(x_o) + h\dfrac{K_1 + K_2}{2}}$$

Οι τύποι των Runge-Kutta.

Με παρόμοια λογική ορίζεται και ο τύπος της 4ης τάξης. Καταγράφουμε λοιπόν το σύνολο των τύπων:

(i) Runge-Kutta 2ης τάξης:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_o) + h\frac{K_1 + K_2}{2}$$

όπου $K_1 = f(x_o\,, y_o)$ και
$K_2 = f(x_o+h\,,\ y_o+hK_1)$

(ii) Runge-Kutta 4ης τάξης:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_o) + h\frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

όπου
$K_1 = f(x_o\,, y_o)$
$K_2 = f(x_o+\frac{h}{2}\,,\ y_o+\frac{h}{2}K_1)$
$K_3 = f(x_o+\frac{h}{2}\,,\ y_o+\frac{h}{2}K_2)$ και
$K_4 = f(x_o+h\,,\ y_o+hK_3)$

Παρατήρηση: Ένας εύκολος και απλός τρόπος για να ελέγξουμε την ακρίβεια της μεθόδου των R-K, είναι να παρακολουθήσουμε τις τιμές των K_j. Εάν η διακύμανση των τιμών αυτών είναι ιδιαίτερα σημαντική, τότε υπάρχει μια σημαντική ένδειξη για χαμηλή ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Η λύση του προβλήματος αυτού επέρχεται με τη μείωση της τιμής του βήματος h.

Παράδειγμα: Επανερχόμαστε, για τελευταία φορά, στο παράδειγμα της Δ.Ε.:

$$\mathbf{x^2y\,' - xy - x^4e^x = 0}$$

με αρχική συνθήκη την τιμή y(1)=1, την οποία θα ολοκληρώσουμε με τη βοήθεια του τύπου των Runge-Kutta 2ης τάξης, φθάνοντας μέχρι το σημείο x=1,5, με βήμα ολοκλήρωσης της Δ.Ε. h=0,1, υπολογίζοντας στη συνέχεια το σχετικό σφάλμα του προσεγγιστικού υπολογισμού, για την τιμή x=1,5, και συγκρίνοντάς το με το αντίστοιχο του τύπου του Taylor, από το προηγούμενο παράδειγμα.

Λύση: Για άλλη μία φορά, η λύση του προβλήματος στηρίζεται στη δημιουργία ενός πίνακα τιμών, ξεκινώντας από το σημείο της αρχικής συνθήκης και συνεχίζοντας βήμα-βήμα (υπολογίζοντας το K_1 , το K_2 και μ'αυτά το y του επόμενου σημείου) , μια και κάθε φορά τα προηγούμενα δεδομένα επιτρέπουν τον υπολογισμό του επόμενου σημείου:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	1,0000	1,4300	1,9960	2,7298	3,6694	4,8596
K1	3,7183	4,9351	6,4443	8,3010	10,5692	13,3235
x+h	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
προσωρινό (y)	1,3718	1,9235	2,6404	3,5599	4,7263	6,1919
K2	4,8822	6,3839	8,2322	10,4910	13,2347	16,5497

Στον πιο πάνω πίνακα, αμέσως μετά τον υπολογισμό του K_1, αναγράφουμε το επόμενο x (το τρέχον συν το βήμα h), καθώς και το προσωρινό (y)=y_o+hK_1 , έτσι ώστε να διευκολυνόμαστε στον υπολογισμό του K_2. Πράγματι, το K_2 υπολογίζεται όπως και το K_1 (με τον ίδιο τύπο), θέτοντας στη θέση του x το x+h, και στη θέση του y το προσωρινό (y).

Η θεωρητική γενική και μερική λύση, όπως υπολογίστηκαν στο κεφάλαιο της μεθόδου του Euler, δίνει σαν ακριβή τιμή το: y(1,5)=4,8613. Επομένως το σχετικό σφάλμα της μεθόδου των R-K ισούται με:

$$\sigma_{\sigma\chi} = 100*(4{,}8613-4{,}8596)/4{,}8613 = 0{,}343\ \%$$

Παρατηρούμε δηλαδή μια μικρή υπεροχή της μεθόδου των R-K 2ης τάξης, απέναντι στην αντίστοιχη (2ης τάξης) μέθοδο του Taylor.

3.φ7 Υπολογισμός με το Excel.

Θέλουμε να διαμορφώσουμε το φύλλο εργασίας μας, έτσι ώστε να δίνουμε σε κάποια κελιά την αρχική συμθήκη (x_0,ψ_0), το Δx και τον τύπο της συνάρτησης του β' μέλους της Δ.Ε. και τα υπόλοιπα να υπολογίζονται με σύρσιμο του ποντικιού προς τα δεξιά και προς τα κάτω. Προσπαθείστε λοιπόν να δημηουργήσετε ένα φύλλο της μορφής:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Xo=		Δx=			
3		Yo=					
4							
5		X	Y	K1	X(Euler)	Y(Euler)	K2
6							
7		=C2	=C3	Στο 1ο	Περιέχει	Περιέχει	Στο 1ο
8		Στη συνέχεια	Το κελί C8	κελί γράφου-	το άθροισμα	την τιμή	κελί γράφου-
9		προσθέτει	το γράγουμε	με τον τύπο	των	του Y που	με τον τύπο
10		στο προηγού-	τελευταίο.	του β' μέλους	αντίστοιχων	προκύπτει	του β' μέλους
11		μενο κελί	Περιέχει	της Δ.Ε.,	κελιών των	από τον	της Δ.Ε.,
12		το Δχ,	το άθροισμα	με τιμές	X, με το	τύπο του	με τιμές
13		δηλ. το E2.	του προηγού-	των X και Y	Δx (E2)	Euler.	των X(Euler)
14			μενου κελιού	αριστερά.		Y=Yo+Δx	και Y(Euler)
15			με το	Τα υπόλοιπα		*K1	Τα υπόλοιπα
16			Δx(K1+K2)/2	πρέπει να			πρέπει να
17				προκύπτουν!			προκύπτουν!
18							

Παρατηρούμε πως στον πίνακα αυτό οι τιμές των x και y εμφανίζονται κατά στήλες (κατακόρυφα) κι όχι κατά γραμμές (οριζόντια), όπως κάναμε στο παράδειγμα. Αμέσως μετά τον υπολογισμό του K_1, έχουμε το x(Euler) και το y(Euler), αντί για το x+h και το προσωρινό (y), που χρησιμοποιούσαμε στο αριθμητικό παράδειγμα.

Παράδειγμα.

Θέλουμε να λύσουμε τη Δ.Ε.

$$\psi' = f(x,\psi) = 2\psi\eta\mu(x)\sigma\upsilon\nu(x) + e^{-\sigma\upsilon\nu\,(\chi)^{2}}$$

με αρχική συμθήκη ($x_0=0$, $\psi_0=1$) ή όπως συνηθίζεται να διατυπώνεται $\psi(0)=1$. Το σύνολο των αποτελεσμάτων (με βήμα ολοκλήρωσης Δx=0,2) εμφανίζεται στον επόμενο πίνακα:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Xo=	0	Δχ=	0,2			
3	Yo=	1					
4							
5	X	Y	K1	X(Euler)	Y(Euler)	K2	
6	0	1,000	0,368	0,2	1,074	0,801	
7	0,2	1,117	0,818	0,4	1,280	1,347	
8	0,4	1,333	1,385	0,6	1,610	2,007	
9	0,6	1,672	2,065	0,8	2,085	2,700	
10	0,8	2,149	2,763	1	2,702	3,203	
11	1	2,746	3,243	1,2	3,394	3,170	
12	1,2	3,387	3,165	1,4	4,020	2,318	
13	1,4	3,935	2,290	1,6	4,393	0,743	
14	1,6	4,238	0,752	1,8	4,389	-0,992	
15	1,8	4,214	-0,915	2	4,031	-2,210	
16	2	3,902	-2,112	2,2	3,479	-2,604	
17							

Στο διπλανή γραφική πα-ρά-σταση εμφανίζεται το αποτέλεσμα της επίλυσης της Δ.Ε. (φθάνοντας μέχρι την τιμή x=8). Τα μικρά τριγωνάκια δείχνουν την ακριβή τιμή της λύσης, ενώ η συνεχής καμπύλη την προσεγγιστική.

Παρατηρούμε πως η ακρίβεια είναι αποδεκτή, παρ'όλον ότι το βήμα Δx (=0,2) είναι ιδιαίτερα μεγάλο.