ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Σταύρος Παπαϊωάννου

Διάλεξη 08

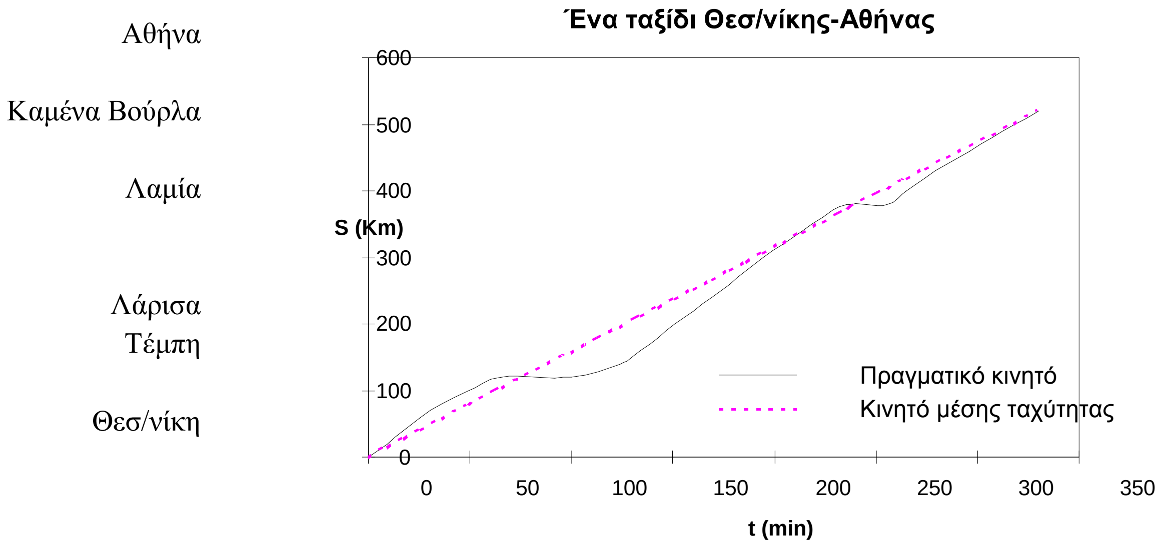
Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1 Αριθμητική παραγώγιση.

1.2.3 Γενικά.

Η παραγώγιση είναι μια πολύ σημαντική πράξη των συναρτήσεων. Η σημαντικότητά της έγκειται στο ότι αποτελεί στα Μαθηματικά την γενίκευση της έννοιας της ταχύτητας. Στο επόμενο σχήμα δίνουμε ένα πολύ απλό παράδειγμα, της μετακίνησης ενός αυτοκινήτου από τη Θεσσαλονίκη στην Αθήνα.



Παρατηρήσεις:

- Η μετακίνηση του κινητού λαμβάνει χώρα πάνω στον άξονα των διαστημάτων S και όχι πάνω στην καμπύλη c, η οποία βοηθά στο να γνωρίζουμε τη θέση του κινητού ανά πάσα χρονική στιγμή. Η συνάρτηση που αντιστοιχεί στην καμπύλη c [η s=s(t)] ονομάζεται συνάρτηση θέσης του κινητού.
- Διαιρώντας τη απόσταση που διανύθηκε συνολικά με το χρόνο που απαιτήθηκε για τη μετακίνηση, υπολογίζουμε τη μέση ταχύτητα του κινητού:

$$V_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta} = \frac{S_{\sigma\upsilon\nu}}{t_{\sigma\upsilon\nu}}$$

- Η μέση ταχύτητα στο γράφημα ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας την οποία σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των t), το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία αρχής και τέλους της μετακίνησης.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία εκκίνησης και τέλους της μετακίησης είναι το γραφημα που αντιστοιχεί στην κίνηση ενός φανταστικού κινητού που κινείται διαρκώς με τη μέση ταχύτητα και διανύει τη συνολική απόσταση στον ίδιο χρόνο με το πραγματικό κινητό.

- Η κλίση της ευθείας ε ισούται με την ταχύτητα μετακίνησης (του φανταστικού κινητού).
- Η ταχύτητα του πραγματικού κινητού μεταβάλλεται διαρκώς. Η ταχύτητά του σε κάποια χρονική στιγμή ονομάζεται στιγμιαία ταχύτητα, και είναι η κλίση της συνάρτησης θέσης (της καμπύλης

c) στο αντίστοιχο t. Η κλίση όμως μιας καμπύλης σε ένα σημείο ορίζεται σαν η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη στο εν λόγω σημείο.

Στα Μαθηματικά, ονομάζουμε παράγωγο συνάρτηση μιας συνάρτησης f(x), μιαν άλλη συνάρτηση [που ονομάζεται παράγωγος της f και συμβολίζεται με το f '(x)] η οποία δίνει σε κάθε σημείο x την κλίση της f.

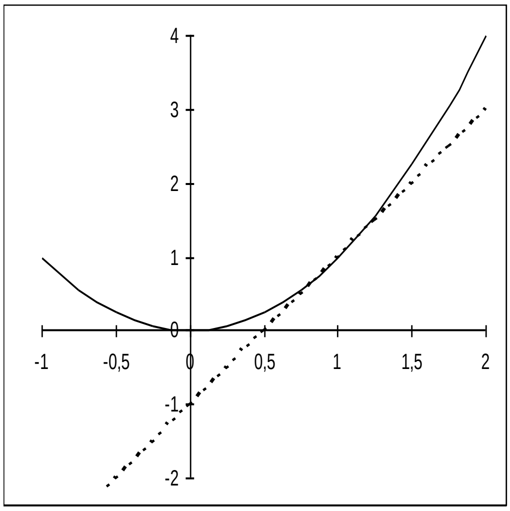
Παράδειγμα: Έστω *πως* $f(x) = x^2$. Αναζητούμε τη συνάρτηση η οποία να "δίνει" τις κλίσεις της f. Αυτή είναι η παράγωγος της f η:

$f'(x) = (x^2)' = 2x$.

Άρα η κλίση της f στη σημείο x=1 ισούται με:

$f'(1) = (2x)_{x=1} = 2$

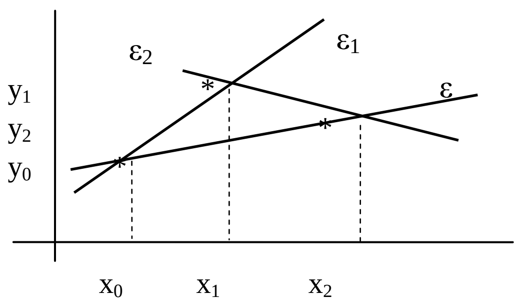
Αυτή ακριβώς είναι η κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης.



1.2.3 Γραμμικός υπολογισμός της παραγώγου.

Συνήθως υπολογίζουμε με αριθμητικές μεθόδους την παράγωγο μιας συνάρτησης όταν η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη μ' έναν πίνακα τιμών. Το συνηθέστερο πρόβλημα είναι να αναζητούμε την παράγωγο σε κάποιο από τα σημεία του πίνακα (και όχι κάπου ενδιάμεσα).

Επιλέγουμε λοιπόν τα τρία πρώτα σημεία ενός πίνακα ν-σημείων που περιέχει τις τιμές μια συνάρτησης y(x), των (x_0,y_0), (x_1,y_1) και (x_2,y_2), και αναζητούμε την τιμή της παραγώγου της y(x) στο σημείο x_1. Ο αριθμητικός υπολογισμός στηρίζεται σε τρεις απλούστατους τύπους, οι οποίοι υπολογίζουν την κλίση ευθειών και εφαρμόζονται, ο πρώτος στην αρχή του πίνακα, ο δεύτερος στο τέλος και ο τρίτος σ'όλα τα ενδιάμεσα σημεία (μια και δίνει τα ακριβέστερα αποτελέσματα). Οι προσεγγιστικοί τύποι:



$$y'(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ (κλίση της } \varepsilon_1 \text{)}$$

$$y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ (κλίση της } \varepsilon_2 \text{)}$$

$$y'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \text{ (κλίση της } \varepsilon \text{)}$$

Γίνεται φανερό πως ο τρίτος τύπος πρέπει να είναι πλησιέστερα στην πραγματική τιμή της παραγώγου. Πράγματι, εάν προσπαθήσουμε να φανταστούμε τη μορφή της καμπύλης της y(x), και να φέρουμε την ευθεία που εφάπτεται στην y(x) στο σημείο x_1, τότε θα δούμε πως είναι πιο πιθανό η κλίση της να πλησιάζει την κλίση της ευθείας ε.

1.2.3 Πλήρης αριθμητική παραγώγιση.

Στην πλήρη αριθμητική παραγώγιση επαναλαμβάνουμε τη λογική της πλήρους παρεμβολής. Αντικαθιστούμε την συνάρτηση του πίνακα με το συμπτωτικό πολυώνυμο και παραγωγίζουμε το πολυώνυμο στη θέση της συνάρτησης. Μάλιστα για να μην ταλαιπωρούμαστε με τον υπολογισμό του συμπτωτικού πολυωνύμου, παραγωγίζουμε κατ'ευθείαν το πολυώνυμο του Newton:

$$y_k = p(x_k) = p(k) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \dots$$

Δεν πρέπει να ξεχνούμε βέβαια πως η προηγούμενη σχέση προέκυψε με την αλλαγή μεταβλητής (από την κανονική x_k στον δείκτη της k), μέσω της σχέσης:

$$k = \frac{x_k - x_0}{h}$$

Επομένως, στην συνέχεια το πολυώνυμο του Newton (που θα παραγωγισθεί φυσικά ως προς x_k) θα παραγωγισθεί σαν σύνθετη συνάρτηση, οπότε θα ισχύει:

$$\frac{dy_k}{dx_k} = \frac{dp(k)}{dk}\frac{dk}{dx_k} = \frac{dp(k)}{dk}\frac{d}{dx_k}\left(\frac{x_k - x_0}{h}\right) = \frac{1}{h}\frac{dp(k)}{dk}$$

Έχουμε επομένως:

$$\frac{dy_k}{dx_k} = \frac{dp(k)}{dk}\frac{dk}{dx_k} = \frac{1}{h}\frac{d}{dk}\left[y_0 + k\frac{1}{h} + \frac{k(k-1)}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \dots\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2k-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3k^2 - 6k + 2}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots\right]$$

Παράδειγμα:

Επανερχόμαστε στη συνάρτηση του παραδείγματος της παρεμβολής:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_i	0	0,09950	0,19601	0,28660	0,36842	0,43879	0,49520	0,53539	0,55737
	9950	9651	9059	8182	7037	5641	4019	2198	
	-299	-593	-876	-1146	-1396	-1622	-1821		
	-294	-284	-269	-250	-227	-199			
	10	15	19	24	27				

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου της f, στο σημείο x_k=0,4, χρησιμοποιώντας τους τρεις τύπους της γραμμικής προσέγγισης.
ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου της f, στο σημείο x_k=0,4, χρησιμοποιώντας την παράγωγο του συμπτ. πολυωνύμου του Newton.
iii) Με δεδομένο πως η συνάρτηση του πίνακα είναι η f(x)=xσυνx, να υπολογισθεί η ακριβής τιμή της παραγώγου καθώς και τα σχετικά σφάλματα των υπολογισμών.

Λύση:

i) Όπως ήδη εξηγήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, ο πρώτος τύπος στηρίζεται στο τρέχον σημείο (το 0,4) και στο προηγούμενο, ο δεύτερος στο τρέχον και στο επόμενο, ενώ ο τρίτος στο προηγούμενο και στο επόμενο του τρέχοντος σημείου. Υπολογίζουμε λοιπόν:

f ‘(0,4) = (0,36842-0,28660)/0,1 = 0,8182 (α’ τύπος)

f ‘(0,4) = (0,43879-0,36842)/0,1 = 0,7037 (β’ τύπος)

f ‘(0,4) = (0,43879-0,28660)/0,2 = 0,76095 (γ’ τύπος)

ii) Όπως ειπώθηκε στο παράδειγμα της παρεμβολής, επιλέγουμε τριτοβάθμιο συμπτ.πολυώνυμο, θεωρώντας τις τρίτης τάξης διαφορές περίπου σταθερές. Επιλέγουμε επομένως από τον πίνακα τέσσερα σημεία σύμπτωσης (διαδοχικά που έχουν κεντρικό το σημείο 0,4), ξεκινώντας από το x0=0,2. Βέβαια, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από το x0=0,3. Έχουμε λοιπόν:

x_0=0,2 x_k=0,4 και h=0,1
οπότε:
k = (0,4-0,2)/0,1 = 2
άρα:

$$f'(0.4)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{2k-1}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{3k^2-6k+2}{3!}\Delta^3 y_0+...\right]_{k=2}=$$
$$=\frac{1}{0.1}\left[0.09059+\frac{3}{2}\left(-0.00876\right)+\frac{2}{6}\left(-0.00269\right)+...\right]=$$
$$=0.76508$$

iii) Η ακριβής τιμή της παραγώγου:

f ‘(0,4 rad) = [xσυνx] $’_{x=0,4}$ = [συνx - xημx] $_{x=0,4}$ = 0,76529

Εκτιμούμε λοιπόν τα σχετικά σφάλματα των τεσσάρων προσεγγιστικών υπολογισμών:
$\sigma_{\sigma\chi}$(α'τύπου) = 100(0,76529-0,8182)/ 0,76529 = 6,91 %
$\sigma_{\sigma\chi}$(β'τύπου) = 100(0,76529-0,7037)/ 0,76529 = 6,16 %
$\sigma_{\sigma\chi}$(γ'τύπου) = 100(0,76529-0,76095)/ 0,76529 = 0,57 %
$\sigma_{\sigma\chi}$(με το σ.π.) = 100(0,76529-0,76508)/ 0,76529 = 0,027 %

Παρατηρούμε το πόσο σημαντικότερα ακριβής είναι ο τρίτος γραμμικός τύπος σε σχέση με τους προηγούμενους δύο. Αντίθετα, ήταν απόλυτα αναμενόμενη η ακρίβεια του τύπου που προήλθε από την παραγώγιση του συμπτ. πολυωνύμου.

1.2.3 Αριθμητική παραγώγιση με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών.

Όταν μιλήσαμε για τις ιδιότητες των διαφορών, αναφερθήκαμε στη σχέση πεπερασμένων διαφορών και παραγώγων. Τώρα θα το αναλύσουμε διεξοδικότερα. Έστω λοιπόν ο επόμενος πίνακας τιμών:

x_j	x_0		x_1		x_2		x_3		x_4	x_5
y_j	y_0		y_1		y_2		y_3		y_4	y_5
Δy_j		Δy_0		Δy_1		Δy_2		Δy_3	Δy_4	
$\Delta^2 y_j$			$\Delta^2 y_0$		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^2 y_3$	
$\Delta^3 y_j$				$\Delta^3 y_0$		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^3 y_2$		
$\Delta^4 y_j$					$\Delta^4 y_0$		$\Delta^4 y_1$			

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο πως ο πλέον ακριβής τύπος για την εκτίμηση της πρώτης παραγώγου στο σημείο x_1 είναι αυτός που αντιστοιχούσε στον τύπο:

$$y'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_2 - y_0}{2h}$$

Εύκολα μπορούμε να φτάσουμε στα επόμενα τρία συμπεράσματα:

1. Ο τύπος αυτός θα μπορούσε να γραφεί με τη βοήθεια των δύο διαφορών, στο κέντρο των οποίων βρίσκεται το σημείο υπολογισμού της παραγώγου (το x_1):

$$y'(x_1) = \frac{\frac{\Delta y_0 + \Delta y_1}{2}}{h} = \frac{\Delta y_0 + \Delta y_1}{2h} = \frac{y_1 - y_0 + y_2 - y_1}{2h} = \frac{y_2 - y_0}{2h}$$

2. Άρα, οι τύποι που χρησιμοποιούν μία από τις διαφορές (έστω την Δy_0), ουσιαστικά υπολογίζουν την παράγωγο στο ενδιάμεσο σημείο (στο $x_{1/2}$, δηλαδή στο μέσον του διαστήματος (x_0,x_1)).

$$y'\left(x_{\frac{1}{2}}\right) = y'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = \frac{\Delta y_0}{h}$$

3. Γενικεύοντας τη λογική αυτή συμπεραίνουμε πως η εκτίμηση των παραγώγων μεγαλύτερης τάξης δίνεται από τον τύπο:

$$y^{(\nu)}\left(x_j\right) = \frac{\Delta^{\nu} y_k}{h^{\nu}}$$

αποδίδει την ν-οστή παράγωγο της y(x) στο σημείο που αντιστοιχεί η διαφορά που χρησιμοποιείται ($\Delta^{\nu} y_k$).

Παραδείγματα: Με βάση τις πιο πάνω παρατηρήσεις, και χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο πίνακα τιμών, έχουμε:

$$y''\left(x_2\right) = \frac{\Delta^2 y_1}{h^2},$$

$$y'''\left(x_{1.5}\right) = y'''\left(x_{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\Delta^3 y_0}{h^3},$$

$$y'''\left(x_2\right) = \frac{\dfrac{\Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1}{2}}{h^3},$$

$$y^{(4)}\left(x_3\right) = \frac{\Delta^4 y_1}{h^4} \qquad \kappa\lambda\pi.$$

Παρατήρηση: Η αριθμητική εκτίμηση για την πρώτη παράγωγο στα δύο άκρα του πίνακα, με την χρήση των τύπων:

$y'\left(x_1\right) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ για το αριστερό άκρο, και

$y'\left(x_\nu\right) = \dfrac{y_\nu - y_{\nu-1}}{h}$ για το δεξί άκρο

είναι ιδιαίτερα χαμηλής ακρίβειας. Για το λόγο αυτό, **εκεί που δεν έχουμε δυνατότητα υπολογισμού με τη βοήθεια των διαφορών**, είτε πρόκειται για την πρώτη παράγωγο είτε για παραγώγους μεγαλύτερης τάξης, **χρησιμοποιούμε την παράγωγο του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton.**

Παράδειγμα:

Επανερχόμαστε στη συνάρτηση του παραδείγματος της προηγούμενης παραγράφου, στον πίνακα της συνάρτησης y(x) = xσυνx, εκτιμώντας κάποιες παραγώγους και συγκρίνοντας τα προσεγγιστικά αποτελέσματα με τα ακριβή:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_i	0	0,09950	0,19601	0,28660	0,36842	0,43879	0,49520	0,53539	0,55737
	9950	9651	9059	8182	7037	5641	4019	2198	
	-299	-593	-876	-1146	-1396	-1622	-1821		
	-294	-284	-269	-250	-227	-199			
	10	15	19	24	27				

Αρχικά υπολογίζουμε αναλυτικά τις παραγώγους:

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}\sigma\upsilon\nu\mathrm{x}$$
$$\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \sigma\upsilon\nu\mathrm{x} - \mathrm{x}\eta\mu\mathrm{x}$$
$$\mathrm{y}''(\mathrm{x}) = -2\eta\mu\mathrm{x} - \mathrm{x}\sigma\upsilon\nu\mathrm{x}$$
$$\mathrm{y}'''(\mathrm{x}) = -3\sigma\upsilon\nu\mathrm{x} + \mathrm{x}\eta\mu\mathrm{x}$$
$$\mathrm{y}^{(4)}(\mathrm{x}) = 4\eta\mu\mathrm{x} + \mathrm{x}\sigma\upsilon\nu\mathrm{x}$$

Υπολογισμός των παραγώγων:

Προσεγγιστική λύση	Ακριβής λύση
$y'(0) = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{0.09950}{0.1} = 0.995$	$y'(0) = [\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x]_{x=0} = 1$
$y'(0.05) = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{0.09950}{0.1} = 0.995$	$y'(0.05) = [\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x]_{x=0.05} = 0.99625$
$y'(0.1) = \frac{\Delta y_0 + \Delta y_1}{2h} = \frac{0.09950 + 0.09651}{0.2} = 0.98007$	$\mathrm{y}'(0.1) = [\sigma\upsilon\nu\mathrm{x} - \mathrm{x}\eta\mu\mathrm{x}]_{\mathrm{x}=0.1} = 0.98502$
$y''(0.1) = \frac{\Delta^2 y_0}{h^2} = \frac{-0.00299}{0.01} = -0.299$	$y''(0.1) = [-2\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x]_{x=0.1} = -0.29917$
$y'''(0.2) = \frac{\Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1}{2h^3} = \frac{-0.00294 - 0.00284}{0.002} = -2.89$	$y'''(0.2) = [-3\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x]_{x=0.2} = -2.90047$
$y^{(4)}(0.2) = \frac{\Delta^4 y_0}{h^4} = \frac{0.00010}{0.0001} = 1$	$y^{(4)}(0.2) = [4\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x]_{x=0.2} = 0.99069$

Άσκηση: Όμοια με προηγουμένως, με τη βοήθεια του επόμενου πίνακα τιμών, να εκτιμήσετε αριθμητικά και αναλυτικά την πρώτη, δεύτερη, τρίτη και τέταρτη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x\eta\mu x$.

x_j	0		0,1		0,2		0,3		0,4		0,5
y_j	0		0,00998		0,03973		0,08866		0,15577		0,23971
Δy_j		998		2975		4892		6711		8395	
$\Delta^2 y_j$			1977		1917		1819		1683		
$\Delta^3 y_j$				-60		-98		-135			
$\Delta^4 y_j$					-39		-37				