ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Σταύρος Παπαϊωάννου

Διάλεξη 04

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1 Χρήση των αναπτυγμάτων Taylor – Mac Laurin

1.2 Το πολυώνυμο του Taylor

Η ιδέα τέτοιων πολυωνυμικών συναρτήσεων που να προσεγγίζουν μη πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι πολύ παλιά. Επί πλέον η χρησιμότητά της είναι αναμφισβήτητη. Για παράδειγμα, το να υπολογίσουμε την τιμή της

$$p(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

για x=0.2, με χαρτί και μολύβι, παρ' όλο που απαιτεί κάποιες πράξεις, είναι μια εύκολη υπόθεση. Αντίθετα, το να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = \sin(x)$$

για x=0.2 rad, με χαρτί και μολύβι, αποτελεί μία ιδιαίτερα δύσκολη υπόθεση.

Υποστηρίζουμε λοιπόν πως η π.σ. p(x) δίνει με μεγάλη ακρίβεια την τιμή του ημιτόνου που αναζητούμε! Πράγματι:

$$p(0.2) = \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right]_{x=0.2} = 0.2 - \frac{0.2^3}{6} + \frac{0.2^5}{120} = 0.19866933$$

ενώ ο υπολογιστής τσέπης δίνει:

sin(0.2 rad) = 0.19866933

Αυτό το πρόβλημα επιχειρεί να το λύσει το «ανάπτυγμα μιας συνάρτησης σε σειρά Taylor, που ίσως να είναι γνωστό στους περισσότερους. Η χρησιμότητά του όμως στην αριθμητική ανάλυση μας αναγκάζει να αναφερθούμε σ' αυτό εν συντομία.

1.3 Το πρόβλημα

Ζητούμε να υπολογίσουμε μία πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x)$, η οποία να προσεγγίζει την συνάρτηση $y = f(x)$ στην περιοχή κάποιου σημείου x_0 του πεδίου ορισμού της f, εφ' όσον η f είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρη την περιοχή. Με τον όρο περιοχή του σημείου x_0, εννοούμε ένα διάστημα (υποσύνολο του $\Re$) της μορφής: $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \Pi(x_0, \varepsilon)$, ένα διάστημα δηλαδή με κέντρο το σημείο x_0 και "ακτίνα" ίση με ε.

Ο στόχος είναι η αντικατάσταση της συνάρτησης $f(x)$ με το πολυώνυμο $p(x)$ στην εν λόγω περιοχή. Το πολυώνυμο αυτό το αποκαλούμε πολυώνυμο Taylor, ή ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x)$ στην περιοχή του σημείου x_0. Το σημείο x_0 αποκαλείται **κέντρο του αναπτύγματος**.

Η διερεύνηση του προβλήματος, οδηγεί στα παρακάτω συμπεράσματα:

- το πολυώνυμο θα πρέπει να παίρνει την ίδια τιμή με τη συνάρτηση στο x_0, δηλαδή:
  $f(x_0) = p(x_0)$
- η κλίση του πολυωνύμου και της συνάρτησης στο σημείο x_0 θα πρέπει να ταυτίζονται:
  $f'(x_0) = p'(x_0)$
- πως ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης του πολυωνύμου και της συνάρτησης στο x_0 (δηλαδή οι παράγωγοι $2^{ης}$ τάξης στο σημείο x_0), θα πρέπει να ταυτίζονται:
  $f''(x_0) = p''(x_0)$
- πως σε τελική ανάλυση, οι τιμές όλων των παραγώγων της συνάρτησης στο σημείο x_0 θα πρέπει να είναι ίσες με τις τιμές των αντιστοίχων παραγώγων του πολυωνύμου:
  $f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0)$

Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα ο περιορισμός, σύμφωνα με τον οποίο για να αναπτυχθεί μία συνάρτηση f(x) σε σειρά Taylor στην περιοχή του σημείου x_0, θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη με συνεχείς παραγώγους στην περιοχή σύμπτωσης.

1.4 Υπολογισμός του πολυωνύμου *p*(*x*).

Θα διαλέξουμε την γενική μορφή του πολυωνύμου $p(x)$ με τέτοιο τρόπο ώστε να διευκολύνονται οι πράξεις. Χωρίς λοιπόν να περιορίζεται η γενικότητα της λύσης διαλέγουμε την παρακάτω μορφή

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

Σύμφωνα με όσα λέχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο έχουμε πως:

$$f(x_0) = p(x_0) = \left[a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 \ldots\right]_{x_0} = a_0 \qquad \Rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = p'(x_0) = \left[a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots\right]_{x_0} = a_1 \qquad \Rightarrow a_1 = f'(x_0)$$

$$f''(x_0) = p''(x_0) = \left[2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \ldots\right]_{x_0} = 2a_2 \qquad \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0) = n!a_n \qquad \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

οπότε το πολυώνυμο του Taylor παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$p(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

Τώρα πλέον μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην περιοχή του x_0 την συνάρτηση $f(x)$ με το πολυώνυμο. Φθάνουμε λοιπόν στις σχέσεις (όπου στην τελευταία αντικαταστάθηκε το $x - x_0$ με το h (δηλαδή $x = x_0 + h$):

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots= \\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{(x-x_0)^j}{j!}f^{(j)}\left(x_0\right)\right]= \\
&= f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)+\ldots=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{h^j}{j!}f^{(j)}\left(x_0\right)\right]
\end{aligned}
$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως εάν ισχύει ο περιορισμός $h=x-x_0<1$, τότε η σειρά συγκλίνει ταχύτατα στην τιμή της $f(x)$, μέσα σε πολύ λίγους όρους (διότι το h^n τείνει γρήγορα στο 0, όταν $h<1$).

1.5 Το σφάλμα αποκοπής.

Παρατηρούμε πως το πολυώνυμο Taylor μιας συνάρτησης $f(x)$, είναι μία σειρά με άπειρους όρους. Στη συνέχεια θα δεχθούμε πως για τις στοιχειώδεις συναρτήσεις, η σειρά αυτή συγκλίνει στην συνάρτηση $f(x)$, για κάθε x που να ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Στην πράξη βέβαια δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν παρά πεπερασμένου πλήθους όροι. Όλοι οι υπόλοιποι παραλείπονται (αποκόπτονται). Η χρήση όμως ενός μικρού αριθμού όρων, αυτόματα μικραίνει το διάστημα στο οποίο η σειρά μπορεί να προσεγγίσει τη συνάρτηση $f(x)$, το οποίο γίνεται μία περιοχή του x_0, η ακτίνα της οποίας εξαρτάται από τον αριθμό των όρων που χρησιμοποιούνται. Στην πράξη μάλιστα, όπως ειπώθηκε ήδη, η απόλυτη τιμή του $h=x-x_0$ είναι μικρότερη του 1 (Εάν $|h|<1 \Rightarrow h^6 \ll 1$).

Η τάξη του κάθε όρου καθορίζεται από τον εκθέτη της παρένθεσης $(x-x_0)$, ή από την τάξη της παραγώγου $f^{(n)}(x)$. Έτσι λοιπόν όταν μιλάμε για ανάπτυγμα Taylor στο οποίο διαγράφτηκαν όλοι οι μεγαλύτεροι της δεύτερης τάξης όροι, εννοούμε το:

$$
f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+O\left(h^3\right)
$$

Είναι επομένως σημαντικό να έχουμε μία εκτίμηση για τη διαφορά που θα προκύψει ανάμεσα στην τιμή του πολυωνύμου και την τιμή της συνάρτησης σε κάποιο σημείο x (της περιοχής του x_0), η οποία θα οφείλεται στην αποκοπή των όρων της σειράς.

Ορίζουμε λοιπόν το σφάλμα αποκοπής Ε με τη σχέση: $E=f(x)-p(x)$. Είναι φανερό πως το σφάλμα E εξαρτάται από την τάξη ν του τελευταίου όρου της σειράς που κρατήθηκε στον υπολογισμό, από το σημείο x, αλλά και από την επιλογή του σημείου x_0. Αποδεικνύεται πως το σφάλμα που προκύπτει από την αποκοπή όλων των όρων τάξης μεγαλύτερης του ν, δίνεται από τη σχέση:

$$
E\left(\nu,x_0,x\right)=\frac{h^{\nu+1}}{\left(\nu+1\right)!}f^{(\nu+1)}(\xi)
$$

όπου το ξ είναι κάποιο σημείο (συγκεκριμένο μεν αλλά άγνωστο) ανάμεσα στα σημεία x και x_0 Το ξ προέρχεται από την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως ο τύπος του σφάλματος θυμίζει έντονα τον ν+1 όρο της σειράς. Σε τελική ανάλυση επομένως ο ν+1 όρος του αναπτύγματος Taylor αποτελεί μία προσέγγιση του σφάλματος αποκοπής.

1.6 Ανάπτυγμα κατά Mac-Laurin

Στην ιδιαίτερη περίπτωση που μία συνάρτηση $f(x)$ αναπτύσσεται κατά Taylor στο σημείο $x_0 = 0$, το ανάπτυγμα ονομάζεται ανάπτυγμα κατά Mac Laurin. Στην περίπτωση αυτή (η οποία άλλωστε χρησιμοποιείται και πιο συχνά) ο τύπος του αναπτύγματος παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots$$

Παράδειγμα.

Να υπολογισθεί το ανάπτυγμα κατά Mac-Laurin της συνάρτησης $y = f(x) = \cos(x)$. Με τη βοήθεια του αναπτύγματος αυτού να υπολογισθεί με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων το συνημίτονο της γωνίας *x*=0.2 rad. Τέλος με τη βοήθεια του υπολογιστή να επιβεβαιωθεί το αποτέλεσμα. Αναφερόμαστε σε ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων και όχι σημαντικών μια και γνωρίζουμε καλά την τάξη μεγέθους του αριθμού που αναζητούμε (το cos(0.2) (rad) είναι κοντά στο 1).

Εφόσον ζητείται το ανάπτυγμα κατά Mac-Laurin, αναπτύσσουμε με κεντρικό σημείο το $x_0 = 0$. Υπολογίζουμε πρώτα τις παραγώγους της συνάρτησης και την τιμή που θα έχει η συνάρτηση και κάθε μία από τις παραγώγους της στο $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{lll}
f(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f(0) = \cos(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin(x) & \Rightarrow & f'(0) = -\sin(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos(x) & \Rightarrow & f''(0) = -\cos(0) = -1 \\
f'''(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f'''(0) = \sin(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1 \\
f^{(5)}(x) = -\sin(x) & \Rightarrow & f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0 \\
f^{(6)}(x) = -\cos(x) & \Rightarrow & f^{(6)}(0) = -\cos(0) = -1
\end{array}$$

αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωση

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \ldots$$

καταλήγουμε στο ανάπτυγμα

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

ενώ το σφάλμα αποκοπής είναι ίσο με

$$E(\nu,0,x)=\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\cos^{(\nu+1)}(\xi)$$

Παρατηρούμε πως η απόλυτη τιμή του σφάλματος αποκοπής είναι πάντα μικρότερη της ποσότητας:

$$E\le M=\left|\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\right|$$

μια και η τιμή του $\cos^{(\nu+1)}(\xi)$ ανήκει πάντα στο διάστημα [-1,1]. Θα θεωρήσουμε επομένως πως το *M* αποτελεί μια εκτίμηση (απαισιόδοξη) του σφάλματος αποκοπής *E*.

Ας υπολογίσουμε τώρα το συν(0.2) με τη βοήθεια του αναπτύγματος:

$$\begin{aligned}\cos(0.2) &= 1-\frac{0,2^2}{2!}.+\frac{0.2^4}{4!}-\frac{0.2^6}{6!}=1-\frac{0.2^2}{2}+\frac{0.2^4}{24}-\frac{0.2^6}{720}=\\ &=1-0.02+6.6666667\cdot10^{-5}-8.8888889\cdot10^{-8}=\\ &=0.98 \qquad \text{διατηρώντας όρους μέχρι } 2^{\eta\varsigma} \text{ τάξης}\\ &=0.98006667 \qquad \text{διατηρώντας όρους μέχρι } 4^{\eta\varsigma} \text{ τάξης}\\ &=0.98006657778 \qquad \text{διατηρώντας όρους μέχρι } 6^{\eta\varsigma} \text{ τάξης}\end{aligned}$$

Τέλος η ποσότητα *M* παίρνει τις τιμές:

$$\mathrm{M}_2=\frac{0.2^3}{3!}=0.0013333=1.3333\cdot10^{-3}$$
$$\mathrm{M}_4=\frac{0.2^5}{5!}=0.00000266667=2.66667\cdot10^{-6}$$
$$\mathrm{M}_6=\frac{0.2^7}{7!}=0.0000000025397=2.5397\cdot10^{-9}$$

όπου το M_i δίνει το μέγιστο σφάλμα αποκοπής της κάθε μιας από τις παραπάνω προσεγγίσεις.

Με δεδομένο ότι η ακριβής τιμή είναι η:

cos(0.2 rad) = 0.9800665778412

και συμβολίζοντας με σ_i το πραγματικό σφάλμα αποκοπής στην περίπτωση που διατηρήσαμε μέχρι i-ης τάξης όρους, έχουμε:

σ_2 = 0.9800665778412 − 0.98 = 0.00006657784...
σ_4 = 0.9800665778412 − 0.980066667 =−0.0000000888254...
σ_6 = 0.9800665778412 − 0.980066577778 = 0.0000000000634...

Παρατηρούμε πως σε κάθε περίπτωση το μέγιστο σφάλμα αποκοπής M_i παραμένει μεγαλύτερο από το πραγματικό.

1.2.3 Γενικός τρόπος χρήσης του αναπτύγματος του Mac Laurin.

Η γενική μορφή του αναπτύγματος του Mac Laurin αναφέρεται σε σύνθετες συναρτήσεις, στις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ήδη γνωστά αναπτύγματα, διευκολύνοντας πολύ τους υπολογισμούς. Για παράδειγμα το ανάπτυγμα της συνάρτησης $\cos(\pi(x))$, εάν η $\pi(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύει πως $\pi(0)=0$, δίνεται από τη σχέση:

$$\cos(\pi(x)) = 1 - \frac{\pi(x)^2}{2!} + \frac{\pi(x)^4}{4!} - \frac{\pi(x)^6}{6!} + \ldots$$

από την οποία προκύπτει ο τρόπος χρήσης του αρχικού αναπτύγματος της συνάρτησης $\cos(x)$. Το ίδιο αποτέλεσμα, προφανώς, προκύπτει και με πράξεις, οι οποίες όμως είναι συχνά ιδιαίτερα περίπλοκες.

1.7 Επίλυση ορισμένων ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων.

Συχνά, όταν σε ένα ολοκλήρωμα, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση αποτελείται από ένα τμήμα πολυωνυμικό και ένα τμήμα μη πολυωνυμικό, αντικαθιστούμε το μη πολυωνυμικό τμήμα με το ανάπτυγμά του (κατά Taylor) και ολοκληρώνουμε το πολυώνυμο που προκύπτει.

1.2.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1^{o}

Να υπολογισθεί η τιμή του ολοκληρώματος:

$$I = \int_0^1 e^{x^2}\, dx$$

Λύση:

Πρόκειται για ένα ορισμένο ολοκλήρωμα, για το οποίο δεν υπάρχει το αντίστοιχο αόριστο. Πράγματι δεν υπάρχει συνάρτηση η οποία παραγωγιζόμενη να δώσει τη συνάρτηση e^{x^2}. Παρόλα αυτά θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το αόριστο και το ορισμένο ολοκλήρωμα, με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων. Αρχικά ας υπολογίσουμε το ανάπτυγμα της εν λόγω συνάρτησης:

Με δεδομένο το ανάπτυγμα:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

έχουμε:

$$e^{x^2} = 1 + \left(x^2\right) + \frac{\left(x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(x^2\right)^3}{3!} + \ldots = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

οπότε το αόριστο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int e^{x^2} dx \quad = \quad \int \left[1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots\right] dx \quad = \quad x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\,5} + \frac{x^7}{3!\,7} + \ldots$$

Συχνά, η μοναδικότητα του αναπτύγματος της κάθε συνάρτησης, μας κάνει, αναφερόμενοι σ' αυτό, να μιλάμε για το δακτυλικό αποτύπωμα της εν λόγω συνάρτησης. Παρατηρούμε λοιπόν πως το αόριστο ολοκλήρωμα της e^{x^2} έχει ανάπτυγμα (αποτύπωμα) ενώ δεν έχει αναλυτική έκφραση. Αντικαθιστώντας στη συνέχεια στο ανάπτυγμα τα όρια ολοκλήρωσης, βρίσκουμε το αποτέλεσμα του ορισμένου ολοκληρώματος, με όση ακρίβεια θελήσουμε:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} + \frac{x^7}{3!7} + \ldots\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2!5} + \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} + \ldots =$$

$$= 1 + 0.33333 + 0.1 + 0.023809524 + 0.00462963 + 0.000757576 +$$

$$+0.000106838 + 0.0000132275 + 0.00000145892 = 1.4626516$$

όπου φτάσαμε στον 9^{o} όρο για να επιτύχουμε μια ακρίβεια της τάξης του 0,000001.
□

Παράδειγμα 2^{o}

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

με ακρίβεια ε=0,001

Λύση:

Πρόκειται για ένα πρόβλημα αντίστοιχο του προηγουμένου, όπου βρίσκουμε άμεσα το ανάπτυγμα της e^{-x}, και στη συνέχεια το αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα. Βέβαια, το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα λύνεται και αναλυτικά, κι έτσι μπορούμε να βεβαιωθούμε για το ακριβές αποτέλεσμα.

Εύκολα αποδεικνύεται πως το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης e^{-x} δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

οπότε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^1 x^2e^xdx=\int_0^1 x^2\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...\right)dx=\int_0^1\left(x^2-x^3+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^5}{3!}+...\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^6}{3!6}+\frac{x^7}{3!7}-\frac{x^8}{4!8}+...\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2!5}-\frac{1}{3!6}+\frac{1}{4!7}-\frac{1}{5!8}+...$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}-\frac{1}{36}+\frac{1}{168}-\frac{1}{960}+...=0.1605$$

Παρατηρούμε πως σταματήσαμε τον υπολογισμό στον όρο 1/960,(περίπου 0,001), θεωρώντας ιδιαίτερα μικρότερους της απαιτούμενης ακρίβειας τους επόμενους όρους. Επιλύοντας το ολοκλήρωμα με την κλασσική μέθοδο (διπλή κατά παράγοντες ολοκλήρωση) βρίσκουμε:

$$I=\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\left[e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)\right]_0^1=-5e^{-1}+2=0.1606$$

Επομένως, το απόλυτο σφάλμα είναι μικρότερο της απαιτούμενης ακρίβειας, κάτι που δείχνει πως ο απλός τρόπος εκτίμησης του απόλυτου σφάλματος του αναπτύγματος (σταματούμε όταν φθάνουμε σε όρο μικρότερο ή ίσο της απαιτούμενης ακρίβειας) είναι αρκετά αποτελεσματικός.
□

Κριτήρια αξιολόγησης

Κριτήριο αξιολόγησης 1

Να αποδειχθεί πως ισχύουν τα παρακάτω αναπτύγματα Mac Laurin:

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$

2. $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$

3. $\ln\left(x+1\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...$

4. $\sqrt{x+1}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2}\frac{x^2}{2!}+\frac{1\cdot 3}{2^3}\frac{x^3}{3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\frac{x^4}{4!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5}\frac{x^5}{5!}-...$

Κριτήριο αξιολόγησης 2

Με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων Mac Laurin των συναρτήσεων e^x, $\sin(x)$ και $\cos(x)$ να αποδειχθεί ο τύπος του Euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Κριτήριο αξιολόγησης 3

Γνωρίζουμε ότι

$$\int \sin(x)dx = \cos(x) + c$$

Ολοκληρώστε το ανάπτυγμα Mac Laurin της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)$ και δείξτε πως επιλέγοντας την σταθερά ολοκλήρωσης $c = -1$, οδηγείστε στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $g(x) = \cos(x)$.

Κριτήριο αξιολόγησης 4

Να υπολογίσετε, με ακρίβεια ε=0,001, την τιμή του ολοκληρώματος

$$I = \int_0^1 x\ln\left(x+1\right)dx$$

Κριτήριο αξιολόγησης 5

Να συμπληρώσετε τα κελιά των τιμών της συνάρτησης $f(x)$ που λείπουν από τον παρακάτω πίνακα

x	0	0,1	0,2	0,3
f(x)	1			
f'(x)	1	1,1052	1,2214	
f''(x)	1	1,1052	1,2214	