ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Δυναμική των Κατασκευών

# Ασκήσεις Πράξης

**Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης**
**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης



ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΕΡΡΩΝ ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης

ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΑΞΗΣ

ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

## Άσκηση 9

Για τον φορέα της Άσκησης 8, ζητούνται τα ακόλουθα:

(α) Έστω ότι στα ζυγώματα εφαρμόζονται στατικά οριζόντια φορτία (από αριστερά προς τα δεξιά) ίσα με το βάρος τους, τα οποία προκαλούν αρχικές στατικές μετατοπίσεις των ζυγωμάτων. Να υπολογιστεί το διάνυσμα αυτών των μετατοπίσεων $U_{st}$ (με ακρίβεια $10^{-4}$ m)

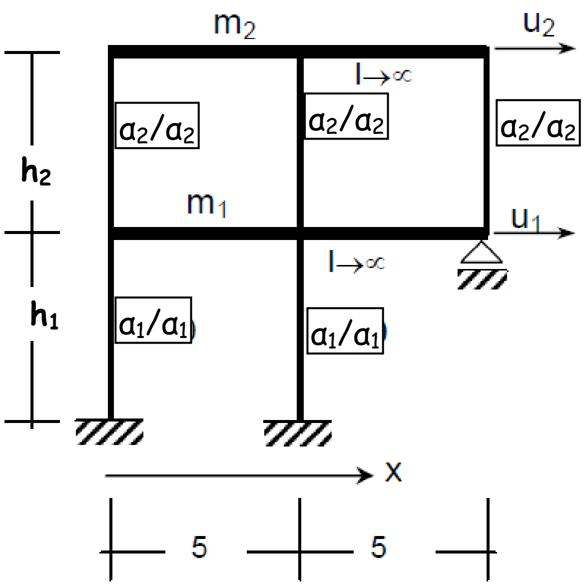
(β) Να προσδιοριστεί (i) το γενικευμένο διάνυσμα φόρτισης $P_{st}^*$ και (ii) οι γενικευμένες μετατοπίσεις $q_{1st} = q_1(0)$ και $q_{2st} = q_2(0)$ (σε $10^{-4}$ m), που αυτό προκαλεί.

(γ) Έστω ότι ο φορέας εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση με μηδενικές αρχικές ταχύτητες και με αρχικές μετατοπίσεις αυτές που προκλήθηκαν από την στατική φόρτιση του ερωτήματος (β). Να προσδιοριστεί το διάνυσμα μετατοπίσεων των ζυγωμάτων U(t), καθώς και η τιμή του $U(t_o)$ την χρονική στιγμή $t_o = (T_1+T_2)/2$, όπου $T_1$, $T_2$. είναι οι ιδιοπερίοδοι του συστήματος.

(δ) Να προσδιορισθεί η τέμνουσα $V(t_o)$ και η ροπή $M(t_o)$ ενός στύλου ορόφου και ενός στύλου ισογείου.

(ε) Να εκτιμηθούν (κατά προσέγγιση) οι μέγιστες τιμές των ανωτέρω εντατικών μεγεθών

Σημείωση: Να ληφθεί μηδενική απόσβεση. Πέραν αυτού, ισχύουν τα δεδομένα της Άσκησης 8
$E = 30x10^6$ kN/m$^2$, $h_1$(m) = 4, $h_2$(m) = 3, $m_1$(tn) = 40, $m_2$(tn) = 25, $a_1$(cm)= 40, $a_2$(cm)= 30



## Λύση

Από την λύση της Άσκησης 8, έχουμε:

Δυσκαμψία κάθε στύλου ισογείου = $k_1/2 = 24000/2 = 12000 kN/m$

Δυσκαμψία κάθε στύλου ορόφου = $k_2/2 = 27000/2 = 13500 kN/m$

$$M = \begin{vmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} \qquad K = \begin{vmatrix} 51000 & -27000 \\ -27000 & 27000 \end{vmatrix}$$

$\omega_1 = 17.836 rad/s$, $\omega_2 = 45.132 rad/s$ → $T_1 = 0.352 s$, $T_2 = 0.139 s$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0{,}705 & -0{,}886 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M^* = \begin{vmatrix} 44{,}88 & 0 \\ 0 & 56{,}40 \end{vmatrix}$$

$$K^* = \begin{vmatrix} 14278{,}3 & 0 \\ 0 & 114878{,}8 \end{vmatrix}$$

**Ερώτημα (α)**

Σύμφωνα με την εκφώνηση τα στατικά φορτία είναι:

$P_{1st} = (m_1 \cdot g) = 400 kN$, $P_{2st} = (m_2 \cdot g) = 250 kN$,

Η μητρωική διατύπωση της στατικής εξίσωσης ισορροπίας (βλέπε Στατική ΙΙ, Άμεση μέθοδος Δυσκαμψίας), είναι: $K \cdot U_{st} = P_{st}$

$$\begin{bmatrix} 51000 & -27000 \\ -27000 & 27000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{1st} \\ U_{2st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 250 \end{bmatrix}$$

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς:

$51000 \cdot U_{1st} - 27000 \cdot U_{2st} = 400$ (1), $- 27000 \cdot U_{1st} + 27000 \cdot U_{2st} = 250$ (2)

(1)+(2) → $24000 \cdot U_{1st} = 650$ → $U_{1st} = 271 \cdot 10^{-4} m$, … $U_{2st} = 363 \cdot 10^{-4} m$

**Ερώτημα (β)**

Σύμφωνα με την θεωρία: $\Phi^T \cdot P = P^*$ →

$$\begin{bmatrix} 0.705 & 1 \\ -0.886 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 532 \\ -104.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1st}^* \\ P_{2st}^* \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τις δυσκαμψίες των δύο γενικευμένων (ιδιομορφικών) ταλαντωτών, οι μετατοπίσεις που προκαλούν τα στατικά γενικευμένα φορτία είναι:

$q_{1st} = 532/14278.3 = 373 \cdot 10^{-4} m$, $q_{2st} = -104.4/114878.8 = -9 \cdot 10^{-4} m$

<u>Επαλήθευση:</u> $U_{st} = \Phi \cdot Q_{st}$ → (απλοποίηση του κοινού παράγοντα $10^{-4}$)

$$\begin{bmatrix} 0.705 & -0.886 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 373 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271 \\ 362 \approx 363 \end{bmatrix}$$

**Ερώτημα (γ)**

Οι εξισώσεις αναπόσβεστης ελεύθερης ταλάντωσης των δύο γενικευμένων μονοβάθμιων ταλαντωτών είναι:

$$(1^{ος})\quad 44.88\cdot q_1''(t) + 14278.3\cdot q_1(t) = 0,$$

με $\omega_1$ = 17.836rad/s και αρχικές συνθήκες: $q_1(0) = 373\cdot10^{-4}$m, $q_1'(0) = 0$ →

$$q_1(t) = q_1(0)\cdot\cos(\omega_1\cdot t) = 373\cdot10^{-4}\cdot\cos(17.836\cdot t)$$

$$(2^{ος})\quad 56.4\cdot q_2''(t) + 114878.8\cdot q_2(t) = 0$$

με $\omega_2$ = 45.132rad/s και αρχικές συνθήκες: $q_2(0) = -9\cdot10^{-4}$m, $q_2'(0) = 0$ →

$$q_2(t) = q_2(0)\cdot\cos(\omega_2\cdot t) = -9\cdot10^{-4}\cdot\cos(45.132\cdot t)$$

Η μετάβαση από τις γενικευμένες Q(t) στις φυσικές συντεταγμένες U(t) γίνεται μέσω του θεμελιώδους ιδιομορφικού μετασχηματισμού: U(t) = Φ·Q(t)

$$U(t) = \begin{bmatrix} 0.705 & -0.886 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 373\cdot\cos(17.836\cdot t) \\ -9\cdot\cos(45.132\cdot t)\end{bmatrix}\cdot10^{-4}m =$$

$$\begin{bmatrix} 263\cdot\cos(17.836\cdot t) + 8\cdot\cos(45.132\cdot t) \\ 373\cdot\cos(17.836\cdot t) - 9\cdot\cos(45.132\cdot t)\end{bmatrix}\cdot10^{-4}m$$

Για $t = t_o = (T_1+T_2)/2 = (0.352 + 0.139)/2 = 0.491$s, έχουμε:

$$u_1(0.491s) = [263\cdot(-0.785) + 8\cdot(-0.986)]\cdot10^{-4} = -214\cdot10^{-4}m$$

$$u_2(0.491s) = [373\cdot(-0.785) - 9\cdot(-0.986)]\cdot10^{-4} = -284\cdot10^{-4}m$$

**Ερώτημα (δ)**

Τέμνουσα = δυσκαμψία * σχετική μετακίνηση (κορυφής-βάσης) = (απόλυτη τιμή) $k_{στ}\cdot|δu|$

<u>Στύλος ορόφου</u>

$|δu(0.491s)| = |u_2(0.491s) - u_1(0.491s)| = 70\cdot10^{-4}$m

$V_{στ}(0.491s) = 13500\cdot70\cdot10^{-4} = 94.5$kN → $M_{στ}(0.491s) = 94.5\cdot3/2 = 141.75$kNm

<u>Στύλος ισογείου</u>

$|δu(0.491s)| = |u_1(0.491s) - 0| = 214\cdot10^{-4}$m

$V_{στ}(0.491s) = 12000\cdot214\cdot10^{-4} = 256.8$kN → $M_{στ}(0.491s) = 256.8\cdot4/2 = 513.6$kNm

**Ερώτημα (ε)**

Τα εντατικά μεγέθη στύλων ισογείου εξαρτώνται αποκλειστικά από την διακύμανση της μεταβλητής $u_1(t)$ ενώ αυτά των στύλων ισογείου από την διακύμανση της μεταβλητής δu(t).

<u>Στύλος ισογείου</u>

Είναι προφανές ότι ένα τοπικό μέγιστο (μηδενισμός της παραγώγου) της $u_1(t)$ συμβαίνει την χρονική στιγμή t = 0, με $|u_1(0)| = 273\cdot10^{-4}$m, $V_{στ}(0) = 327.6$kN → $M_{στ}(0) = 655.2$kNm

<u>Στύλος ορόφου</u>

Αν αγνοήσουμε την (μικρή) συνεισφορά της $2^{ης}$ ιδιομορφικής συνεισφοράς $q_2(t)$, τότε

$δu(t) \approx 373\cdot10^{-4}\cdot\cos(17.836\cdot t) - 263\cdot10^{-4}\cdot\cos(17.836\cdot t) = 110\cdot10^{-4}\cdot\cos(17.836\cdot t) \le 110\cdot10^{-4}$m →

$V_{στ}(max) \approx 148.5$kN → $M_{στ}(max) \approx 222.75$kNm