ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Σταύρος Παπαϊωάννου

Διάλεξη 03

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1.2 Μέθοδος Newton (Newton–Raphson)

1.2.3 Το πρόβλημα και η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου

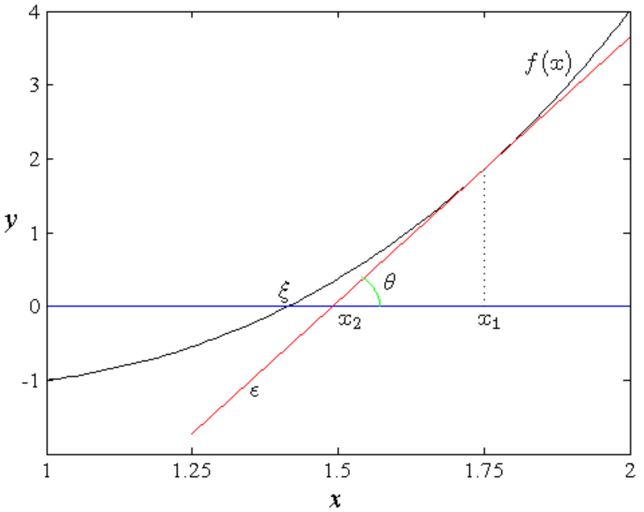
Για τον υπολογισμό μιας πραγματικής ρίζας της συνάρτησης $y = f(x)$, θα πρέπει να ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Η $f(x)$ πρέπει να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, σε μία περιοχή (π_0), γύρω από τη ρίζα ξ, που αναζητούμε.
- Γνωρίζουμε μια πρώτη προσέγγιση x_1, της ρίζας ξ, η οποία ανήκει στην π_0.

Τότε η τιμή x_2, που προκύπτει από τον επόμενο τύπο, είναι (κατά κανόνα) μια καλύτερη προσέγγιση της ρίζας ξ, απ' ότι ήταν η x_1.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του τύπου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.3), όπου παρατηρούμε πως η νέα προσέγγιση της ξ (η x_2) γίνεται με την ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη της $f(x)$ στο σημείο: $\left(x_1,\ f(x_1)\right)$



Σχήμα 2.4 *Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου του Newton..*

Στη συνέχεια, υιοθετώντας σαν προσεγγιστική ρίζα το x_2, επαναλαμβάνουμε τις πράξεις του τύπου, υπολογίζοντας μια νέα προσέγγιση x_3 κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία σταματά όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στην προηγούμενη x_ν και στην επόμενη $x_{\nu+1}$ προσέγγιση είναι μικρότερη από την απαιτούμενη ακρίβεια (ε).

$$\left|x_\nu - x_{\nu-1}\right| < \varepsilon$$

1.2.3 Απόδειξη του τύπου του Newton.

Η ευθεία *ε* (στο *προηγούμενο* σχήμα) είναι εφαπτομένη της καμπύλης της $f(x)$, στο σημείο $\left(x_1,\, f(x_1)\right)$. Επομένως ο συντελεστής κατεύθυνσής της (η κλίση της) θα είναι ίσος με την tan(θ), αλλά και με την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο x_1. Από το μικρό τρίγωνο που σχηματίζεται προκύπτει η σχέση:

$$f'(x_1) = \tan\theta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

1.2.3 Ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου Newton – Raphson.

Σε γενικές γραμμές, η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου είναι μεγάλη. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε κάθε επανάληψη πλησιάζει στην ρίζα, βελτιώνοντας την ακρίβεια της προσέγγισης κατά δύο δεκαδικά. Βέβαια, το πόσο γρήγορα αρχίζει να συγκλίνει, εξαρτάται από την επιλογή της αρχικής τιμής x_1.

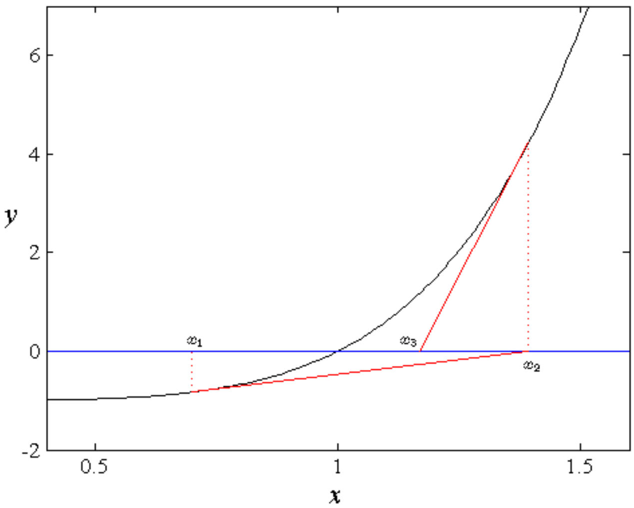
Ας πάρουμε για παράδειγμα την συνάρτηση $f(x) = x^5 - 1$, που έχει την (προφανή) ρίζα $x = 1$ και ας εφαρμόσουμε την μέθοδο για να βρούμε αυτή την ρίζα. Ας δοκιμάσουμε αρχικά να πάρουμε ως αρχική τιμή την $x_1 = 1.3$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε την παρακάτω ακολουθία επαναλήψεων της μεθόδου.

i	**x_i**	**f (x)**	**f ′(x)**
1	1,3000000000000	2,712930000000000	14,280500000000000
2	1,1100255593292	0,685252168341106	7,591051188765370
3	1,0197545084166	0,102752802670365	5,406952328078820
4	1,0007506784518	0,003759031672218	5,015030483042310
5	1,0000011253464	0,000005626744727	5,000022506966240
6	1,0000000000025	0,000000000012664	5,000000000050660

Αν τώρα δοκιμάσουμε τώρα να πάρουμε ως αρχική τιμή την $x_1 = 0.7$, μια τιμή που απέχει από την ρίζα ίδια απόσταση με την προηγούμενη αρχική τιμή, αλλά που βρίσκεται από την άλλη πλευρά της ρίζας. Στην δεύτερη αυτή περίπτωση έχουμε την παρακάτω ακολουθία επαναλήψεων της μεθόδου.

i	**x_i**	**f (x)**	**f ′(x)**
1	0,7000000000000	-0,831930000000000	1,200500000000000
2	1,3929862557268	4,244863099628170	18,825968591096000
3	1,1675071214614	1,169190489143240	9,289838362733340
4	1,0416501965623	0,226336065632397	5,886506188352070
5	1,0032002130933	0,016103807374954	5,064312158795830
6	1,0000203523600	0,000101765942046	5,000407059625830
7	1,0000000008284	0,000000004142017	5,000000016568070

Παρατηρούμε ότι η ότι η πρώτη προσέγγιση της ρίζας, δηλαδή η $x_1 = 0.7$, οδηγεί στην τιμή $x_2 = 1.3929862557268$, η οποία βρίσκεται από την άλλη πλευρά της ρίζας και μάλιστα πιο μακριά από την πρώτη προσέγγιση, όπως μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 2.5. Επίσης και η τιμή της $f(x_2)$ είναι, κατ' απόλυτη τιμή, μεγαλύτερη της $f(x_1)$, απέχει δηλαδή περισσότερο από την επιθυμητή τιμή $f(x) \cong 0$.



Σχήμα 2.5 *Ξεκινώντας την μέθοδο Newton – Raphson με αρχική τιμή από την «λάθος» πλευρά της ρίζας.*

Εάν τώρα θεωρήσουμε πως υπάρχει η λάθος και η σωστή πλευρά προσέγγισης θα πούμε τα εξής:

- Όταν η καμπύλη της *f* στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, βολεύει να ξεκινούμε από την πλευρά της ρίζας όπου η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.
- Όταν η καμπύλη της *f* στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, βολεύει να ξεκινούμε από την πλευρά της ρίζας όπου η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

Τα προηγούμενα μπορούν να ειπωθούν και ως εξής: Η πρώτη προσέγγιση x_1 βρίσκεται από τη «σωστή» πλευρά της ρίζας *ξ*, όταν ισχύει η σχέση:

$$f(x_1) f''(x_1) > 0$$

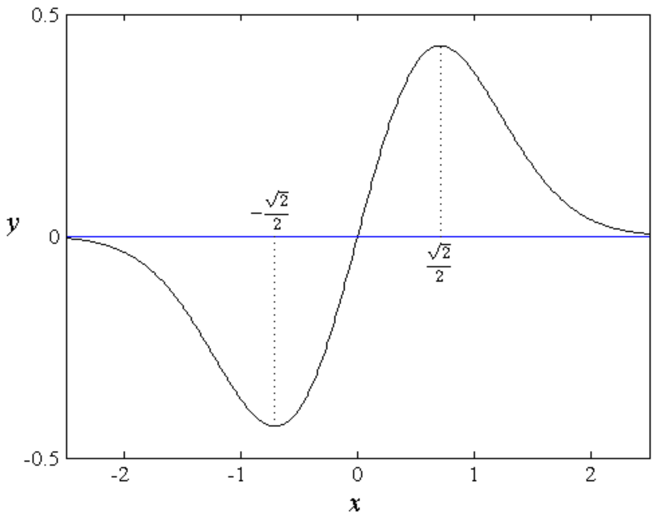
1.2.3 Περιπτώσεις αποτυχίας της μεθόδου Newton – Raphson.

Η μέθοδος Newton – Raphson είναι μια πολύ ισχυρή αλλά και πολύ απλή μέθοδος. Η δύναμη της μεθόδου είναι ότι, γενικά, συγκλίνει πολύ γρήγορα στην ρίζα της εξίσωσης. Δυστυχώς, όπως σχεδόν όλα τα ισχυρά εργαλεία, η Newton – Raphson μπορεί να αποτύχει αν δεν χρησιμοποιηθεί κατάλληλα. Η επιτυχία εύρεσης της ρίζας εξαρτάται από την μορφή της συνάρτησης και φυσικά την επιλογή της πρώτης προσεγγιστικής τιμής *x1*.

Στην συνέχεια, θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις αποτυχίας της μεθόδου Newton – Raphson, χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα την συνάρτηση:

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.6



Σχήμα 2.6 *Γραφική παράσταση της f(x).*

Φυσικά, με μια απλή μόνο ματιά μπορούμε να δούμε ότι η μοναδική ρίζα της παραπάνω συνάρτησης είναι η $x = 0$ (το e^a, όπου a ένας οποιοδήποτε αριθμός είναι πάντα μεγαλύτερο του 0). Παρόλο, λοιπόν, που κανείς δεν θα χρησιμοποιούσε κάποια υπολογιστική μέθοδο για να βρει την ρίζα της παραπάνω συνάρτησης, εντούτοις αποτελεί ένα πολύ καλό παράδειγμα αποτυχίας της μεθόδου Newton – Raphson.

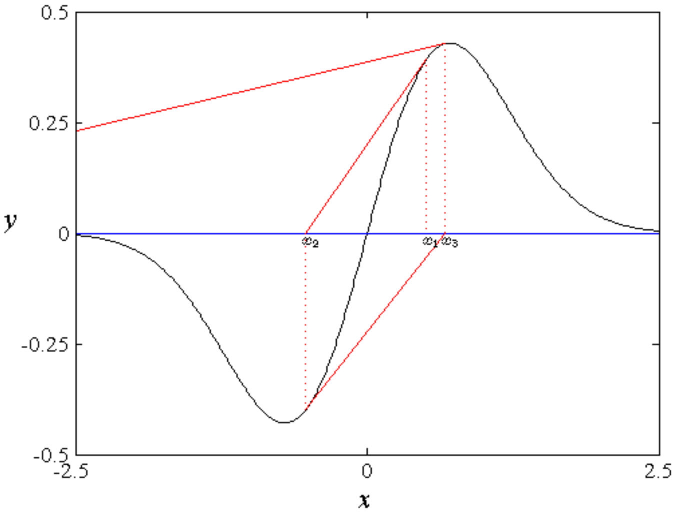
Περίπτωση 1η

Ο τύπος του Newton δεν μπορεί να λειτουργήσει όταν η παράγωγος της συνάρτησης f, στο x_1, ή σε κάποιο άλλο από τα x_j, είναι ίση με το μηδέν (ή, στην πράξη, πολύ κοντά στο μηδέν). Στην περίπτωση που είναι ίση με το μηδέν, έχουμε προφανώς στον επαναληπτικό τύπο διαίρεση με το μηδέν. Στην περίπτωση που είναι πολύ κοντά στο μηδέν, τότε η εφαπτομένη είναι σχεδόν οριζόντια και το επόμενο x_j θα είναι ένας πάρα πολύ μεγάλος αριθμός. Αν διαπιστωθεί πως κάτι τέτοιο συμβαίνει, τότε πρέπει να αλλαχθεί η πρώτη προσεγγιστική τιμή x_1.

Έστω λοιπόν ότι επιλέγουμε σαν αρχική τιμή την $x_1 = 0.5065$. Η εφαρμογή του τύπου των Newton – Raphson μας δίνει την παρακάτω ακολουθία βημάτων, η οποία εμφανίζεται γραφικά στο Σχήμα 2.7.

i	**x_i**	**f (x_i)**	**f ′(x_i)**
1	0,5065	0,391890347027432	0,376737382562755
2	−0,533721557949993	−0,401422935899464	0,323624370882431
3	0,706676174782243	0,428881783399895	0,000738942035565
4	−579,6930882965420	0	0

Βλέπουμε ότι στο τρίτο βήμα πλησιάζουμε πολύ κοντά στο τοπικό μέγιστο της συνάρτησης, όπου η παράγωγος είναι πολύ κοντά στο μηδέν και η μέθοδος μας στέλνει… στο φεγγάρι! Εκεί βέβαια η τιμή της συνάρτησης και της παραγώγου της είναι τόσο μικρές που ο Η/Υ δεν μπορεί να τις υπολογίσει (μικρότερες από το 10^{-308}) και τις θεωρεί μηδέν.

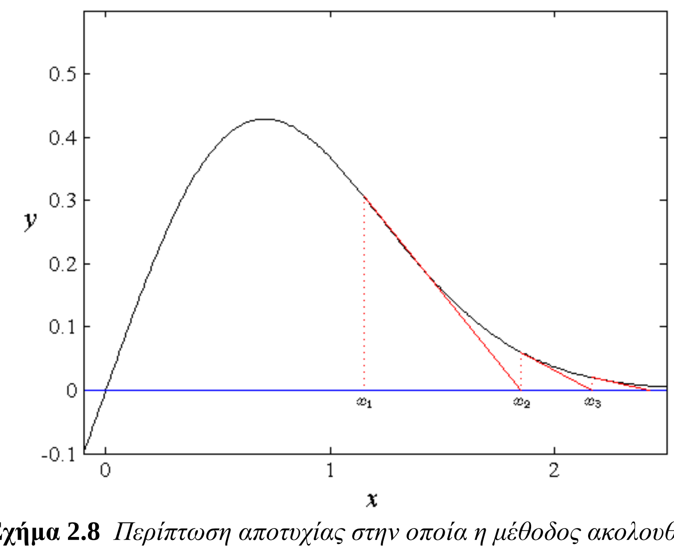


Σχήμα 2.7 *Περίπτωση αποτυχίας στην οποία η μέθοδος συναντά ένα σημείο στο οποίο η $f'(x)$ είναι σχεδόν μηδέν.*

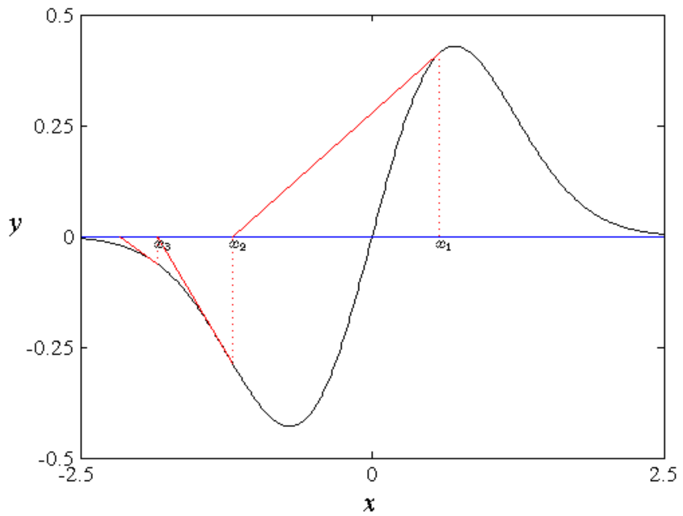
Περίπτωση 2η

Η συνάρτηση να τείνει στο μηδέν όταν το *x* τείνει στο άπειρο (ή στο μείον άπειρο). Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να παγιδευτεί η μέθοδος και να ακολουθήσει την συνάρτηση προς το άπειρο νομίζοντας ότι θα βρει την ρίζα. Αλλά ρίζα δεν υπάρχει. Η συνάρτηση δεν θα γίνει ποτέ μηδέν. Η περίπτωση αυτή φαίνεται γραφικά στα Σχήματα 2.8 και 2.9.

Το ίδιο μπορεί να συμβεί όταν η συνάρτηση δεν τείνει στο μηδέν, αλλά σε έναν άλλο αριθμό *α* και, καθώς το *x* τείνει στο άπειρο, η συνάρτηση είναι κοίλη ($f''>0$) αν $a>0$ ή κυρτή ($f''<0$) αν $a<0$, δηλαδή, συνδυάζοντας τις δύο περιπτώσεις, αν $a \cdot f''(x)>0$



Σχήμα 2.8 *Περίπτωση αποτυχίας στην οποία η μέθοδος ακολουθεί την συνάρτηση στο άπειρο.*

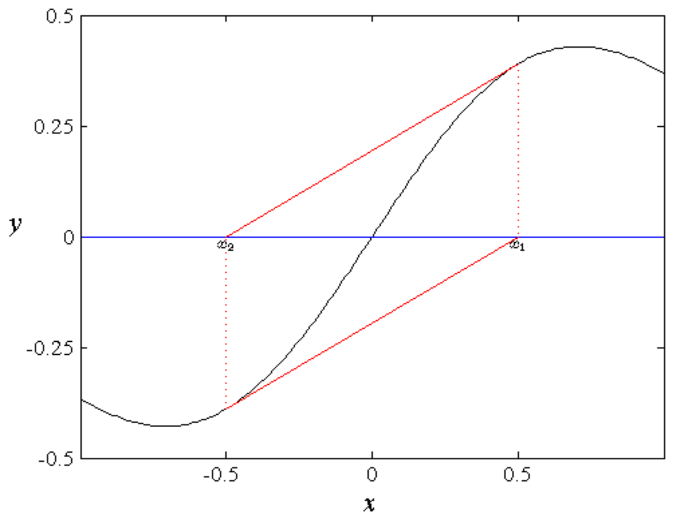


Σχήμα 2.9 *Περίπτωση αποτυχίας στην οποία η μέθοδος, αφού πλησιάσει ένα τοπικό ακρότατο, στέλνεται σε σημείο τέτοιο ώστε στην συνέχεια να ακολουθεί την συνάρτηση στο μείον άπειρο.*

Περίπτωση 3$^{\eta}$

Τέλος, αν και πολύ σπάνια, υπάρχει περίπτωση, η μέθοδος να εγκλωβιστεί σε έναν «φαύλο» κύκλο, όπου μετά από κάποιες επαναλήψεις να επιστρέφει σε ένα από το προηγούμενα x_i και η ακολουθία των x_i να επαναλαμβάνεται περιοδικά.

Στην συνάρτηση $f(x) = xe^{-x^2}$, που χρησιμοποιούμε ως παράδειγμα, αυτό μπορεί να συμβεί αν δώσουμε αρχική τιμή $x_1 = 0.5$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.10



Σχήμα 2.10 *Περίπτωση αποτυχίας στην οποία η μέθοδος εγκλωβίζεται σε έναν «φαύλο» κύκλο.*

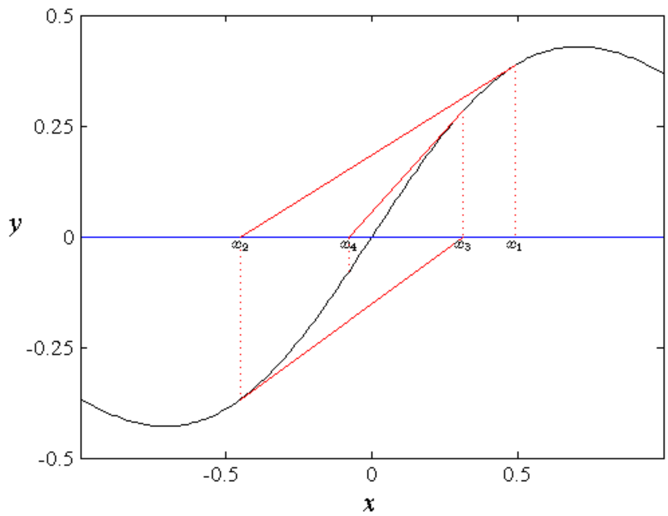
Περίπτωση επιτυχίας!

Όπως είδαμε στα προηγούμενες περιπτώσεις, η μέθοδος Newton – Raphson αποτυγχάνει να βρει την ρίζα της συνάρτησης $f(x) = xe^{-x^2}$, αν η αρχική τιμή είναι $|x_1| \geq 0.5$. Για την τιμή $|x_1| = 0.5$ η μέθοδος εγκλωβίζεται σε φαύλο κύκλο, ενώ για τιμή $|x_1| > 0.5$ η μέθοδος «ολισθαίνει» προς το άπειρο (μείον ή συν).

Αντιθέτως, αν η αρχική μας τιμή είναι $|x_1| < 0.5$ η μέθοδος επιτυγχάνει να βρει την ρίζα και μάλιστα πολύ γρήγορα, όπως μπορούμε να δούμε στον παρακάτω πίνακα επαναλήψεων.

i	**x_i**	**f (x_i)**	**f ′(x_i)**
1	0,5065	0,391890347027432	0,376737382562755
2	−0,533721557949993	−0,401422935899464	0,323624370882431
3	0,706676174782243	0,428881783399895	0,000738942035565
4	−579,6930882965420	0	0

Στο Σχήμα 2.11 εμφανίζονται γραφικά οι πρώτες τέσσερις επαναλήψεις του παραπάνω πίνακα



Σχήμα 2.11 *Οι πρώτες 4 επαναλήψεις τις μεθόδου για αρχική τιμή 0.49. Η μέθοδος συγκλίνει γρήγορα προς την ρίζα..*

1.2.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο

Για τελευταία φορά επανερχόμαστε στο παράδειγμα των προηγούμενων παραγράφων, αναζητώντας την πραγματική ρίζα της συνάρτησης

$$f(x) = xe^x - x^2 - 4$$

ξεκινώντας από το σημείο x_1 = 1.6, που είναι το δεξί άκρο του αρχικού διαστήματος, το οποίο επιλέγουμε επειδή η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω.

Θα δημιουργήσουμε λοιπόν έναν πίνακα όπου θα εμφανίζονται τα βασικά στοιχεία του τύπου:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1 e^{x_1} - x_1^2 - 4}{e^{x_1} + x_1 e^{x_1} - 2x_1}$$

x	1,6	1,458972	1,439751	1,439433396	1,43943331
$f(x)$	1,364852	0,147221	0,002356	6,31775E-07	4,61853E-14
$f'(x)$	9,677884	7,659412	7,415383	7,41140737	7,411406304

Παράδειγμα 2ο

Να υπολογισθεί μία ρίζα της συνάρτησης:

$$y = f(x) = x^3 - x\ln(x) - e^{-x} - 20 \qquad (x > 0)$$

με ακρίβεια ε=0,00001

Όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις, ξεκινούμε κάνοντας έναν μικρό πίνακα τιμών της συνάρτησης, αντικαθιστώντας την τιμή της συνάρτησης στο 0 με το όριο της *f*(x), όταν το x τείνει στο 0 από μεγαλύτερες τιμές (και με τη βοήθεια του κανόνα του De l' Hopital):

x_k	0	1	2	3
y_k	-21	-19,37	-13,52	3,65

από τον οποίο προκύπτει πως η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα (2 , 3), στα άκρα του οποίου η f παίρνει τιμές ετερόσημες.

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε τη συνάρτηση f:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^3 - x\ln(x) - e^{-x} - 20\right] = 3x^2 - \ln(x) + e^{-x} - 1$$

οπότε ο τύπος του Newton (που υπολογίζει το x_2 από την πρώτη προσέγγιση x) γίνεται:

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{x_\nu^3 - x_\nu \ln(x_\nu) - e^{-x_\nu} - 20}{3x_\nu^2 - \ln(x_\nu) + e^{-x_\nu} - 1}$$

Τέλος κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών, στον οποίο συμμετέχουν όλες οι ποσότητες που παίρνουν μέρος στον τύπο, ξεκινώντας από την τιμή x=3 (βρίσκεται από τη σωστή πλευρά σύμφωνα με τα προηγούμενα):

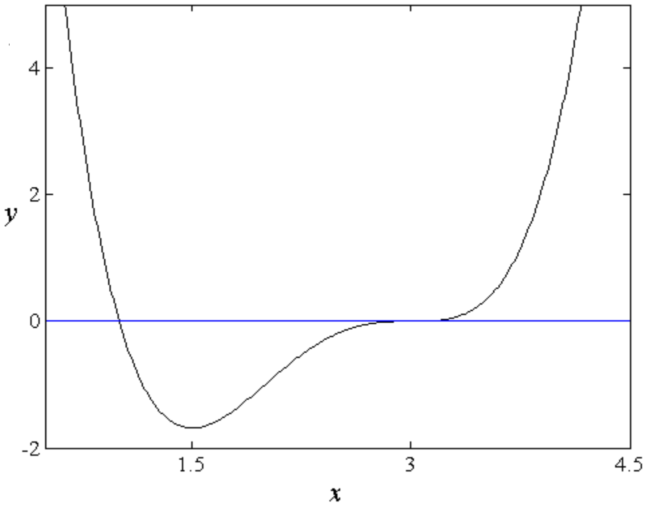
x	3	2,853539	2,845262	2,845236
f	3,654376	0,18572	0,000572	
f'	24,95117	22,43713	22,299	

Θεωρούμε πως έχουμε υπολογίσει τη ρίζα με την απαιτούμενη ακρίβεια, όταν η απόσταση ανάμεσα στην τελευταία προσέγγιση (x_ν) και στην προηγούμενη ($x_{\nu-1}$) είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη από την απαιτούμενη ακρίβεια:

$$\left|x_\nu - x_{\nu-1}\right| < \varepsilon$$

Βέβαια, μια ισχυρή ένδειξη ακρίβειας είναι και η τιμή της συνάρτησης f(x_ν) (δηλαδή πόσο κοντά είναι στο μηδέν), μόνο που δεν είναι απόλυτη ένδειξη για το πόσο κοντά είμαστε στην ρίζα που αναζητούμε.

Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε πως η ακρίβεια της κάθε επόμενης προσέγγισης βελτιώνεται κατά δύο επιπλέον δεκαδικά…
□



Σχήμα 2.12 *Γραφική παράσταση της* $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27$.

Για παράδειγμα, στο πιο πάνω γράφημα (Σχήμα 2.11), η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27 = (x-1)(x-3)^3$$

εμφανίζει 2 ρίζες, στο x=1 και στο x=3. Και όσον αφορά στο x=1, η τιμή της $f(x)$ είναι ικανοποιητικός δείκτης για την ακρίβεια υπολογισμού της ρίζας (όταν, δηλαδή, το $f(x)$ πλησιάζει στο μηδέν, τότε και η προσέγγιση της ρίζας x_i πλησιάζει όμοια την ρίζα. Αντίθετα, στην περιοχή του $x = 3$, έχουμε την τιμή της $f(x)$ να είναι πολύ κοντά στο μηδέν, ενώ η προσέγγιση της ρίζας να είναι ακόμη ιδιαίτερα μακριά απ' αυτήν.

1.2.3 Διαχείριση του τύπου του Newton, με το Excel.

Αναζητούμε λοιπόν όλες τις πραγματικές ρίζες μιας συνάρτησης f(x). Αρχικά, μια και το Excel μας δίνει τη δυνατότητα να κάνουμε εύκολα ακριβείς γραφικές παραστάσεις, αξίζει να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f(x). Προφανώς, δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών της f(x), στο πεδίο ορισμού που μας ενδιαφέρει, τον οποίο μετατρέπουμε σε γραφική παράσταση.

Το κύριο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε κατά την αναζήτηση μιας πραγματικής ρίζας της f(x), είναι να δημιουργήσουμε έναν πίνακα τιμών σαν τον παρακάτω, ο οποίος θα περιέχει τις διαδοχικές προσεγγίσεις της ρίζας ξ, καθώς και τις τιμές f(x) και $f\,'$(x).

	D	E	F	G
1	x_1	$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$	$x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2)$	$x_4 = ...$
2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	....	....
3	$f'(x_1)$	$f'(x_2)$	....	....
4				

Βέβαια, τα κελιά έχουν διαλεχτεί στην τύχη. Η διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι η εξής:

1. Τοποθετούμε την πρώτη προσεγγιστική τιμή x_1, στο κελί D1.
2. Τοποθετούμε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$, στο κελί D2, χρησιμοποιώντας σαν μεταβλητή την τιμή του κελιού D1.
3. Τοποθετούμε τον τύπο της παραγώγου της συνάρτησης $f\,'(x)$, στο κελί D3, χρησιμοποιώντας και πάλι σαν μεταβλητή την τιμή του κελιού D1.
4. Τοποθετούμε τέλος στο κελί E1, τον τύπο: = D1 - D2/D3.
5. Μαυρίζουμε τα κελιά D2 - D3, και σύρουμε την κάτω δεξιά γωνία, μία στήλη πιο δεξιά, έτσι ώστε να υπολογισθούν οι τιμές $f(x_2)$ και $f\,'(x_2)$.
6. Τελειώνουμε τη δημιουργία του πίνακα, μαυρίζοντας την περιοχή: E1:E3, και σύροντας την κάτω δεξιά γωνία προς τα δεξιά.

Παρατηρήσεις:

7. Αλλάζοντας την τιμή του κελιού D1 (δηλ. του x_1), μεταβάλλονται όλες οι τιμές του πίνακα, όπως άλλωστε θα έπρεπε να συμβεί.
8. Αλλάζοντας τους τύπους των κελιών D2 και D3, με μια νέα συνάρτηση και την παράγωγό της και σέρνοντας τους προς τα δεξιά, υπολογίζουμε την ρίζα της νέας συνάρτησης.

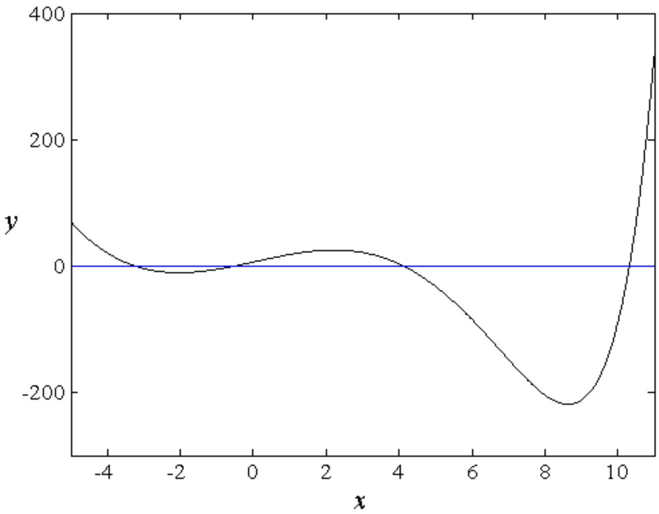
Παραδείγματα:

1ο) Να υπολογισθεί μία ρίζα της συνάρτησης: $f(x) = e^{2x/3} - x^3 + 12x + 5$

Αρχικά, κάνουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ (βλέπε Σχήμα 2.13), όπου παρατηρούμε πως η f έχει 4 απλές ρίζες, οι οποίες είναι ίσες (κατά προσέγγιση) με:

- $\rho_1 = -3$
- $\rho_1 = -0,4$
- $\rho_1 = 4,1$
- $\rho_1 = 10,3$

όλες βαθμού πολλαπλότητας 1



Σχήμα 2.13 *Γραφική παράσταση της $f(x)$.*

Δουλεύοντας με τον τρόπο που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο και τοποθετώντας στα κατάλληλα κελιά την συνάρτηση και την παράγωγό της:

$$f(x) = \frac{2}{3} e^{2x/3} - 3x^2 + 12$$

κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-3,2592034	-3,2276743	-3,22716778	-3,2271677	-3,22716765
f(x)	-3,86466	0,62400162	0,0097137	2,4911E-06	1,634E-13	0
f '(x)	-14,9098	-19,791315	-19,176127	-19,1662917	-19,166289	

πράγμα που σημαίνει πως η δοθείσα συνάρτηση έχει στην περιοχή του σημείου -3 την ρίζα ρ_1=-3,22716765, όπου όλα τα ψηφία είναι σωστά…

Εάν είχαμε ξεκινήσει από ένα λάθος σημείο: x= 2 (σημείο που βρίσκεται αρκετά κοντά στο τοπικό ελάχιστο της περιοχής), τότε η επόμενη πρόβλεψη θα ήταν πολύ μακριά από τη ρίζα που ψάχνουμε. Αυτό γίνεται φανερό από τον επόμενο πίνακα τιμών:

x=	2	-7,8033099	-5,5385926	-4,18298964	-3,48938655	-3,25591922
f(x)=	24,79367	386,522157	108,46371	28,0570806	5,711159204	0,55910909
f '(x)=	2,529112	-170,67126	-80,011416	-40,4512046	-24,4623484	

όπου η 2η προσέγγιση απομακρύνεται σημαντικά από τη ρίζα, για να επιστρέψει ξανά κοντά της μετά από πέντε περιστροφές.

Τώρα, εάν αντικαταστήσουμε την 1η προσέγγιση (x=-3) με τις προσεγγίσεις των υπολοίπων ριζών, παίρνουμε αμέσως τις τρεις επόμενες ρίζες (με 9 σωστά δεκαδικά ψηφία):

1η προσέγγιση	**Ρίζα**
-0,4	-0,486513177
4,1	4,123363116
10,3	10,31304647

Παρατηρήσεις:

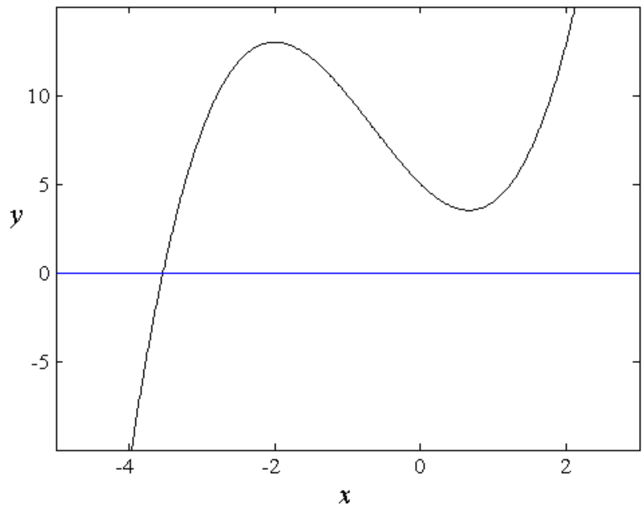
1. Οι τιμές της συνάρτησης f, πλησιάζουν πολύ σύντομα στο μηδέν. Δεν συνέβη κάτι τέτοιο μονό κατά την πρώτη επανάληψη του τύπου, όπου όμως παρατηρούμε πως υπήρξε αλλαγή προσήμου (υπήρξε πέρασμα από την άλλη πλευρά της ρίζας, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παρατήρηση).
2. Η ακρίβεια της προσέγγισης της ρίζας δεν κρίνεται από το πόσο κοντά στο μηδέν πλησιάζει η τιμή της *f* (χρησιμοποιείται μόνον ενδεικτικά), αλλά από την απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές προσεγγίσεις ($\Delta x = x_i - x_{i-1}$). Για άλλη μία φορά παρατηρούμε πως σε κάθε επανάληψη του τύπου, η προσέγγιση βελτιώνεται κατά δύο δεκαδικά ψηφία.

□

2º) Να υπολογισθούν και οι τρεις ρίζες της τριτοβάθμιας π.σ.:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$$

Αρχικά, κάνουμε έναν πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση της *f*(x) (βλέπε Σχήμα 2.14). Από αυτήν διαπιστώνουμε πως η *f*(x) έχει μία μόνο πραγματική ρίζα (στην περιοχή του 3.5) και δύο μιγαδικές…



Σχήμα 2.14 *Γραφική παράσταση της π.σ. $f(x)$.*

Υπολογισμός της πραγματικής ρίζας:

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Newton

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + 2x_1^2 - 4x_1 + 5}{3x_1^2 + 4x_1 - 4}$$

και παίρνοντας ως πρώτη τιμή το x_1= -3,5 έχουμε

x	-3,5	-3,533333333	-3,532842573	-3,532842466
f(x)	0,625	-0,009481481	-2,07115E-06	-1,03029E-13
f'(x)	18,75	19,32	19,31155965	

την ρίζα ρ_1 = -3.532842466

Υπολογισμός των δύο μιγαδικών ριζών

Όπως είπαμε, εάν η τιμή ρ είναι ρίζα της π.σ. $f(x)$, τότε αυτή θα διαιρείται με τον παράγοντα (x – ρ). Οπότε, μετά τη διαίρεση, το πηλίκο θα είναι μια π.σ. 2ου βαθμού, το οποίο θα έχει ρίζες τις υπόλοιπες δύο ρίζες του $f(x)$:

$$\frac{f(x)}{(x-\rho_1)} = \frac{(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)}{x-\rho_1} = (x-\rho_2)(x-\rho_3) = \text{πηλίκο}(x)$$

Άρα εκτελούμε τη διαίρεση της $f(x)$ με τον παράγοντα (x+3.532842466):

$$\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & +2x^2 & -4x & +5 & x & +3.532842466 & \\ \cline{5-7}
-x^3 & -3.532842466x^2 & & & x^2 & -1.532842466x & +1.415290958 \\ \cline{1-4}
 & -1.532842466x^2 & -4x & +5 & & & \\
 & 1.532842466x^2 & +5.415290958x & & & & \\ \cline{1-4}
 & & 1.415290958x & +5 & & & \\
 & & -1.415290958x & -5 & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Επομένως οι δύο μιγαδικές ρίζες της πολυωνυμικής συνάρτησης

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$

είναι οι ρίζες του τριωνύμου:

p(x) = x^2 –1.532842466x + 1.415290958

οι οποίες είναι $\rho_{2,3} = 0.76642 \pm 0.909884\ i$

Κριτήρια αξιολόγησης

Κριτήριο αξιολόγησης 1

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση *f* (x) = x^4 -3x^3+2x

1. **Τι μορφή πιστεύετε πως θα έχει η γραφική της παράσταση; Πόσα τοπικά μέγιστα και πόσα τοπικά ελάχιστα θα διαθέτει; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.**
2. **Υπολογίστε τα σημεία όπου η *f* (x) παίρνει ακρότατες τιμές.**
3. **Να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση.**

Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να υπολογισθούν οι τρεις ρίζες των συναρτήσεων:

1. ***f* (x) = x^3+2,585786438x^2 + 7.343145751x – 16.97056275**
2. ***f* (x) = x^3+0.82x^2 – 0.36x – 2.36**