ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Ενότητα 1: δυναμικά φορτία

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης

ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

CC BY SA

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.

- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 1

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Διδάσκων: Κολιόπουλος Παναγιώτης

Περιεχόμενα ενότητας

1. **ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ**
2. **ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**
3. **ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ - ΑΠΟΚΡΙΣΗ**
4. **ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ**
5. **ΜΟΡΦΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ**
6. **Αρχή του D'Alembert**
7. **ΜΟΝΟΒΑΘΜΙΑ ΔΟΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**
8. **Παράδειγμα**
9. **ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ**

Σκοποί ενότητας

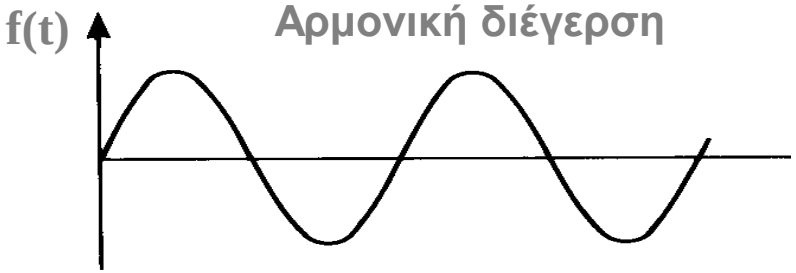
ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΦΟΡΤΙΑ

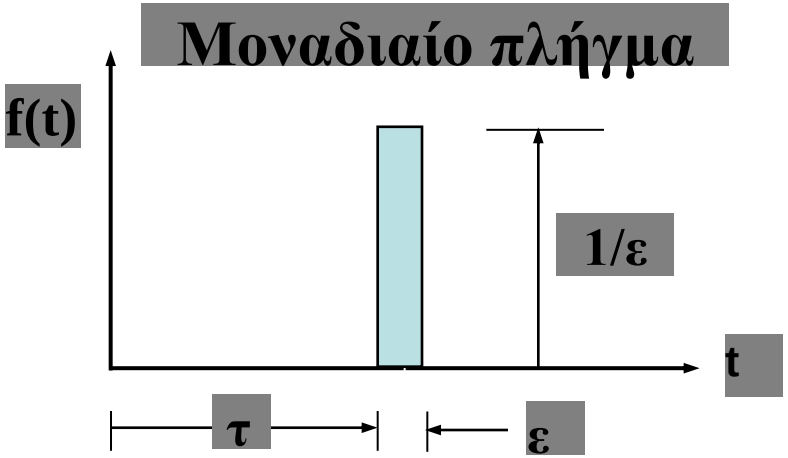
Παρουσιάζουν έντονη χρονική μεταβολή σε σχέση με τον χαρακτηριστικό χρόνο (ιδιοπερίοδο) της κατασκευής. Μπορούν να χωρισθούν σε κατηγορίες ανάλογα με:

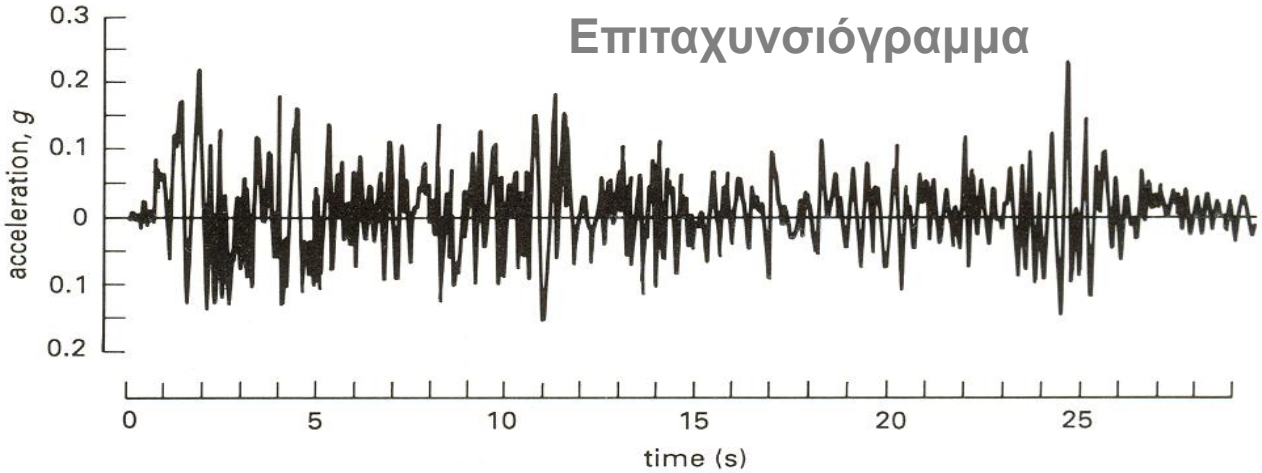
(α) την μορφή τους (περιοδικότητά – χρονική διάρκεια)

(β) την προέλευσή τους (περιβαλλοντικά – ανθρώπινης δραστηριότητας)

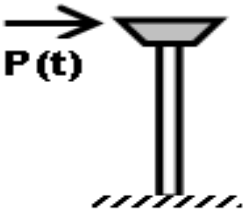
(γ) την τυχαιότητά τους (τυχαία – αιτιοκρατικά)


f(t)
Αρμονική διέγερση


Μοναδιαίο πλήγμα
f(t)
1/ε
t
τ
ε

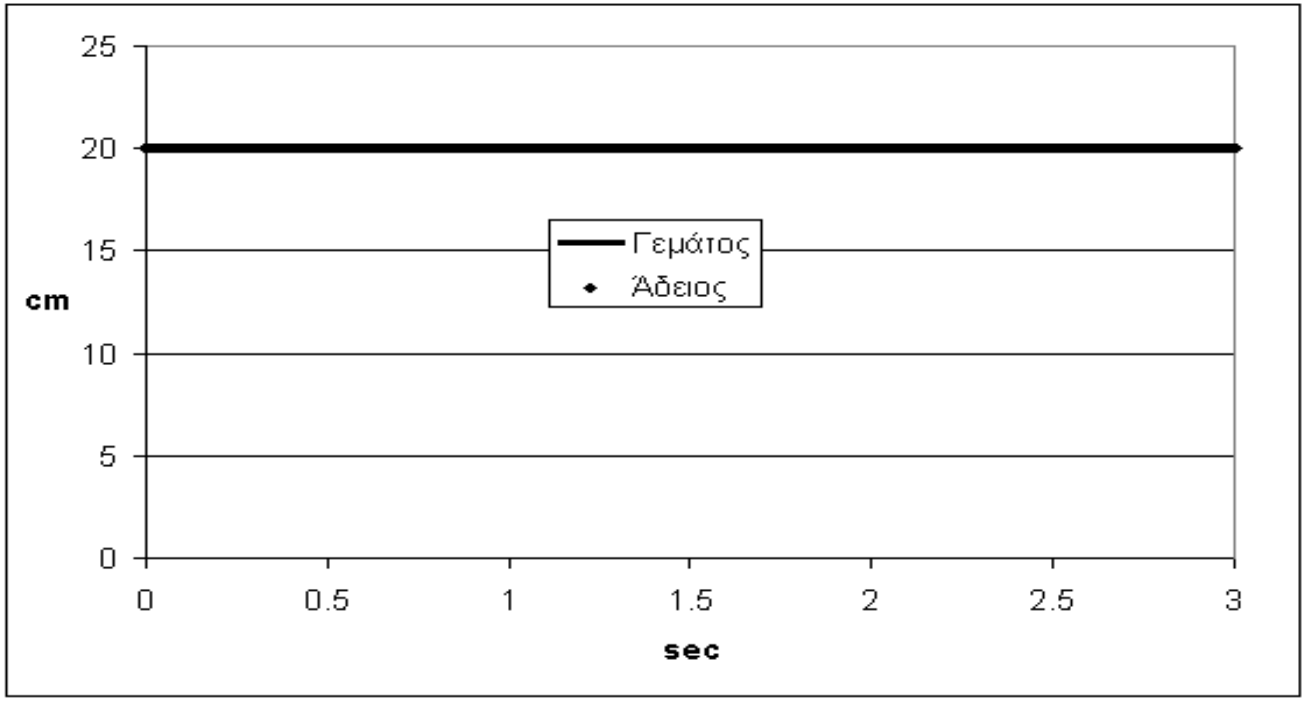

Επιταχυνσιόγραμμα
acceleration, g
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0
5
10
15
20
25
time (s)

Διαφορές μεταξύ Στατικής & Δυναμικής Ανάλυσης

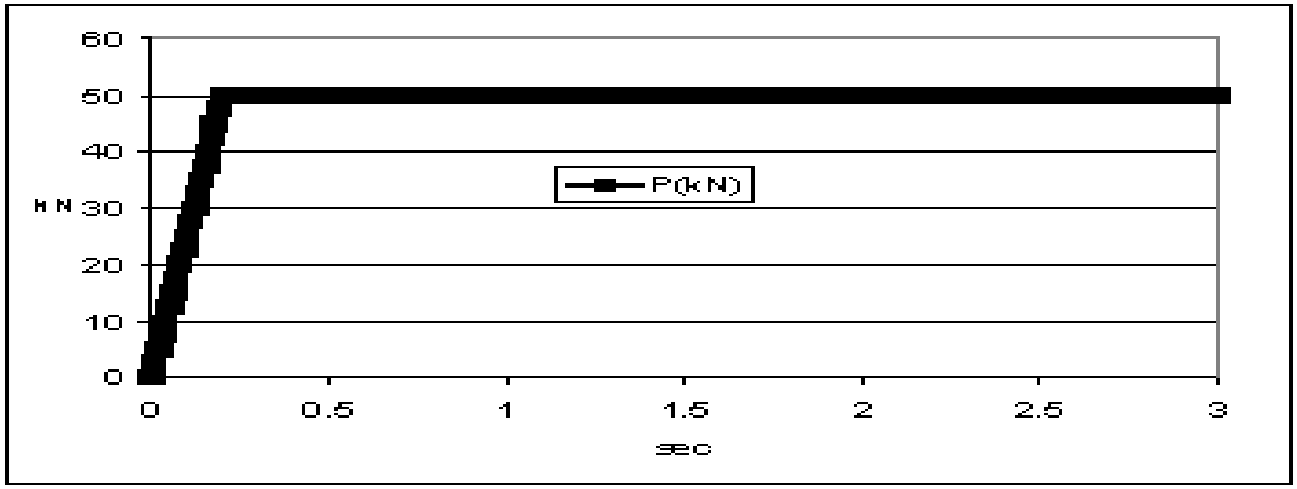


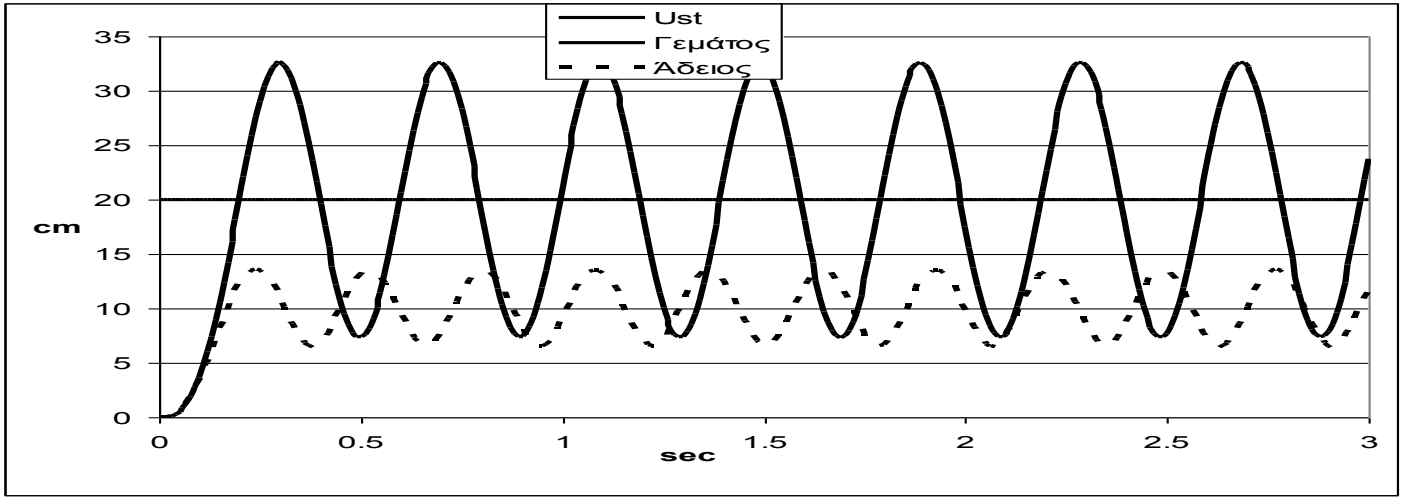
Υδατόπυργος
Γεμάτος – Άδειος

Στατικό φορτίο 50kN – απόκριση

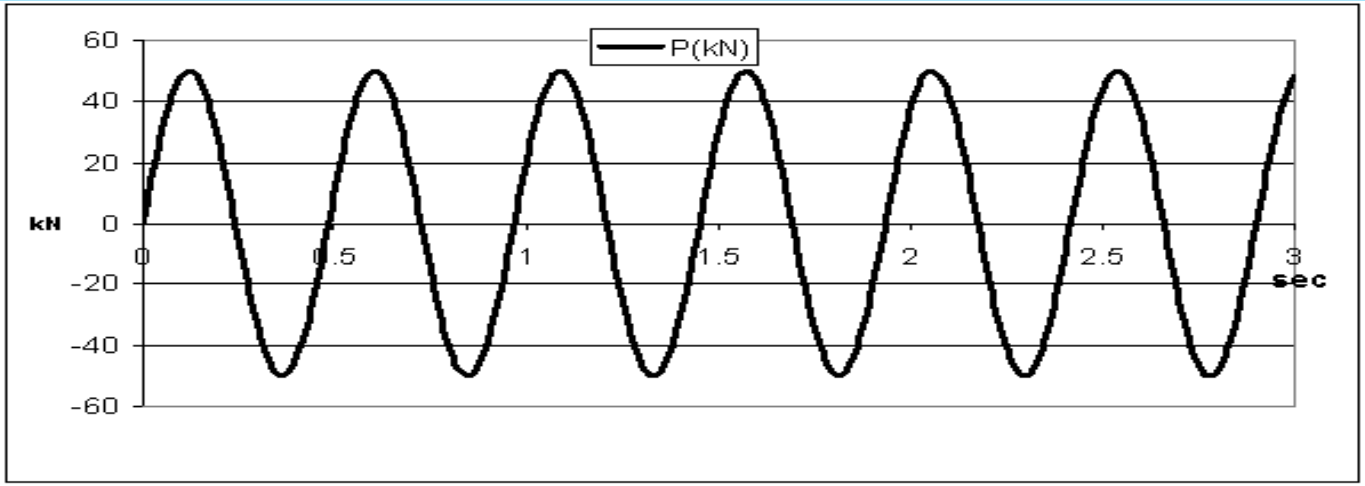


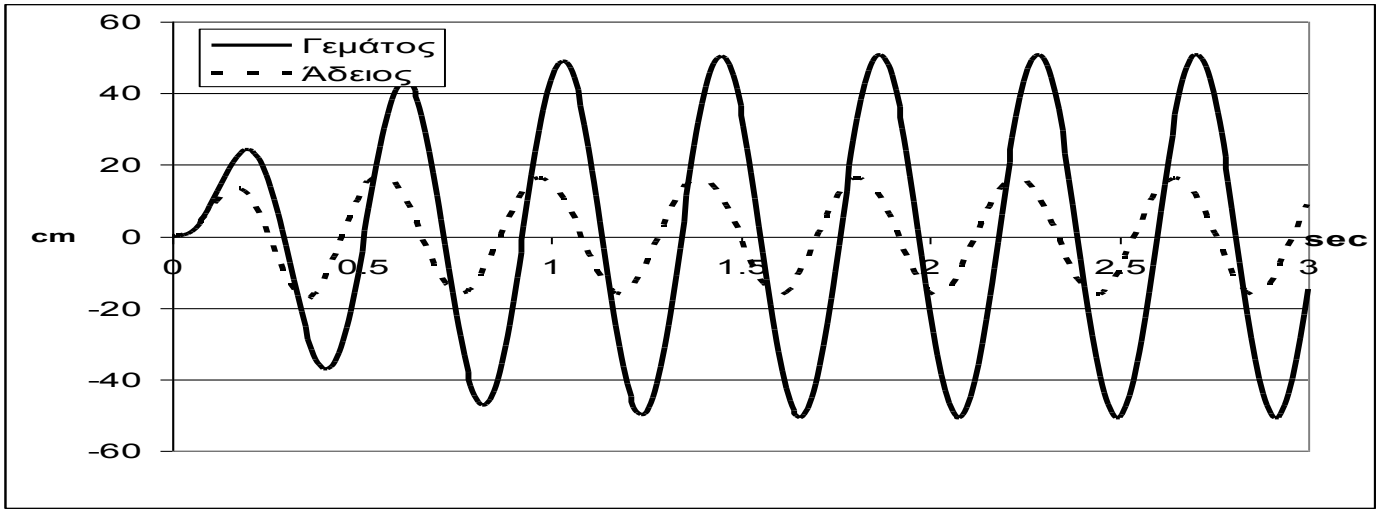
Δυναμικό φορτίο – απόκριση





Δυναμικό φορτίο – απόκριση

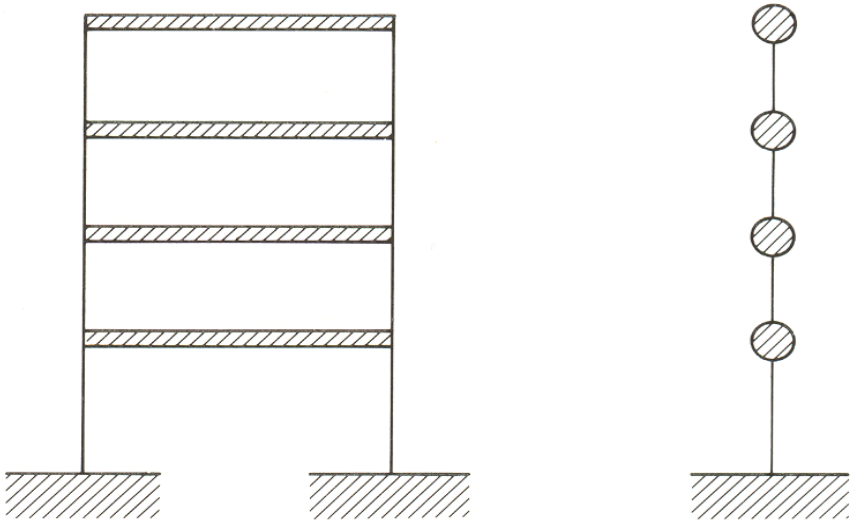




ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

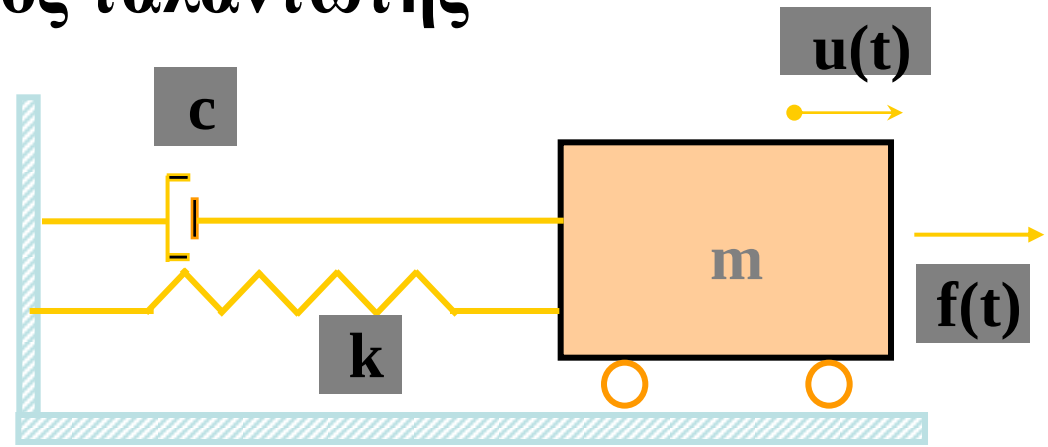
Βαθμοί ελευθερίας (ΒΕ) ➔ μετακινήσεις & στροφές που απαιτούνται για την περιγραφή της απόκρισης του φορέα

Διακριτοποίηση φορέα με την τεχνική των συγκεντρωμένων μαζών



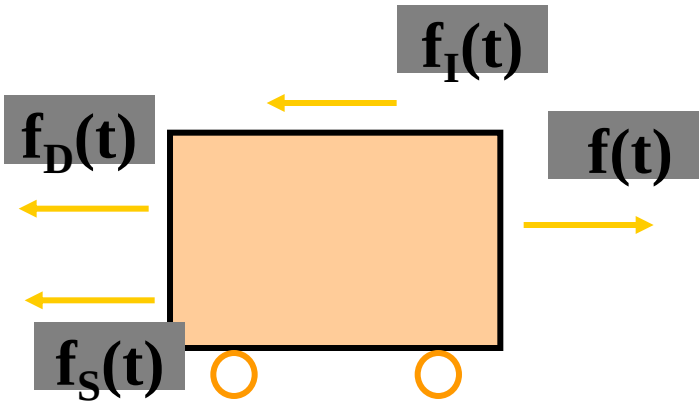
ΜΟΡΦΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Το απλούστερο δυναμικό σύστημα με ένα (1) ΒΕ, δηλαδή ο μονοβάθμιος ταλαντωτής



Μάζα m (tn= kN*sec^2/m),
ελατήριο δυστένειας k (kN/m)
ιξώδης αποσβεστήρας με συντελεστή απόσβεσης c (kN*sec/m).

Η εξωτερική δύναμη f(t) (kN) αναγκάζει τη μάζα να ταλαντωθεί. Πρόσθετες δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση: Αδράνειας $f_I(t)$, Απόσβεσης $f_D(t)$ και Επαναφοράς $f_S(t)$



Εαν η χρονικά μεταβαλλόμενη απόκριση του φορέα είναι u(t) (σε m), η ταχύτητά του u'(t) (σε m/s) και η επιτάχυνσή του u''(t) (σε m/s^2) , τότε:

$$f_I(t) = m\, u''(t)\,, \qquad f_D(t) = c\, u'(t)\,, \qquad f_S(t) = k\, u(t)\,.$$

Αρχή του D'Alembert

Για κάθε χρονική στιγμή t, η εξωτερική δράση f(t) ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των υπολοίπων δυνάμεων

$$mu''(t)+cu'(t)+ku(t) = f(t)$$

Στην περίπτωση στατικού φορτίου f(t) = f, η απόκριση είναι επίσης στατική, δηλ. u(t) = u. Οπότε ku = f.

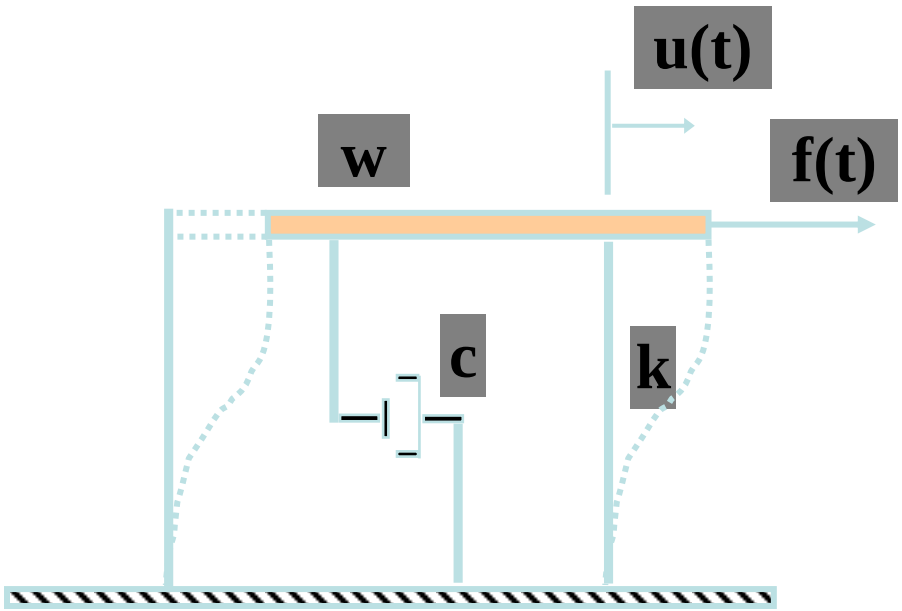
Δυσκαμψία k ταυτίζεται με την στατική δύναμη f που απαιτείται για μοναδιαία μετατόπιση (για u = 1, k = f).

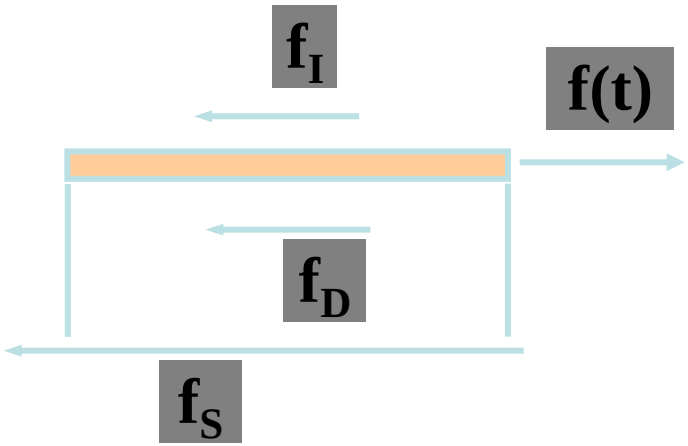
ΜΟΝΟΒΑΘΜΙΑ ΔΟΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ρεαλιστικές κατασκευές → συστήματα εκατοντάδων ή χιλιάδων βαθμών ελευθερίας.

Θεώρηση μονοβάθμιων ταλαντωτών (1-ΒΕ) → μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις. Π.χ.
υδατόπυργοι
επίπεδα μονώροφα διατμητικά πλαίσια με αβαρή υποστυλώματα.

Επίπεδο διατμητικό πλαίσιο υπό δυναμική διέγερση f(t). Άκαμπτο ζύγωμα φέρει το σύνολο των φορτίων βαρύτητας w. Στύλοι αβαρείς.





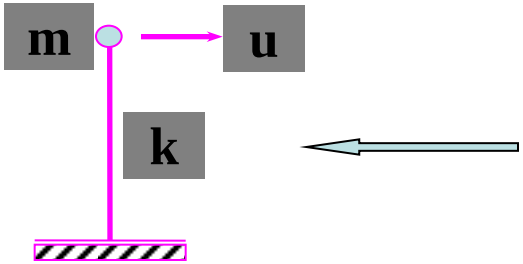
w = συνολικό βάρος του συστήματος (σε kN)

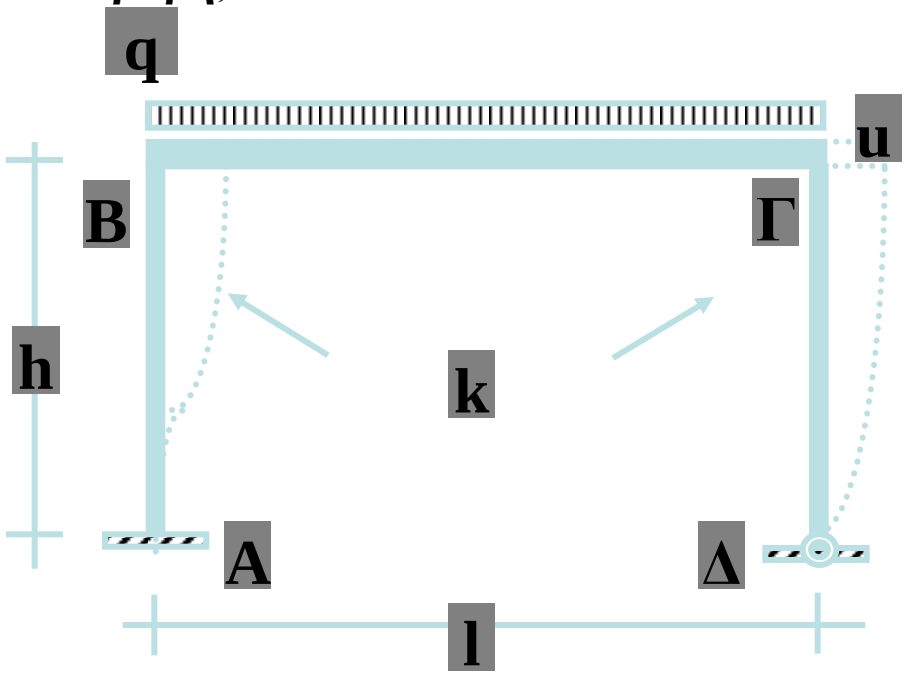
Μάζα m = w/g (g = επιτάχυνση της βαρύτητας σε m/s^2).

Μονάδες μάζας → tn = $kN*s^2/m$.

Παράδειγμα

Το διατμητικό πλαίσιο ΑΒΓΔ, άκαμπτο ζύγωμα και αβαρή υποστυλώματα κοινής διατομής.
Πάκτωση στο Α και άρθρωση στο Δ.
Το διανεμημένο φορτίο q, περιλαμβάνει και τα ίδια βάρη,





Να υπολογισθούν:
η ταλαντούμενη μάζα m
η οριζόντια δυσκαμψία k
του μονοβάθμιου φορέα.

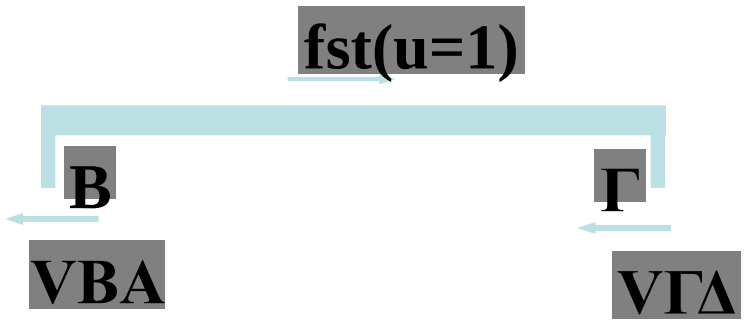
Υπολογισμός μάζας: $m = w/g = (ql)/g$

Υπολογισμός οριζόντιας δυσκαμψίας πλαισίου:

$$k = k_{AB} + k_{\Delta\Gamma}$$

όπου k = η στατική οριζόντια δύναμη f_{st} που απαιτείται για μοναδιαία μετατόπιση.

Από Στατική ΙΙ, για μοναδιαία διαφορική μετακίνηση βάσης – κορυφής, u = 1, τα υποστυλώματα αναπτύσσουν καμπτικές ροπές (M) και τέμνουσες (V), ανάλογα με τις συνθήκες στήριξής τους, ως ακολούθως:



$$M_{AB} = -6EI/h^2,\ M_{BA} = +6EI/h^2 \quad \rightarrow$$
$$V_{BA} = V_{AB} = (M_{BA} - M_{AB})/h = 12EI/h^3$$

$$M_{\Gamma\Delta} = +3EI/h^2,\ M_{\Delta\Gamma} = 0 \quad \rightarrow$$
$$V_{\Gamma\Delta} = (M_{\Gamma\Delta} - M_{\Delta\Gamma})/h = 3EI/h^3$$

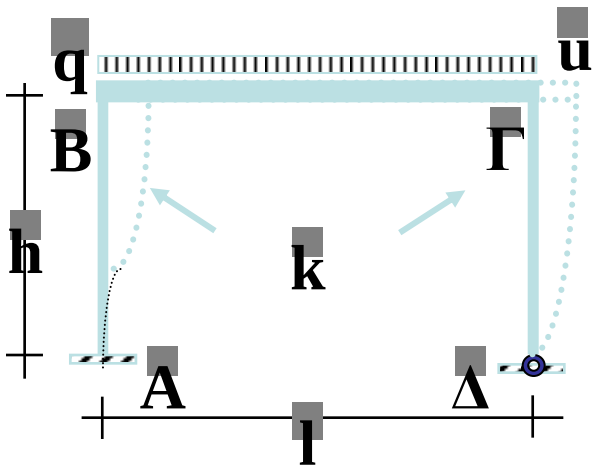
Κατά συνέπεια, η οριζόντια δυσκαμψία του συστήματος ισούται με:

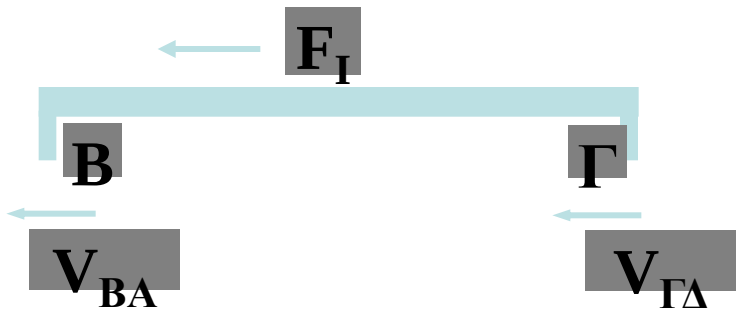
$$k = f_{st}(u=1) = V_{BA} + V_{\Gamma\Delta} = 15EI/h^3$$

Σημείωση:

Αν η μάζα των στύλων δεν θεωρηθεί αμελητέα, θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι ισοκατανέμεται στους κόμβους αρχής και τέλους. Άρα στην μάζα ζυγώματος θα έπρεπε να προστεθεί και η ΜΙΣΗ μάζα των υποστυλωμάτων.

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ





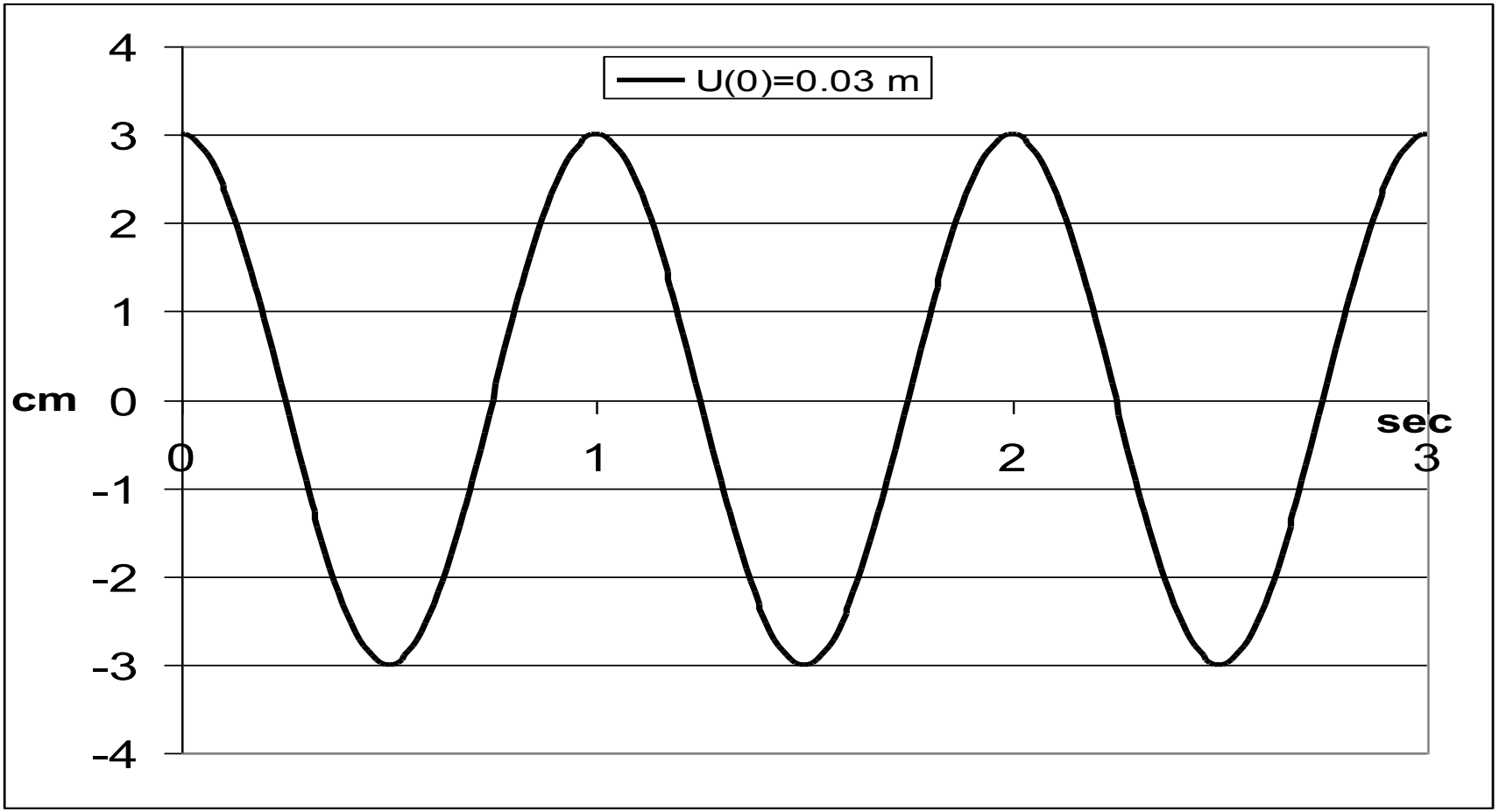
Η απλούστερη μορφή ταλάντωσης.

Εξωτερική διέγερση f(t) και απόσβεση c, είναι μηδενικές.

Η ταλάντωση οφείλεται στην επιβολή, την χρονική στιγμή t = 0, αρχικής μετατόπισης u_0 ή/και αρχικής ταχύτητας u'_0, ενώ μετά την απομάκρυνση από την αρχική θέση ισορροπίας το σύστημα αφήνεται να ταλαντωθεί ελεύθερα.

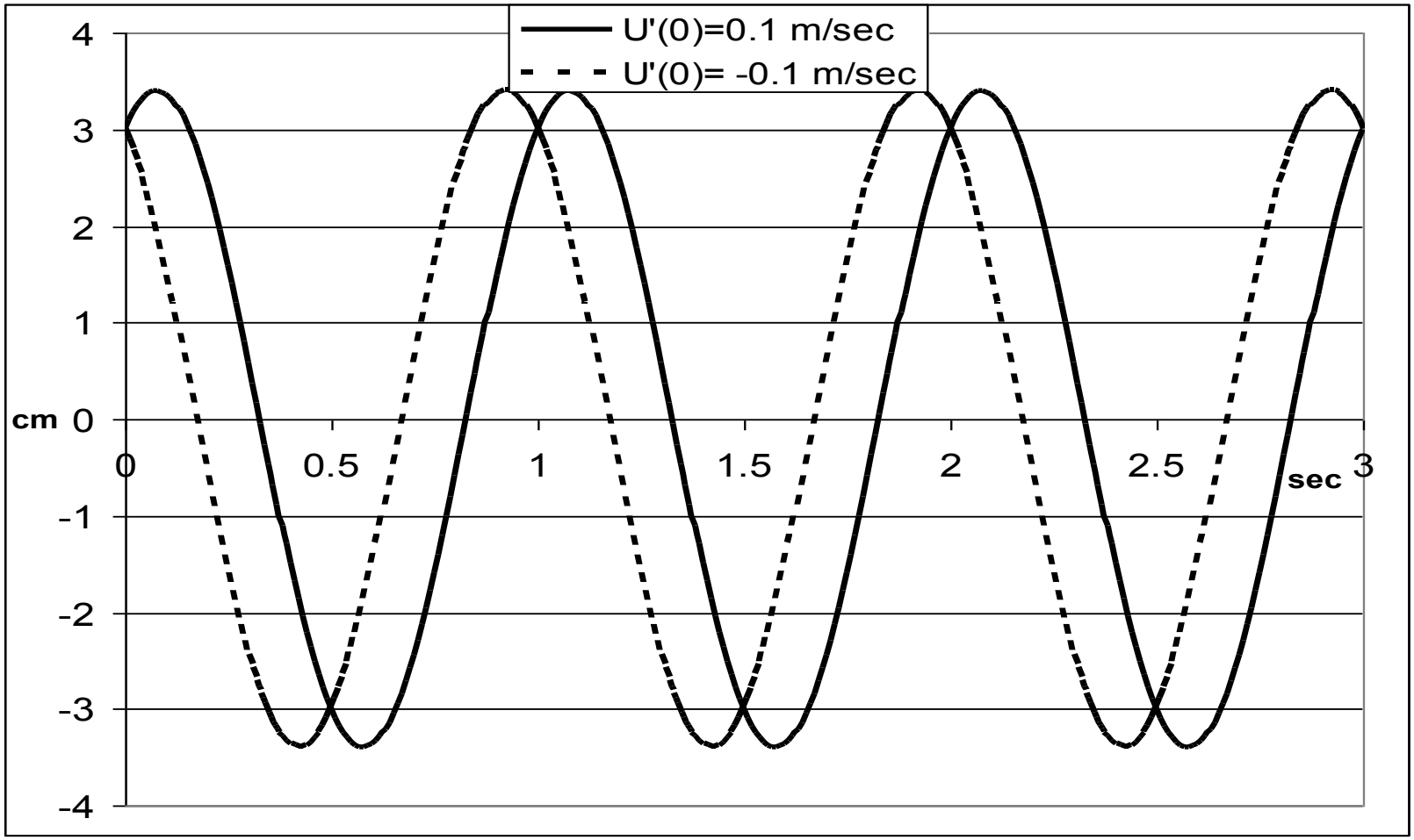
A1

T=1 sec U(0)=0.03m U'(0)=0 m/sec ξ=0



A2

T=1 sec U(0)=0.03m U'(0)= +/- 0.1 m/sec ξ=0



Η εξίσωση της ταλάντωσης είναι: $m\,u''(t) + ku(t) = 0$

Διαιρώντας με m, : $u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$ **όπου** $\omega^2 = k/m$

Η λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2ου βαθμού , είναι $u(t) = Ce^{rt}$

με παραγώγους: $u'(t) = Cr\,e^{rt}$ **και** $u''(t) = Cr^2\,e^{rt}$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ταλάντωσης, προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση $(r^2 + \omega^2) = 0$ $(\rightarrow r^2 < 0)$

η οποία έχει ρίζες: $r = \pm i\omega$, **επομένως**

$$u(t) = C_1\,e^{i\omega t} + C_2\,e^{-i\omega t}$$

όπου οι συντελεστές C_1 **και** C_2 **είναι συζυγείς μιγαδικοί**

Μετά από πράξεις και αξιοποιώντας την ταυτότητα του Euler: $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ **προκύπτει τελικά:**

$$u(t) = R_1 \cos \omega t + R_2 \sin \omega t$$

όπου οι πραγματικοί συντελεστές R_1 **και** R_2 **προκύπτουν από τους** C_1 **και** C_2 **ως:** $R_1 = C_1 + C_2$ **και** $R_2 = (C_1 - C_2)i$

Εναλλακτικά,

$$u(t) = R \sin(\omega t+\theta) = R \sin(\omega t) \cos(\theta) + R \cos(\omega t) \sin(\theta)$$

Όπου:

$R \cos(\theta) = R_2$, $R \sin(\theta) = R_1$, $R^2 = R_1^2 + R_2^2$, $\tan \theta = R_1/R_2$

Εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης εύρους R και κυκλικής συχνότητας ω.

$$u(t) = R_1 \cos \omega t + R_2 \sin \omega t$$
$$u'(t) = R_1 [-\sin \omega t]\omega + R_2 [\cos \omega t]\omega$$

Οι συντελεστές R_1 και R_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες u_0 και u'_0, με τις σχέσεις $R_1 = u_0$, $R_2 = u'_0 /\omega$

Γιατί??

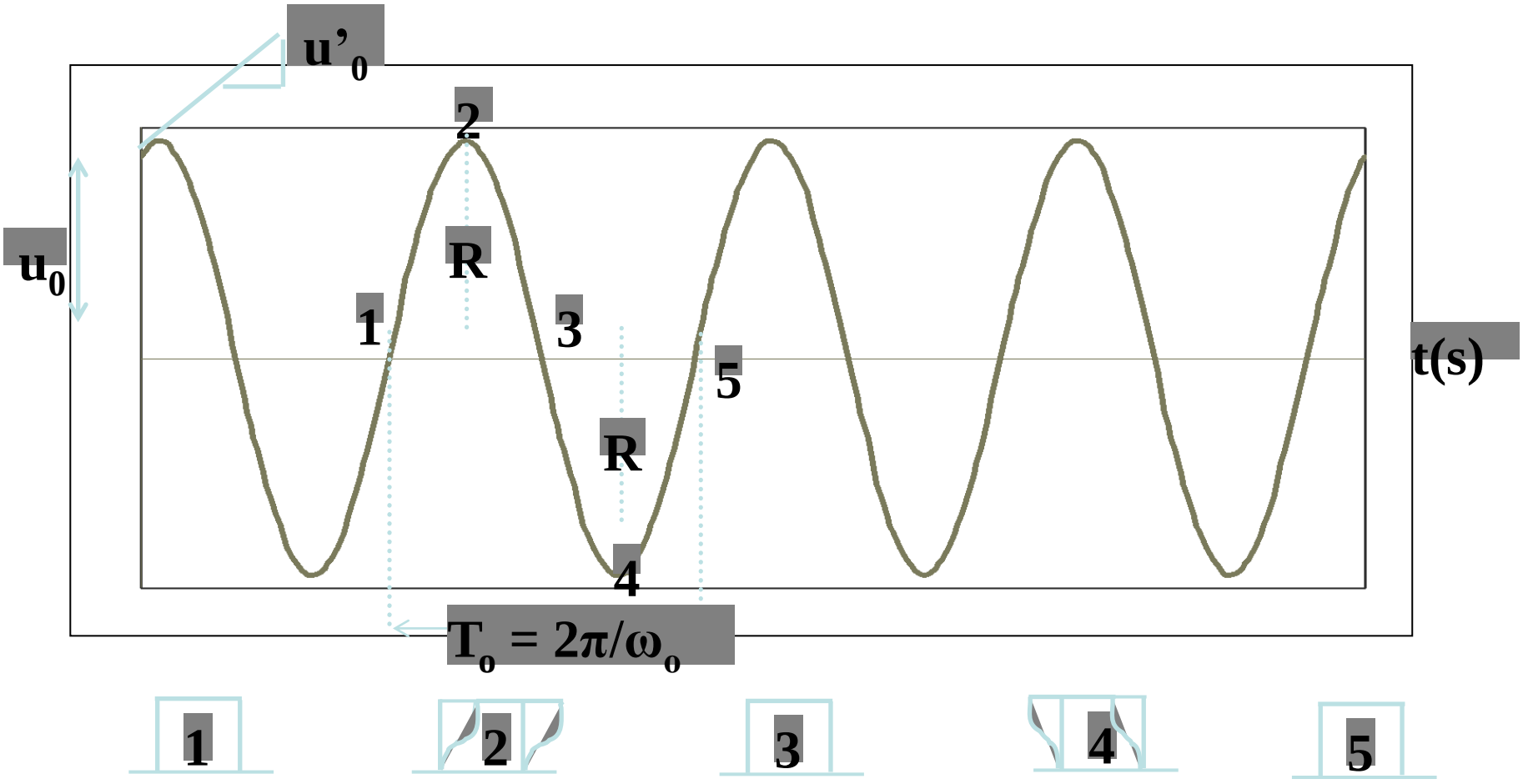
Αντικαθιστώντας, η εξίσωση κίνησης παίρνει την μορφή:

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + u'_0 /\omega \sin \omega t$$

- **Κατά συνέπεια, η ελεύθερη ταλάντωση μονοβάθμιου συστήματος χωρίς απόσβεση είναι μία ΑΡΜΟΝΙΚΗ κίνηση της οποίας το, ΑΜΕΙΩΤΟ με την πάροδο του χρόνου, εύρος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, ενώ η συχνότητά της εξαρτάται τα μηχανικά του χαρακτηριστικά (μάζα και δυσκαμψία).**

Για τον λόγο αυτό, η συγκεκριμένη συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται ελεύθερα ο μονοβάθμιος ταλαντωτής – ανεξάρτητα από το είδος της αρχικής του διαταραχής - ονομάζεται ιδιοσυχνότητα ω_o του ταλαντωτή, ενώ ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση μιας πλήρους ελεύθερης ταλάντωσης, καλείται ιδιοπερίοδος T_o.

$$\omega_o = [k/m]^{1/2} \text{ (σε rad/s)}, \qquad T_o = 2\pi/\omega_0 \text{ (σε s)}$$


u'0
2
u0
R
1
3
5
t(s)
R
4
To = 2π/ωo
1
2
3
4
5

Τέλος Ενότητας

CC BY SA