ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ Ι

κ. ΠΕΤΑΛΙΔΗΣ

***ΤΜΗΜΑ* ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ**

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (Εργαστήριο 4)

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Σκοπός του εργαστηρίου είναι η γνωριμία του φοιτητή με την έννοια της αριθμητικής επίλυσης εξισώσεων και συγκεκριμένα με την γενική επαναληπτική μέθοδο, η οποία υλοποιείται προγραμματιστικά σε Matlab.
Ειδικότερα, ο φοιτητής θα ασχοληθεί με τα παρακάτω αντικείμενα

1. Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων
    - Επαναληπτική Μέθοδος
    - Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων
    - Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων
    - Επαναληπτική Μέθοδος με κριτήριο τερματισμού

Επαναληπτική Μέθοδος

- Υπολογισμός μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ με χρήση ενός αναδρομικού τύπου της μορφής

$$x_n = g(x_{n-1})$$

- Για να δημιουργήσουμε τον αναδρομικό τύπο πρέπει η εξίσωση $f(x) = 0$ να γραφεί με τη μορφή $x = g(x)$.
- Για παράδειγμα, θέλουμε να βρούμε την ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$.
- Δημιουργούμε τον αναδρομικό τύπο

$$x^2-2 = 0 \Rightarrow x^2+2x = 2+2x \Rightarrow x(x+2) = 2+2x \Rightarrow x = \frac{2+2x}{x+2}$$

Επομένως, ο αναδρομικός τύπος είναι

$$x_n = \frac{2+2x_{n-1}}{2+x_{n-1}}$$

Επαναληπτική Μέθοδος - Παράδειγμα

Να βρεθούν οι 10 πρώτες τιμές του x που δίνονται από τον τύπο

$$x_n = \frac{2 + 2x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$$

με αρχική τιμή $x_1 = 1$.

- Στον Editor γράφουμε

```
clear
clc
x(1)=1;
for i=2:10
    x(i)=(2+2*x(i-1))/(2+x(i-1));
end
k=1:length(x);
out=[k', x(k)']
```

Επαναληπτική Μέθοδος - Παράδειγμα

- Εκτελούμε και στο Command Window έχουμε

```
out =

                         1                         1
                         2          1.33333333333333
                         3                       1.4
                         4          1.41176470588235
                         5          1.41379310344828
                         6          1.41414141414141
                         7          1.41420118343195
                         8          1.41421143847487
                         9          1.41421319796954
                        10          1.41421349985132
```

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων

- Μια αριθμητική μέθοδος μας επιστρέφει σε κάθε βήμα μια προσέγγιση της λύσης.
- Αν η αριθμητική μέθοδος συγκλίνει, τότε η μέθοδος προσεγγίζει την λύση.
- Η ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων μας δείχνει πόσο καλά προσεγγίζει η μέθοδος την λύση σε σχέση με το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων.
- Η ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων δίνεται από τον τύπο

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}10^{-k}$$

όπου k το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων.

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων

- Λύνουμε ως προς k και έχουμε

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}10^{-k} \Rightarrow 2 \cdot |x_n - x_{n-1}| < 10^{-k} \Rightarrow$$

$$\log(2 \cdot |x_n - x_{n-1}|) < \log\left(10^{-k}\right) \Rightarrow \log(2 \cdot |x_n - x_{n-1}|) < -k \Rightarrow$$

$$k < -\log(2 \cdot |x_n - x_{n-1}|)$$

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων - Παράδειγμα

Να βρεθούν οι 10 πρώτες τιμές του x που δίνονται από τον τύπο

$$x_n = \frac{2 + 2x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$$

με αρχική τιμή $x_1 = 1$. Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_8.

- Στον Editor γράφουμε

```
clear
clc
x(1)=1;
for i=2:10
    x(i)=(2+2*x(i-1))/(2+x(i-1));
end
k=1:length(x);
out=[k', x(k)']
```

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων - Παράδειγμα

- Εκτελούμε και στο Command Window έχουμε

```
out =

                    1                    1
                    2     1.33333333333333
                    3                  1.4
                    4     1.41176470588235
                    5     1.41379310344828
                    6     1.41414141414141
                    7     1.41420118343195
                    8     1.41421143847487
                    9     1.41421319796954
                   10     1.41421349985132
```

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων - Παράδειγμα

- Για την ακρίβεια του x_{10}, στο Command Window γράφουμε

```
>> -log10(2*abs(out(10,2)-out(9,2)))

ans =

          6.21913310223154
```

- επειδή

$$k < -\log\left(2 \cdot |x_{10} - x_9|\right) = 6.21913310223154$$

θα έχουμε

$$k = 6$$

δηλαδή, η τιμη x_{10} έχει ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων.

Ακρίβεια Δεκαδικών ψηφίων - Παράδειγμα

- Για την ακρίβεια του x_8, στο Command Window γράφουμε

```
>> -log10(2*abs(out(8,2)-out(7,2)))

ans =

          4.68803252210793
```

- επειδή

$$k < -\log\left(2 \cdot |x_8 - x_7|\right) = 4.68803252210793$$

θα έχουμε

$$k = 4$$

δηλαδή, η τιμή x_8 έχει ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων.

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων

- Μια αριθμητική μέθοδος μας επιστρέφει σε κάθε βήμα μια προσέγγιση της λύσης.
- Αν η αριθμητική μέθοδος συγκλίνει, τότε η μέθοδος προσεγγίζει την λύση.
- Η ακρίβεια σημαντικών ψηφίων μας δείχνει πόσο καλά προσεγγίζει η μέθοδος την λύση σε σχέση με το πλήθος των σημαντικών ψηφίων.
- Η ακρίβεια σημαντικών ψηφίων δίνεται από τον τύπο

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right| < \frac{1}{2}10^{-(k-1)}$$

όπου k το πλήθος των σημαντικών ψηφίων.

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων

- Λύνουμε ως προς k και έχουμε

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right| < \frac{1}{2}10^{-(k-1)} \Rightarrow 2\cdot\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right| < 10^{-(k-1)} \Rightarrow \\
\log\left(2\cdot\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|\right) < \log\left(10^{-(k-1)}\right) \Rightarrow \\
\log\left(2\cdot\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|\right) < -(k-1) \Rightarrow \\
k-1 < -\log\left(2\cdot\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|\right) \Rightarrow \\
k < -\log\left(2\cdot\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|\right) + 1
\end{aligned}
$$

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων-Παράδειγμα

Να βρεθούν οι 10 πρώτες τιμές του x που δίνονται από τον τύπο

$$x_n = \frac{2 + 2x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$$

με αρχική τιμή $x_1 = 1$. Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{10} και x_8.

- Στον Editor γράφουμε

```
clear
clc
x(1)=1;
for i=2:10
    x(i)=(2+2*x(i-1))/(2+x(i-1));
end
k=1:length(x);
out=[k', x(k)']
```

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων-Παράδειγμα

- Εκτελούμε και στο Command Window έχουμε

```
out =


                   1                       1
                   2        1.33333333333333
                   3                     1.4
                   4        1.41176470588235
                   5        1.41379310344828
                   6        1.41414141414141
                   7        1.41420118343195
                   8        1.41421143847487
                   9        1.41421319796954
                  10        1.41421349985132
```

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων-Παράδειγμα

- Για την ακρίβεια του x_{10}, στο Command Window γράφουμε

```
>> -log10(2*abs((out(10,2)-out(9,2))/out(9,2)))+1

ans =

          7.36964798815789
```

- επειδή

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{x_{10} - x_9}{x_9}\right|\right) + 1 = 7.36964798815789$$

θα έχουμε

$$k = 7$$

δηλαδή, η τιμη x_{10} έχει ακρίβεια 7 σημαντικών ψηφίων.

Ακρίβεια Σημαντικών ψηφίων-Παράδειγμα

- Για την ακρίβεια του x_8, στο Command Window γράφουμε

```
>> -log10(2*abs((out(8,2)-out(7,2))/out(7,2)))+1

ans =

          5.8385437184424
```

- επειδή

$$k < -\log\left(2 \cdot \left|\frac{x_8 - x_7}{x_7}\right|\right) + 1 = 5.8385437184424$$

θα έχουμε

$$k = 5$$

δηλαδή, η τιμη x_8 έχει ακρίβεια 5 σημαντικών ψηφίων.

Επαναληπτική Μέθοδος με κριτήριο τερματισμού

Να βρεθούν οι τιμές των x_n μέχρι να ισχύει το κριτήριο τερματισμού

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2}10^{-4}$$

δηλαδή, η προσεγγιστική λύση να έχει ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.
Οι τιμές των x_n δίνονται από τον τύπο

$$x_n = \frac{2 + 2x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$$

με αρχική τιμή $x_1 = 1$.

Επαναληπτική Μέθοδος με κριτήριο τερματισμού

- Στον Editor γράφουμε

```
clear
clc
x(1)=1;
i=2;
done=0;
while done==0
    x(i)=(2+2*x(i-1))/(2+x(i-1));
    if abs(x(i)-x(i-1))<(1/2*10^-4)
        done=1;
    else
        i=i+1;
    end
end
k=1:length(x);
out=[k', x(k)']
```

Επαναληπτική Μέθοδος με κριτήριο τερματισμού

- Εκτελούμε και στο Command Window έχουμε

```
out =

                   1                        1
                   2         1.33333333333333
                   3                      1.4
                   4         1.41176470588235
                   5         1.41379310344828
                   6         1.41414141414141
                   7         1.41420118343195
                   8         1.41421143847487
```

Άσκηση

- Να βρεθούν οι 20 πρώτες τιμές του x που δίνονται από τον τύπο
$$x_n = \frac{3 + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$$
με αρχική τιμή $x_1 = 2$.
- Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{15} και x_{20}.
- Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{15} και x_{20}.

Άσκηση - Λύση

Να βρεθούν οι 20 πρώτες τιμές του x που δίνονται από τον τύπο

$$x_n = \frac{3 + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$$

με αρχική τιμή $x_1 = 2$.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε

```
>>out =


          1                   2
          2    1.66666666666667
          3                1.75
          4    1.72727272727273
          5    1.73333333333333
          6    1.73170731707317
```

Άσκηση - Λύση

7	1.73214285714286
8	1.73202614379085
9	1.73205741626794
10	1.73204903677758
11	1.73205128205128
12	1.73205068043172
13	1.73205084163518
14	1.73205079844084
15	1.73205081001473
16	1.73205080691351
17	1.73205080774448
18	1.73205080752182
19	1.73205080758149
20	1.7320508075655

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ακρίβεια σε δεκαδικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{15} και x_{20}.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε για x_{15} *και* x_{20}

```
>>  -log10(2*abs(out(15,2)-out(14,2)))

ans =

          7.63549073463583

>> -log10(2*abs(out(20,2)-out(19,2)))

ans =

           10.495227442818
```

Άσκηση - Λύση

Άρα, 7 *και* 10 *δεκαδικά ψηφία αντίστοιχα.*

Άσκηση - Λύση

Να βρεθεί η ακρίβεια σε σημαντικά ψηφία που έχουν οι τιμές x_{15} και x_{20}.

- Απάντηση:
  Στο Command Window έχουμε για x_{15} και x_{20}

```
>> -log10(2*abs((out(15,2)-out(14,2))/out(14,2)))+1

ans =

          8.8740513597069

>> -log10(2*abs((out(20,2)-out(19,2))/out(19,2)))+1

ans =

          11.733788070181
```

Άσκηση - Λύση

Άρα, 8 *και* 11 *σημαντικά ψηφία αντίστοιχα.*