ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Σταύρος Παπαϊωάννου

Διάλεξη 05

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1 Επίλυση Συστημάτων

1.2 Γραμμικά συστήματα.

Το πρόβλημα της λύσης *των* γραμμικών συστημάτων έχει ήδη αντιμετωπισθεί στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Το μεγάλο όμως ενδιαφέρον που παρουσιάζει, μας αναγκάζει να ασχοληθούμε εν συντομία, προσανατολίζοντας το ενδιαφέρον του αναγνώστη στην επεξεργασία του προβλήματος με το Excel. Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε πως ο αναγνώστης γνωρίζει τις ορίζουσες και τον τρόπο υπολογισμού τους.

1.2.3 Ορισμός ενός γραμμικού συστήματος.

Οι ν-επόμενες εξισώσεις ορίζουν ένα σύστημα με k-αγνώστους:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2k}x_k &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3k}x_k &= b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots \\ a_{v1}x_1 + a_{v2}x_2 + a_{v3}x_3 + \ldots + a_{vk}x_k &= b_v \end{aligned} \qquad (1)$$

Αναζητούμε τις k-άδες αριθμών της μορφής:

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k)$
ή
$(\mathrm{x}_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, x_3 = \lambda_3, \ldots, \mathrm{x}_k = \lambda_k)$

οι οποίες να επαληθεύουν το παραπάνω σύστημα, και οι οποίες ονομάζονται λύσεις του γραμμικού συστήματος.

Ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις:

1. $k > v$, όπου οι άγνωστοι είναι περισσότεροι από τις εξισώσεις. Ως γνωστόν, στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να βρούμε μία και μόνη λύση, αλλά καταλήγουμε σε μία συνάρτηση $k - v$ μεταβλητών, άρα σε άπειρες λύσεις (άπειρες k-άδες αριθμών που επαληθεύουν το σύστημα).
2. $k = v$. Στην περίπτωση αυτή (όταν οι k-εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους), αποδεικνύεται πως υπάρχει ακριβώς μία λύση για τους αγνώστους x_j.
3. $k < v$, όπου οι εξισώσεις είναι περισσότερες από τους αγνώστους. Στην περίπτωση αυτή, παίρνουμε τις k πρώτες εξισώσεις, τις επιλύουμε και διαπιστώνουμε το εάν συναληθεύουν για τη λύση που βρήκαμε οι υπόλοιπες $v - k$ εξισώσεις. Στην περίπτωση που συναληθεύουν και οι υπόλοιπες, τότε το σύστημα θεωρείται υπερπροσδιορισμένο και οι υπόλοιπες εξισώσεις μας είναι άχρηστες. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν έστω και μία δεν συναληθεύει το σύστημα είναι αδύνατο.

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε πως το πλήθος των αγνώστων είναι ακριβώς ίσο με το πλήθος των εξισώσεων.

1.2.3 Επίλυση των γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια οριζουσών

Διερεύνηση

Ορίζουμε την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2v} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & a_{v2} & a_{v3} & \dots & a_{vv} \end{vmatrix}$$

η οποία συμβολίζεται με το Δ, διότι παίζει το ρόλο της διακρίνουσας κατά τη διερεύνηση της λύσης.

Στη συνέχεια, ορίζουμε τις ορίζουσες: Δx_1 , Δx_2 ,..., Δx_v, οι οποίες προκύπτουν από την Δ, όταν αντικατασταθεί η στήλη των συντελεστών του αντίστοιχου αγνώστου, με τη στήλη των σταθερών όρων. Σαν παράδειγμα δίνονται παρακάτω οι ορίζουσες Δx_1 και Δx_3.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1v} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2v} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_v & a_{v2} & a_{v3} & \dots & a_{vv} \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2v} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \dots & a_{3v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & a_{v2} & b_v & \dots & a_{vv} \end{vmatrix}$$

Ως γνωστό, η λύση του συστήματος δίνεται από τις ν-σχέσεις:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta x}$$

Η διερεύνηση του προβλήματος έχει να κάνει με την τιμή της ορίζουσας των συντελεστών των αγνώστων: Δ. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $\Delta = 0$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μία και μοναδική λύση του συστήματος. Είναι η περίπτωση που κυρίως μας ενδιαφέρει.
2. $\Delta = 0$ και $\Delta x_i \neq 0, \forall i \in [1, v]$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα καλείται αόριστο και έχει άπειρες λύσεις. Συμβαίνει όταν οι εξισώσεις του συστήματος δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
3. $\Delta = 0$ και ένα τουλάχιστον $\Delta x_i \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα καλείται αδύνατο και δεν έχει καμμία λύση.

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$2x - 4y = 5$$
$$4x - 8y = 10$$

Το σύστημα είναι αόριστο, μια και η 2η εξίσωση στην ουσία προκύπτει από την 1η με ένα πολλαπλασιασμό επί 2. Άρα δεν έχουμε σύστημα 2 εξισώσεων με δύο αγνώστους αλλά μία και μόνη εξίσωση με δύο αγνώστους.

Αντίθετα το σύστημα

$$2x - 4y = 5$$
$$4x - 8y = -3$$

είναι αδύνατο. Το αριστερό μέλος της 2ης εξίσωσης προέρχεται απ'αυτό της 1ης πολλαπλασιασμένο επι 2, ενώ το δεξιό μέλος της είναι αδύνατο (ουσιαστικά οι δύο εξισώσεις δηλώνουν αν $A = 2x - 4y$ τότε $A = 5$ και $2A = -3$, πράγμα αδύνατο).

1.2.3 Οι ορίζουσες και τα γραμμικά συστήματα στο Excel

α) Μαθηματικές υπενθυμίσεις.

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα **A** $\left(\det[\mathbf{A}] = |\mathbf{A}|\right)$, είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που προσαρτάται στον πίνακα **A**. Πρόκειται δηλαδή για μία τιμή που αποδίδεται σ' έναν πίνακα και προκύπτει από πράξεις ανάμεσα στα στοιχεία του.

Υπολογίζεται, ως γνωστόν, με την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης. Ο υπολογισμός όμως μιας ορίζουσας με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ορίζουσας μικρότερης τάξης είναι ιδιαίτερα επίπονος, για ν μεγαλύτερο του 4. Γι' αυτό επιχειρούμε να την υπολογίσουμε στηριζόμενοι στις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η τιμή μιας ορίζουσας αλλάζει πρόσημο κάθε φορά που αντιμεταθέτουμε μία γραμμή με κάποια άλλη (το ίδιο συμβαίνει και με αντιμετάθεση δύο στηλών).
2. Η τιμή μιας ορίζουσας δεν μεταβάλλεται εάν στα στοιχεία κάποιας γραμμής προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) τα αντίστοιχα στοιχεία κάποιας άλλης γραμμής, πολλαπλασιασμένα επί τον ίδιο σταθερό αριθμό.
3. Η τιμή μιας ορίζουσας, της οποίας όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω ή (και) κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι όλα ίσα με το μηδέν (οπότε λέγεται τριγωνική), ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ιδιότητες, προσπαθούμε να μηδενίσουμε τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο, **χρησιμοποιώντας πάντα το αντίστοιχο στοιχείο της διαγωνίου**. Αρχικά, μηδενίζουμε, με το στοιχείο a_{11} (το πρώτο της πρώτης γραμμής), τα πρώτα στοιχεία (τα στοιχεία της πρώτης στήλης) των παρακάτω γραμμών (τα a_{21}, a_{31} κ.λ.π.). Ο μηδενισμός του στοιχείου a_{21} επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με τη σταθερά:

$$k = -{}^{a_{21}}\!/_{a_{11}}$$

και προσθέτοντας τα στοιχεία της στα αντίστοιχα της δεύτερης:

$$\begin{array}{c} \left(-a_{21}/a_{11}\right)\times \\ \xrightarrow{+} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\nu} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & a_{\nu 3} & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \left(-a_{31}/a_{11}\right)\times \\ \\ \xleftarrow{+} \end{array}$$

Στη συνέχεια, με παρόμοιο τρόπο, με το στοιχείο a_{22} (αυτό που θα προκύψει μετά τις προηγούμενες πράξεις στη θέση αυτή), μηδενίζουμε τα κάτω απ’ αυτό στοιχεία (τα a_{32}, a_{42}, κ.λ.π.).

Εάν συμβεί το στοιχείο a_{22} να είναι ίσο με το μηδέν, τότε αντιμεταθέτουμε τη 2η σειρά με κάποια από τις παρακάτω, έτσι ώστε το a_{22} να γίνει διάφορο του μηδενός. Εάν αυτό είναι αδύνατο να συμβεί γιατί κανένα άλλο στοιχείο στην δεύτερη στήλη κάτω από το a_{22} δεν είναι διάφορο του μηδενός, οπότε το a_{22} θα είναι ούτως ή άλλως μηδέν, συμπεραίνουμε πως η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν (γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου από τα οποία το ένα θα είναι μηδέν).

Αν χρειαστεί να εκτελέσουμε την παραπάνω διαδικασία, δηλαδή να αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές, θα πρέπει επίσης να λάβουμε υπόψη μας ότι η ορίζουσα που θα υπολογίσουμε, μετά την αντιμετάθεση, έχει πολλαπλασιαστεί επί –1. Αν θέλουμε να αποφύγουμε τον πολλαπλασιασμό, μπορούμε αντί να κάνουμε αντιμετάθεση των δύο γραμμών, να προσθέσουμε την δεύτερη γραμμή (αυτή που το στοιχείο της στήλης που μας ενδιαφέρει δεν είναι μηδέν) στην πρώτη (αυτή που το στοιχείο της διαγωνίου είναι μηδέν). Με τον τρόπο αυτό, η ορίζουσα παραμένει ως έχει και δεν πολλαπλασιάζεται με –1.

β) Εφαρμογή στο Excel.

Στο φύλλο του Excel θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε έτσι τις πράξεις, ώστε να είναι δυνατό να τις επεκτείνουμε με τρόπο γενικό. Κάθε φορά, όταν πρόκειται να επαναλάβουμε τον μαθηματικό τύπο ενός κελιού, σε δύο κατευθύνσεις, πρέπει να τοποθετήσουμε με ιδιαίτερη προσοχή και απόλυτη ακρίβεια το σύμβολο κλειδί ($). Ως γνωστόν το σύμβολο $ «κλειδώνει» (σταθεροποιεί κατά το σύρσιμο) όποια συντεταγμένη κελιού βρίσκεται αμέσως μετά από αυτό. Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα δίνονται οι επιθυμητές πράξεις για έναν πίνακα 3x3.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		2	3	4		
3	A=	1	-2	3	=	
4		3	2	2		
5						
6		=B2	=C2	=D2		
7	=	=B3-B2*B3/B2	=C3-C2*B3/B2	=D3-D2*B3/B2		
8		=B4-B2*B4/B2	=C4-C2*B4/B2	=D4-D2*B4/B2		
9						
10						

Προφανώς, πρέπει να γράψουμε μόνο την πράξη του κελιού B7, να τοποθετήσουμε σωστά τα κλειδιά και να την σύρουμε στις δύο κατευθύνσεις. Μια εύκολη μέθοδος για να βρούμε τις σωστές θέσεις είναι να γράψουμε (π.χ. σε ένα χαρτί) τις τρεις πράξεις που στο πιο πάνω σχεδιάγραμμα είναι γραμμένες με έντονους χαρακτήρες (στα κελιά B7, B8 και C7). Τότε, συγκρίνοντας τους αριθμούς των κελιών B7 και B8, που παίρνουν μέρος στην πράξη αντιλαμβανόμαστε ποιοι από αυτούς πρέπει να σταθεροποιηθούν, ενώ επιτυγχάνουμε ακριβώς το ίδιο για τα γράμματα, μέσω της σύγκρισης των κελιών B7 και C7. Καταλήγουμε λοιπόν στο σωστό περιεχόμενο του κελιού B7:

=B3-B$2*$B3/$B$2

Συνολικά οι απαιτούμενες ενέργειες είναι οι παρακάτω:

1. Ορισμός του κελιού B6 (=B2),
2. σύρσιμο του κελιού B6, έως το τέλος της 1ης γραμμής του πίνακα.
3. Τοποθέτηση του τύπου που αντιστοιχεί στο κελί B7 (=B3-B2*B3/B2).
4. Τοποθέτηση του συμβόλου **$,** στις συντεταγμένες των κελιών που εμφανίζονται στο κελί B7 (προηγούμενη ενέργεια), έτσι ώστε σύροντας το κελί προς τα δεξιά (ώς το τέλος της γραμμής), και στη συνέχεια ολόκληρη τη γραμμή προς τα κάτω, να υπολογίζονται όλα όσα θέλουμε.

Στη συνέχεια με τον ίδιο τρόπο μηδενίζονται και τα υπόλοιπα στοιχεία, έτσι ώστε η τιμή της ορίζουσας να δίνεται από το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου.

Σαν άσκηση, λοιπόν, υπολογίστε την ορίζουσα του παρακάτω πίνακα.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		1	2	1	0		1	2	1	0	
3		2	2	3	1	=	0	-2	1	1	=
4		3	1	5	1		0	-5	2	1	
5		2	1	3	2		0	-3	1	2	
6											
7		1	2	1	0		1	2	1	0	
8		0	-2	1	1	=	0	-2	1	1	= 2
9		0	0	-0,5	-1,5		0	0	-0,5	-1,5	
10		0	0	-0,5	0,5		0	0	0	2	
11											

1.2.3 Επίλυση γραμμικού συστήματος μέσω του αντίστροφου πίνακα

Ξαναγυρίζουμε και πάλι στο σύστημα των ν εξισώσεων με ν αγνώστους.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1\nu}x_\nu = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2\nu}x_\nu = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3\nu}x_\nu = b_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\
&a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + a_{\nu 3}x_3 + \ldots + a_{\nu\nu}x_\nu = b_\nu
\end{aligned}
$$

Εάν **A** είναι ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, **X** ο πίνακας-στήλη των αγνώστων και **B** ο πίνακας-στήλη των σταθερών όρων:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_\nu \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_\nu \end{bmatrix}
$$

τότε το σύστημα (σύμφωνα με τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων) γράφεται:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την ισότητα με τον αντίστροφο πίνακα του A:

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{I}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

Δηλαδή: **Πολλαπλασιάζοντας τον αντίστροφο πίνακα (A-1), του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, με τον πίνακα-στήλη των σταθερών όρων (B), υπολογίζουμε τον πίνακα-στήλη των λύσεων του συστήματος.**

Πρόκειται για μία μέθοδο πολύ χρήσιμη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που δίνεται ο αντίστροφος πίνακας A^{-1}, όπως όταν δουλεύουμε με έναν ηλ. υπολογιστή και:

- δημιουργούμε ένα δικό μας πρόγραμμα αντιστροφής πινάκων, ή
- χρησιμοποιούμε ένα πρόγραμμα αντιστροφής τετραγωνικών πινάκων το οποίο μας δίνεται έτοιμο από τη γλώσσα προγραμματισμού, ή
- χρησιμοποιούμε μία έτοιμη εντολή από το προγραμματιστικό πακέτο που χρησιμοποιούμε (π.χ. το Excel ή Matlab).

1.2.3 Η μέθοδος Gauss-Cholevsky

Πρόκειται για μια εκδοχή της μεθόδου η οποία διδάσκεται στο Λύκειο, με την ονομασία «μέθοδος του επαυξημένου πίνακα». Ορίζουμε λοιπόν τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος (1). Πρόκειται για τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων, στον οποίο έχει προστεθεί η στήλη των σταθερών όρων b_i.

$$\mathbf{G}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\nu} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\nu} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3\nu} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu1} & a_{\nu2} & a_{\nu3} & \cdots & a_{\nu\nu} & b_\nu \end{vmatrix}$$

Ουσιαστικά πρόκειται για μια απεικόνιση του συστήματος (1), γι' αυτό και ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, οι οποίες καθορίζουν κάποιες επιτρεπτές πράξεις που συχνά ονομάζονται «επιτρεπτές γραμμοπράξεις».

- Μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τις γραμμές του **G**, όπως θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τη σειρά με την οποία εμφανίζονται οι εξισώσεις του συστήματος (1). Αντίθετα αποφεύγουμε να αντιμεταθέσουμε τις στήλες του **G**, μια και θα αντιστοιχούσαν σε αντιμετάθεση των μεταβλητών του (1).
- Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε γραμμή του **G** με κάποιο σταθερό αριθμό, (η κάθε γραμμή συμβολίζει μια εξίσωση – ισότητα της οποίας τα μέλη μπορούν να πολλαπλασιασθούν επί έναν σταθερό αριθμό). Αντίθετα **δεν** πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία μιας στήλης.
- Μπορούμε να αντικαταστήσουμε μία γραμμή με το γραμμικό συνδυασμό αυτής με κάποιες άλλες (π.χ. να πολλαπλασιάσουμε κάποια γραμμή με ένα σταθερό αριθμό και να την προσθέσουμε σε μιαν άλλη).

Βασισμένοι στις προηγούμενες ιδιότητες, μετατρέπουμε τον προηγούμενο πίνακα στον:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & \omega_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & \omega_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \omega_\nu \end{bmatrix}$$

που ισοδυναμεί με το σύστημα-λύση των εξισώσεων (1):

$$\begin{pmatrix} x_1 = \omega_\nu \\ x_2 = \omega_\nu \\ x_3 = \omega_\nu \\ \ldots = \ldots \\ x_\nu = \omega_\nu \end{pmatrix}$$

Η διαδικασία αυτή περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια, όταν περιγράφουμε την επίλυση με τη βοήθεια του Excel.

1.2.3 Αντιστροφή πίνακα.

Ο θεωρητικός υπολογισμός του $\mathbf{A}^{-1}$ δεν είναι μια εύκολη διαδικασία, απαιτώντας αρκετές πράξεις. Ιδιαίτερα στην περίπτωση που η διάσταση ενός πίνακα είναι αρκετά μεγαλύτερη της (3x3), τότε το πλήθος των πράξεων αυξάνεται εκρηκτικά! Η μέθοδος υπολογισμού του $\mathbf{A}^{-1}$ που θα εξετάσουμε στην παράγραφο αυτή βασίζεται στις τρεις γραμμοπράξεις που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.1.5. (Gauss-Cholevsky):

1. Μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τις γραμμές του G. Αντίθετα αποφεύγουμε να αντιμεταθέσουμε τις στήλες του G.
2. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε γραμμή του G με κάποιο σταθερό αριθμό. Αντίθετα **δεν** πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία μιας στήλης.
3. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε μία γραμμή με το γραμμικό συνδυασμό αυτής με κάποιες άλλες (π.χ. να πολλαπλασιάσουμε κάποια γραμμή με ένα σταθερό αριθμό και να την προσθέσουμε σε μιαν άλλη).

Καθορισμός της μεθόδου

Ξεκινούμε από την σχέση που ορίζει τον αντίστροφο πίνακα, ενός τετραγωνικού πίνακα **A**:

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

Η εφαρμογή μιας σειράς μετασχηματισμών στις γραμμές του **A**, συνεπάγεται την εφαρμογή των ίδιων μετασχηματισμών στις γραμμές του **I**.

$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}'$

Εάν επομένως οι μετασχηματισμοί που θα εφαρμοσθούν στον A, τον μετατρέψουν στον μοναδιαίο, τότε θα ισχύει η σχέση:

$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}'$ ή $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}'$

Συμπέρασμα: Εάν εφαρμοστούν στον μοναδιαίο πίνακα **I**, οι μετασχηματισμοί γραμμών οι οποίοι μετατρέπουν τον πίνακα **A** σε μοναδιαίο, ο πίνακας **I** θα μετατραπεί στον αντίστροφο πίνακα του **A** (τον $\mathbf{A}^{-1}$).

Τρόπος δουλειάς: Ένας εύκολος τρόπος για να εφαρμοσθούν στον **I** οι μετασχηματισμοί που μετατρέπουν τον **A** σε μοναδιαίο, είναι να τοποθετήσουμε τον **I** στα δεξιά του **A** και κάθε μετασχηματισμό του **A** να τον επεκτείνουμε και στον **I**.

$$AI = \left[\begin{array}{ccccc:ccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1\nu} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{22} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3\nu} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \dots & \alpha_{\nu} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

Έτσι, εάν με επιτρεπτές γραμμοπράξεις καταφέρουμε να μετατρέψουμε τις πρώτες ν στήλες (που αντιστοιχούν στον **A**) σε μοναδιαίο πίνακα, τότε στις επόμενες στήλες (όπου υπήρχε ο μοναδιαίος) θα εμφανισθεί ο αντίστροφος του **A** (ο $\mathbf{A}^{-1}$).

Παρατηρήσεις:

1η) Για να κάνουμε κάποιο στοιχείο της διαγωνίου ίσο με τη μονάδα, είμαστε υποχρεωμένοι να διαιρέσουμε **ολόκληρη τη γραμμή** στην οποία ανήκει με το στοιχείο αυτό (3η επιτρεπτή γραμμοπράξη).

2η) Μηδενίζουμε ένα στοιχείο κάποιας γραμμής **με το αντίστοιχο στοιχείο της διαγωνίου** κάποιας άλλης γραμμής (είτε προς τα άνω είτε προς τα κάτω).

Έτσι, εάν για παράδειγμα θέλουμε να μηδενίσουμε το στοιχείο α_{32} με τη βοήθεια του α_{22}, πολλαπλασιάζουμε την 2η γραμμή επί το κλάσμα (α_{32}/α_{22}) και την αφαιρούμε από την 3η γραμμή. **Προσοχή!** Βολεύει να μηδενίζουμε μόνο με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου (τα α_{11}, α_{22}, …, $\alpha_{\nu\nu}$), τα οποία **δεν θέλουμε να μηδενισθούν**.

3η) Εάν κατά τους μηδενισμούς, κάποιο από τα στοιχεία της διαγωνίου μηδενισθεί, τότε θα πρέπει να αντιμεταθέσουμε τη γραμμή του, με κάποια από τις επόμενες. **Εάν σε όλες τις επόμενες γραμμές το αντίστοιχο στοιχείο είναι μηδενικό, τότε ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται.** ‘Όπως είδαμε, η ορίζουσά του, στην περίπτωση αυτή, είναι ίση με το μηδέν. Άρα, φθάνουμε πάλι στο συμπέρασμα πως ένας τετραγωνικός πίνακας A αντιστρέφεται, μόνον εάν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.

1.2.3 Αντιστροφή πίνακα με το Excel

Και πάλι πρέπει να ορίσουμε τις πράξεις με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να επεκταθούν προς τα δεξιά και προς τα κάτω. Οι εργασίες που θα γίνουν από τον πρώτο πίνακα προς το δεύτερο:

1. Διαιρούμε ολόκληρη την 1η γραμμή με το στοιχείο α_{11}, έτσι ώστε το α_{11} να γίνει μονάδα.
2. Με τρόπο όμοιο με αυτόν της προηγούμενης παραγράφου μηδενίζουμε τα στοιχεία α_{21}, α_{31}, κ.λ.π..

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		4	2	3	1	0	0	
3		-2	3	0	0	1	0	
4		1	0	1	0	0	1	
5								
6		=B2/B2	=C2/B2	=D2/B2	=E2/B2	=F2/B2	=G2/B2	
7		=B3-B2*B3/B2	=C3-C2*B3/B2	=D3-D2*B3/B2	κ.λ.π.			
8		=B4-B2*B4/B2	=C4-C2*B4/B2	=D4-D2*B4/B2				
9								

Ο νέος πίνακας έχει το στοιχείο α_{11}=1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της 1η γραμμής μηδέν. Οι εργασίες που πρέπει να γίνουν από το δεύτερο πίνακα προς τον τρίτο είναι:

3. Επαναλαμβάνουμε την 1η γραμμή και την 1η στήλη, ως έχει.
4. Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της 2ης γραμμής με το στοιχείο α_{22}, ώστε να έχουμε α_{22}=1.
5. Με τη βοήθεια του α_{22} μηδενίζουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της 2ης στήλης (α_{32}, α_{42}, κ.λ.π.).

	A	B	C	D	E	F	G	H
5								
6		1	0,5	0,75	0,25	0	0	
7		0	4	1,5	0,5	1	0	
8		0	-0,5	0,25	-0,25	0	1	
9								
10		=B6	=C6	=D6	=E6	=F6	=G6	
11		=B7	=C7/C7	=D7/C7	=E7/C7	κ.λ.π.		
12		=B8	=C8-C7*C8/C7	=D8-D7*C8/C7	=E8-E7*C8/C7	κ.λ.π.		
13								

Στη συνέχεια έχουμε τις εργασίες:

6. Επαναλαμβάνουμε, ως έχουν, τα στοιχεία των δύο πρώτων στηλών.
7. Διαιρώ τα στοιχεία της 3ης γραμμής με το α_{33} (οπότε α_{33}=1).
8. Με το α_{33} μηδενίζω πρώτα το στοιχείο α_{13} και μετά το α_{23}, όπου ακολουθώ τη σειρά αυτή για να μπορέσω να σύρω προς τα δεξιά και προς τα κάτω την πράξη από το κελί του α_{13}.

	A	B	C	D	E	F	G	H
9								
10		1	0,5	0,75	0,25	0	0	
11		0	1	0,375	0,125	0,25	0	
12		0	0	0,4375	-0,1875	0,125	1	
13								
14		=B10	=C10	=D10-D12*D10/D12	=E10-E12*D10/D12	κ.λ.π.		
15		=B11	=C11	=D11-D12*D11/D12	=E11-E12*D11/D12	κ.λ.π.		
16		=B12	=C12	=D12/D12	=E12/D12	κ.λ.π.		
17								

Τώρα πια απομένει η τελευταία ενέργεια: Να μηδενισθεί το στοιχείο $α_{12}$, έτσι ώστε στην περιοχή του αρχικού πίνακα να εμφανισθεί ο μοναδιαίος. Το κάνουμε με το γνωστό τρόπο:

	A	B	C	D	E	F	G	H
13								
14		1	0,5	0	0,571429	-0,21429	-1,71429	
15		0	1	0	0,285714	0,142857	-0,85714	
16		0	0	1	-0,42857	0,285714	2,285714	
17								
18		=B14	=C14-C15*C14/C15	=D14-D15*C14/C15	κ.λ.π.			
19		=B15	=C15	=D15	=E15	κ.λ.π.		
20		=B16	=C16	=D16	=E16	κ.λ.π.		
21								

Με τις πράξεις αυτές καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα, στον αντίστροφο πίνακα του Α, ο οποίος είναι ο:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.429 & -0.286 & -1.286 \\ 0.286 & 0.143 & 0.857 \\ -0.429 & 0.286 & 2.286 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Λύση γραμμικών συστημάτων με το Excel.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τον «προγραμματισμό» της μεθόδου των Gauss-Cholevsky, με το Excel. Η μαθηματική περιγραφή της μεθόδου έχει ήδη γίνει. Το μόνο που μένει να πούμε είναι πως ο μηδενισμός των συντελεστών του επαυξημένου πίνακα, στο Excel, γίνεται όμοια με το μηδενισμό των συντελεστών της ορίζουσας, στην προηγούμενη παράγραφο.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= -13 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 30 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= -17 \end{aligned}$$

Αξίζει να προσπαθήσετε να παρακολουθήσετε τη σειρά των πράξεων που σας προτείνουμε στη συνέχεια, όπου σε κάθε πέρασμα τροποποιούμε μία στήλη, κάνοντας ταυτόχρονα δύο δουλειές: Κάνουμε μονάδα το στοιχείο της διαγωνίου της στήλης και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	2	-1	3	4	2		1	-0,5	1,5	2	1	
3	1	-2	2	1	-13		0	-1,5	0,5	-1	-14	=
4	3	3	2	4	30		0	4,5	-2,5	-2	27	
5	-2	-3	4	6	-17		0	-4	7	10	-15	
6												
7	1	0	1,3333	2,3333	5,6667		1	0	0	-4,3333	-14,3333	
8	0	1	-0,3333	0,6667	9,3333		0	1	0	2,3333	14,3333	=
9	0	0	-1	-5	-15		0	0	1	5	15	
10	0	0	5,6667	12,6667	22,333		0	0	0	-15,667	-62,6667	
11												
12				1	0	0	0	3				
13			=	0	1	0	0	5				=
14				0	0	1	0	-5				
15				0	0	0	1	4				
16												

Για ευκολία, μάλιστα, μπορούμε να μηδενίσουμε πρώτα τα στοιχεία της στήλης που έχει σειρά στο τρέχον στάδιο («σέρνοντας» τις πράξεις προς τα δεξιά) και αμέσως μετά να κάνουμε μονάδα το στοιχείο της διαγωνίου (και να το σύρουμε προς τα δεξιά), οπότε διαγράφει τις παλιές πράξεις και εμφανίζει τις επόμενες…

Άσκηση: Στο ίδιο φύλλο εργασίας (έχοντας υπολογίσει σωστά τα αποτελέσματα) υπολογίζεται η λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 38 \\ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 70 \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 &= 186 \\ -5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

με απλή αντικατάσταση των νέων συντελεστών!

1.2.3 Επίλυση γραμμικών συστημάτων με έτοιμες συναρτήσεις του Excel.

Το Excel διαθέτει έτοιμες συναρτήσεις-εντολές που αναφέρονται στις βασικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας. Οι κυριότερες είναι:

(i) Η συνάρτηση mdeterm(«Τετραγωνικός πίνακας»)

η οποία δίνει την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα που έχει σαν όρισμα. Για παράδειγμα η εντολή:

=mdeterm(B2:E5)

(όπου ο χαρακτήρας «:» -σε λατινικό πληκτρολόγιο- σημαίνει «έως»), υπολογίζει την ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα, του οποίου τα στοιχεία έχουν τοποθετηθεί στην τετραγωνική περιοχή κελιών που ξεκινάει από το κελί B2 (άνω αριστερά και τελειώνει στο κελί E5 (κάτω δεξιά).

(ii) Η συνάρτηση minverse(«Τετραγωνικός πίνακας»)

η οποία υπολογίζει τον αντίστροφο του πίνακα που υπάρχει στο όρισμά της. Όμως, με την εντολή:

=minverse(B2:E5)

αποδίδεται στο εν λόγω κελί μόνο το $1^{ο}$ στοιχείο (το στοιχείο (1,1)) του αντίστροφου πίνακα και όχι τα υπόλοιπα. Ολόκληρος ο αντίστροφος πίνακας μπορεί να εμφανιστεί είτε αυτόματα, είτε με τη βοήθεια της εντολής index (που εξηγείται στη συνέχεια).

Ο αυτόματος τρόπος έχει ως εξής:

Αφού εκτελέσουμε την εντολή: =minverse(B2:E5), έστω στο κελί B7, όπου και θα εμφανιστεί το πρώτο στοιχείο του αντίστροφου,

- «μαυρίζουμε» (καθορίζουμε με το ποντίκι) την περιοχή B7:E10 (ξεκινώντας από το B7), στην οποία θα εμφανιστεί ο αντίστροφος πίνακας (προφανώς η περιοχή πρέπει να έχει ακριβώς τη διάσταση του αντίστροφου),
- πατούμε το πλήκτρο F2,
- πατούμε, ταυτόχρονα τα πλήκτρα Ctrl, Shift και Enter.

Αυτόματα εμφανίζεται ολόκληρος ο αντίστροφος πίνακας στη μαυρισμένη περιοχή.

(iii) Η συνάρτηση index(«Πίνακας»;«Αριθμός γραμμής»;«Αριθμός στήλης»).

Η συνάρτηση αυτή έχει στο πρώτο της πεδίο έναν πίνακα (οποιασδήποτε διάστασης, ο οποίος μπορεί και να είναι αποτέλεσμα μιας πράξης πινάκων), στο δεύτερο πεδίο τον αριθμό μιας από τις γραμμές του πίνακα, και στο τρίτο πεδίο τον αριθμό μιας από τις στήλες του πίνακα. Σαν αποτέλεσμα της εκτέλεσης της, εμφανίζει στο κελί που αναγράφεται, το στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στη σειρά του $2^{ου}$ πεδίου και στη στήλη του $3^{ου}$. Για παράδειγμα η εντολή:

=index(B2:E5;2;3)

θα αναγράψει το περιεχόμενο του κελιού D3.

Απλή χρήση:

Έστω ένας πίνακας (2x2) στα κελιά A2:B3. Ο αντίστροφός του εμφανίζεται στα παρακάτω κελιά:

=index(minverse(A2:B3);1;1)	=index(minverse(A2:B3);1;2)
=index(minverse(A2:B3);2;1)	=index(minverse(A2:B3);2;2)

Στοιχειώδης προγραμματισμός:

Επειδή μπορούμε στο 2ο και στο 3ο πεδίο της εντολής index να βάλουμε κελιά, αντί για αριθμούς, μπορούμε να δημιουργήσουμε μία δομή σαν αυτήν του παρακάτω σχεδιαγράμματος, και να αριθμήσουμε τις γραμμές και τις στήλες της περιοχής όπου θα αναγραφεί το αποτέλεσμα του αντίστροφου πίνακα. Τότε μπορούμε να γράψουμε (με τα σωστά κλειδιά) την κεντρική εντολή και να την «σύρουμε» σε δύο κατευθύνσεις.

Παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε στην περιοχή B2:D4 (της επόμενης εικόνας) έναν τετραγωνικό (3x3) πίνακα. Δημιουργούμε την δομή της στήλης F και της γραμμής 1, γύρω από την περιοχή του αποτελέσματος,

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1							1	2	3	
2						1				
3	A=				A^{-1}=	2				
4						3				
5										

και γράφουμε στο κεντρικό κελί (G2)

=index(minverse($B$2:$D$4;$F2;G$1)

Στην συνέχεια, αντιγράφουμε το κελί G2 στα υπόλοιπα κελιά (μέχρι το I4).

(iv) Η συνάρτηση mmult(«Πίνακας 1»; «Πίνακας 2»)

η οποία υπολογίζει το γινόμενο των πινάκων 1 και 2 που αναφέρονται στα δύο πεδία του ορίσματός της. Και εδώ χρειαζόμαστε την συνδρομή του αυτόματου τρόπου εμφάνισης μιας πράξης πινάκων (Εκτέλεση της πράξης στα άνω αριστερά κελί - «μαύρισμα της περιοχής ου αποτελέσματος - F2 - Ctrl, Shift και Enter), ή της εντολής index. Προφανώς, η πράξη γίνεται μόνον όταν το επιτρέπουν οι διαστάσεις των δύο πινάκων.

(v) Άμεση λύση ενός Γραμμικού Συστήματος.

Έστω ο επαυξημένος πίνακας **G**, ενός γραμμικού συστήματος, όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα. Τότε η λύση X του συστήματος μπορεί να γραφτεί, αυτόματα ή με τη βοήθεια της index, με μία μόνο εντολή, η οποία θα πολλαπλασιάζει τον αντίστροφο του πίνακα **A** με τους σταθερούς όρους του πίνακα **B**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			A=		B=			X=		
2							1			
3							2			
4							3			
5										

Στο H2 γράφουμε:

=index(mmult(minverse(B$2:D$4);B$2:B$4);G2;1)

και αντιγράφουμε στα υπόλοιπα (παρακάτω) κελιά.

1.3 Μη γραμμικά συστήματα εξισώσεων 2 μεταβλητών.

1.2.3 Μαθηματική ανάλυση

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τη λύση 2 μη γραμμικών εξισώσεων, με 2 αγνώστους. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \qquad (\Sigma 1)$$

όπου οι συναρτήσεις *f* και *g* (συναρτήσεις 2 μεταβλητών) συμβολίζουν το αριστερό μέλος των εξισώσεων.

Για το σύστημα αυτό υπάρχει μία ορίζουσα (**Δ**), που ονομάζεται Ιακωβιανή, η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική και που ορίζεται μέσω των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων *f* και *g*, ως προς τις μεταβλητές *x* και *y*.

$$\mathbf{\Delta} = \frac{D(f,g)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Για να υπάρχει λύση του συστήματος σε μια περιοχή γύρω από ένα σημείο (x_0, y_0) που καθορίζεται από τα διαστήματα $(x_0 - a, x_0 + a)$ και $(y_0 - b, y_0 + b)$, θα πρέπει στην περιοχή αυτή η Ιακωβιανή ορίζουσα να είναι διάφορη του μηδενός.

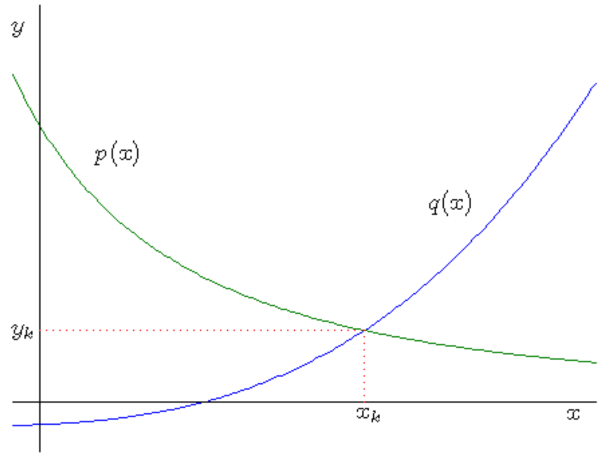
Οι λύσεις του συστήματος είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων δυάδων (x_i, y_i), οι οποίες επαληθεύουν το σύστημα.

1.2.3 Γραφική μέθοδος.

Για να μπορέσουμε να υλοποιήσουμε την γραφική μέθοδο προσδιορισμού των λύσεων του συστήματος (Σ1), θα πρέπει να μπορούμε να επιλύσουμε τις δύο εξισώσεις ως προς μία από τις δύο μεταβλητές *x* ή *y*. Θεωρούμε λοιπόν ότι το σύστημα μας μετατρέπεται στο επόμενο:

$$(\Sigma1) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y = p(x) \\ y = q(x) \end{matrix}$$

Η λύση του συστήματος θα είναι μία δυάδα η οποία επαληθεύει, ταυτόχρονα και τις δύο συναρτήσεις. Άρα, κάνοντας το γράφημα των *p* και *q*, έχουμε τη δυάδα λύσης, η οποία δεν είναι παρά η δυάδα των συντεταγμένων του σημείου τομής (x_k, y_k), όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1. *Γραφική μέθοδος λύσης του συστήματος Σ1*

1.2.3 Η μέθοδος του Newton.

Η μέθοδος του Newton λειτουργεί παρόμοια με την αντίστοιχη που υπολογίζει τις ρίζες μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής. Για να ξεκινήσει χρειάζεται μια πρώτη προσέγγιση (x_0, y_0) της λύσης την οποία προσπαθούμε να υπολογίσουμε, ενώ ταυτόχρονα θα πρέπει η Ιακωβιανή ορίζουσα να είναι διάφορη του μηδενός στην περιοχή του σημείου (x_0, y_0), που περιέχει τη λύση.

Ξεκινώντας λοιπόν από την πρώτη προσέγγιση (x_0, y_0), φθάνουμε σε μία καλύτερη προσέγγιση (x_1, y_1), με τη βοήθεια των τύπων:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + a \\ y_1 &= y_0 + b \end{aligned}$$

όπου τα *a* και *b* αποτελούν τη λύση του επόμενου γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + a\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + b\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} &= 0 \\ g(x_0, y_0) + a\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + b\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας σαν σημείο εκκίνησης το (x_1, y_1), υπολογίζουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο την επόμενη προσέγγιση (x_2, y_2) και ούτω καθεξής.

Παρατηρήσεις:

- Μία ένδειξη πως βαδίζουμε προς τη σωστή κατεύθυνση μας δίνουν οι τιμές των συναρτήσεων $f(x_i, y_i)$ και $g(x_i, y_i)$, οι οποίες πρέπει διαρκώς να τείνουν προς το μηδέν. Κάποιες φορές, ειδικά στο ξεκίνημα της διαδικασίας, μπορεί κάποιο από τα x ή y να κινηθούν έτσι ώστε οι συναρτήσεις f και g να μην μειώνουν τις απόλυτες τιμές τους. Αυτό συμβαίνει συχνά, ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου η μία από τις δύο προσεγγιστικές τιμές, x_0 ή y_0, είναι πολύ κοντά στη λύση, ενώ η άλλη όχι.

- Σταματούμε την επαναληπτική διαδικασία όταν, και για τις δύο μεταβλητές, η διαφορά ανάμεσα στην προηγούμενη και στην επόμενη προσεγγιστική τιμή είναι μικρότερη της απαιτούμενης ακρίβειας.

$$\left|x_i - x_{i-1}\right| \le \varepsilon \quad \text{και} \quad \left|y_i - y_{i-1}\right| \le \varepsilon$$

Παράδειγμα

Δίνεται το σύστημα των εξισώσεων:

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 e^x - 15 = 0$$
$$g(x, y) = xy + x^2 \sin(x) - 3 = 0$$

Ζητούνται:

1. Με τη γραφική λύση να υπολογισθεί μια πρώτη προσέγγιση της λύσης του, όταν το x ανήκει στο διάστημα (1,4).
2. Με τη μέθοδο του Newton να υπολογισθεί η λύση του συστήματος, ξεκινώντας από την προηγούμενη προσέγγιση και ακρίβεια ε=0.001.

Λύση:

1) **Γραφική Λύση**:

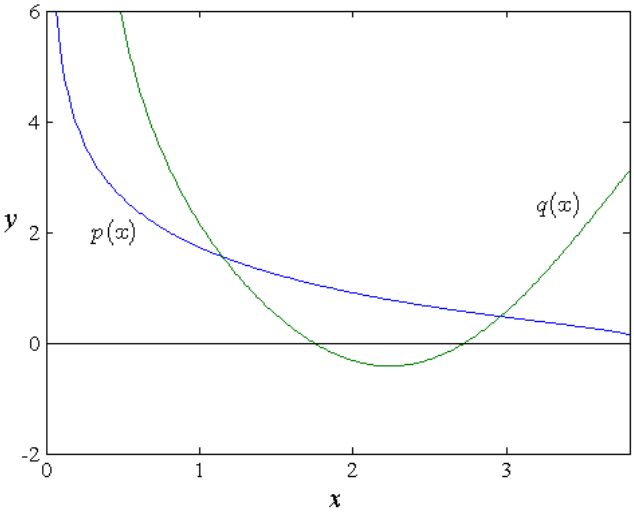
Λύνοντας τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς y έχουμε:

$$y = p(x) = \sqrt[3]{\frac{15 - x^2}{xe^x}}$$

$$y = q(x) = \frac{3 - x^2 \sin(x)}{x}$$

Στη συνέχεια κάνουμε τον πίνακα τιμών για τις δύο αυτές συναρτήσεις, καθώς και τη γραφική τους παράσταση (Σχήμα 4.2), από την οποία κάνουμε μια πρώτη πρόβλεψη για τη δυάδα των τιμών της λύσης.

x	f	g
1	1,727	2,159
2	0,906	-0,319
3	0,463	0,577
4	-0,166	3,777



Σχήμα 4.2. *Γραφική παράσταση των συναρτήσεων p(x) και q(x).*

Βέβαια, η γραφική παράσταση που έγινε με τη βοήθεια υπολογιστή είναι πολύ ακριβέστερη απ' αυτήν που θα κάναμε με τη βοήθεια του πίνακα τιμών. Όμως, ακόμη και από την προσεγγιστική των τεσσάρων σημείων, θα μπορούσαμε να εξάγουμε ικανοποιητικά συμπεράσματα. Παρατηρούμε λοιπόν πως στο διάστημα (1,4) για το x, υπάρχουν δύο λύσεις (δύο σημεία τομής των p και q). Αποφασίζουμε να υπολογίσουμε τη δυάδα που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο x. Δίνουμε λοιπόν σαν προσεγγιστικές τιμές τις:

$$x_0 = 2.9 \quad \text{και} \quad y_0 = 0.5$$

2) Μέθοδος του Newton:

Αρχικά υπολογίζουμε τις τέσσερις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων f και g.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2 + xy^3 e^x - 15\right)}{\partial x} = 2x + y^3 e^x (x+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(x^2 + xy^3 e^x - 15\right)}{\partial y} = 3xy^2 e^x$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial\left(xy + x^2 \sin(x) - 3\right)}{\partial x} = y + 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial\left(xy + x^2 \sin(x) - 3\right)}{\partial y} = x$$

Για να συστηματοποιήσουμε την επίλυση του προβλήματος, λύνουμε το γραμμικό σύστημα που έχει σαν αγνώστους τις ποσότητες *a* και *b*. Γράφοντας παραστατικά τις μερικές παραγώγους υπό τη μορφή: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$, και $g_y = \frac{\partial g}{\partial y}$, έχουμε:

$$a = \frac{f \cdot g_y - g \cdot f_y}{f_y \cdot g_x - f_x \cdot g_y}$$

και

$$b = -\frac{f + a \cdot f_x}{f_y}$$

όπου οι τιμές των συναρτήσεων *f* και *g* όπως και αυτές των παραγώγων τους υπολογίζονται στο ίδιο σημείο (x_i, y_i).

Για άλλη μια φορά, δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών, στον οποίο ξεκινούμε από τις τιμές x_0 και y_0 (επιλέγουμε τις στρογγυλεμένες τιμές $x_0 = 3$ και $y_0 = 0.5$), υπολογίζουμε στη συνέχεια τις τιμές των συναρτήσεων $f(x_0, y_0)$ και $g(x_0, y_0)$, και των τεσσάρων μερικών παραγώγων (πάντα στο σημείο (x_0, y_0)). Χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους τύπους υπολογίζουμε τα *a* και *b*. Τέλος βρίσκουμε με μια άθροιση τις νέες προσεγγίσεις x_1 και y_1.

Από την περιγραφή των πράξεων που έχουμε να κάνουμε, γίνεται φανερό πως πρόκειται για μια μέθοδο που χρειάζεται μάλλον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Πίνακας τιμών.

x	3	2,961565	2,95966	2,959654
y	0,5	0,479743	0,478129	0,478121
f(x,y)	1,532076	0,091172	0,000399	7,96E-09
g(x,y)	-0,22992	-0,00873	-2E-05	-2E-10
f_x	16,04277	14,37754	14,26876	14,26827
f_y	45,19246	39,52308	39,15771	39,15609
g_x	-7,56321	-7,0888	-7,0659	-7,06583
g_y	3	2,961565	2,95966	2,959654
a	-0,03843	-0,00191	-6,2E-06	-9,8E-11
b	-0,02026	-0,00161	-7,9E-06	-1,7E-10

Από τον πίνακα τιμών προκύπτει πως η λύση του πιο πάνω συστήματος είναι η δυάδα (2,95965 , 0,47812).

Παρατηρήσεις.

Η μέθοδος αυτή προγραμματίζεται με τρόπο προφανή στο Excel. Άλλωστε ο πίνακας τιμών που παραθέσαμε σαν λύση του προβλήματος προέρχεται αυτούσιος από το Excel.

Η λύση που βρήκαμε έχει σαφώς μεγαλύτερη ακρίβεια από την απαιτούμενη. Αυτό φαίνεται από τον τρόπο που συγκλίνουν οι ακολουθίες των τιμών x_j και y_j.

Το ότι ήμασταν σε καλό δρόμο, γινόταν φανερό κι από τη σύγκλιση των τιμών των συναρτήσεων *f* και *g* προς το μηδέν.

Όποιος έχει τη διάθεση να περάσει το πιο πάνω πρόβλημα στο Excel, θα διαπιστώσει πως αλλάζοντας τις αρχικές προσεγγιστικές τιμές, μπορεί να υπολογίσει και άλλες λύσεις. Έτσι, για παράδειγμα, εάν θέσει

$$x_0 = 1.3 \quad \text{και} \quad y_0 = 1.6$$

θα βρει σαν λύση:

$$x_0 = 1.151237 \quad \text{και} \quad y_0 = 1.554504$$

όπου μάλιστα όλα τα ψηφία είναι ακριβή.
□

Κριτήρια αξιολόγησης

Κριτήριο αξιολόγησης 1

Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{array}{rrrrrr} 2x & +3y & -z & +t & = & 4 \\ x & -2y & +3z & -2t & = & -2 \\ -x & +2y & +z & +t & = & 7 \\ x & +y & +z & +t & = & 6 \end{array}$$

Να επιλυθεί,
- με τη μέθοδο των Gauss-Cholevski
- με τη βοήθεια των οριζουσών.

Κριτήριο αξιολόγησης 2

Δίνεται το σύστημα:

$$f(x, y) = x^3 + 4y^2 = 0$$
$$g(x, y) = x\sin(x) - 2\sqrt{y} = 0$$

- Να υπολογισθεί πρόχειρα η λύση του, με τη γραφική μέθοδο
- Να υπολογισθεί η λύση του με τη μέθοδο του Newton και ακρίβεια μεγαλύτερη του ε=0,001