ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Σταύρος Παπαϊωάννου

Διάλεξη 01

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1 1. Με τι ασχολείται η Αριθμητική Ανάλυση

1.2 Γενικά

Το μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης απευθύνεται σε σπουδαστές που έχουν ήδη γνωρίσει σε γενικές γραμμές τον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό της Μαθηματικής Ανάλυσης. Στο μάθημα αυτό θα γνωρίσουμε μερικά στοιχεία της Μαθηματικής Επιστήμης που λέγεται Αριθμητική Ανάλυση. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να επιλύσουμε κάποια προβλήματα, χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της κλασικής Ανάλυσης, είτε κάποιες καθαρά προσεγγιστικές-αριθμητικές μεθόδους λύσης.

Ενδεικτικά ας αναφέρουμε κάποια παραδείγματα προβλημάτων που στην συνέχεια θα προσπαθήσουμε να λύσουμε:

α) Να υπολογισθεί το ορισμένο Ολοκλήρωμα:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

όταν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα (α,β), ενώ δεν μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$. Θα πρέπει επομένως να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την τιμή A του ορισμένου ολοκληρώματος.

β) Να βρεθεί μία απλή και «γρήγορη» μέθοδος, που να επιλύει το παρακάτω σύστημα ν γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2k}x_k &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3k}x_k &= b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots \\
a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + a_{\nu 3}x_3 + \ldots + a_{\nu k}x_k &= b_\nu
\end{aligned}$$

Να υπογραμμίσουμε εδώ πως η διάδοση των προσωπικών υπολογιστών αναγκάζει τις μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης να είναι προσανατολισμένες στη δυνατότητα προγραμματισμού τους.

Θα ήταν όμως λανθασμένο να αντιμετωπισθεί η Αριθμητική Ανάλυση σαν μια παραφυάδα της Μαθηματικής Επιστήμης! Πρόκειται για μία ολοκληρωμένη Επιστήμη, τα πορίσματα της οποίας, συνεργαζόμενα με την Στατιστική και την Πληροφορική, δίνουν αποτελέσματα που αγγίζουν τα όρια του αδύνατου.

Με δεδομένη την εκρηκτική ανάπτυξη της Τεχνολογίας και την είσοδό της στην καθημερινή ζωή, είναι πιθανό στην καριέρα σας σαν τεχνολόγοι να βρεθείτε μπροστά σε δύσκολα υπολογιστικά προβλήματα. Θα είναι επιτυχία για το μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών αν θυμηθείτε πως ανατρέχοντας σε ένα βιβλίο Αριθμητικής Ανάλυσης, κερδίζετε σίγουρα και χρόνο και ακρίβεια. Για τον λόγο αυτό συνήθως τα βιβλία Αριθμητικής Ανάλυσης είναι γραμμένα έτσι ώστε το κάθε τους κεφάλαιο να μπορεί να μελετηθεί ανεξάρτητα από το υπόλοιπο βιβλίο, προϋποθέτοντας βέβαια κάποιες στοιχειώδεις γνώσεις Αριθμητικής Ανάλυσης και φυσικά Γενικών Μαθηματικών.

Οι περισσότερες από τις μεθόδους που θα αναφερθούν στα πλαίσια αυτών των σημειώσεων μπορούν να προσαρμοσθούν ιδιαίτερα εύκολα σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Μάλιστα, στις τελευταίες σελίδες μερικών κεφαλαίων, αναφερόμαστε στον προγραμματισμό των αντίστοιχων μεθόδων με τη βοήθεια του πλέον διαδεδομένου προγράμματος, του Excel. Για να εφαρμόσει κανείς τις υποδείξεις αυτές στον υπολογιστή του, θα πρέπει να έχει μια εντελώς στοιχειώδη γνώση του Excel. Πιστεύουμε πως αξίζει τον κόπο να τα δουλέψετε κι εσείς στον υπολογιστή σας, μια και θα εξασκηθείτε στο χειρισμό του Excel, αλλά (το πιο σημαντικό) θα σας βοηθηθείτε και στην βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

1.3 Δεδομένα και ζητούμενα του προβλήματος. Αλγόριθμος λύσης

Σε ένα υπολογιστικό πρόβλημα έχουμε συνήθως κάποια στοιχεία που δίνονται και κάποια που ζητούνται. Το δικό μας μέλημα είναι να βρούμε μία μέθοδο λύσης η οποία, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα, να υπολογίζει τα ζητούμενα. Η μέθοδος αυτή, που συνήθως δεν είναι μοναδική για το εν λόγω πρόβλημα, ονομάζεται **αλγόριθμος λύσης.**

Η επιλογή ανάμεσα στις διάφορες μεθόδους λύσης γίνεται για διάφορους κάθε φορά λόγους. Θα προσπαθήσουμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα του αριθμού 133, με την μέθοδο που πρωτομάθαμε στο Σχολείο και για την οποία μας αρκεί ένα μολύβι και χαρτί:

1.4 Το πρόβλημα της ακρίβειας ή ακριβέστερα το πρόβλημα των σφαλμάτων

Το πρόβλημα των σφαλμάτων κυριαρχεί στην Αριθμητική Ανάλυση. Από τον απλούστερο υπολογισμό μέχρι τα πιο σύνθετα προβλήματα η ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος αποτελεί κεντρικό ερώτημα στο οποίο η Επιστήμη της Αριθμητικής Ανάλυσης πρέπει να δίνει απάντηση.

Η γραφή ενός αριθμού, ενώ είναι ένα απλό ζήτημα, δημιουργεί ήδη προβλήματα ακρίβειας. Παρ' όλο που στα Μαθηματικά η κλασματική και η δεκαδική μορφή ενός ρητού είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, η Αριθμητική Ανάλυση, προσανατολισμένη προς τις ανάγκες της Πληροφορικής η οποία θέλει αριθμούς σε δεκαδική μορφή, χρησιμοποιεί κατά βάση την δεκαδική μορφή γραφής. Η γραφή για παράδειγμα ενός ρητού αριθμού με δεκαδική μορφή δεν εισάγει σφάλμα, μόνον όταν ο αριθμός αυτός έχει πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων:

$3/4 = 0.75$ ή $2/5 = 0.4$

Αν όμως ο ρητός στην δεκαδική γραφή είναι περιοδικός, τότε η γραφή του σε δεκαδική μορφή εισάγει ένα σφάλμα που εξαρτάται από τον αριθμό των ψηφίων που θα κρατήσουμε και που είναι το γνωστό **σφάλμα στρογγυλοποίησης**:

$3/7 = 0.27272727.... \sim 0.272727$ (με σφάλμα $= 0.0000002727..<0.0000003$)

Να θυμίσουμε πως κάθε ρητός αριθμός στην δεκαδική του μορφή ή θα έχει πεπερασμένο αριθμό ψηφίων ή θα είναι περιοδικός. Π.χ.:

$$\frac{7}{8} = 0.875 \quad ή \quad \frac{9}{11} = 0.818181818.....$$

Αντίστροφα κάθε περιοδικός δεκαδικός είναι ρητός. Ένας αντιπρόσωπος του ρητού αυτού δίνεται από το κλάσμα που έχει αριθμητή την περίοδο του περιοδικού σε ακέραια μορφή και παρονομαστή έναν ακέραιο με τόσα εννέα όσα και τα ψηφία της περιόδου:

$$0.8181818... = \frac{81}{99} = \frac{9}{11} \quad ή \quad 0.714285714285714.... = \frac{714285}{999999} = \frac{5}{7}$$

1.5 Απόλυτο και σχετικό σφάλμα

Όπως είπαμε προηγούμενα, ακόμη και μια απλούστατη διαδικασία, όπως είναι η γραφή ενός τυχαίου ρητού αριθμού, του οποίου θεωρητικά γνωρίζουμε όλα τα ψηφία (μια και πρόκειται για περιοδικό αριθμό), εισάγει το σφάλμα που ονομάσαμε σφάλμα στρογγυλοποίησης. Γίνεται λοιπόν φανερό πως η επίλυση άλλων πολυπλοκότερων προβλημάτων, προκαλεί τη δημιουργία σημαντικών σφαλμάτων τα οποία συχνά είναι δύσκολο να εκτιμηθούν.

Ας υποθέσουμε λοιπόν πως μετρούμε μία απόσταση με τη βοήθεια μιας μετροταινίας και ενός μηχανήματος που χρησιμοποιεί ακτίνες Laser. Θεωρώντας, στην πράξη, τη μέτρηση με Laser σαν ακριβή, καταλήγουμε σε δύο μετρήσεις:

- x': μέτρηση με μετροταινία (προσεγγιστική μέτρηση)
- x : μέτρηση με Laser (ακριβής μέτρηση)

Ορισμός:

Ονομάζουμε **απόλυτο σφάλμα** (σ_a) της μέτρησης x' την διαφορά τιμών ανάμεσα στην ακριβή (x) και στην προσεγγιστική (x') μέτρηση:

$$\sigma_a = x' - x$$

Όμως, το απόλυτο σφάλμα δεν μας επιτρέπει να αξιολογήσουμε την ποιότητα της ακρίβειας με την οποία έγινε μια μέτρηση. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μία ομάδα σπουδαστών μετρά, με μία μετροταινία, το πλάτος μιας αίθουσας διδασκαλίας, και η μέτρησή της έχει απόλυτο σφάλμα 30 cm, ενώ μία άλλη ομάδα μετρά (με μετροταινία και πάλι) την περίμετρο του κτιρίου της Διοίκησης του ΤΕΙ, με το ίδιο απόλυτο σφάλμα. Είναι προφανές πως η πρώτη ομάδα έκανε μια απρόσεκτη μέτρηση, ενώ η δεύτερη έδωσε ένα ικανοποιητικότατο αποτέλεσμα (για τη μέθοδο που χρησιμοποίησε). Για το λόγο αυτό αξιολογούμε την ακρίβεια μιας μέτρησης, με τη βοήθεια του σχετικού σφάλματος, το οποίο συγκρίνει το απόλυτο σφάλμα της μέτρησης με το μέγεθος που μετριέται

Ορισμός:

Ονομάζουμε **σχετικό σφάλμα** ($\sigma_{\sigma\chi}$) της μέτρησης x', το λόγο του απολύτου σφάλματος σ_α, προς την ακριβή τιμή του μεγέθους x. Το κλάσμα του σχετικού σφάλματος, πολλαπλασιασμένο επί 100, δίνει την επί τοις εκατό έκφραση του σχετικού σφάλματος.

$$\sigma_{\sigma\chi} = \frac{x' - x}{x}$$

Βέβαια είναι πολύ σπάνιες οι φορές που γνωρίζουμε ταυτόχρονα την προσεγγιστική μέτρηση μιας ποσότητας και την ακριβή τιμή της. Συνήθως όμως γνωρίζουμε το μέγιστο σφάλμα που μπορεί να δημιουργηθεί κατά τη διαδικασία μιας μέτρησης. Έτσι για παράδειγμα το φυλλάδιο οδηγιών ενός τοπογραφικού μηχανήματος αναφέρει πως το μηχάνημα μπορεί να μετρήσει αποστάσεις μέχρι των τριών χιλιομέτρων, ενώ το μέγιστο σχετικό του σφάλμα (εφ' όσον τηρηθούν οι τεχνικές προδιαγραφές) είναι 0,1%, πράγμα που σημαίνει πως σε μία απόσταση των 1000 μέτρων θα πέσουμε έξω κατά ένα μέτρο, το πολύ.

Ορισμός:

Ονομάζουμε μέγιστο απόλυτο σφάλμα (E_a) το μεγαλύτερο σφάλμα που είναι δυνατό να περιέχεται σε μία μέτρηση. Το μέγιστο σχετικό σφάλμα ($E_{\sigma\chi}$) ορίζεται όπως προηγουμένως. Ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις:

$$E_a = \max(x' - x)$$

$$E_{\sigma\chi} = \frac{\max(x' - x)}{x}$$

Παρατήρηση:

Όταν δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή x, ενώ έχουμε μια αξιόπιστη εκτίμηση για το μέγιστο απόλυτο σφάλμα της μεθόδου μας, αντικαθιστούμε την ακριβή τιμή x, στον παρονομαστή των προηγουμένων σχέσεων, με την προσεγγιστική τιμή x′.

1.6 Αποκοπή και στρογγυλοποίηση

Όπως ήδη είπαμε, η συντριπτική πλειοψηφία των πραγματικών αριθμών έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία. Από αυτά μόνον ένα μικρό πλήθος τους μπορεί να γραφεί. Λέμε πως αποκόπτουμε από έναν δεκαδικό αριθμό x, τα ψηφία πέραν του ν-οστού δεκαδικού ψηφίου του, όταν το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο που κρατούμε είναι το ν-οστό, αποκόπτοντας όλα τα επόμενα (από το ν+1 και πέρα).

Στρογγυλεύουμε έναν δεκαδικό αριθμό στο ν-οστό δεκαδικό ψηφίο ελέγχοντας το ν+1 δεκαδικό ψηφίο. Αν το ψηφίο αυτό (το ν+1) είναι κάποιο από τα 0,1,2,3,4, τότε το ν-οστό παραμένει ως έχει, ενώ αν το ν+1 ψηφίο είναι κάποιο από τα 5,6,7,8,9, τότε αυξάνουμε κατά μία μονάδα την τιμή του ν-οστού δεκαδικού ψηφίου. Π.χ.:

0.93746875 ~ 0.937 (στρογγυλοποίηση στο 3ο δεκαδικό ψηφίο)
0.93746875 ~ 0.93747 (στρογγυλοποίηση στο 5ο δεκαδικό ψηφίο)

1.7 Μέγιστο απόλυτο και σχετικό σφάλμα αποκοπής

Έστω ο πραγματικός αριθμός x, από τον οποίο δίνονται μόνον τα τρία πρώτα δεκαδικά ψηφία του:

x = 2.345

Θεωρώντας πως η στρογγυλοποίηση έχει γίνει σωστά, συμπεραίνουμε πως η πραγματική τιμή του x μπορεί να ανήκει στο διάστημα:

(2.344500... , 2.3454999..) = (2.3445 , 3.2455)

Εφ' όσον η τιμή που επιλέγουμε για τον x (το 2.345), είναι το μέσον του πιο πάνω διαστήματος, το μέγιστο απόλυτο σφάλμα που θα προκύπτει από την αποκοπή και τη στρογγυλοποίηση θα είναι ίσο με το ήμισυ του πλάτους του διαστήματος αυτού:

Μέγιστο απόλυτο σφάλμα: $E_\alpha = 0.0005$

Τελικό συμπέρασμα:
Όταν από ένα πραγματικό αριθμό αποκόπτουμε τα ψηφία που βρίσκονται πέρα του ν-οστού δεκαδικού ψηφίου, στρογγυλεύοντας το ν-οστό, το μέγιστο απόλυτο σφάλμα που θα κάνουμε ισούται με 5 μονάδες του ν+1 ψηφίου.

1.8 Σημαντικά ψηφία

Έστω οι πραγματικοί *x* και *y*:

$x = 1234.56789$ και $y = 0.000123456789$

τους οποίους θα γράψουμε διατηρώντας ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων:

$x = 1234.5679$ και $y = 0.0001$

Παρατηρούμε πως ενώ το μέγιστο απόλυτο σφάλμα αποκοπής είναι κοινό (0,00005), το μέγιστο σχετικό σφάλμα (που είναι και το σημαντικότερο) είναι εντελώς διαφορετικό:

$$E_{\sigma\chi.}(x) = 100\frac{0.00005}{1234.56789} = 0.000004\ \%$$

$$E_{\sigma\chi.}(y) = 100\frac{0.00005}{0.000123456789} = 40.5\ \%$$

Στην προσπάθεια να διατηρούμε στο ίδιο επίπεδο το σχετικό σφάλμα αποκοπής, είτε πρόκειται για αριθμούς με πολύ μεγάλη απόλυτη τιμή, είτε πρόκειται για αριθμούς πολύ κοντά στο μηδέν, κρατούμε από κάθε αριθμό το ίδιο πλήθος σημαντικών ψηφίων.

Ορισμός:
Παρατηρώντας έναν δεκαδικό αριθμό από αριστερά προς τα δεξιά, ονομάζουμε **πρώτο σημαντικό ψηφίο** το αριθμού, το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο που συναντούμε. Το επόμενο δεκαδικό ψηφίο είναι το 2ο σημαντικό κ.λ.π..

Παρατήρηση:

Σε κάθε περίπτωση, και ιδιαίτερα όταν εργαζόμαστε με αριθμητική σημαντικών ψηφίων, είναι ιδιαίτερα βολική η εκθετική γραφή των δεκαδικών.

Παράδειγμα 1^{ο}

Εάν χρησιμοποιήσουμε αριθμητική 6 σημαντικών ψηφίων για τους αριθμούς *x* και *y*:

$$x = 1234.57 = 1.23457\times10^{3} = 1.23457\text{E}+3$$

$$y = 0.0000123457 = 1.23457\times10^{-5} = 1.23457\text{E}-5$$

παρατηρούμε πως το μέγιστο σχετικό σφάλμα αποκοπής:

$$E_{\sigma\chi.}(x) = 100\frac{0.5\times10^{-2}}{1.23456789\times10^{3}} = \frac{50}{1.23456789\times10^{5}}\ \%$$

$$E_{\sigma\chi.}(y) = 100\frac{0.5\times10^{-10}}{1.23456789\times10^{-5}} = \frac{50}{1.23456789\times10^{5}}\ \%$$

είναι ακριβώς το ίδιο. Βέβαια, αυτό δεν θα συνέβαινε εάν οι αριθμοί δεν είχαν ακριβώς το ίδιο 1^{ο} αντίστοιχο σημαντικό ψηφίο. Έτσι, οι αριθμοί: $x= 0.0098725$ και $y=1125.6$ δεν θα έχουν το ίδιο σχετικό σφάλμα αποκοπής, μια και το σφάλμα του *y* θα είναι περίπου 9 φορές μεγαλύτερο. Για το λόγο αυτό λέμε πως:
Η αριθμητική σημαντικών ψηφίων μας βοηθάει κατά την αποκοπή και στρογγυλοποίηση ενός δεκαδικού αριθμού να διατηρούμε στην ίδια τάξη μεγέθους το μέγιστο σχετικό σφάλμα αποκοπής, είτε αυτός έχει μεγάλη απόλυτη τιμή, είτε είναι πολύ κοντά στο μηδέν.

Παράδειγμα 2^{ο}

Είναι φανερό πως οι υπολογιστές τσέπης, όπως επίσης και οι μεγάλοι υπολογιστές, δεν δουλεύουν με ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων αλλά με ακρίβεια σημαντικών ψηφίων. Αυτή η σκέψη μας κάνει να αναρωτηθούμε για το κατά πόσο είναι ακριβές το τελευταίο ψηφίο που μας δίνεται από τον υπολογιστή τσέπης. Συνήθως είναι πράγματι ακριβές γιατί οι περισσότεροι απ' αυτούς κρατούν στην εσωτερική τους μνήμη δύο ψηφία περισσότερα από αυτά που εμφανίζουν στην οθόνη τους. Ακόμη και όταν τους ζητούμε να εμφανίζουν μικρότερο αριθμό ψηφίων, αυτοί συνεχίζουν να κρατούν στην εσωτερική τους μνήμη την μέγιστη δυνατή ακρίβεια.

Με το κομπιουτεράκι υπολογίζουμε: $\sqrt{133} = 11.53256260$

Στον αριθμό αυτόν προσθέτουμε τον 0.000000002 ο οποίος μπορεί να γραφεί στις 10 θέσεις της οθόνης. Το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός: 11.532562602 με 11 ψηφία (χωρίς το τελευταίο ψηφίο να εμφανίζεται στην οθόνη). Υψώνω στο τετράγωνο και έχω:

$$(11.532562602)^2 = 133.0000001$$

που σημαίνει πως το συγκεκριμένο κομπιούτερ κρατάει στην μνήμη του ένα τουλάχιστον σημαντικό ψηφίο περισσότερο από αυτά που εμφανίζει στην οθόνη του (το ενδέκατο ψηφίο πήρε μέρος στην πράξη).