ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Σταύρος Παπαϊωάννου

Διάλεξη 09

Ιούνιος 2015

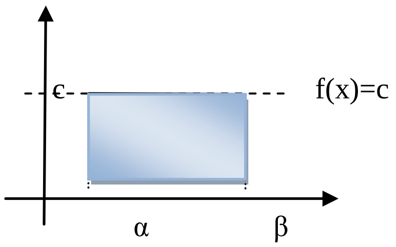
Περιεχόμενα

1 Η αριθμητική ολοκλήρωση.

1.2.3 Γενικά.

Μάθαμε την αόριστη ολοκλήρωση σαν την αντίστροφη πράξη της παραγώγισης. Είδαμε πως επειδή η παράγωγος της συνάρτησης $F(x)=x^2+c$ είναι η $f(x)=2x$, αντίστροφα το αόριστο ολοκλήρωμα (ή η αρχική) της f(x) είναι η $F(x)=x^2+c$.

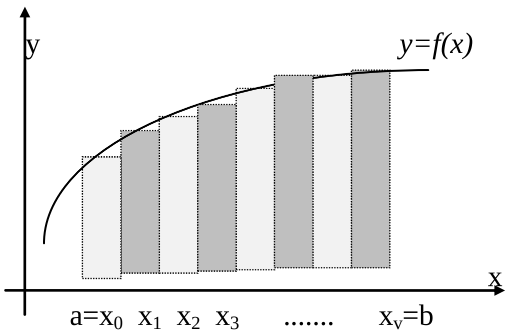
Στη συνέχεια μάθαμε για την ορισμένη ολοκλήρωση, η αρχή της οποίας στηρίζεται στον υπολογισμό του γινομένου της τιμής μιας συνάρτησης f(x), επί το μήκος ενός διαστήματος (α,β) (το οποίο ισούται με το β-α), υποσυνόλου του πεδίου ορισμού της f. Πρόκειται για ένα ιδιαίτερα απλό πρόβλημα, όταν η συνάρτηση f(x) είναι σταθερή!



Τότε, το γινόμενο (το ορισμένο ολοκλήρωμα) δίνεται από τη σχέση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = c(\beta - \alpha)$$

Όταν όμως η f(x) δεν είναι σταθερή, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα ορίζεται από μια πολλαπλή άθροιση στοιχειωδών γινομένων, το καθένα από τα οποία αναφέρεται σε ένα απειροστό υποδιάστημα dx, του διαστήματος (α,β) για το οποίο θεωρούμε πως η τιμή της συνάρτησης παραμένει σταθερή.



Αναλύοντας το διάστημα ολοκλήρωσης (a,b) σε ν υποδιαστήματα μήκους Δx, με τη βοήθεια των ν+1 σημείων:

$x_0 , x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_\nu$

Σε κάθε υποδιάστημα ορίζουμε το γινόμενο του μήκους του επί την τιμή της συνάρτησης f σε ένα σημείο ξ του υποδιαστήματος (το οποία στην πραγματικότητα επιλέγεται από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής με τρόπο ώστε το εμβαδό του παραλληλογράμμου που προκύπτει να είναι ακριβώς ίσο με το εμβαδό που ορίζει το ολοκλήρωμα της *f*(x) στο εν λόγω υποδιάστημα). Έτσι στο τυχαίο i-οστό διάστημα έχουμε το γινόμενο:

$S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$

Αθροίζοντας τα γινόμενα αυτά υπολογίζουμε, προσεγγιστικά, το ορισμένο ολοκλήρωμα της f(x) στο διάστημα (a,b), ενώ η ακριβής τιμή του προκύπτει όταν το πλήθος ν των υποδιαστημάτων τείνει στο άπειρο.. Έχουμε δηλαδή:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{\nu} f(\xi_j)\Delta x_j\right]$$

Καταλήξαμε λοιπόν στη γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος I: Το ορισμένο ολοκλήρωμα I μιας συνεχούς και παντού θετικής συνάρτησης, στο διάστημα (a,b), είναι ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από την καμπύλη της f(x), τον άξονα των x και τις ευθείες x=a και x=b.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής είδαμε στο μάθημα των Μαθηματικών I του 1^{ου} εξαμήνου, πως εάν η F(x) είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x), τότε η τιμή I του ορισμένου ολοκληρώματος δίνεται από τη σχέση:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [F(c)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

Ιδιότητες:

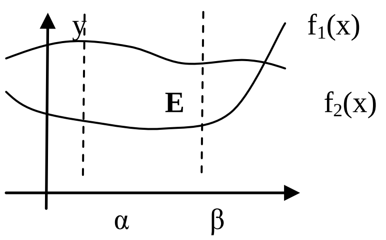
i) Όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται από το a έως το b είναι παντού αρνητική, τότε το τελικό αποτέλεσμα ισούται κατ' απόλυτη τιμή με το αντίστοιχο εμβαδό, όμως έχει αρνητικό πρόσημο.

ii) Εύκολα γίνονται κατανοητές οι σχέσεις:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

iii) Τέλος, εάν $f_1(c) \leq f_2(x)$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε το εμβαδόν (E) που ορίζεται από τις παραστάσεις των δύο συναρτήσεων και τις ευθείες x = α και x = β, δίνεται από το ολοκλήρωμα:



$$E = \int_{\alpha}^{\beta} [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

1.2.3 Η αριθμητική ολοκλήρωση.

Η αριθμητική ολοκλήρωση περιλαμβάνει μεθόδους οι οποίες προσπαθούν να υπολογίσουν προσεγγιστικά την τιμή ενός **ορισμένου** ολοκληρώματος. Συνήθως καταφεύγουμε σε τέτοιες μεθόδους στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών.
- Όταν δεν είναι δυνατό να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης που ολοκληρώνεται.
- Όταν η κλασσική μέθοδος ολοκλήρωσης είναι ιδιαίτερα δύσκολη και χρονοβόρα.

Ήδη γνωρίσαμε μία μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης, στο κεφάλαιο των αναπτυγμάτων Taylor και Mac-Laurin. Εκεί αντικαθιστούσαμε το μη πολυωνυμικό τμήμα της υπό το ολοκλήρωμα συνάρτησης, με το ανάπτυγμά του, ολοκληρώνοντας το ανάπτυγμα που προκύπτει. Για παράδειγμα:

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\eta\mu x}{x}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...\right]}{x}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+...\right]dx=\left[x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}+...\right]_{\alpha}^{\beta}=$$

$$=\left(\beta-\frac{\beta^3}{3!3}+\frac{\beta^5}{5!5}+...\right)-\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{3!3}+\frac{\alpha^5}{5!5}+...\right)$$

όπου αντικαταστήσαμε τη συνάρτηση ημx με το ανάπτυγμά της κατά Mac-Laurin, έχοντας σαν δεδομένο πως τα σημεία α και β δεν είναι πολύ μακριά από το 0.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε μια μέθοδο, η οποία στηρίζεται στην ίδια αρχή στην οποία στηρίζονταν η παρεμβολή και η αριθμητική παραγώγιση. **Αντικαθιστούμε τη συνάρτηση που ολοκληρώνεται με το συμπτωτικό της πολυώνυμο και αντί για τη συνάρτηση ολοκληρώνουμε το πολυώνυμο.**

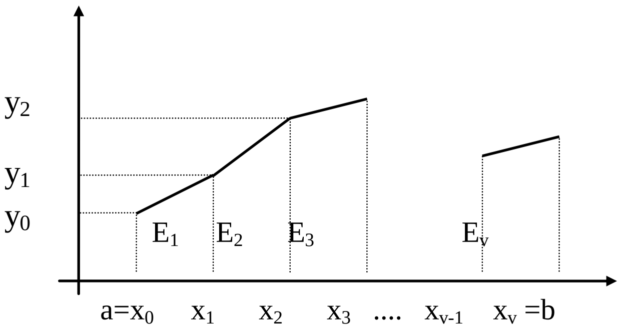
Για να συμβούν τα παραπάνω θα πρέπει να υπάρχει ο πίνακας τιμών της συνάρτησης. Εάν αυτός δεν υπάρχει, τότε πρέπει να τον κατασκευάσουμε.

Στην επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε πρωτοβάθμιο πολυώνυμο, πράγμα που σημαίνει πως θα «ενώσουμε» τα (ν+1) δοσμένα σημεία του πίνακα τιμών με (ν) ευθύγραμμα τμήματα, δημιουργώντας έναν τύπο που λέγεται «τύπος του τραπεζίου».

1.2.3 Ολοκλήρωση με τη μέθοδο του τραπεζίου.

Υποθέτουμε πως χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης (a,b), σε ν υποδιαστήματα, με τη βοήθεια ν+1 σημείων:

$(x_0,y_0=f(x_0))$, $(x_1,y_1=f(x_1))$, ..., $(x_\nu,y_\nu=f(x_\nu))$



Ενώνοντας τα σημεία αυτά (αντικαθιστώντας δηλαδή στο ενδιάμεσο τη συνάρτηση με ευθύγραμμα τμήματα - πρωτοβάθμια πολυώνυμα), δημιουργούμε ν τραπέζια.

Θεωρούμε πως η τιμή του αόριστου ολοκληρώματος δίνεται προσεγγιστικά από το άθροισμα των εμβαδών των τραπεζίων:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_\nu} f(x_k)dx_k = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_\nu =$$

$$= \frac{h[y_0 + y_1]}{2} + \frac{h[y_1 + y_2]}{2} + \frac{h[y_2 + y_3]}{2} + \cdots + =$$

$$= \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{\nu-1} + y_\nu]$$

όπου θέσαμε το h στη θέση του κοινού πλάτους των υποδιαστημάτων:

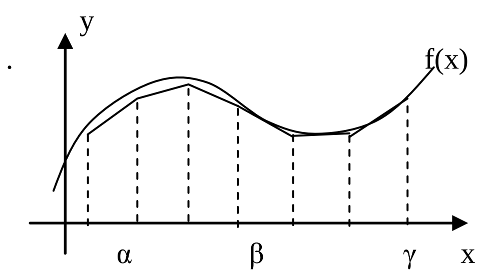
$h = x_{j+1} - x_j$

Παρατηρήσεις:

i) Όσο μικρότερο είναι το πλάτος h των υποδιαστημάτων (το οποίο το ονομάσαμε προηγουμένως σαν βήμα του πίνακα τιμών και η επιλογή του h σαν σταθερό για όλον τον πίνακα σημαίνει πως έχουμε πίνακα ισαπεχόντων ορισμάτων), τόσο ακριβέστερος είναι ο προσεγγιστικός υπολογισμός του ολοκληρώματος.

ii) Όταν οι τιμές της συνάρτησης y_i είναι αρνητικές, τότε η τιμή του ολοκληρώματος που υπολογίζεται από τον τύπο του τραπεζίου είναι κι'αυτή αρνητική.

iii) Όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται, στο διάστημα ολοκλήρωσης (α,β), στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (άνω), ο τύπος του τραπεζίου δίνει μία τιμή μικρότερη (μεγαλύτερη) της πραγματικής.



Πράγματι, παρατηρούμε πως στο διάστημα (α,β) ο τύπος του τραπεζίου δεν λαμβάνει υπ' όψη του όλο το «εμβαδόν» που υπάρχει ανάμεσα στην τεθλασμένη γραμμή και στην καμπύλη της f, ενώ αντίθετα, στο διάστημα (β,γ), όπου τα κοίλα στρέφονται προς τα άνω, προσθέτει στο ολοκλήρωμα το αντίστοιχο ευβαδόν.

1.2.3 Οι τύποι του Cotes.

Η γενίκευση της μεθόδου του τραπεζίου αναφέρεται

- στην αντικατάσταση της συνάρτησης f(x) που ολοκληρώνεται, από το συμπτωτικό πολυώνυμο, $\pi(x_k)$, που αντιστοιχεί στις τιμές του πίνακα, και
- στην ολοκλήρωση του πολυωνύμου αυτού.

Ο Cotes συστηματοποίησε τη μέθοδο αυτή. Υπολόγισε τον τύπο που προκύπτει κατά την ολοκλήρωση πρωτοβαθμίων πολυωνύμων (… και κατέληξε στον τύπο του τραπεζίου), καθώς και τον τύπο που προκύπτει από την ολοκλήρωση πολυωνύμων 2ου, 3ου, 4ου και 6ου βαθμού.

Υπολόγισε δηλαδή (μέσω του συμπτωτικού πολυωνύμου του Newton), το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{x_0}^{x_\nu} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_\nu} \pi(x_k)dx_k$$

το οποίο ολοκληρώνει ένα διάστημα (α,β), χωρισμένο σε ν υποδιαστήματα ίσου μήκους (h), με τη βοήθεια ν+1 ισαπεχόντων σημείων: $\alpha=x_0$, x_1, x_2, … , $x_{\nu-1}$, $x_\nu=\beta$. Είναι φανερό πως το συμπτωτικό πολυώνυμο αυτό, που αντιστοιχεί στα ν+1 αυτά σημεία θα είναι ν-ου βαθμού.

Όμως το συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton:

$$y_k = \pi(x_k) = \pi(k) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

χρησιμοποιεί σαν μεταβλητή τον δείκτη k αντί της υπάρχουσας μεταβλητής x_k, σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής μεταβλητής: $k=(x_k-x_0)/k$. Φυσικά, η αλλαγή μεταβλητής προκάλεσε και την αντίστοιχη αλλαγή του διαφορικού:

$$dk = d\left[\frac{x_k - x_0}{h}\right] = \frac{1}{h}dx_k \qquad \rightarrow \qquad dx_k = hdk$$

καθώς και των ορίων ολοκλήρωσης. Έχουμε λοιπόν:

$$I = \int_{x_0}^{x_\nu} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_\nu} \pi(x_k)dx_k = h\int_0^\nu \pi(k)dk$$

Ας επιλύσουμε λοιπόν το πιο πάνω ολοκλήρωμα για την περίπτωση πρωτοβαθμίου πολυωνύμου, φθάνοντας στον τύπο του τραπεζίου:

$$\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p(x_k)dx_k = h\int_0^1 [y_0 + k\Delta y_0]dk = h\left[y_0 k + \frac{k^2}{2}\Delta y_0\right]_0^1 =$$

$$= h\left[y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0 - 0\right] = h\left[y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_0)\right] = \frac{h}{2}[y_0 - y_1]$$

Εάν το διάστημα ολοκλήρωσης χωρίζεται σε ν υποδιαστήματα, μέσω των ισαπεχόντων σημείων: $\alpha=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{\nu-1}, x_\nu=\beta$, θα πρέπει να εφαρμόσουμε ν φορές τον παραπάνω τύπο:

$$I=\int_{x_0}^{x_\nu} f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)dx=$$

$$=\frac{h}{2}[y_0+y_1]+\frac{h}{2}[y_1+y_2]+\cdots+\frac{h}{2}[y_{\nu-1}+y_\nu]=$$

$$=\frac{h}{2}[y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{\nu-1}+y_\nu]$$

καταλήγοντας στον τύπο του τραπεζίου.

Θεωρητική Άσκηση: Ακολουθώντας την προηγούμενη μέθοδο να αποδείξετε πως εάν ολοκληρώσουμε το δευτεροβάθμιο συμπτωτικό πολυώνυμο του Newton, θα καταλήξουμε στον τύπο:

$$I=\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_0}^{x_2} \pi(x_k)dx_k=h\int_0^2\left[y_0+k\Delta y_0+\frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0\right]dx_k=$$

$$=\frac{h}{3}[y_0+4y_1+y_2]$$

Ορισμός και οι τύποι: Ολοκληρώνοντας το συμπτωτικό πολυώνυμο του ν-οστού βαθμού, χρησιμοποιώντας ν+1 σημεία (τα $x_0, x_1, x_2, \dots, x_\nu$), καταλήγουμε στην τύπο:

$$I=\int_{x_0}^{x_\nu} f(x)dx=\int_{x_0}^{x_\nu} \pi(x_k)dx_k=Ch[c_0y_0+c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_\nu y_\nu]$$

όπου οι συντελεστές C και c_i , καθώς και το μέγιστο σφάλμα αποκοπής του κάθε τύπου, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

ν	C	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	Σφάλμα αποκοπής
1	1/2	1	1						$-(h^3/12)y''(\xi)$
2	1/3	1	4	1					$-(h^5/90)y^{(4)}(\xi)$
3	3/8	1	3	3	1				$-(3h^5/80)y^{(4)}(\xi)$
4	2/45	7	32	12	32	7			$-(8h^7/945)y^{(6)}(\xi)$
6	1/140	41	216	27	271	27	216	41	$-(9h^9/1400)y^{(8)}(\xi)$

Παρατηρήσεις:

- Το σφάλμα αποκοπής δείχνει να μειώνεται, όσο ο βαθμός του πολυωνύμου αυξάνεται, ιδιαίτερα εάν το πλάτος h των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζεται το διάστημα ολοκλήρωσης είναι μικρότερο της μονάδας.
- Οι τύποι του σφάλματος περιέχουν την παράγωγο της συνάρτησης που ολοκληρώνεται, σε κάποιο σημείο ξ που είναι συνήθως άγνωστο. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε σαν ξ, το σημείο του διαστήματος ολοκλήρωσης για το οποίο μεγιστοποιείται η τιμή της παραγώγου (δηλαδή δυσμενέστερο για την εκτίμηση του σφάλματος).
- Ας υποθέσουμε πως επιλέξαμε τον τύπο για ν=4, και ότι γνωρίζουμε την τιμή της 6ης παραγώγου στον τύπο του σφάλματος. Εξισώνοντας το μέγιστο αυτό σφάλμα, με την απαιτούμενη ακρίβεια προκύπτει μία οριακή τιμή για το πλάτος h των υποδιαστημάτων. Εάν το τελικό h που επιλέγουμε είναι μικρότερο του οριακού, τότε το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης θα είναι μέσα στα πλαίσια της απαιτούμενης ακρίβειας.
- Εάν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι ιδιαίτερα μεγάλο, αναγκαζόμαστε να περάσουμε τον τύπο ολοκλήρωσης περισσότερες από μία φορές (όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα). Για παράδειγμα, ο τύπος του Cotes για ν=2, τον οποίο δείξαμε στην προηγούμενη θεωρητική άσκηση, εάν επαναληφθεί 3 φορές γίνεται:

$$I = \int_{x_0}^{x_\nu} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx =$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] + \frac{h}{3}\left[y_2 + 4y_3 + y_4\right] + \frac{h}{3}\left[y_4 + 4y_5 + y_6\right] =$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right]$$

Τρόπος δουλειάς:

Αρχικά θα υποθέσουμε πως πρέπει να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση f, η οποία δίνεται με έναν πίνακα τιμών. Η συνέχεια εξαρτάται από το πλήθος των σημείων του πίνακα που υπάρχουν στο εσωτερικό του διαστήματος ολοκλήρωσης. Εάν για παράδειγμα ολοκληρώνουμε από το x_0 μέχρι το x_6, τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο ν=6. Αντίθετα, εάν ολοκληρώνουμε από το x_0 έως το x_9, τότε μας βολεύει να χρησιμοποιήσουμε δύο φορές τον τύπο για ν=4 (μία φορά από το x_0 έως το x_5, και μία δεύτερη από το x_5 έως το x_9).

Γενικά, αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε 2 είδη τύπων, μια και το άθροισμα των αποτελεσμάτων θα έχει σαν ακρίβεια, αυτήν του πιο ανακριβούς αποτελέσματος. Έτσι, όταν έχουμε 9 σημεία προτιμούμε να επαναλάβουμε 2 φορές τον τύπο του Cotes για ν=4, παρά μια φορά τον τύπο του ν=6 και άλλη μία αυτόν του ν=3.

Αντίθετα, όταν η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται με μαθηματικό τύπο, τότε είμαστε υποχρεωμένοι να δημιουργήσουμε τον πίνακα τιμών. Κάνουμε λοιπόν τις παρακάτω εργασίες:

- Επιλέγουμε των τύπο του Cotes με τον οποίο θα εργαστούμε (συνήθως τον ακριβέστερο ν=6).
- Υπολογίζουμε την οριακή τιμή ($h_{ορ}$) του βήματος του πίνακα τιμών.
- Δημιουργούμε έναν πίνακα τιμών, του οποίου το πλήθος των σημείων του δίνεται από τον τύπο:

  j = κ*ν + 1

  όπου ν είναι η τάξη του τύπου που χρησιμοποιούμε, ενώ το κ ισούται με το πλήθος των φορών που επαναλαμβάνουμε τον τύπο. Προφανώς, τα j σημεία ορίζουν j-1 (=κ*ν) υποδιαστήματα των οποίων το πλάτος είναι:

  h = (b-a)/(κ*ν)
- Υπολογίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος από τον τύπο του Cotes.

Παράδειγμα 1ο.

Στο διπλανό πίνακα εμφανίζεται ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^2 f(x)dx$$

i) Με τη βοήθεια του τύπου του τραπεζίου.
ii) Όσο το δυνατόν ακριβέστερα.
iii) Εάν η συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι η:

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα των υπολογισμών.

x_k	y_k .
0	0,00000
0,5	0,38940
1	0,36788
1,5	0,15810
2 .	0,03663

Λύση.

i) Αρχικά υπολογίζουμε με τον τύπο του τραπεζίου:

I =(h/2)*[f(0) + 2f(0,5) + 2*f(1) + 2 f(1,5) + f(2)] =
= (0,25)*1,86739 = 0,46685

ii) Εφ'όσον έχουμε στη διάθεσή μας πέντε σημεία, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για ν=4:

I = (2h/45)*[7f(0) + 32f(0,5) + 12*f(1) + 32 f(1,5) + 7f(2)] =
= (1/45)*22,19095 = 0,49313

iv) Ολοκληρώνοντας θεωρητικά έχουμε:

$$I = \int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x^2}\,d(-x^2) = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^2 =$$

$$= -0.0091578 + 0.5 = 0.49084$$

οπότε έχουμε τα σχετικά σφάλματα:

για ν=1 $\sigma_{\sigma\chi}$ = 100(0,49084-0,46685)/ 0,49084 = 4,89 %

για ν=4 $\sigma_{\sigma\chi}$ = 100(0,49084-0,49313)/ 0,49084 = 0,47 %

Τελειώνοντας, αξίζει να παρατηρήσουμε πως ο τύπος για ν=4 είναι ακριβέστερος του τύπου του τραπεζίου, παρ' όλον ότι και οι δύο τύποι απαιτούν το ίδιο πλήθος πράξεων.

Παράδειγμα 2ο.

Να υπολογισθεί αριθμητικά το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^2 xe^{-x^2}\,dx$$

με ακρίβεια ε=0,0001, όταν δίνεται πως
$f^{(8)}(\xi) \leq 1500$.

Λύση.

Αρχικά να τονίσουμε πως ένας εύκολος τρόπος για την εκτίμηση της 8ης παραγώγου της συνάρτησης *f*(x) που ολοκληρώνεται στηρίζεται στην χρήση της 8ης διαφοράς, από τον πίνακα διαφορών, μέσω του τύπου:

$$f^{(8)}(x) = \frac{\Delta^8 y_0}{h^8}$$

Να παρατηρήσουμε όμως πως για να βρούμε την $8^η$ διαφορά είμαστε υποχρεωμένοι να συμπεριλάβουμε στον πίνακα τιμών της f 9 τιμές, και για να αντιστοιχεί η διαφορά στην τιμή y_0 θα πρέπει να υπολογίσουμε μία τιμή πριν το x_0 (έστω το x_{-1}) και μία μετά το x_6 (έστω x_7).

(i) Ξεκινούμε με τον υπολογισμό του οριακού βήματος του πίνακα, έτσι ώστε να επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια:

$$(9h^9/1400)*y^{(8)}(\xi) \leq (9h^9/1400)*1500 = 0{,}0001$$

απ'όπου προκύπτει: $h \leq 0{,}2794$, πράγμα που σημαίνει πως επιλέγοντας το βήμα του πίνακα μικρότερο του 0,28 θα επιτύχουμε την ακρίβεια που μας ζητείται.

(ii) Επιλέγουμε τον τύπο του Cotes για ν=6. Εάν τον εφαρμόσουμε μία μόνο φορά πάνω στο διάστημα ολοκλήρωσης (0,2), τότε θα το υποδιαιρέσουμε σε 6 υποδιαστήματα, οπότε το βήμα του πίνακα θα είναι: h=(b-a)/6=2/6=0,33333 , το οποίο ξεπερνά το οριακό βήμα που υπολογίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αναγκαζόμαστε λοιπόν να εφαρμόσουμε δύο φορές τον τύπο, οπότε:

$$h = (b-a)/(2*6) = 1/6 \quad (\leq h_{op} \text{ δεκτό!})$$

(iii) Δημιουργούμε στη συνέχεια τον πίνακα τιμών, με τη βοήθεια του οποίου υπολογίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος.

$$I = \int_0^2 xe^{-x^2}dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx + \int_1^2 xe^{-x^2}dx =$$

$$= (h/140)*[\,41y(0)+216y(1/6)+27y(2/6)+272y(3/6)+ +27y(4/6)+216y(5/6)+41y(1)\,] +$$
$$+ (h/140)*[\,41y(1)+216y(7/6)+27y(8/6)+272y(9/6)+ +27y(10/6)+216y(11/6)+41y(2)\,] =$$

$$= (h/140)*[\,41y(0)+216y(1/6)+ \ldots\ldots +82y(1)+ +216y(7/6)+ \ldots\ldots + 41y(2)\,] =$$

$$=[(1/6)/140] * 412{,}30867 = 0{,}49084$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με το ακριβές αποτέλεσμα που υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, διαπιστώνουμε πως η ακρίβεια του προσεγγιστικού υπολογισμού είναι απόλυτη.

Πίνακας τιμών	
x_k	y_k.
0	0
1/6	0,16210
2/6	0,29828
3/6	0,38940
4/6	0,42745
5/6	0,41613
1	0,36788
7/6	0,29911
8/6	0,22535
9/6	0,15810
10/6	0,10363
11/6	0,06361
2	0,03663

1.2.3 Εφαρμογή στο Excel.

Αξίζει να προσπαθήσουμε να καθορίσουμε με τέτοιο τρόπο το φύλλο εργασίας μας, έτσι ώστε να μπορούμε εύκολα να μεταβάλλουμε το πλήθος κ των φορών επανάληψης του τύπου.

Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να υπολογίσουμε το επόμενο ολοκλήρωμα:

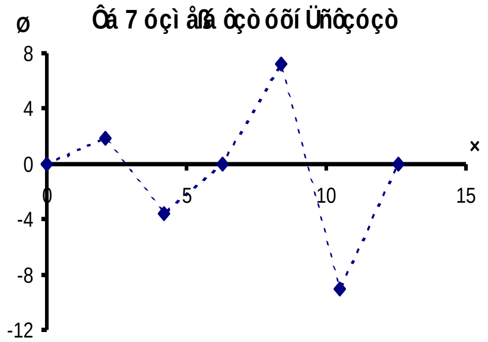
$$I = \int_{0}^{4\pi} x\eta\mu x dx$$

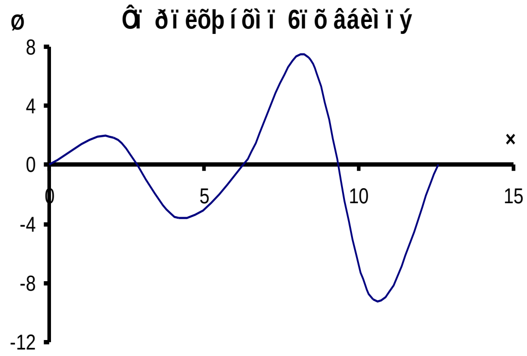
Η μορφή του φύλλου εργασίας θα είναι κατά βάση η επόμενη (υιοθετούμε k=1):

	A	B	C	D	E	F
1						
2		α=	0			
3		β=	12,56637061	h=	=(C3-C2)/(6*C4)	
4		κ=	…			
5						
6		x	f(x)	Συν/στης c	c*f(x)	
7						
8		αρχ.τιμή α	Η τιμή της	41	Τα γινόμενα	
9		προηγ.+ h	συνάρτησης	216	που θα	
10		κ.λ.π.	που	27	αθροιστούν	
11			αντιστοιχεί	272		
12			στα διπλανά x	27		
13				216		
14				82		
15				216		
16				27		
…				…		
…				41		
…		.....	.....	.....	.....	
…					Άθροισμα	
…						
…		Τελ.αποτέλ.	....			
…						

Εάν οι πράξεις τοποθετηθούν σωστά στο φύλλο εργασίας, τότε το τελικό αποτέλεσμα θα είναι: I = -21,98. Το ακριβές όμως αποτέλεσμα είναι ίσο με $I_{ακρ.}$ = -12,566. Διαπιστώνουμε λοιπόν πως η προσέγγιση που επιτύχαμε είναι κάκιστη. Για να ερμηνεύσουμε αυτό το προσεγγιστικό σφάλμα παρατηρούμε αρχικά το βήμα ολοκλήρωσης (h=2,09) το οποίο είναι τεράστιο. Στη συνέχεια κάνουμε τη γραφική παράσταση της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης στηριζόμενοι στα επτά σημεία του πίνακα ολοκλήρωσης.

Στην αριστερή από τις δύο επόμενες γραφικές παραστάσεις εμφανίζονται τα επτά σημεία ολοκλήρωσης της συνάρτησης f(x)=xημx. Παρατηρούμε πως τα σημεία αυτά δυσκολεύονται να εκφράσουν την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση. Στη δεξιά γραφική παράσταση παρατηρούμε το πολυώνυμο έκτου βαθμού που ορίζεται από τα προηγούμενα επτά σημεία. Η προσέγγιση τώρα είναι εμφανώς καλύτερη αλλά και πάλι απέχει από την ακριβή λύση.





Τα επτά σημεία της συνάρτησης που ολοκληρώνεται (αριστερά)
και το πολυώνυμο 6ου βαθμού που τα προσεγγίζει (δεξιά).

Αντίθετα, εάν εφαρμόσουμε τρείς φορές τον τύπο ολοκλήρωσης (εάν δηλαδή διαμελίσουμε σε 18 υποδιαστήματα το διάστημα ολοκλήρωσης, με τη βοήθεια 19 σημείων) τότε υπολογίζουμε την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος:

I = -12,568 αντί του ακριβούς $I_{ακρ.}$ = -12,566

Για ευκολία ενοποιούμε τον τελευταίο συντελεστή του πρώτου περάσματος με τον πρώτο του δεύτερου, όπως και τον τελευταίο συντελεστή του δεύτερουτου περάσματος με τον πρώτο του τρίτου. Αντί να έχουμε δηλαδή:

$[41y_0+...+216y_5+41y_6] + [41y_6+...+216y_{11}+41y_{12}] +[41y_{12}+...+216y_{17}+41x_{18}]$

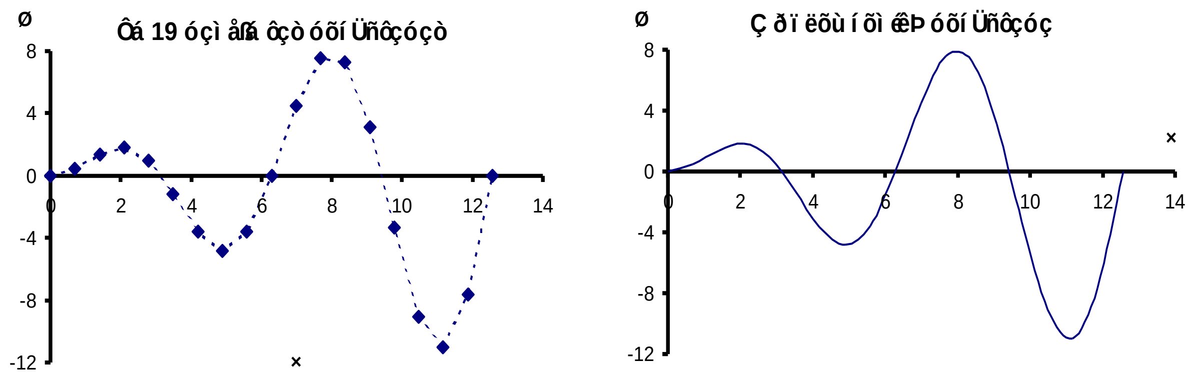
έχουμε:

$[41y_0+...+216y_5+82y_6+...+216y_{11}+82y_{12}+...+216y_{17}+41x_{18}]$

όπως δείχνει και ο διπλανός πίνακας.

Συντ/ στές
41
216
27
272
27
216
82
216
27
...
216
82
216
27
...
216
41

Τα παρακάτω γραφήματα φανερώνουν το «μυστικό της επιτυχίας». Παρατηρούμε πως η προσέγγιση της συνάρτησης f(x)=xημx με τη βοήθεια των 19 σημείων είναι πολύ ακριβέστερη, οπότε και τα τρία πολυώνυμα 6ου βαθμού που προσαρμόζονται πάνω σ’αυτά ακολουθούν πιστά τη συνάρτηση. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται ένα ακριβέστατο αποτέλεσμα.



Τα 19 σημεία της συνάρτησης που ολοκληρώνεται (αριστερά)
και τα τρία πολυώνυμα 6ου βαθμού που τα προσεγγίζουν (δεξιά).

Να παρατηρήσουμε πως επαναλαμβάνοντας μερικές φορές τον τύπο του Cotes, επιτυγχάνουμε εντυπωσιακή ακρίβεια. Το πόσες επαναλήψεις χρειάζονται υπολογίζεται θεωρητικά από τον τύπο του σφάλματος. Στην πράξη, για τις τρέχουσες ανάγκες, και εφ’όσον πρόκειται για συναρτήσεις που δεν έχουν πολύ γρήγορες και μεγάλες αυξομειώσεις τιμών, αρκεί να διατηρούμε ένα βήμα h μικρότερο του 0,5.

Τέλος, να παρατηρήσουμε πως ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται η ολοκλήρωση συναρτήσεων που ταλαντώνονται γύρω από τον άξονα των χ (οπότε το ολοκλήρωμά τους είναι κοντά στο μηδέν). Στην περίπτωση αυτή το σχετικό σφάλμα του αποτελέσματος μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο.