ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Σταύρος Παπαϊωάννου

Διάλεξη 02

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1 Πραγματικές Ρίζες Συναρτήσεων

Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια απάντηση στο πρόβλημα του προσδιορισμού της ή των **πραγματικών** ριζών μιας εξίσωσης $f(x)=0$. Για την επίλυση του παλαιού αυτού προβλήματος, υπάρχουν πολλές μέθοδοι ανάμεσα από τις οποίες διαλέγουμε κάθε φορά αυτήν που μας επιβάλλει η φύση του προβλήματος αλλά και τα υλικοτεχνικά μέσα που διαθέτουμε. Για παράδειγμα, κάποιοι παράγοντες που μπορούν να καθορίσουν τον αλγόριθμο λύσης είναι...

- Αν είναι εύκολος ο αναλυτικός υπολογισμός της παραγώγου $f'(x)$.
- Αν είναι εύκολο να υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία του πεδίου ορισμού.
- Αν έστω και χοντρικά είναι γνωστή η περιοχή μέσα στην οποία υπάρχει η ρίζα της συνάρτησης f που ψάχνουμε.
- Αν η τιμή της κλίσης της f (δηλαδή η τιμή της f') είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη κατ' απόλυτη τιμή του 1.
- Αν η ρίζα που αναζητούμε είναι περιττής ή άρτιας τάξης.
- Αν έχουμε στη διάθεσή μας υπολογιστή. κ.λ.π.

Ένας όμως από τους παράγοντες που μπορεί να βοηθήσει σε μεγάλο βαθμό την δουλειά αυτή, είναι η εμπειρία μας πάνω στη συμπεριφορά των συναρτήσεων. Αν για παράδειγμα ζητούμε όλες τις ρίζες της συνάρτησης: $f(x)=x^2-x\ln x-5$ πρέπει να θυμόμαστε πως:

$\lim_{x\to 0}\left[x\ln x\right]=0$ (δοκιμάστε με τον κανόνα του De l' Hopital)

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)\right]=-5$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x^2\right]=\infty$$

Όπου η τελευταία σχέση δείχνει πως όταν το x τείνει στο άπειρο, η ποσότητα x^2 είναι σαφώς ισχυρότερη από την $x\ln x$. Αυτό μπορεί εύκολα κάποιος να το διαπιστώσει εάν δει πόσο πιο μεγάλο γίνεται το x^2 σε σχέση με το $x\ln x$ υπολογίζοντας το όριο:

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x\ln x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)=\frac{\infty}{\infty}$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα του De l' Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1/x}\right)=\lim_{x\to\infty}(x)=\infty$$

Με τα δεδομένα αυτά καταλαβαίνουμε πού περίπου μπορούμε να περιμένουμε την ύπαρξη μιας ρίζας (ή τριών σε ειδικές περιπτώσεις) που θα παρουσιάζει η συνάρτηση, μια και πρέπει, υποχρεωτικά, με τρόπο συνεχή (είναι συνεχής για $x>0$), να περάσει από τις αρνητικές τιμές που παίρνει στην περιοχή του μηδενός, σε θετικές.

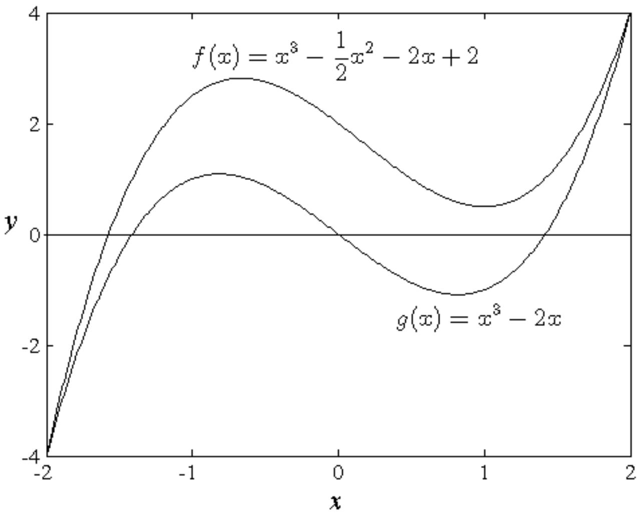
1.2 Μέθοδος Διχοτόμησης

Η μέθοδος της διχοτόμησης είναι η πρώτη και η ευκολότερη από μία σειρά προσεγγιστικών μεθόδων υπολογισμού των πραγματικών ριζών μιας συνάρτησης, που καλούνται **επαναληπτικές**. Το χαρακτηριστικό των μεθόδων αυτών είναι πως σε κάθε επανάληψη της μεθόδου έχουμε μία νέα προσέγγιση της ρίζας η οποία είναι, κατά κανόνα, καλύτερη από την προηγούμενη. Σε κάθε επανάληψη μιας επαναληπτικής μεθόδου χρησιμοποιείται σαν τιμή εκκίνησης το αποτέλεσμα της προηγούμενης προσέγγισης, την οποία επιχειρεί να βελτιώσει.

Η μέθοδος διχοτόμησης υπολογίζει πραγματικές ρίζες μιας συνάρτησης $f(x)$, είναι ιδιαίτερα απλή. και έχει τη δυνατότητα να υπολογίζει μόνον περιττής τάξης ρίζες. Στο ξεκίνημά της προϋποθέτει την εύρεση ενός (κλειστού) διαστήματος $[x_1, x_2]$ του πεδίου ορισμού της για το οποίο ισχύει:

1. η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$
2. οι τιμές της $f(x)$ στα σημεία x_1 και x_2 είναι ετερόσημες (δηλαδή $f(x_1)f(x_2)<0$)

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η $f(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα περιττής τάξης ανάμεσα στα δύο σημεία x_1 και x_2, έστω την $x=\xi$.



Σχήμα 2.1 *Γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων f(x) και g(x). Οι συναρτήσεις έχουν, αντίστοιχα, τρεις και μία ρίζες στο διάστημα* [-2, 2] .

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε πως στο διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει μόνο μία πραγματική ρίζα $x=\xi$, την οποία και θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε.

Αφού το διάστημα $[x_1,x_2]$ περιέχει τη ρίζας ξ, υπολογίζουμε ένα μικρότερο διάστημα (ακριβώς το μισό σε μήκος) που να συνεχίσει να την περιέχει. Για το λόγο αυτό ονομάζουμε x_3 το μέσον του διαστήματος $[x_1,x_2]$:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

και κάνουμε τον επόμενο έλεγχο που μας επιτρέπει να καθορίσουμε το υποδιάστημα, από τα δύο υποδιαστήματα του αρχικού διαστήματος, στο οποίο ανήκει η ρίζα ξ:

$$f(x_1)\,f(x_3) = \begin{cases} >0 & \rightarrow \quad \xi \in [x_3, x_2] \\ =0 & \rightarrow \quad \xi = x_3 \\ <0 & \rightarrow \quad \xi \in [x_1, x_3] \end{cases}$$

Επομένως, κάθε φορά που επαναλαμβάνουμε την μέθοδο αυτή, περιορίζουμε στο μισό το διάστημα που περιέχει τη ρίζα *ξ*. Άρα, μετά από 10 επαναλήψεις το διάστημα θα είναι το $1/2^{10}$ = 1/1024 του αρχικού.

1.2.3 Η διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου διχοτόμησης

Αφού δοθεί η εξίσωση $f(x)=0$ που πρέπει να επιλύσουμε, δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης f (επομένως και τη γραφική της παράσταση) έτσι ώστε να βρούμε ένα (σχετικά μικρού μήκους) διάστημα $[x_1,x_2]$ που περιέχει μία πραγματική ρίζα.

Στη συνέχεια δημιουργούμε έναν πίνακα επαναληπτικής εφαρμογής της μεθόδου, της μορφής:

α	**β**	**μ=(α+β)/2**	**f(α)**	**f(α)**	**f(μ)**	**f(α) f(μ)**
x_1	x_2	$x_3=(x_1+x_2)/2$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	έστω >0
x_3	x_2	$x_4=(x_3+x_2)/2$	$f(x_3)$	$f(x_2)$	$f(x_4)$	έστω <0
x_3	x_4	$x_5=(x_3+x_4)/2$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	έστω >0
x_5	x_4	κ.λ.π.				

και σταματάμε όταν φθάσουμε σε ένα διάστημα το οποίο να έχει μικρότερο μήκος από το διπλάσιο της ζητούμενης ακρίβειας υπολογισμού της ρίζας της f, επιλέγοντας σαν τιμή της ρίζας το κέντρο του τελευταίου διαστήματος.

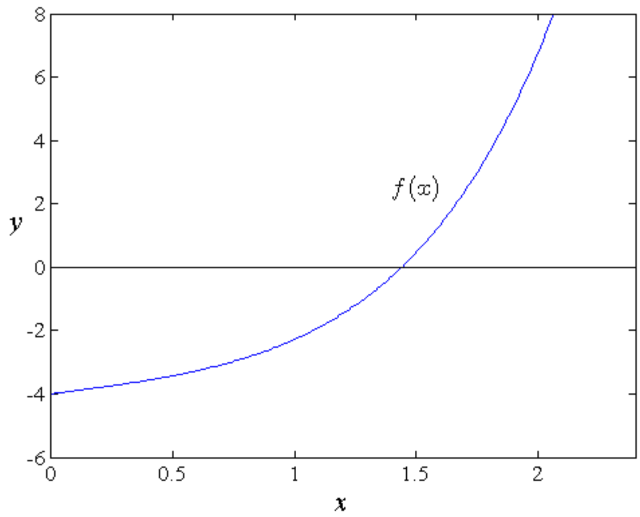
Παράδειγμα

Ζητείται η πραγματική ρίζα της συνάρτησης: $f(x) = xe^x - x^2 - 4$

Δημιουργούμε τον επόμενο πίνακα τιμών και το αντίστοιχο γράφημα της f:

x	**f(x)**
0,0	–4,000
0,2	–3,796
0,4	–3,563
0,6	–3,267
0,8	–2,860
1,0	–2,282
1,2	–1,456
1,4	–0,283
1,6	1,365
1,8	3,649

2,0	6,778



Σχήμα 2.2 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x).*

Στη συνέχεια δημιουργούμε τον επόμενο πίνακα, με τον οποίο διαιρούμε διαδοχικά τα διαστήματα που περιέχουν τη ρίζα της $f(x)$.

x_1	x_2	μ	$f(x_1)$	f(μ)
1,4	1,6	1,5	-0,28272	0,472534
1,4	1,5	1,45	-0,28272	0,079016
1,4	1,45	1,425	-0,28272	-0,10568
1,425	1,45	1,4375	-0,10568	-0,01431
1,4375	1,45	1,44375	-0,01431	0,03211
1,4375	1,44375	1,440625	-0,01431	0,008841
1,4375	1,440625	1,439063	-0,01431	-0,00275
1,439063	1,440625	1,439844	-0,00275	0,003043
1,439063	1,439844	1,439453	-0,00275	0,000147
1,439063	1,439453	1,439258	-0,00275	-0,0013

Εάν λοιπόν αναζητούμε την τιμή της ρίζας με ακρίβεια ε=0,0005 σταματούμε τις επαναλήψεις στο σημείο αυτό, υιοθετώντας σαν τιμή της ρίζας, το μέσον του τελευταίου διαστήματος: ξ = 1,4393

Εφαρμογή στο Excel.

Αρχικά, για να εξηγήσουμε τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος αυτού με το Excel θα πρέπει να πούμε δύο λόγια για την εντολή IF.

i) Η απλή εντολή IF.

Στην απλή μορφή της η εντολή αυτή περιέχει τρία πεδία:

=IF (Λογική πρόταση ; Πράξη 1 ; Πράξη 2)

όπου η «Λογική πρόταση» μπορεί να περιέχει:

- ένα κελί ή πράξη με κελιά και
- μία σύγκριση του αποτελέσματος της πράξης με μία τιμή, χρησιμοποιώντας (συνήθως) τα σύμβολα >, = και <.

Εάν η «Λογική πρόταση» είναι αληθής, τότε εκτελείται η Πράξη 1. Αντίθετα, εάν η «Λογική πρόταση» είναι ψευδής, τότε εκτελείται η Πράξη 2.

ii) Η σύνθετη εντολή IF.

Η χρησιμότητα της σύνθετης εντολής IF είναι προφανής για τον καθένα που έχει ασχοληθεί έστω και ελάχιστα με τον προγραμματισμό. Στο Excel η σύνταξη της εντολής είναι η επόμενη:

=IF(Πρόταση 1; Πράξη 1; IF(Πρόταση 2; Πράξη 2; IF(Πρόταση 3; Πράξη 3; Πράξη 4)))

όπου

- οι προτάσεις δημιουργούνται με τη βοήθεια των συμβόλων (<, >, =), όπως για παράδειγμα η: B12<100 ή η: F7>=5 κ.λ.π.
- οι πράξεις είναι όπως κάθε πράξη που γνωρίζουμε στο Excel, όπως για παράδειγμα η: E6*H8*COS(F5).
- οι προτάσεις δεν μπορούν να συναληθεύουν.
- η τιμή του κελιού δίνεται από την πράξη της οποίας η αντίστοιχη πρόταση αληθεύει.
- το πλήθος των προτάσεων είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2.
- εάν καμία από τις 3 προτάσεις δεν αληθεύει τότε στο κελί θα τοποθετηθεί η πράξη 4.

iii) Εφαρμογή στο Excel.

Επομένως, για να καταλήξουμε σε ένα διάστημα που να περιέχει την αναζητούμενη ρίζα, δημιουργούμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών. Στη συνέχεια δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα, όπου ονομάζουμε (ως επικεφαλίδες των στηλών) τα όρια του αρχικού διαστήματος α και β και μ την μέση του. Τα **A**, **B**, **C** κ.λ.π. στην πρώτη γραμμή και τα **1**, **2**, **3** κ.λ.π. στην πρώτη στήλη, είναι η αρίθμηση των στηλών και των γραμμών του Excel.

Γράφουμε λοιπόν τις εντολές:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	α	β	μ	f(α)	f(μ)
2	x_1	x_2	x_3=(x_1+ x_1)/2	$f(x_1)$	$f(x_3)$
3	=if(D2*E2<0;A2;C2)	=if(D2*E2<0;C2;B2)			
4					

Παρατηρούμε πως στα κελιά A2 και B2 γράφουμε το αρχικό διάστημα που περιέχει τη ρίζα ξ, στο κελί C2 υπολογίζουμε το κέντρο του διαστήματος. Στα κελιά D2 και E2 υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης f στα σημεία x_1 και x_3. Τώρα, στο κελί A3 θα κάνουμε έναν έλεγχο για να διαπιστώσουμε εάν το αριστερό άκρο τον νέου διαστήματος (που έχει το μισό μήκος του αρχικού) θα είναι το x_1, εάν οι τιμές $f(x_1)$ και $f(x_3)$ είναι ετερόσημες, ή θα είναι το x_3, εάν οι τιμές $f(x_1)$ και $f(x_3)$ είναι ομόσημες. Αντίστοιχα, αποφασίζουμε και για την τιμή του κελιού B3.

Στη συνέχεια σέρνουμε προς τα κάτω τις πράξεις των κελιών C2, D2 και E2, έτσι ώστε να επαναληφθούν οι πράξεις αυτές για το νέο διάστημα της σειράς 3. Τέλος, σέρνουμε ολόκληρη τη σειρά 3 για να υπολογίσουμε τον πίνακα προσεγγιστικής εκτίμησης της ρίζας.

1.3 Μέθοδος γραμμικής παρεμβολής (regula falsi).

Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με τη μέθοδο της διχοτόμησης και μπορεί να προσεγγίσει μόνον μία περιττής τάξης ρίζα. Οι προϋποθέσεις εκκίνησή της είναι όμοιες μ' αυτές της προηγούμενης παραγράφου:

1. η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2] \in$ Π.Ο.
2. οι τιμές της $f(x)$ στα σημεία x_1 και x_2 είναι ετερόσημες (δηλαδή $f(x_1)\,f(x_2)<0$)

Αφού το διάστημα $[x_1, x_2]$ περιέχει τη ρίζα ξ, υπολογίζουμε ένα μικρότερο διάστημα που να συνεχίσει να την περιέχει.

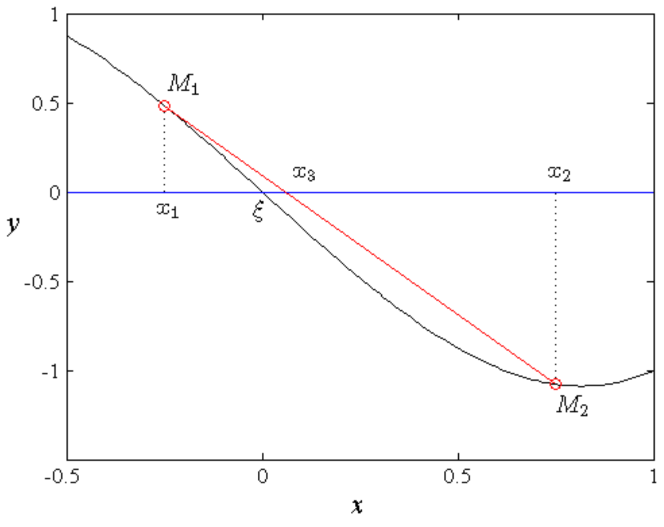
Η μέθοδος του υπολογισμού της ρίζας της συνάρτησης f με γραμμική παρεμβολή, προσπαθεί να μειώσει με διαδοχικά βήματα το διάστημα που την περιέχει. Ξεκινώντας από τα σημεία x_1 και x_2, υπολογίζει το σημείο x_3, που είναι το σημείο τομής του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 με τον άξονα των x (βλέπε και Σχήμα 2.3) με την βοήθεια της σχέσης:

$$x_3 = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)\,f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί εύκολα να αποδειχτεί από την ομοιότητα των τριγώνων μας

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{f(x_1)}{-f(x_2)} \Rightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)} \Rightarrow x_3 - x_1 = (x_2 - x_1)\frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

απ' όπου προκύπτει η σχέση για το x_3



Σχήμα 2.3 *Γραφικά, η μέθοδος γραμμικής παρεμβολής.*

Στη συνέχεια, κάνουμε τον επόμενο έλεγχο που μας επιτρέπει να καθορίσουμε το υποδιάστημα, από τα δύο υποδιαστήματα του αρχικού διαστήματος, στο οποίο ανήκει η ρίζα ξ:

$$f(x_1) f(x_3) = \begin{bmatrix} >0 & \rightarrow & \xi \in [x_3, x_2] \\ =0 & \rightarrow & \xi = x_3 \\ <0 & \rightarrow & \xi \in [x_1, x_3] \end{bmatrix}$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε την σχετική θέση της ρίζας $x = \xi$ της συνάρτησης f ως προς το σημείο x_3. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

	Αν συμβαίνει...	**...ή ισοδύναμα**	**Θέση της ρίζας ξ**
1η	$f(x_3)\, f(x_1) > 0$	$f(x_3)\, f(x_2) < 0$	$\xi \in (x_3, x_2)$
2η	$f(x_3)\, f(x_2) > 0$	$f(x_3)\, f(x_1) < 0$	$\xi \in (x_1, x_2)$
3η	$f(x_3)\, f(x_1) = 0$	$f(x_3)\, f(x_1) = 0$	$\xi = x_3$

Έτσι λοιπόν επαναλαμβάνουμε μερικές φορές την προηγούμενη διαδικασία καταλήγοντας σε μία ακολουθία x_3, x_4, x_5, ... η οποία συγκλίνει στο ξ. **Όμως στη μέθοδο αυτή, σε αντίθεση με την μέθοδο διχοτόμησης, είναι δυνατόν να μην ελαττώνεται το μήκος του διαστήματος που περιέχει την ρίζα ξ. Συχνά είναι το ένα μόνο άκρο του διαστήματος που συγκλίνει προς τη ρίζα** ξ. Στην περίπτωση αυτή η ένδειξη ικανοποιητικής προσέγγισης της ρίζας είναι το μέγεθος της μεταβολής ανάμεσα στο άκρο που αλλάζει και στην καινούρια του τιμή. Τέλος μια δευτερεύουσα ένδειξη είναι και η τιμή της συνάρτησης στο x_3, η οποία πρέπει να συγκλίνει προς το μηδέν.

Παράδειγμα

Επανερχόμαστε στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, αναζητώντας την πραγματική ρίζα της συνάρτησης :

$$f(x) = xe^x - x^2 - 4$$

Λύση:

Στην προηγούμενη παράγραφο, με τη βοήθεια του πίνακα τιμών και της γραφικής της παράστασης, επιλέχθηκε σαν διάστημα που περιέχει τη ρίζα το [1.4, 1.6]. Με τον τρόπο αυτό θα μπορέσουμε να συγκρίνουμε την ταχύτητα σύγκλισης των δύο μεθόδων:

a	**b**	**μ**	**f(a)**	**f(b)**	**f(μ)**
1,4	1,6	1,43432	-0,28272	1,364852	-0,03774
1,43432	1,6	1,438777	-0,03774	1,364852	-0,00486
1,438777	1,6	1,439349	-0,00486	1,364852	-0,00062
1,439349	1,6	1,439423	-0,00062	1,364852	-8E-05

1,439423	1,6	1,439432	-8E-05	1,364852	-1E-05
1,439432	1,6	1,439433	-1E-05	1,364852	-1,3E-06

Η σύγκριση των πινάκων των δύο λύσεων φανερώνει την μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου γραμμικής παρεμβολής, σε σχέση με την μέθοδο διχοτόμησης. Ταυτόχρονα παρατηρούμε πως ενώ το μήκος του τελευταίου διαστήματος [1.439, 1.6] είναι πολύ μεγάλο, εντούτοις το αριστερό του όριο συνέκλινε στη ρίζα ήδη από τις πρώτες τρεις επαναλήψεις, φθάνοντας ήδη την ακρίβεια που πέτυχε η μέθοδος της διχοτόμησης μετά από 9 επαναλήψεις.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει πως μια πιο έξυπνη μέθοδος μπορεί να επιτύχει πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια, με πολύ λιγότερες πράξεις…