ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Σταύρος Παπαϊωάννου

Διάλεξη 07

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1 Αριθμητική Παρεμβολή

1.2 Η έννοια της παρεμβολής

Πολλές φορές συγχέουμε την έννοια της συνάρτησης με την ύπαρξη ενός Μαθηματικού τύπου, που να καθορίζει την τιμή της συνάρτησης σε κάθε σημείο του Πεδίου Ορισμού της. Συχνά όμως, στις πρακτικές εφαρμογές, μία συνάρτηση μπορεί να ορισθεί με έναν πίνακα τιμών ή την γραφική της παράσταση. Αυτό συμβαίνει γιατί ο Μαθηματικός τύπος με τον οποίο ορίζεται η συνάρτηση είτε είναι πολύπλοκος, είτε δεν υπάρχει, όπως στην περίπτωση που η συνάρτηση περιγράφει κάποια πειραματικά αποτελέσματα.

Στις περιπτώσεις αυτές η τιμή της συνάρτησης δεν ορίζεται με τρόπο συνεχή πάνω στο πεδίο ορισμού της, αλλά διαθέτουμε την τιμή της συνάρτησης, έστω της $f(\mathrm{x})$, για κάποιες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής *x*, όπως συμβαίνει στον επόμενο πίνακα:

x	0	2	4	6	8	10	12
y=f(x)	1.099	1.609	1.946	2.197	2.398	2.565	2.708

Τίθεται λοιπόν το πρόβλημα του (προσεγγιστικού) υπολογισμού της τιμής της συνάρτησης *f* για κάποια τιμή της μεταβλητής *x* που δεν αναφέρεται στον πίνακα. Και αυτός ο υπολογισμός πρέπει να βασίζεται μόνο στις δοσμένες τιμές του πίνακα! Για παράδειγμα, θέλουμε να προσεγγίσουμε την τιμή της *f*(4.8), με μοναδικά δεδομένα τα 7 σημεία (*x, y*) του πίνακα. Η πράξη αυτή λέγεται **παρεμβολή** γιατί προσπαθεί να παρεμβάλει νέες τιμές ανάμεσα στις ήδη υπάρχουσες.

Το πρόβλημα της παρεμβολής έχει απασχολήσει από παλιά τους Μαθηματικούς, μια και οι τομείς στους οποίους μπορεί να εφαρμοσθεί είναι πάρα πολλοί. Στην σημερινή εποχή της τεράστιας τεχνολογικής προόδου και της ανάπτυξης της Πληροφορικής με βάση τις μεθόδους που προέκυψαν από την βασική και απλή ιδέα της παρεμβολής επιλύονται προβλήματα πολύπλοκα, όπως υπολογισμός πολύπλοκων ολοκληρωμάτων, ολοκληρώσεις συστημάτων Διαφορικών Εξισώσεων, διόρθωση και εμπλουτισμός δεδομένων κ.λ.π.

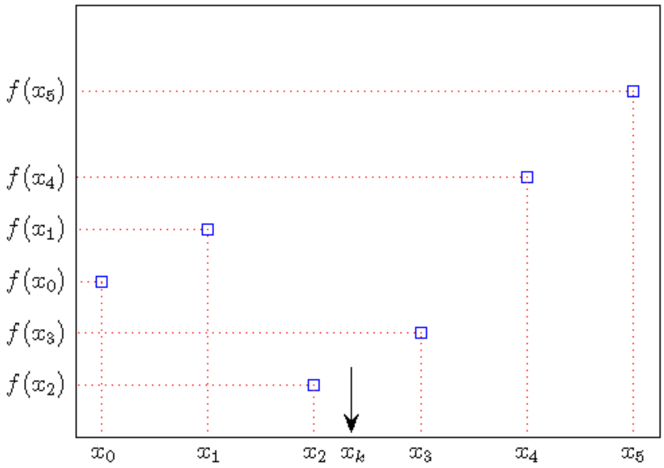
Στην βάση των περισσότερων μεθόδων παρεμβολής υπάρχει η αντικατάσταση της άγνωστης ή πολύπλοκης συνάρτησης με μία πολυωνυμική συνάρτηση. Πρόκειται βέβαια για την πολυωνυμική συνάρτηση που παίρνει τις ίδιες τιμές με την $f(\mathrm{x})$, σε κάποια ή σε όλα τα σημεία που αυτή είναι γνωστή και που την ονομάσαμε ήδη **συμπτωτικό πολυώνυμο**.

1.3 Εκλογή του συμπτωτικού πολυωνύμου

Παρ' όλον ότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι σχετικά απλές, τα προβλήματα που συνοδεύουν την παρεμβολή είναι πολλά και σημαντικά. Έτσι πρέπει:

1. να αποφασίσουμε για τον βαθμό του πολυωνύμου με το οποίο θα παρεμβάλουμε (άρα για τον αριθμό των σημείων σύμπτωσης πολυωνύμου και συνάρτησης),
2. να εκτιμήσουμε το μέγιστο σφάλμα στο τελικό αποτέλεσμα

Υποθέτουμε λοιπόν πως η συνάρτηση *f* δίνεται με την παρακάτω γραφική παράσταση (Σχήμα 6.1) και ζητούμε την τιμή της σε κάποιο x_k του διαστήματος (x_2, x_3). Προσπαθώντας να προσεγγίσουμε την τιμή της συνάρτησης *f* στο σημείο x_k με παρεμβολή, έχουμε την δυνατότητα να επιλέξουμε τον βαθμό του πολυώνυμου σύμπτωσης, άρα και τον αριθμό των σημείων σύμπτωσης, καθώς και τα συγκεκριμένα σημεία σύμπτωσης.



Σχήμα 6.1 *Τα σημεία (x_0, x_1, …, x_5) στα οποία μας είναι γνωστή η τιμή της συνάρτησης και το σημείο x_k στο οποίο θέλουμε να βρούμε την τιμή της.*

Αν επιλέξουμε να παρεμβάλουμε με πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού (ευθεία), είναι σαν να αντικαθιστούμε, στο διάστημα (x_2 , x_3), τη συνάρτηση f με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο σημεία. Από το τμήμα αυτό θα “δανεισθούμε” την τιμή του $f(x_k)$. Εάν θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε και τα 7 σημεία που μας δίνονται, θα χρειαστούμε το συμπτωτικό τους πολυώνυμο, το οποίο θα είναι 6^{ου} βαθμού. Όμως οι πράξεις που απαιτούνται για τον καθορισμό των 7 παραμέτρων του πολυωνύμου αυτού είναι ασύγκριτα περισσότερες σε σύγκριση μ’ αυτές του πρωτοβαθμίου, ενώ η ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος μπορεί να μην είναι αντίστοιχα σημαντικότερη. Χρειαζόμαστε λοιπόν κάποια ένδειξη που να μας βοηθάει στην εκλογή του βαθμού του συμπτωτικού πολυωνύμου, που αποτελεί τη χρυσή τομή ανάμεσα στην ακρίβεια του υπολογισμού και στην ποσότητα των πράξεων που πρέπει να γίνουν.

1.2.3 Παράδειγμα

Στο παρακάτω πίνακα δίνονται τέσσερις τιμές μιας συνάρτησης $y = f(x)$ και πρέπει να υπολογίσουμε, με πολυωνυμική παρεμβολή, κάποιες ενδιάμεσες τιμές.

x	0	1	4	9
$y=f(x)$	0	1	2	3

Θα δοθούν δύο λύσεις. Στην πρώτη θα διαλέξουμε πρωτοβάθμια πολυώνυμα (ευθείες), ενώ στη δεύτερη θα υπολογίσουμε το τριτοβάθμιο συμπτωτικό πολυώνυμο, που ορίζεται από τα τέσσερα σημεία του πίνακα.

i) Πρωτοβάθμια πολυώνυμα.

(α) Για το διάστημα [0,1] τα σημεία (0,0) και (1,1) ορίζουν το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 0a + b &= 0 \\ 1a + b &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία είναι η $y = x$

(β) Για το διάστημα [1,4] τα σημεία (1,1) και (4,2) ορίζουν το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 1a+b=1 \\ 4a+b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1/3 \\ b=2/3 \end{array}$$

Άρα η ευθεία είναι η $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

(γ) Για το διάστημα [4,9] τα σημεία (4,2) και (9,3) ορίζουν το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 4a+b=2 \\ 9a+b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1/5 \\ b=6/5 \end{array}$$

Άρα η ευθεία είναι η $y=\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$

Επομένως η συνάρτηση του πολυωνύμου παρεμβολής που δίνει την τιμή της συνάρτησης του πίνακα στην τυχαία τιμή x_k της μεταβλητής, είναι η συνάρτηση

$$y_k = p(x_k) = \begin{cases} x & 0 \le x_k \le 1 \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3} & 1 \le x_k \le 4 \\ \frac{1}{5}x+\frac{6}{5} & 4 \le x_k \le 9 \end{cases}$$

ii) Τριτοβάθμιο πολυώνυμο.

Ακολουθώντας τη μέθοδο της παραγράφου 5.3, ορίζουμε το πολυώνυμο:

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

υιοθετώντας τα εξής x: $x_0=1$, $x_1=1$ και $x_2=4$. Έτσι το προηγούμενο πολυώνυμο παίρνει τη μορφή:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x-4)$$

οπότε αντικαθιστώντας τα 4 σημεία του πίνακα, υπολογίζουμε τις τιμές των αγνώστων παραμέτρων:

$$\begin{array}{ll} p(0)=0=a_0 & \Rightarrow\quad a_0=0 \\ p(1)=1=a_1 & \Rightarrow\quad a_1=1 \\ p(4)=2=4+12\cdot a_2 & \Rightarrow\quad a_2=-1/6 \\ p(9)=3=9-9\cdot 8/6+9\cdot 8\cdot 5\cdot a_3 & \Rightarrow\quad a_3=1/20 \end{array}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων a_0, a_1, a_2 και a_3 στη σχέση του πολυωνύμου και κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε:

$$p(x)=\frac{1}{60}\left(x^3-15x^2+74x\right)$$

Ας υπολογίσουμε στη συνέχεια την τιμή f(2) με τα δύο είδη παρεμβολής:

Με την πρωτοβάθμια (γραμμική παρεμβολή).

$$f(2)=\left[\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right]_{x=2}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=1.3333333$$

Με την τριτοβάθμια (πλήρη παρεμβολή).

$$f(2)=\left[\frac{1}{60}\left(x^3-15x^2+74x\right)\right]_{x=2}=\frac{8-15\cdot 4+74\cdot 2}{60}=\frac{96}{60}=1.6$$

Παρατήρηση:

Είναι κατανοητό πως τα όσα ειπώθηκαν στην παράγραφο αυτή αφήνουν αρκετά σημεία αδιευκρίνιστα. Όμως θα επανέλθουμε σε επόμενη παράγραφο.

1.4 Οι πεπερασμένες διαφορές

Υποθέτουμε πως γνωρίζουμε τη συνάρτηση $f(x)$ με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών, στον οποίο οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής ισαπέχουν (ισχύει δηλαδή $x_{i+1}-x_i=h=\sigma\tau\alpha\theta.$).

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	…	$x_{\nu-1}$	x_ν
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	…	$y_{\nu-1}$	y_ν

Ένας τέτοιος πίνακας καλείται **πίνακας ισαπεχόντων ορισμάτων**.

Προσπαθώντας να κατανοήσουμε τη φύση, τη συμπεριφορά και τις ιδιότητες αυτής της συνάρτησης, ορίζουμε τις διαφορές των τιμών της. Αφαιρούμε λοιπόν από κάθε επόμενη τιμή την αμέσως προηγούμενη και την γράφουμε από κάτω τους και ανάμεσά τους. Τις διαφορές αυτές τις ονομάζουμε **διαφορές πρώτης τάξης**. Στη συνέχεια, με όμοιο τρόπο, ορίζουμε τις διαφορές των διαφορών (τις οποίες ονομάζουμε διαφορές δεύτερης τάξης). Ομοίως, προχωρώντας σε διαφορές μεγαλύτερης τάξης.

Πίνακας πεπερασμένων διαφορών της συνάρτησης *y*=*f*(*x*)

x	x_0		x_1		x_2		x_3		x_4
y	y_0		y_1		y_2		y_3		y_4
Δy		Δy_0		Δy_1		Δy_1		Δy_3	
Δ²y			$\Delta^2 y_0$		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^2 y_1$		
Δ³y				$\Delta^3 y_0$		$\Delta^3 y_1$			
Δ⁴y					$\Delta^4 y_0$				

όπου έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \\
&\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = \left(y_{i+2} - y_{i+1}\right) - \left(y_{i+1} - y_i\right) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \\
&\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = \left(y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}\right) - \left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\right) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \\
&\Delta^4 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = \left(y_{i+4} - 3y_{i+3} + 3y_{i+2} - y_{i+1}\right) - \left(y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i\right) = \\
&\qquad = y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i
\end{aligned}$$

κ.ο.κ.

Σημείωση:
Στο σημείο αυτό απλώς παρατηρήστε ότι οι συντελεστές των y_i, y_{i+1}, y_{i+2} κ.λ.π. στα $\Delta^n y_i$ είναι οι ίδιοι με τους συντελεστές των *a* και *b* στο ανάπτυγμα του $\left(a-b\right)^n$.

Παράδειγμα:

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$, για 9 τιμές του ορίσματος *x*. Από κάτω έχουμε υπολογίσει τον πίνακα των πεπερασμένων διαφορών.

x	-3		-2		-1		0		1		2		3		4		5
y	86		13		-2		-1		-2		1		38		163		454
Δy		-73		-15		1		-1		3		37		125		291	
Δ^2y			58		16		-2		4		34		88		166		
Δ^3y				-42		-18		6		30		54		78			
Δ^4y					24		24		24		24		24				
Δ^5y						0		0		0		0					

□

1.2.3 Ιδιότητες των πεπερασμένων διαφορών.

Οι πεπερασμένες διαφορές έχουν κάποιες σημαντικές ομοιότητες με τις παραγώγους. Αναφέρουμε στη συνέχεια κάποιες ιδιότητες,, τις οποίες αναλύουμε χωρίς όμως να τις αποδεικνύουμε:

1. Όταν οι διαφορές πρώτης τάξης (Δy_i) είναι μεγαλύτερες του μηδενός, τότε οι τιμές της συνάρτησης y_i είναι αύξουσες (να θυμηθούμε πως ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη παράγωγο). Όμοια, εάν οι δεύτερης τάξης διαφορές είναι θετικές (αρνητικές), τότε οι τιμές y_k δημιουργούν ένα γράφημα που στρέφει τα κοίλα άνω (κάτω). Άλλωστε δεν θα πρέπει να ξεχνούμε πως το κλάσμα $\Delta y_i / h$, είναι μια πρώτη προσέγγιση της τιμής της παραγώγου της *f* στο σημείο x_i.
2. Εάν οι τιμές y_i δίνονται από μία πολυωνυμική συνάρτηση ν-οστού βαθμού, τότε οι διαφορές πρώτης τάξης δίνονται από κάποια πολυωνυμική συνάρτηση ν-1 βαθμού, οι διαφορές δεύτερης τάξης δίνονται από κάποια πολυωνυμική συνάρτηση ν-2 βαθμού, κ.ο.κ.. (Η ιδιότητα αυτή ισχύει για τις παραγώγους: $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3 \Rightarrow y'' = 12x^2 \Rightarrow y''' = 24x$ ...)
3. Πόρισμα της προηγούμενης είναι ότι: Εάν οι τιμές y_i δίνονται από μία πολυωνυμική συνάρτηση ν-οστού βαθμού, τότε οι διαφορές ν-οστής τάξης δίνονται από κάποια πολυωνυμική συνάρτηση μηδενικού βαθμού, δηλαδή είναι σταθερές. Μάλιστα, η τιμή των σταθερών διαφορών ν-τάξης, διηρημένη με το βήμα h του πίνακα υψωμένο εις την ν, $\Delta^{\nu} y_i / h^{\nu}$, είναι ακριβώς ίση με την τιμή της παραγώγου ν-οστής τάξης, η οποία είναι επίσης σταθερή.

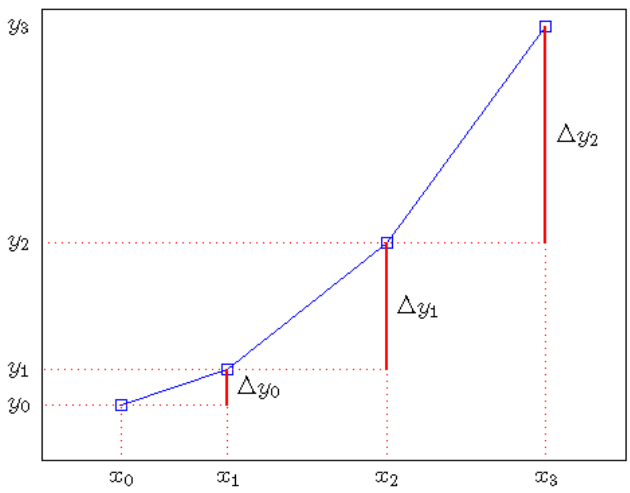
4. Εάν οι τιμές y_i δίνονται από μία μη πολυωνυμική συνάρτηση ν-οστού βαθμού, τότε δεν καταλήγουμε ποτέ σε σταθερές διαφορές (αντίστοιχα μία μη πολυωνυμική συνάρτηση έχει άπειρες, μη μηδενικές, παραγώγους).

Στη παρακάτω γραφική παράσταση (Σχήμα 6.2) έχουμε:

- διαφορές θετικές και
- αύξουσες διαφορές.

Παρατηρούμε λοιπόν πως η συνάρτηση *f* είναι:

- αύξουσα και
- στρέφει τα κοίλα προς τα άνω.



Σχήμα 6.3 *Σχηματική παράσταση των πεπερασμένων διαφορών όταν είναι θετικές και αύξουσες.*

Παρατήρηση:

Επειδή ο πίνακας μιας συνάρτησης έχει πεπερασμένου πλήθους σημεία (έστω ν), ο πίνακας διαφορών μπορεί να φθάσει μέχρι τις διαφορές ν-1 τάξης. Εάν λοιπόν οι αρχικές τιμές y_i δίνονται από πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου του ν, τότε δεν θα συναντήσουμε πουθενά τις σταθερές διαφορές. Επομένως δεν θα μπορούμε να αποφανθούμε για το εάν οι τιμές y_i προέρχονται από πολυωνυμική ή μή πολυωνυμική συνάρτηση.

Παράδειγμα.

Δίνεται ο πίνακας τιμών της συνάρτησης:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	157	44	13	10	5	-8	-11	38	205

Να γίνει ο πίνακας πεπερασμένων διαφορών και να απαντηθούν τα παρακάτω:

1. Είναι πολυωνυμική; Εάν είναι πολυωνυμική, τότε ποιος είναι ο βαθμός της και ποιος είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου της;
2. Να υπολογισθεί το εν λόγω πολυώνυμο.

Λύση:

Κάνουμε τον πίνακα διαφορών.

x	-3		-2		-1		0		1		2		3		4
y	157		44		13		10		5		-8		-11		38
Δy		-113		-31		-3		-5		-13		-3		49	
$\Delta^2 y$			82		28		-2		-8		10		52		
$\Delta^3 y$				-54		-30		-6		18		42			
$\Delta^4 y$					24		24		24		24				

1. Παρατηρούμε ότι οι τέταρτης τάξης διαφορές είναι σταθερές, άρα οι τιμές y_i προέρχονται από μία πολυωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού

Η τέταρτη παράγωγος της πολυωνυμικής συνάρτησης του πίνακα είναι σταθερή και η τιμή της δίνεται από τη σχέση $\Delta^4 y_i/h^4$ και είναι ίση με το 24. Υπολογίζοντάς την θεωρητικά και ορίζοντας τον τεταρτοβάθμιο όρο σαν: $a_4 x^4$, και ενθυμούμενοι πως οι όροι μικρότερης τάξης θα χαθούν κατά την παραγώγιση, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&y = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow \\
&y' = 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1 \Rightarrow \\
&y'' = 12a_4 x^2 + 6a_3 x + 2a_2 \Rightarrow \\
&y''' = 24a_4 x + 6a_3 \Rightarrow \\
&y'''' = 24a_4
\end{aligned}
$$

Εξισώνοντας τη σταθερή 4η παράγωγο με τη σταθερή 4η διαφορά $\Delta^4 y_i/h^4$ έχουμε:

$$24a_4 = 24 \Rightarrow a_4 = 1$$

2. Για να ορίσουμε ένα πολυώνυμο 4ου βαθμού χρειαζόμαστε 5 σημεία. Διαλέγουμε λοιπόν 5 (οποιαδήποτε) από τα σημεία του πίνακα (τα οποία ονομάζουμε x_0, x_1, x_2, x_3 και x_4), μ' όποια σειρά θέλουμε. Επιλέγουμε συνήθως σημεία τα οποία έχουν x (κατ' απόλυτη τιμή) μικρό έτσι ώστε να γίνουν ευκολότερες οι πράξεις.

Όπως κάναμε σε ανάλογο πρόβλημα του προηγουμένου κεφαλαίου, ορίζουμε το συμπτωτικό πολυώνυμο με τη βοήθεια των τεσσάρων, εκ των πέντε, τιμών (των x_0, x_1, x_2 και x_3).

$$
\begin{aligned}
p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\
+ a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)
\end{aligned}
$$

Επιλέγοντας ως σημεία τα $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ και $x_4 = 3$, έχουμε

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + a_3 x(x-1)(x+1) + a_4 x(x-1)(x+1)(x-2)$$

Τοποθετούμε τις 5 τιμές (x_i, y_i) στο παραπάνω συμπτωτικό πολυώνυμο και υπολογίζουμε τις τιμές των συντελεστών του:

$$
\begin{aligned}
&p(0)=10=a_0 && \Rightarrow\quad a_0=10\\
&p(1)=5=10+a_1 && \Rightarrow\quad a_1=-5\\
&p(-1)=13=10+5+2a_2 && \Rightarrow\quad a_2=-1\\
&p(2)=-8=10-10-2+6a_3 && \Rightarrow\quad a_3=-1\\
&p(3)=-11=10-15-6-24+24a_4 && \Rightarrow\quad a_4=1
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στο συμπτωτικό πολυώνυμο και κάνοντας τις πράξεις έχουμε

$$
\begin{aligned}
p(x)&=10-5x-x(x-1)-x(x-1)(x+1)+x(x-1)(x+1)(x-2)=\\
&=10-5x-x(x-1)-x(x^2-1)+x(x^2-1)(x-2)=\\
&=10-5x-(x^2-x)-(x^3-x)+(x^3-x)(x-2)=\\
&=10-5x-x^2+x-x^3+x+x^4-2x^3-x^2+2x=\\
&=x^4-3x^3-2x^2-x+10
\end{aligned}
$$

□

1.5 Το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton

Ο προηγούμενος προσδιορισμός του συμπτωτικού πολυωνύμου είναι επίπονος και αρκετά δύσκολος στο να προγραμματισθεί. Για το λόγο αυτό πιο βολικός είναι ο προσδιορισμός του με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών.

Ας υποθέσουμε πως το συμπτωτικό πολυώνυμο γράφεται υπό τη μορφή:

$$y_k = p(x_k)$$

όπου με το x_k συμβολίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή του, αλλά και της συνάρτησης. Κατά τον υπολογισμό του συμπτωτικού πολυωνύμου εμφανίζεται η παράσταση $(x_k - x)/h$, οπότε εκτελούμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$\frac{x_k - x_0}{h} = k$$

Όπου h είναι το σταθερό βήμα του πίνακα τιμών. Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς x_k έχουμε:

$$x_k = x_0 + kh$$

Για ακέραιες τιμές του k το x_k συμπίπτει με τα σημεία x του πίνακα πεπερασμένων διαφορών (π.χ. $x_3 = x_0 + 3h$). Έτσι, εφόσον το πολυώνυμο $p(x_k)$ είναι συνάρτηση του x_k και το x_k είναι συνάρτηση του k , συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο p είναι συνάρτηση του k, δηλαδή $p(k)$. Επομένως, γίνεται φανερό το γιατί αντικαθιστούμε την κανονική μεταβλητή x_k με το δείκτη της k.

Ο βαθμός του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton μπορεί να επιλεγεί από το χρήστη. Το σκεπτικό σύμφωνα με το οποίο επιλέγεται θα παρουσιαστεί στην επόμενη άσκηση. Η τελική μορφή του πολυωνύμου δίνεται από τη σχέση:

$$y_k = p(x_k) = p(k) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

Το πολυώνυμο αυτό του Newton είναι όντως το συμπτωτικό, μια και παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση του πίνακα: $y_k = f(x_k) = p(x_k) = p(k)$. Πράγματι:

$$
\begin{aligned}
&p(0) = y_0 \\
&p(1) = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1 \\
&p(2) = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = y_0 + 2(y_1 - y_0) + (\Delta y_1 - \Delta y_0) = \\
&\qquad = y_0 + 2(y_1 - y_0) + \left[(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)\right] = \\
&\qquad = y_0 + 2y_1 - 2y_0 + y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2
\end{aligned}
$$

κ.λ.π.

1.2.3 Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton

Αρχικά να ορίσουμε την έννοια των Συνδυασμών και τον τύπο που υπολογίζει το πλήθος τους: Ονομάζουμε «**συνδυασμούς των ν στοιχείων ανά μ**» το πλήθος όλων των διαφορετικών ομάδων από μ στοιχεία, που δημιουργούνται από ν στοιχεία. Για κάθε ομάδα δεν ενδιαφερόμαστε για τη σειρά με την οποία επιλέγονται τα στοιχεία της μ-άδας, δηλαδή η ομάδα με στοιχεία π.χ. τα (1,3,4) είναι η ίδια με την (3,1,4) .

Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά μ δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}$$

όπου, φυσικά $\mu \le \nu$. Θυμίζουμε ότι εξ' ορισμού ισχύει 0!=1. Έτσι ισχύει και η προφανής ισότητα:

$$\binom{\nu}{\nu} = \binom{\nu}{0} = 1$$

Ο τύπος των συνδυασμών δίνει την πολύ ενδιαφέρουσα σχέση του διωνύμου του Newton:

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^\nu = \binom{\nu}{0}\alpha^\nu + \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \binom{\nu}{3}\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \ldots \\
+ \binom{\nu}{\nu-1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\beta^\nu
\end{aligned}
$$

όπου, με τη βοήθεια των συνδυασμών δίνονται οι διωνυμικοί συντελεστές. Π.χ.

$$(\alpha+\beta)^4 = \binom{4}{0}\alpha^4 + \binom{4}{1}\alpha^3\beta + \binom{4}{2}\alpha^2\beta^2 + \binom{4}{3}\alpha\beta^3 + \binom{4}{4}\beta^4$$

Δηλαδή:

$$\left(\alpha+\beta\right)^4=\frac{4!}{0!\cdot 4!}\alpha^4+\frac{4!}{1!\cdot 3!}\alpha^3\beta+\frac{4!}{2!\cdot 2!}\alpha^2\beta^2+\frac{4!}{3!\cdot 1!}\alpha\beta^3+\frac{4!}{4!\cdot 0!}\beta^4=$$
$$=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$$

Βέβαια αυτοί δίνονται και από το γνωστό τρίγωνο του Pascal:

1	$(\alpha+\beta)^0=1$
1 1	$(\alpha+\beta)^1=\alpha+\beta$
1 2 1	$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
1 3 3 1	$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
1 4 6 4 1	$(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$
1 5 10 10 5 1	$(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$

Στο τρίγωνο αυτό, από την τρίτη σειρά και κάτω, ξεκινούμε με μονάδα, συνεχίζουμε με το άθροισμα των δύο συντελεστών που βρίσκονται από πάνω και τελειώνουμε με μονάδα.

Τα παραπάνω σχετίζονται με το πώς μπορεί να γραφεί το y_k, συναρτήσει των διαφορών $\Delta^j y_k$.

$$y_1=y_0+\Delta y_0$$
$$y_2=y_1+\Delta y_1=(y_0+\Delta y_0)+(\Delta y_0+\Delta^2 y_0)=y_0+2\Delta y_0+\Delta^2 y_0$$
$$y_3=y_2+\Delta y_2=\ldots y_0+3\Delta y_0+3\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0$$
$$y_4=y_3+\Delta y_3=\ldots y_0+4\Delta y_0+6\Delta^2 y_0+4\Delta^3 y_0+\Delta^4 y_0$$

κ.ο.κ.

Παρατηρούμε πως εμφανίζονται οι διωνυμικοί συντελεστές, οι συντελεστές δηλαδή του αναπτύγματος $(\alpha+\beta)^k$. Έτσι λοιπόν γράφουμε:

$$y_k=y_{k-1}+\Delta y_{k-1}=...=\binom{k}{0}y_0+\binom{k}{1}\Delta y_0+\binom{k}{2}\Delta^2 y_0+\binom{k}{3}\Delta^3 y_0+...+$$
$$+\binom{k}{k-1}\Delta^{k-1}y_0+\binom{k}{k}\Delta^k y_0 \qquad \Rightarrow$$

$$y_k=y_0+k\Delta y_0+\frac{k\left(k-1\right)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{k\left(k-1\right)\left(k-2\right)}{3!}\Delta^3 y_0+...+k\Delta^{k-1}y_0+\Delta^k y_0$$

Εάν στον παραπάνω τύπο θέσουμε στον δείκτη k μια ενδιάμεση τιμή, δηλαδή μια μη ακέραια τιμή (άρα ο k πάψει να αντιστοιχεί σε κάποιο από τα x του πίνακα), τότε ο προηγούμενος τύπος γίνεται το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton.

1.2.3 Παρεμβολή με το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton.

Με τη χρήση του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton, η πλήρης παρεμβολή γίνεται απλούστερη. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε ένα πίνακα τιμών της συνάρτησης f και ζητούμε την τιμή της συνάρτησης σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο του πίνακα x_k. Εργαζόμαστε λοιπόν ως εξής:

- Επιλέγουμε το βαθμό του συμπτωτικού πολυωνύμου που θα χρησιμοποιήσουμε για παρεμβολή. Ο βαθμός του πολυωνύμου μας επιβάλλει και το πλήθος των σημείων σύμπτωσης (τα οποία, συνήθως, είναι πολύ λιγότερα από το σύνολο των σημείων του πίνακα).
- Επιλέγουμε τα σημεία σύμπτωσης από τον πίνακα έτσι ώστε: (α) να είναι διαδοχικά και (β) το σημείο παρεμβολής (x_k) να βρίσκεται όσο πιο κεντρικότερα γίνεται ανάμεσα στα σημεία αυτά.
- Ονομάζουμε το πρώτο από τα επιλεγμένα σημεία x_0 (το οποίο προφανώς δεν είναι αναγκαίο να ταυτίζεται με το πρώτο σημείο του πίνακα), και ορίζουμε την τιμή του δείκτη k του σημείου παρεμβολής από τη σχέση:

$$k = \frac{(x_k - x_0)}{h}$$

- Υπολογίζω την τιμή y_k, από τον τύπο του Newton.

1.6 Γραμμική παρεμβολή

Η γραμμική παρεμβολή είναι μία μερική περίπτωση της πλήρους παρεμβολής. Χρησιμοποιεί τους δύο πρώτους όρους του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton.

$$y_k = p(x_k) = p(k) = y_0 + k\Delta y_0$$

όπου και πάλι:

$$k = \frac{(x_k - x_0)}{h}$$

Ο τύπος της γραμμικής παρεμβολής προκύπτει πολύ εύκολα και με απλές πράξεις (απλή μέθοδος των τριών). Έστω πως γνωρίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία :

Σ_0 (x_0, y_0) και Σ_1 (x_1, y_1)

και ζητούμε την τιμή της συνάρτησης y_k στο σημείο x_k.

Ενώνουμε (Σχήμα 6.3) τα δύο γνωστά σημεία με ένα ευθύγραμμο τμήμα (το $\Sigma_0\Sigma_1$) και υπολογίζουμε, με τη βοήθειά του, το y_k του σημείου της ευθείας Σ_k (x_k, y_k). Επομένως στη γραμμική παρεμβολή αντικαθιστούμε τη συνάρτηση με μία ευθεία (ένα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο).

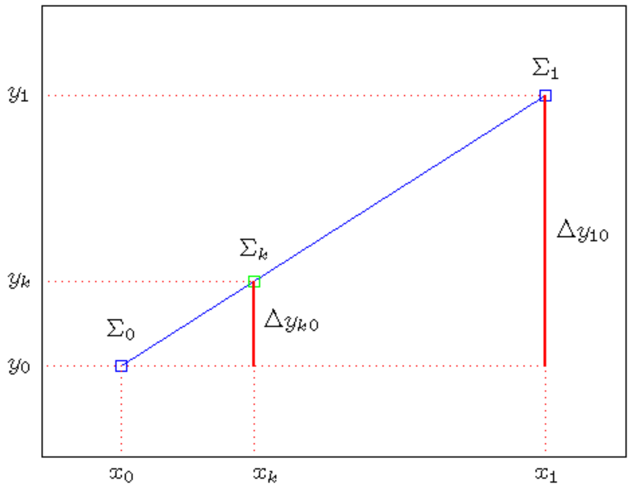
Έχουμε λοιπόν:

Για $\Delta x = x_1 - x_0$ έχουμε $\Delta y = \Delta y_0 = y_1 - y_0$
Για $\Delta x = x_k - x_0$ έχουμε $\Delta y = \Delta y_k = y_k - y_0 = ?$

$$\Delta y_k = \Delta y_0 \frac{x_k - x_0}{x_1 - x_0} = \Delta y_0 \frac{x_k - x_0}{h} = \Delta y_0 \cdot k$$

οπότε:

$$y_k = y_0 + k \cdot \Delta y_0$$



Σχήμα 6.3 *Η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής.*

Η συνάρτηση f ορίζεται με τον παρακάτω πίνακα:

x	0		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5		0.6		0.7
y	0		0.09950		0.19601		0.28660		0.36842		0.43879		0.4952		0.53539
Δy		9950		9651		9059		8182		7037		5641		4019	
Δ^2y			-299		-592		-877		-1145		-1396		-1622		
Δ^3y				-293		-285		-268		-251		-226			
Δ^4y					8		17		17		25				

όπου οι διαφορές έχουν γραφεί σαν ακέραιες για ευκολία (έχουν πολλαπλασιαστεί με το 10^5). Επομένως, η διαφορά -294 είναι στην πραγματικότητα $-294\times10^{-5} = -0{,}00294$.

1. Τι βαθμού είναι το πολυώνυμο με το οποίο θα παρεμβάλετε ανάμεσα στις τιμές του πίνακα;
2. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0.43)$ χρησιμοποιώντας την πλήρη παρεμβολή.
3. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0.43)$ χρησιμοποιώντας τη γραμμική παρεμβολή.
4. Εάν η συνάρτηση του πίνακα είναι η $f(x) = x\cos(x)$, να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα των δύο προσεγγιστικών υπολογισμών του $f(0.43)$.

Λύση:

1) Στο ερώτημα αυτό υπάρχουν δύο απαντήσεις:

Εάν γράψουμε τις διαφορές τρίτης τάξης με τρία δεκαδικά ψηφία διαπιστώνουμε πως είναι σχεδόν ίσες (κυμαίνονται από $-0{,}003$ έως το $-0{,}002$). Εάν τις θεωρήσουμε λοιπόν σταθερές, είναι σαν να δεχόμαστε πως η εν λόγω συνάρτηση προσεγγίζεται από ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο (μια και το τριτοβάθμιο πολυώνυμο παρουσιάζει σταθερές τις διαφορές τρίτης τάξης).

Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε σαν σταθερές τις διαφορές 4ης τάξης, των οποίων οι τιμές (με 4 δεκαδικά) κυμαίνονται από το 0,0001 έως το 0,0003, οπότε θα υιοθετήσουμε τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο για να παρεμβάλουμε στο εσωτερικό του πίνακα.

2) Επιλέγουμε να παρεμβάλουμε με τη βοήθεια του τριτοβάθμιου συμπτωτικού πολυωνύμου, οπότε θα χρειασθούμε 4 σημεία, το οποία θα είναι διαδοχικά και θα έχουν στο κέντρο τους το σημείο παρεμβολής (0.43). Προφανώς, θα επιλέξουμε δύο σημεία αριστερά και δύο δεξιά του σημείου παρεμβολής.

$$x_0 = 0.3\,,\ x_1 = 0.4\,,\ x_2 = 0.5 \ \text{και}\ x_3 = 0.6$$

οπότε

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{0.43 - 0.3}{0.1} = \frac{0.13}{0.1} = 1.3$$

και

$$\begin{aligned} y_k &= p(k = 1.3) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 = \\ &= 0.2866 + 1.3 \cdot 0.08182 + \frac{1.3 \cdot 0.3}{2!}(-0.01146) + \frac{1.3 \cdot 0.3 \cdot (-0.7)}{3!}(-0.0025) = \\ &= 0.390845 \end{aligned}$$

3) Για τη γραμμική παρεμβολή έχουμε:

$$x_0 = 0.4 \ \text{και}\ x_1 = 0.5$$

οπότε

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{0.43 - 0.4}{0.1} = \frac{0.03}{0.1} = 0.3$$

Άρα:

$$\begin{aligned} y_k &= p(k = 1.3) = y_0 + k\Delta y_0 = \\ &= 0.36842 + 0.3 \cdot 0.07037 = \\ &= 0.389531 \end{aligned}$$

4) Η ακριβής τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$y_k = f(0.43) = \left[x\cos x\right]_{x=0.43} = 0.390855$$

οπότε το σχετικό σφάλμα των προηγουμένων υπολογισμών για την πλήρη παρεμβολή:

$$\sigma_{\sigma\chi} = \frac{0.390855 - 0.390845}{0.390855} = 0.0000263 = 0.00263\%$$

και για τη γραμμική:

$$\sigma_{\sigma\chi} = \frac{0.390855 - 0.389531}{0.390855} = 0.0033881 = 0.33881\%$$

Είναι φανερό πως η γραμμική παρεμβολή είναι πράξη λιγότερο ακριβής απ' ότι η πλήρης παρεμβολή. Ήταν κάτι που το περιμέναμε, μια και δεν είναι δυνατό ένα ευθύγραμμο τμήμα να ακολουθεί την καμπύλη μιας συνάρτησης με την ίδια ακρίβεια που την ακολουθεί η καμπύλη ενός τριτοβάθμιου πολυωνύμου.

□

1.7 Η παρεμβολή στο Excel.

Οι υπολογισμοί που απαιτούνται για την παρεμβολή, προγραμματίζονται ιδιαίτερα εύκολα με το Excel. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης *f*, στο εσωτερικό του οποίου θέλουμε να παρεμβάλουμε, σε κάποιο σημείο x_k. Στο παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζεται ένα φύλλο του Excel, όπου:

- Υπάρχουν 6 τιμές από τον πίνακα τιμών της συνάρτησης *f* (προφανώς περιέχονται σημεία γύρω από το σημείο παρεμβολής)
- Υπολογίζεται ο πίνακας διαφορών της συνάρτησης *f*, ο οποίος φθάνει μέχρι και τη διαφορά πέμπτης τάξης.
- Δίνεται το σημείο παρεμβολής x_k (στο παράδειγμα το 0.485).
- Υπολογίζεται ο δείκτης *k* του σημείου παρεμβολής (*k*=2.425).
- Υπολογίζεται η τιμή $f(x_k)$, με τη βοήθεια του πολυωνύμου του Newton, πέμπτου βαθμού (αφού έχουμε 6 σημεία).

Έχοντας το παρακάτω φύλλο σε κάποιο αρχείο του Excel, μπορούμε να παρεμβάλλουμε σε οποιοδήποτε άλλο πίνακα. Απλώς πληκτρολογούμε τις νέες τιμές του πίνακα, καθώς και το νέο x_k. Αυτόματα στη θέση του y_k εμφανίζεται το νέο αποτέλεσμα.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Παρεμβολή					
2								
3		Πίνακας Διαφορών της πινακοποιημένης συνάρτησης						
4								
5	x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	
6	f(x)	1	0.960789	0.852144	0.697676	0.527292	0.367879	
7	Δy	-0.03921	-0.10865	-0.15447	-0.17038	-0.15941		
8	Δ^2y	-0.06944	-0.04582	-0.01592	0.010971			
9	Δ^3y	0.023613	0.029905	0.026887				
10	Δ^4y	0.006292	-0.00302					
11	Δ^5y	-0.00931						
12								
13			X_k=	0.485	k=	2.425		
14			Y_k=	0.790399				
15								

1.8 Διπλή γραμμική παρεμβολή

Έστω η συνάρτηση δύο μεταβλητών $z = g(x, y)$, η οποία ορίζεται με έναν πίνακα τιμών, σαν τον παρακάτω.

	x_0	x_1	x_2	…	x_ν
y_0	$g(x_0, y_0)$	$g(x_1, y_0)$	$g(x_2, y_0)$	…	$g(x_\nu, y_0)$
y_1	$g(x_0, y_1)$	$g(x_1, y_1)$	$g(x_2, y_1)$	…	$g(x_\nu, y_1)$
y_2	$g(x_0, y_2)$	$g(x_1, y_2)$	$g(x_2, y_2)$	…	$g(x_\nu, y_2)$
…	…	…	…	…	…
y_ν	$g(x_0, y_\nu)$	$g(x_1, y_\nu)$	$g(x_2, y_\nu)$	…	$g(x_\nu, y_\nu)$

Η διπλή γραμμική παρεμβολή χρησιμοποιείται για να παρεμβάλουμε ανάμεσα στις τιμές του πίνακα αυτού. Ας υποθέσουμε πως ζητούμε την τιμή της g στο σημείο (x_k, y_λ).

Αρχικά επιλέγουμε την τετράδα των σημείων του πίνακα που βρίσκονται πλησιέστερα στο σημείο παρεμβολής. Προφανώς, από τις τιμές x_i του πίνακα, θα διαλέξουμε σαν x_0 και x_1, το προηγούμενο και το επόμενο σημείο του x_k, ενώ σαν y_0 και y_1 , το προηγούμενο και το επόμενο σημείο του y_λ.

	x_0	x_1
y_0	$g(x_0, y_0)$	$g(x_1, y_0)$
y_1	$g(x_0, y_1)$	$g(x_1, y_1)$

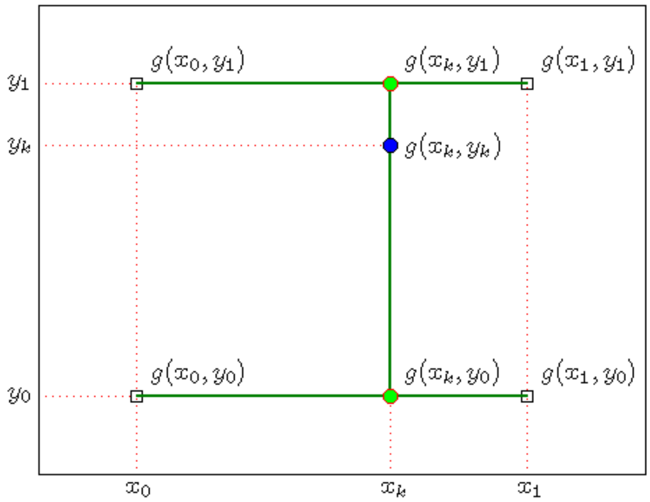
Ο υπολογισμός του $g(x_k, y_\lambda)$ γίνεται με τη βοήθεια τριών γραμμικών παρεμβολών, δύο ως προς x και μιας ως προς y (βλέπε και Σχήμα 6.4), ή δύο ως προς y και μιας ως προς x.

Αρχικά υπολογίζουμε την τιμή των δεικτών του σημείου παρεμβολής:

$$k = \frac{x_k - x_0}{h_x}$$

$$\lambda = \frac{y_\lambda - y_0}{h_y}$$

όπου h_x και h_y είναι το βήμα του πίνακα στο x και στο y αντίστοιχα (δηλαδή $h_x = x_1 - x_0$ και $h_y = y_1 - y_0$).



Σχήμα 6.4 *Η μέθοδος της διπλής γραμμικής παρεμβολής.*

Εκτελώντας δύο παρεμβολές ως προς x και μία ως προς y, καταλήγουμε εύκολα στις σχέσεις:

$$g(x_k, y_0) = g(x_0, y_0) + k\left[g(x_1, y_0) - g(x_0, y_0)\right]$$

$$g(x_k, y_1) = g(x_0, y_1) + k\left[g(x_1, y_1) - g(x_0, y_1)\right]$$

$$g(x_k, y_\lambda) = g(x_k, y_0) + \lambda\left[g(x_k, y_1) - g(x_k, y_0)\right]$$

Παράδειγμα.

Η συνάρτηση $z = f(x, y)$ δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

$x \rightarrow$ $y \downarrow$	**1**	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1**
2	5.3069	5.4115	5.5245	5.6445	5.7704	5.3069
2.2	6.2515	6.3762	6.5092	6.6492	6.7951	6.2515
2.4	7.2845	7.4292	7.5822	7.7422	7.9081	7.2845
2.6	8.4045	8.5692	8.7422	8.9221	9.1080	8.4045
2.8	9.6104	9.7951	9.9881	10.1880	10.3939	9.6104

1. Να υπολογισθεί η τιμή της $f(1.13, 2.44)$.
2. Με δεδομένο πως η έκφραση της συνάρτησης του πίνακα είναι $f(x, y) = xy + y^2 - \ln(xy)$ να υπολογισθεί το σχετικό σφάλμα της παρεμβολής.

Λύση.

1. Ξεκινούμε διαλέγοντας την τετράδα των σημείων πάνω στα οποία θα στηριχθεί η διπλή παρεμβολή:

	x_0=1.1	x_1=1.2
y_0=2.4	7.4292	7.5822
y_1=2.6	8.5692	8.7422

Υπολογίζουμε τους δείκτες k και λ:

$$k = \frac{x_k - x_0}{h_x} = \frac{1.13 - 1.1}{0.1} = 0.3$$

$$\lambda = \frac{y_\lambda - y_0}{h_y} = \frac{2.44 - 2.4}{0.2} = 0.2$$

και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους τύπους της διπλής παρεμβολής:

$$f(x_k, y_0) = f(x_0, y_0) + k\left[f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)\right] \Rightarrow$$
$$f(1.13, 2.4) = f(1.1, 2.4) + 0.3\left[f(1.2, 2.4) - f(1.1, 2.4)\right] \Rightarrow$$
$$= 7.4292 + 0.3(7.5822 - 7.4292) = 7.4752$$

$$f(x_k, y_1) = f(x_0, y_1) + k\left[f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)\right]$$
$$f(1.13, 2.6) = f(1.1, 2.6) + 0.3\left[f(1.2, 2.6) - f(1.1, 2.6)\right] \Rightarrow$$
$$= 8.5692 + 0.3(8.7422 - 8.5692) = 8.6211$$

$$f(x_k, y_\lambda) = f(x_k, y_0) + \lambda\left[f(x_k, y_1) - f(x_k, y_0)\right]$$
$$f(1.13, 2.44) = f(1.13, 2.4) + 0.3\left[f(1.13, 2.6) - f(1.13, 2.4)\right] \Rightarrow$$
$$= 7.4752 + 0.2(8.6211 - 7.4752) = 7.7044$$

Καταλήγουμε λοιπόν, με την διπλή γραμμική παρεμβολή, ότι η τιμή της $f(1.13, 2.44) = 7.7044$

2. Η ακριβής τιμή της *f*:

$$f(1.13, 2.44) = \left[xy + y^2 - \ln(xy)\right]_{x=1.13,\, y=2.44} = 7.6966$$

οπότε το σχετικό σφάλμα της παρεμβολής είναι ίσο με:

$$\sigma_{\sigma\chi} = \left|\frac{7.6966 - 7.7044}{7.6966}\right| = 0.00062 = 0.062\%$$

□

1.9 Παρεμβολή σε πίνακα μη ισαπεχόντων ορισμάτων.

Συχνά αναγκαζόμαστε να παρεμβάλλουμε σε πίνακες με μεταβλητό βήμα (όπου δηλαδή το βήμα *h* δεν είναι σταθερό). Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατή η γραμμική παρεμβολή, η οποία λειτουργεί όπως την γνωρίσαμε και στην περίπτωση των ισαπεχόντων ορισμάτων! Πολλές φορές όμως η απαιτούμενη ακρίβεια της παρεμβολής μας επιβάλλει τη χρήση πολυωνύμων με βαθμό μεγαλύτερο του 1 (ακρίβεια βέβαια που δεν είναι σίγουρο πως θα επιτευχθεί). Την περίπτωση αυτή καλύπτει το πολυώνυμο του Lagrange.

Έστω ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f(x), ενώ τα ορίσματα x_j δεν ισαπέχουν:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	…	$x_{\nu-1}$	x_ν
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	…	$y_{\nu-1}$	y_ν

Τα ν+1 σημεία του πίνακα ορίζουν, στη γενική περίπτωση, μία πολυωνυμική συνάρτηση ν-οστου βαθμού. Το συμπτωτικό αυτό πολυώνυμο δίνεται από την επόμενη σχέση του Lagrange:

$$p(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + ... + L_{\nu-1}(x)y_{\nu-1} + L_\nu(x)y_\nu =$$
$$= \sum_{j=0}^{\nu} L_j(x)y_j$$

όπου οι ν+1 συντελεστές $L_j(x)$ είναι πολυώνυμα ν-οστου βαθμού, με μεταβλητή το x. Το καθένα από αυτά αντιστοιχεί στην τιμή x_j, που δίνει την τιμή y_j του πίνακα. Δηλαδή το $L_0(x)$, που είναι συντελεστής του y_0, αντιστοιχεί στο x_0 που είναι το όρισμα της τιμής y_0. Οι συντελεστές $L_j(x)$ ορίζονται από την γενική σχέση:

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_{j-1})(x-x_{j+1}).....(x-x_{\nu-1})(x-x_\nu)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_{\nu-1})(x_j-x_\nu)} =$$
$$= \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{\nu} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

όπου με το σύμβολο $\prod_{i=1}^{n} A_i$ εννοούμε το γινόμενο των όρων A_i (π.χ. $\prod_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$)

Παρατηρήσεις:

1η) Ο συντελεστής $L_j(x)$ που πολλαπλασιάζει το y_j και αντιστοιχεί στο x_j είναι ένα κλάσμα όπου ο αριθμητής είναι το γινόμενο των ($\nu-1$) διαφορών της μεταβλητής x, με το κάθε x_i του πίνακα τιμών, εκτός από το x_j ($i \neq j$). Όμοια, ο παρονομαστής είναι το γινόμενο των ($\nu-1$) διαφορών της τιμής x_j με το κάθε x_i του πίνακα τιμών, εκτός (και πάλι) από το x_j (αλλιώς θα μηδενίζονταν ο παρονομαστής). Σαν παράδειγμα ας γράψουμε το $L_3(x)$:

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4).....(x-x_{\nu-1})(x-x_\nu)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)...(x_3-x_{\nu-1})(x_3-x_\nu)}$$

2η) Εάν οι τιμές y_j του πίνακα τιμών προέρχονται από μία πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μ μικρότερου του ν (μ<ν), τότε, παρ' όλο που οι συντελεστές $L_j(x)$ είναι ν-οστου βαθμού, στην τελική έκφραση του πολυωνύμου θα γίνουν οι ανάλογες απλοποιήσεις, έτσι ώστε να καταλήξει σε ένα πολυώνυμο μ-ου βαθμού.

3η) Θα θέλαμε να δείξουμε πως, πράγματι, το πολυώνυμο του Lagrange είναι συμπτωτικό. Θα το δείξουμε με ένα παράδειγμα. Έχουμε την συνάρτηση $y(x)$ που δίνεται με τον επόμενο πίνακα τιμών, όπου τα ορίσματα δεν ισαπέχουν υποχρεωτικά (προφανώς το πολυώνυμο Lagrange είναι το συμπτωτικό, ακόμη και στην ειδική περίπτωση των ισαπεχόντων ορισμάτων). Θα πρέπει να δείξουμε πως είναι το συμπτωτικό, δηλαδή πως ισχύουν οι ισότητες $p(x_i) = y_i$.

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

Για τον πίνακα αυτό των τριών σημείων το πολυώνυμο Lagrange είναι το παρακάτω:

$$p(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 = \sum_{j=0}^{2} L_j(x)y_j =$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

Τώρα θα δείξουμε πως ισχύει ότι $p(x_1) = y_1$. Πράγματι:

$$p(x_1) = \frac{(x_1-x_1)(x_1-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x_1-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 =$$
$$= 0 + 1y_1 + 0 = y_1$$

Παρόμοια δείχνουμε πως ισχύουν και οι ισότητες:

$p(x_0) = y_0$ και $p(x_2) = y_2$

οπότε γίνεται φανερό πως πρόκειται για το συμπτωτικό πολυώνυμο.

Παράδειγμα 1^o:

Δίνεται ο επόμενος πίνακας τιμών μιας συνάρτησης $f(x)$.

x	-1	0	2	5
y	5	1	-1	11

Να υπολογισθεί το πολυώνυμο Lagrange που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό.

Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε τους συντελεστές $L_j(x)$:

$$L_{-1}(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(-1-0)(-1-2)(-1-5)} = \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{-18}$$

$$L_0(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-5)}{(0+1)(0-2)(0-5)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{10}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-5)}{(2+1)(2-0)(2-5)} = \frac{x^3 - 4x^2 - 5x}{-18}$$

$$L_5(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(5+1)(5-0)(5-2)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{90}$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές αυτούς στο πολυώνυμο του Lagrange έχουμε:

$$p(x) = 5 \cdot L_{-1} + L_0 - 1 \cdot L_2 + 11 \cdot L_5 =$$

$$= 5\frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{-18} + \frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{10} - \frac{x^3 - 4x^2 - 5x}{-18} + 11\frac{x^3 - x^2 - 2x}{90} =$$

$$= \frac{5(-5)(x^3 - 7x^2 + 10x) + 9(x^3 - 6x^2 + 3x + 10) + 5(x^3 - 4x^2 - 5x) + 11(x^3 - x^2 - 2x)}{90} =$$

$$= \frac{90x^2 - 270x + 90}{90} = x^2 - 3x + 1$$

Εδώ βλέπουμε την επαλήθευση της $2^{ης}$ παρατήρησης. Ενώ περιμέναμε ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο, τελικά αποδείχθηκε πως η συνάρτηση της οποίας οι τιμές αναγράφονταν στον πίνακα τιμών ήταν πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού, παρ' όλον ότι τα πολυώνυμα $L_j(x)$ ήταν τρίτου βαθμού.

□

Παράδειγμα 2^{ο}:

Δίνεται ο επόμενος πίνακας τιμών μιας συνάρτησης $f(x)$.

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

1. Να υπολογισθεί το πολυώνυμο Lagrange που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό.
2. Με γραμμική παρεμβολή να εκτιμηθεί η τιμή $f(5)$.
3. Με το πολυώνυμο του Lagrange να εκτιμηθεί η τιμή $f(5)$.
4. Εάν $f(x) = \sqrt{x}$, να υπολογισθεί η ακριβής τιμή, καθώς και το σχετικό σφάλμα των δύο προσεγγιστικών τιμών.
5. Να γίνει η γραφική παράσταση που να αιτιολογεί τα προηγούμενα αποτελέσματα.

Λύση:

1. Πολυώνυμο Lagrange. Αρχικά υπολογίζουμε τους συντελεστές $L_j(x)$:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(0-1)(0-4)(0-9)} = \frac{x^3 - 14x^2 + 49x - 36}{-36}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-4)(x-9)}{(1-0)(1-4)(1-9)} = \frac{x^3 - 13x^2 + 36x}{24}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-9)}{(4-0)(4-1)(4-9)} = \frac{x^3 - 10x^2 + 9x}{-60}$$

$$L_9(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(9-0)(9-1)(9-4)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{360}$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές αυτούς στο πολυώνυμο του Lagrange έχουμε:

$$p(x)=0\cdot L_0+L_1+2\cdot L_4+3\cdot L_9=$$

$$=0\frac{x^3-14x^2+49x-36}{-36}+\frac{x^3-13x^2+36x}{24}+2\frac{x^3-10x^2+9x}{-60}+3\frac{x^3-5x^2+4x}{360}=$$

$$=\frac{15\left(x^3-13x^2+36x\right)-12\left(x^3-10x^2+9x\right)+3\left(x^3-5x^2+4x\right)}{360}=$$

$$=\frac{6x^3-90x^2+444x}{360}=\frac{1}{60}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{37}{30}x$$

2. Γραμμική παρεμβολή. Εφ' όσον ζητούμε την τιμή $f(5)$, θα επιλέξουμε τα δύο σημεία του πίνακα που βρίσκονται εκατέρωθεν του σημείου παρεμβολής: το (4,2) και το (9,3). Έχουμε λοιπόν:

$$x_0=4,\ x_1=9,\ h=5 \text{ και } x_k=5$$

οπότε

$$k=\frac{x_k-x_0}{h}=\frac{5-4}{5}=\frac{1}{5}=0.2$$

Άρα

$$y(5)=p(k=0.2)=\left[y_0+k\Delta y_0\right]_{k=0.2}=2+0.2\cdot 1=2.2$$

3. Παρεμβολή με το πολυώνυμο του Lagrange.

$$y(5)=p(x=5)=\left[\frac{1}{60}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{37}{30}x\right]_{x=5}=2$$

4. Σύγκριση των αποτελεσμάτων. Με δεδομένο πως η ακριβής τιμή της συνάρτησης f είναι η:

$$y(5)=f(5)=\sqrt{5}=2.23607$$

έχουμε τα σχετικά σφάλματα:

α) Γραμμική παρεμβολή:

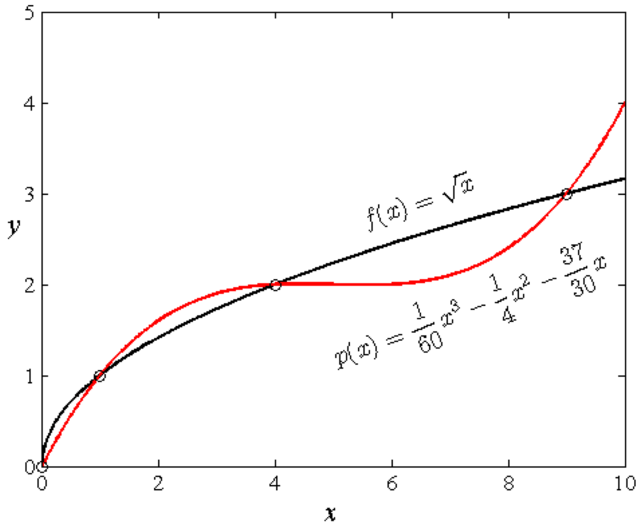
$$\sigma_{\sigma\chi\varepsilon\tau.}(\%)=100\frac{\left(y(\text{ακριβές})-y(\text{προσεγγιστικό})\right)}{y(\text{ακριβές})}=100\frac{(2.23607-2.2)}{2.23607}=1.613\%$$

β) Παρεμβολή με το πολυώνυμο Lagrange:

$$\sigma_{\sigma\chi\varepsilon\tau.}(\%)=100\frac{\left(y(\text{ακριβές})-y(\text{προσεγγιστικό})\right)}{y(\text{ακριβές})}=100\frac{(2.23607-2)}{2.23607}=10.557\%$$

Παρατηρούμε με σχετική έκπληξη πως η τριτοβάθμια παρεμβολή πέτυχε πολύ χειρότερα αποτελέσματα από την γραμμική (πρωτοβάθμια)! Το γεγονός αυτό θα γίνει πιο εμφανές με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων.

6. Γραφική παράσταση.



Σχήμα 6.5 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f(x)$ *και του συμπτωτικού πολυωνύμου. Τα σημεία σύμπτωσης έχουν σημειωθεί με μικρούς κύκλους.*

Από την γραφική παράσταση (Σχήμα 6.5) του τριτοβάθμιου συμπτωτικού πολυωνύμου γίνεται εμφανές πως το αποτέλεσμα της παρεμβολής μέσω αυτού έχει μεγάλο σφάλμα, πολύ μεγαλύτερο της γραμμικής παρεμβολής! Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα:

Η παρεμβολή με πολυώνυμα μεγάλου βαθμού κρύβει κινδύνους, όταν το βήμα του πίνακα είναι ιδιαίτερα μεγάλο, ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου, στο διάστημα όπου επιχειρείται η παρεμβολή, η «καμπυλότητα» της συνάρτησης του πίνακα μεταβάλλεται έντονα.

□

Κριτήρια αξιολόγησης

Κριτήριο αξιολόγησης 1

Η συνάρτηση f ορίζεται με τον παρακάτω πίνακα:

x	**y**	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
5	8.04719				
		0.65851			
5.25	8.70570		0.01190		
		0.67041		−0.00052	
5.5	9.37611		0.01138		0.00001
		0.68179		−0.00051	
5.75	10.05790		0.01087		0.00005
		0.69266		−0.00046	
6	10.75056		0.01041		0.00006
		0.70307		−0.00040	
6.25	11.45363		0.01001		0.00001
		0.71308		−0.00039	
6.5	12.16671		0.00962		
		0.72270			
6.75	12.88941				

1. Τι βαθμού είναι το πολυώνυμο με το οποίο θα παρεμβάλετε ανάμεσα στις τιμές του πίνακα;
2. Να υπολογίσετε την τιμή $f(5.68)$ χρησιμοποιώντας την πλήρη παρεμβολή.
3. Να υπολογίσετε την τιμή $f(5.68)$ χρησιμοποιώντας τη γραμμική παρεμβολή.
4. Εάν η συνάρτηση του πίνακα είναι η $f(x) = x\ln x$, να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα των δύο προσεγγιστικών υπολογισμών του $f(5,68)$.

Κριτήριο αξιολόγησης 2

Δίνεται ο επόμενος πίνακας τιμών μιας συνάρτησης *f*.

x	0	1	2	5
y	0	1	1	1

1. Να υπολογισθεί το πολυώνυμο Lagrange που αντιστοιχεί στον πίνακα αυτό.
2. Με γραμμική παρεμβολή να εκτιμηθεί η τιμή $f(4)$.
3. Με το πολυώνυμο του Lagrange να εκτιμηθεί η τιμή $f(4)$.
4. Να γίνει η γραφική παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής. Πιστεύετε πως θα δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα κατά την παρεμβολή;.