ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Σταύρος Παπαϊωάννου

Διάλεξη 06

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1 Το Συμπτωτικό Πολυώνυμο....2
1.2 Γενικά για τα πολυώνυμα. 2
1.3 Ιδιότητες των πολυωνύμων....2
1.4 Το συμπτωτικό πολυώνυμο. 7
Κριτήρια αξιολόγησης....11
Κριτήριο αξιολόγησης 1 11
Κριτήριο αξιολόγησης 2 12
Κριτήριο αξιολόγησης 3 12

1 Το Συμπτωτικό Πολυώνυμο

1.2 Γενικά για τα πολυώνυμα.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις ή τα πολυώνυμα, όπως θα τις λέμε στο εξής χάρη της συντομίας, είναι συναρτήσεις πολύ χρήσιμες στην Αριθμητική Ανάλυση, λόγω της απλότητάς τους (σε σύγκριση βέβαια με άλλες ιδιαίτερα πολύπλοκες συναρτήσεις). Πριν όμως εξετάσουμε αναλυτικότερα τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιεί τα πολυώνυμα η Αριθμητική Ανάλυση, αξίζει να ξαναθυμηθούμε μερικές ιδιότητές τους και να εξηγήσουμε το γιατί είναι τόσο αγαπητά. Ας ξεκινήσουμε από το δεύτερο....

Είναι λοιπόν τα πολυώνυμα ιδιαίτερα αγαπητά γιατί:

1. Είναι συναρτήσεις συνεχείς σε όλο το R.
2. Είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε όλο το R και η παράγωγός τους υπολογίζεται αναλυτικά, πολύ εύκολα.
3. Είναι συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο πεδίο ορισμού τους και το ολοκλήρωμά τους υπολογίζεται αναλυτικά πολύ εύκολα.
4. Υπάρχουν αναλυτικές μέθοδοι για τον υπολογισμό των ριζών ενός πολυωνύμου μέχρι και τέταρτου βαθμού.
5. Η επιστήμη της Αριθμητικής Ανάλυσης έχει εύκολες και γρήγορες μεθόδους ακριβούς υπολογισμού των πραγματικών ριζών τους.
6. Η γενική συμπεριφορά τους είναι πολύ καλά γνωστή.

1.3 Ιδιότητες των πολυωνύμων.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις (π.σ.) έχουν πολλές και σημαντικές ιδιότητες, από τις οποίες αναφέρουμε κάποιες, που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στη συνέχεια:

1. Η γενική μορφή μιας πολυωνυμικής συνάρτησης (π.σ.) ν-οστού βαθμού είναι η:

   $$p(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

2. Το όριο της $p(x)$, όταν το x τείνει στο άπειρο, ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου της $p(x)$:

   $$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty}\left(a_\nu x^\nu\right)$$

3. Μία π.σ. ν-ου βαθμού έχει ακριβώς ν ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές).
4. Αν μία π.σ. έχει σαν ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $z = a + ib$, τότε θα δέχεται σαν ρίζα και τον συζυγή του $z = a - ib$. Η ιδιότητα αυτή στηρίζεται στην ιδιότητα των συζυγών μιγαδικών, το γινόμενό τους να είναι πραγματικός αριθμός. Επομένως ισχύει για κάθε π.σ. που έχει πραγματικούς (και όχι μιγαδικούς) συντελεστές.
5. (Πόρισμα της προηγούμενης πρότασης) Αν μία π.σ. είναι περιττού βαθμού, τότε θα δέχεται υποχρεωτικά μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

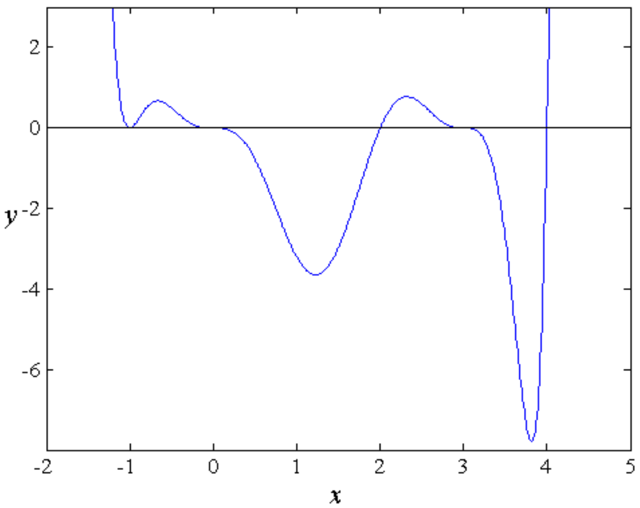
6. Αν η π.σ. $p(x)$ δέχεται σαν ρίζες τους αριθμούς $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, τότε γράφεται με τους παρακάτω δύο ισοδύναμους τρόπους (όπου τον δεύτερο τον ονομάζουμε «γινόμενο παραγόντων»):

$$p(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$$

7. Αν η τιμή ρ είναι ρίζα της π.σ., τότε αυτή θα διαιρείται με το $(x-\rho)$, πράγμα που φαίνεται αμέσως εάν βάλουμε στο κλάσμα $p(x)/(x-\rho)$, το $p(x)$ σαν γινόμενο παραγόντων.
8. Για τον καθορισμό μιας π.σ. ν-ου βαθμού, χρειάζονται ν+1 τυχαία σημεία του επιπέδου Οxy (από τα οποία να μην διέρχεται πολυώνυμο μικρότερου του ν-βαθμού). Έτσι δύο σημεία ορίζουν μία π.σ. 1ου βαθμού (ευθεία), 3 σημεία μια π.σ. 2ου βαθμού (παραβολή) κ.ο.κ..
9. Εάν αναλύοντας σε γινόμενο παραγόντων την π.σ. προκύψει η επόμενη ανάλυση:

$$p(x) = a_\nu(x-\rho_1)^2(x-\rho_2)^3(x-\rho_3)(x-\rho_4)^4\ldots(x-\rho_\nu)$$

τότε λέμε πως η ρίζα ρ_1 είναι βαθμού πολλαπλότητας δύο (διπλή), η ρ_2 είναι βαθμού πολλαπλότητας τρία (τριπλή), η ρ_4 είναι βαθμού πολλαπλότητας τέσσερα (τετραπλή), ενώ οι ρ_3 και ρ_ν είναι απλές.
10. Η γραφική παράσταση της $p(x)$ γύρω από μια ρίζα εξαρτάται από το βαθμό πολλαπλότητας της ρίζας (βλέπε Σχήμα 5.1)



Σχήμα 5.1 *Γραφική παράσταση μιας π.σ. 10^{ου} βαθμού, με ρίζες την ρ_1=-1 (διπλή), ρ_2= 0 (τριπλή), ρ_3=2 (απλή) και ρ_4=3 (τριπλή) και ρ_5=4 (απλή)*

Στην γραφική παράσταση του Σχήματος 5.1 παρατηρούμε πως η γραφική παράσταση της $p(x)$:

- στις απλές ρίζες τέμνει τον άξονα των x υπό γωνία,
- στις διπλές (όπως και στις τετραπλές, εξαπλές – άρα άρτιας τάξης ρίζες), εφάπτεται σ'αυτόν χωρίς η π.σ. να αλλάξει πρόσημο, ενώ
- στις τριπλές (όπως και στις πενταπλές, επταπλές – άρα περιττής τάξης ρίζες), εφάπτεται σ'αυτόν αλλάζοντας όμως πρόσημο (με τη μορφή του s).

Παράδειγμα 1ο

Έστω τα σημεία $M_1=(1,1)$ και $M_2=(2,3)$ του επιπέδου Oxy.

1. Τι βαθμού είναι η πολυωνυμική συνάρτηση που $y = p(x)$ περνάει από τα σημεία αυτά;
2. Υπάρχει άλλο πολυώνυμο 1ου βαθμού που να περνά από τα σημεία M_1 και M_2;
3. Υπάρχει πολυώνυμο 2ου βαθμού που να περνά από τα σημεία M_1 και M_2;

Λύση:

1) Σύμφωνα με την ιδιότητα (8) της προηγούμενης παραγράφου, δύο σημεία του επιπέδου Oxy ορίζουν μία πολυωνυμική συνάρτηση 1ου βαθμού, έστω την $y = p(x) = ax + b$. Το ότι η $y = ax + b$ περνάει από τα σημεία M_1 και M_2, σημαίνει ότι οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν. Άρα ισχύει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{M}_1: & y_1 = ax_1 + b \\ \mathrm{M}_2: & y_2 = ax_2 + b \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} 1 = 1a + b \\ 3 = 2a + b \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array}$$

Επομένως, η πολυωνυμική συνάρτηση που επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των σημείων M_1 και M_2 είναι $y = 2x - 1$.

Σημείωση:

Η λύση του παραπάνω συστήματος, στην γενική της μορφή, για κάθε ζεύγος σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι:

$$\begin{array}{l} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{array}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την πρώτη σχέση από την δεύτερη έχουμε:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 \Rightarrow y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Αντικαθιστώντας το a στην πρώτη σχέση έχουμε:

$$y_1 = ax_1 + b \Rightarrow y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + b \Rightarrow b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \Rightarrow b = \frac{y_1(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Καταλήγουμε δηλαδή στις γνωστές σχέσεις:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ και } b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Αν αντικαταστήσουμε τους συντελεστές

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

και

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$$

από τις σχέσεις που βρήκαμε προηγουμένως, στην γενική εξίσωση μιας ευθείας $y = ax + b$ τότε έχουμε:

$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Από την οποία καταλήγουμε στην πολύ απλή σχέση:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

που μας δίνει την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2).

□

2) Αν και το θέμα αυτό αποτελεί βασικό θεώρημα των πολυωνύμων εμείς θα επισημάνουμε την μοναδικότητα της λύσης του συστήματος. Πράγματι, εάν υπήρχε και άλλη πολυωνυμική συνάρτηση $y = a'x + b'$, με $a \neq a'$ και $b \neq b'$, που να επαληθεύονταν από τις συντεταγμένες των σημείων M_1 και M_2, τότε τα a' και b' θα αποτελούσαν μια δεύτερη λύση του συστήματος, πράγμα άτοπο (Αυτό θα ήταν ισοδύναμο με το ότι δύο διαφορετικές ευθείες μπορούν να τέμνονται σε δύο σημεία).

Φθάνουμε επομένως στο συμπέρασμα: Η πολυωνυμική συνάρτηση $y = 2x - 1$ είναι η **μοναδική** πρωτοβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση που περνάει από τα δύο σημεία M_1 και M_2 του επιπέδου O*xy*.

3) Μία πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού έχει την μορφή

$$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές *α, β* και *γ* έτσι ώστε το πολυώνυμο $p(x)$ να περνά από τα σημεία M_1=(1,1) και M_2=(2,3).

Όπως και προηγουμένως έχουμε

$$\begin{array}{ll|l|l} M_1: & y_1 = \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma & 1 = 1\alpha + 1\beta + \gamma & \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ M_2: & y_2 = \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma & \Rightarrow 3 = 4\alpha + 2\beta + \gamma & \Rightarrow 4\alpha + 2\beta + \gamma = 3 \end{array}$$

Έχουμε δηλαδή ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις αγνώστους! Προφανώς το σύστημα δεν έχει μια μοναδική λύση, αλλά άπειρες λύσεις.

Για να βρούμε τις λύσεις του συστήματος, περνάμε έναν από τους αγνώστους (έστω το *α*) στο δεξιό μέλος των εξισώσεων:

$$\begin{array}{r|l} \alpha + \beta + \gamma = 1 & \beta + \gamma = 1 - a \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 3 & \Rightarrow 2\beta + \gamma = 3 - 4a \end{array}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την πρώτη από την δεύτερη έχουμε:

$$\beta = 2 - 3\alpha$$

και αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε

$$\beta + \gamma = 1 - a \Rightarrow 2 - 3\alpha + \gamma = 1 - a \Rightarrow \gamma = 2a - 1$$

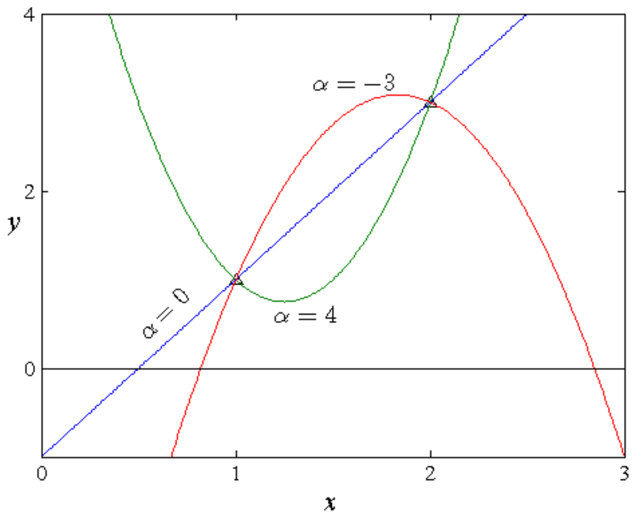
Όπως βλέπουμε οι συντελεστές β και γ εξαρτώνται από το α, και το α μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Έχουμε λοιπόν μια απειρία λύσεων.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $2^{ου}$ βαθμού που περνούν από τα σημεία M_1 και M_2 δίνονται από την σχέση:

$$p(x) = \alpha x^2 + (2 - 3\alpha)x + 2\alpha - 1$$

και αποτελούν (όπως θα λέγαμε στα Μαθηματικά) μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων.

Για κάθε τιμή του α παίρνουμε και μια διαφορετική συνάρτηση $p(x)$ που περνά από τα σημεία M_1 και M_2. Στο Σχήμα 5.2 βλέπουμε δύο τέτοιες συναρτήσεις για $\alpha = 4$ και $\alpha = -3$. Για $\alpha = 0$ το πολυώνυμο αντιστοιχεί στην ευθεία $y = 2x - 1$ που βρήκαμε προηγουμένως.



Σχήμα 5.2 *Γραφικές παραστάσεις των πολυωνυμικών συναρτήσεων $2^{ου}$ βαθμού για α=4 (πράσινη) και για α=-3 (κόκκινη) που διέρχονται από τα σημεία M_1 και M_2. Αν α=0, το πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού αντιστοιχεί στην ευθεία y=2x-1(μπλέ).*

□

Παράδειγμα 2^o

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί 0, 1, 3 και 4, πάνω στον άξονα των τετμημένων (των x). Να βρεθεί μία πολυωνυμική συνάρτηση με μοναδικές ρίζες τους πιο πάνω αριθμούς.

Λύση:

Η ουσία της ερώτησης είναι: Να υπολογισθεί μια πολυωνυμική συνάρτηση που να διέρχεται από τα τέσσερα σημεία: $M_1(0,0)$, $M_2(1,0)$, $M_3(3,0)$ και $M_4(4,0)$. Πρόκειται λοιπόν για μία πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού; **Όχι.** Γιατί τα τέσσερα σημεία είναι **συνευθειακά** (είναι πάνω στην ίδια ευθεία).

Αν λοιπόν δεν θέλουμε την τετριμμένη λύση της ευθείας $y = p(x) = 0$, τότε κάθε φορά που έχουμε ν συνευθειακά σημεία, δεν μπορούμε να τα προσεγγίσουμε με πολυώνυμο ν-1 βαθμού, αλλά με πολυώνυμο ν-οστού βαθμού. Επειδή όμως έχουμε μόνον ν σημεία, οδηγούμαστε όχι σε ένα μοναδικό πολυώνυμο σαν λύση, αλλά σε μία απειρία πολυωνύμων.

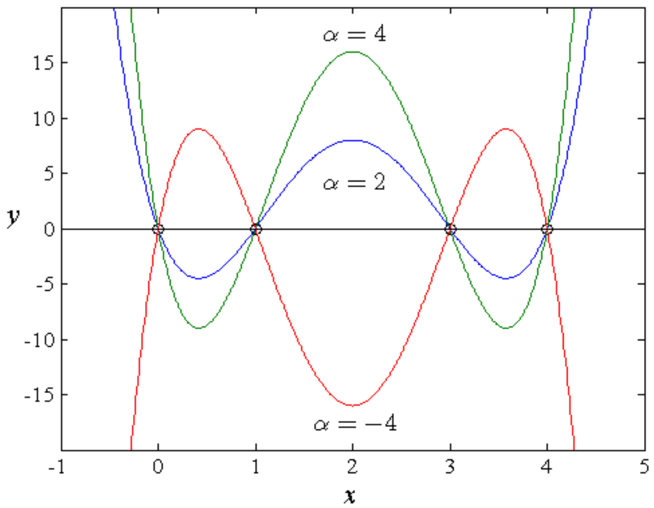
Χρησιμοποιώντας την μορφή γραφής της 6ης ιδιότητας της προηγούμενης παραγράφου έχουμε:

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4) = \\ &= a(x-0)(x-1)(x-3)(x-4) = \\ &= a\left(x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x\right) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως το πολυώνυμο:

$$p(x) = ax(x-1)(x-3)(x-4) = a\left(x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x\right)$$

περνάει από τα σημεία (0,0), (1,0), (3,0) και (4,0), όποια και αν είναι η τιμή της παραμέτρου *α*, που δεν είναι παρά μία πολλαπλασιαστική παράμετρος (βλέπε και Σχήμα 5.3).



Σχήμα 5.3 *Γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης του Παραδείγματος 2 για διάφορες τιμές της παραμέτρου α. (α=2 μπλε, α=4 πράσινη, α=-4 κόκκινη).*

□

1.4 Το συμπτωτικό πολυώνυμο.

Ας υποθέσουμε πως σε ένα πίνακα τιμών (ή σε μία γραφική παράσταση), δίνονται οι τιμές που παίρνει μία μη πολυωνυμική συνάρτηση y=y(x), για κάποιες τιμές της μεταβλητής x.

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	…	$x_{ν-1}$	$x_ν$
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	…	$y_{ν-1}$	$y_ν$

Προφανώς ο πιο πάνω πίνακας περιέχει ν+1 σημεία του επιπέδου O*xy*, τα (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_ν, y_ν) που ορίζουν μια π.σ. ν-ου βαθμού.

Με τον όρο **συμπτωτικό πολυώνυμο** εννοούμε ένα πολυώνυμο $p(x)$, που να παίρνει τις ίδιες ακριβώς τιμές με την συνάρτηση $f(x)$ σε κάποιες από τις τιμές του x (ή σε όλες) που υπάρχουν στον πίνακα.

Παρατήρηση

Εάν υποθέσουμε πως το πλήθος των σημείων σύμπτωσης είναι ν, τότε το συμπτωτικό πολυώνυμο θα είναι ν−1 βαθμού. Ονομάζεται συμπτωτικό μια και οι τιμές που παίρνει συμπίπτουν μ' αυτές της συνάρτησης, φυσικά μόνο στα σημεία σύμπτωσης. Ταυτόχρονα πρέπει να τονισθεί πως κάθε μεταβολή του πλήθους ή των σημείων της συνάρτησης που επιλέγουμε για να ορίσουμε το συμπτωτικό πολυώνυμο, το μεταβάλλει εντελώς.

Για το συμπτωτικό πολυώνυμο θα μιλήσουμε πολλές φορές στην συνέχεια. Άλλωστε και στις προηγούμενες παραγράφους και ιδιαίτερα στο 1ο από τα παραδείγματα ουσιαστικά ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα του συμπτωτικού πολυωνύμου και δείξαμε την πιο κλασσική μέθοδο υπολογισμού του. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με μία άλλη μέθοδο υπολογισμού του συμπτωτικού πολυώνυμου, με τη βοήθεια ενός παραδείγματος.

Θεωρητικό παράδειγμα

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ σε τέσσερις τιμές του x. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα πολυώνυμο που να παίρνει τις ίδιες τιμές με την συνάρτηση $f(x)$, στις ίδιες τιμές του x.

x	−1	1	2	3
y	−7	−3	−1	9

Πρέπει να υπολογίσουμε μια πολυωνυμική συνάρτηση που να προσεγγίζει τέσσερα σημεία του επιπέδου Oxy. Επομένως το πολυώνυμο αυτό θα είναι 3ου βαθμού, οπότε θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε την τιμή τεσσάρων παραμέτρων. Η προηγούμενη μέθοδος μας οδηγεί σε ένα σύστημα 4 γραμμικών εξισώσεων με 4 αγνώστους, η λύση του οποίου απαιτεί πολλές αριθμητικές πράξεις. Ας εξετάσουμε λοιπόν μία ταχύτερη και ευκολότερη μέθοδο.

Ορίζουμε το πολυώνυμο 3ου βαθμού

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

και θέτουμε $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ και $x_4 = 3$

$$p(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)(x-1) + a_3(x+1)(x-1)(x-2)$$

Αυτή η γενική μορφή ενός πολυωνύμου, χρησιμοποιείται συχνά λόγω της ιδιότητάς της

- Όλοι οι όροι από τον 2ο και μετά να μηδενίζονται για $x = x_1$
- Όλοι οι όροι από τον 3ο και μετά να μηδενίζονται για $x = x_2$
- Ο 4ος όρος μηδενίζεται για $x = x_3$

Εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα αυτή του πολυωνύμου υπολογίζουμε τις τιμές των παραμέτρων $α_0$, $α_1$, $α_2$ και $α_3$, δίνοντας στο x τις τέσσερις τιμές του πίνακα και εξισώνοντας κάθε φορά την τιμή του πολυωνύμου $p(x)$ με την τιμή της συνάρτησης $f(x)$, όπως αυτή δίνεται στον παραπάνω πίνακα. Με τον πρώτο υπολογισμό καθορίζουμε την τιμή της παραμέτρου a_0. Στον δεύτερο, χρησιμοποιώντας την τιμή του a_0 που μόλις βρήκαμε, καθορίζουμε την τιμή της a_1 κ.ο.κ.

$$
\begin{aligned}
&p(-1) = -7 = a_0 && \Rightarrow \quad a_0 = -7\\
&p(1) \ = -3 = -7 + 2a_2 && \Rightarrow \quad a_1 = 2\\
&p(2) = -7 = -7 + 6 + 3a_2 = -1 + 3a_2 && \Rightarrow \quad a_2 = 0\\
&p(3) = 9 = -7 + 8 + 8a_3 = 1 + 8a_2 && \Rightarrow \quad a_3 = 1
\end{aligned}
$$

Άρα η πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x)$ ισούται με:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)(x-1) + a_3(x+1)(x-1)(x-2) =\\
&= -7 + 2(x+1) + 0(x+1)(x-1) + 1(x+1)(x-1)(x-2) =\\
&= -7 + 2x + 2 + x^3 - 2x^2 - x + 2 =\\
&= x^3 - 2x^2 + x - 3
\end{aligned}
$$

Γενική περίπτωση

Στην γενική περίπτωση που έχουμε ν+1 σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), …, (x_{v+1}, y_{v+1}), τότε από αυτά διέρχεται μία πολυωνυμική συνάρτηση ν-οστού βαθμού της μορφής:

$$
\begin{aligned}
p(x) = {} & a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \ldots +\\
& + a_v(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_v)
\end{aligned}
$$

και οι συντελεστές του $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_v$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_0 = y_1$$

$$a_1 = \frac{y_2 - a_0}{x_2 - x_1}$$

$$a_2 = \frac{y_3 - a_0 - a_1(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

…

$$a_v = \frac{y_{v+1} - a_0 - a_1(x_{v+1} - x_1)(x_{v+1} - x_2) - \ldots - a_{v-1}(x_{v+1} - x_1)(x_{v+1} - x_2)\ldots(x_{v+1} - x_{v-1})}{(x_{v+1} - x_1)(x_{v+1} - x_2)(x_{v+1} - x_3)\ldots(x_{v+1} - x_v)}$$

Παράδειγμα

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας της συνάρτησης $y = \cos(x)$, για 4 σημεία. Να υπολογισθεί το συμπτωτικό πολυώνυμο και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης, του συμπτωτικού πολυωνύμου αλλά και των σημείων σύμπτωσης.

x	1.3	1.5	1.7	1.9
cos(x)	0.267499	0.070737	–0.12884	–0.32329

Λύση

Αρχικά ορίζουμε τη μορφή του συμπτωτικού πολυωνύμου

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= a_0 + a_1(x-1.3) + a_2(x-1.3)(x-1.5) + a_3(x-1.3)(x-1.5)(x-1.7) \end{aligned}$$

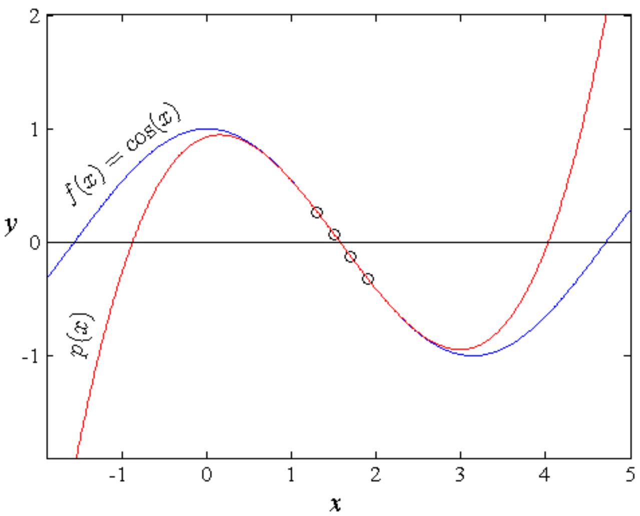
Κάνοντας τις πράξεις εύκολα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} p(1.3) &= 0.267499 &\Rightarrow\quad a_0 &= 0.267499 \\ p(1.5) &= 0.070737 &\Rightarrow\quad a_1 &= -0.983808 \\ p(1.7) &= -0.12884 &\Rightarrow\quad a_2 &= -0.035251 \\ p(1.9) &= -0.32329 &\Rightarrow\quad a_3 &= 0.165764 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των a_j στο συμπτωτικό πολυώνυμο έχουμε:

$$\begin{aligned} p(x) = {}& 0.267499 - 0.983808(x-1.3) - 0.035251(x-1.3)(x-1.5) + \\ &+0.165764(x-1.3)(x-1.5)(x-1.7) \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση του συμπτωτικού πολυωνύμου $y = p(x)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.4



Σχήμα 5.4 *Γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης y=cos(x) (μπλέ) και του συμπτωτικού πολυωνύμου p(x) (κόκκινη). Τα σημεία σύμπτωσης εμφανίζονται με κύκλους.*

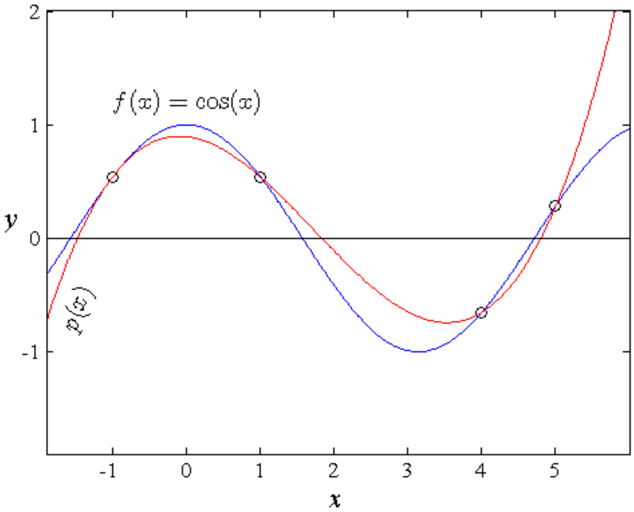
Παρατηρούμε πως το συμπτωτικό πολυώνυμο σχεδόν ταυτίζεται με τη συνάρτηση στις περιοχές που είναι σχετικά κοντά στα σημεία σύμπτωσης (για $1 \le x \le 2.5$), ενώ εκτός του διαστήματος αυτού οι δύο παραστάσεις αποκλίνουν έντονα.

Αντίθετα με το προηγούμενο παράδειγμα, εάν τα σημεία σύμπτωσης είναι πιο απομακρυσμένα μεταξύ τους, τότε η διαφορά τιμών ανάμεσα στη συνάρτηση και το συμπτωτικό πολυώνυμο, στα υπόλοιπα σημεία είναι αισθητά μεγαλύτερη. Αυτό γίνεται φανερό στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα 5.5), στο οποίο τα σημεία σύμπτωσης είναι

x	–1	1	4	5
cos(x)	0.5403023	0.5403023	–0.65364362	0.28366219

και οι συντελεστές του συμπτωτικού πολυωνύμου:

$$a_0 = 0.540302305868140$$
$$a_1 = 0$$
$$a_2 = -0.079596395115450$$
$$a_3 = 0.068903056765245$$



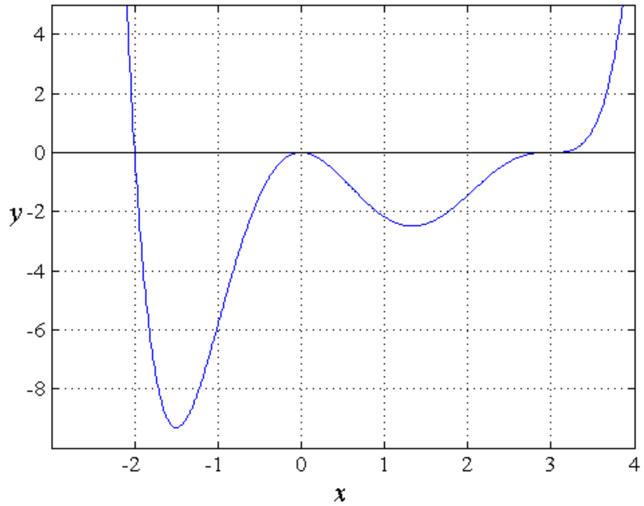
Σχήμα 5.5 *Γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης y=cos(x) (μπλέ) και του συμπτωτικού πολυωνύμου p(x) (κόκκινη). Στην περίπτωση αυτή η ταύτιση των δύο συναρτήσεων δεν είναι καλή. Τα σημεία σύμπτωσης εμφανίζονται με κύκλους.*

Κριτήρια αξιολόγησης

Κριτήριο αξιολόγησης 1

Στη παρακάτω γραφική παράσταση εμφανίζεται μία πολυωνυμική συνάρτηση, της οποίας όλες οι ρίζες είναι πραγματικές. Να βρεθούν:

- Ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης.
- Το πλήθος και το είδος των ριζών της.



Σχήμα 5.6 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης του Κριτηρίου αξιολόγησης 1.*

Κριτήριο αξιολόγησης 2

Να υπολογισθεί το συμπτωτικό πολυώνυμο της συνάρτησης του παρακάτω πίνακα

x	–1	0	1	2	3
y	3	3	–1	–3	3

Κριτήριο αξιολόγησης 3

Σχεδιάστε, χοντρικά, την μορφή των πολυώνυμων των οποίων ο βαθμός, καθώς και το πλήθος και το είδος των ριζών τους (οι οποίες είναι όλες πραγματικές) δίνονται στον επόμενο πίνακα (θεωρήστε ότι όλα τα πολυώνυμα ισχύει $p(10) > 0$) :

	Βαθμός	**Είδος πραγματικών ριζών**
1	2ος	1 (διπλή) στο *x*=1
2	3ος	1 (απλή) στο *x*=1 και 1 (διπλή) στο *x*=2
3	3ος	1 (τριπλή) στο *x*=1
4	4ος	2 (διπλές) στο *x*=1 και στο *x*=2
5	4ος	1 (απλή) στο *x*=1 και 1 (τριπλή) στο *x*=3