ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ Ι

κ. ΠΕΤΑΛΙΔΗΣ

ΤΜΗΜΑ **ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ**

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.

- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Επίκουρος Καθηγητής

Οκτώβριος 2015

Αριθμητικές Μέθοδοι σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον
Τέταρτη Σειρά Διαφανειών

Εισαγωγή

- Αριθμητική επίλυση εξισώσεων (μη γραμμικές)
    - Μέθοδοι με διαδοχικές δοκιμές σε διάστημα:
        - Μέθοδος Διχοτόμησης
        - Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης (Regula-Falsi)
    - Μέθοδοι με επαναληπτικούς αναδρομικούς τύπους:
        - Μέθοδος Τέμνουσας
        - Μέθοδος Newton
        - Μέθοδος Muller

Μέθοδος Σταθερού Σημείου

- Εύρεση μιας σχέσης της μορφής

$$x = g(x)$$

την οποία την μετατρέπουμε ως αναδρομική

$$x_n = g\left(x_{n-1}\right)$$

- Η επιλογή της συνάρτησης υπόκειται σε μαθηματικούς περιορισμούς
  - Κάθε συνεχής συνάρτηση $g : [a, b] \to [a, b]$ έχει σταθερό σημείο δηλαδή, $g(x^*) = x^*$.
  - Μια συνεχής συνάρτηση $g : [a, b] \to [a, b]$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο αν είναι συστολή.
  - Μια συνάρτηση $g : [a, b] \to [a, b]$ είναι συστολή όταν

$$\left|g'(x)\right| \leq k < 1\,, \quad \forall x \in (a, b)$$

Μέθοδος Σταθερού Σημείου - Υλοποίηση

ΒΗΜΑ 1^o Επιλέγουμε μια αρχική εκτίμηση της ρίζας x_1.

ΒΗΜΑ 2^o Σε κάθε βήμα i βρίσκεται μία νέα προσέγγιση της ρίζας όπου είναι η τιμή του x δίνεται από την σχέση:

$$x_i = g(x_{i-1})$$

ΒΗΜΑ 3^o Αν $f(x_i) = 0$ τότε το x_i είναι η ζητούμενη ρίζα και σταματάει η διαδικασία. Αυτή η περίπτωση όμως σπάνια συμβαίνει στην πράξη.

ΒΗΜΑ 4^o Επιστρέφουμε στο 2^o βήμα και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για να βρούμε τη νέα προσέγγιση x_{i+1}, μέχρι να εκπληρωθεί ένα από τα κριτήρια τερματισμού.

Μέθοδος Σταθερού Σημείου - Υλοποίηση

Κριτήρια τερματισμού:

- Όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της τρέχουσας προσεγγιστικής ρίζας (x_i) και της προηγούμενης προσεγγιστικής ρίζας (x_{i-1}) είναι μικρότερη από την ακρίβεια λύσης tol που έχει δηλώσει ο χρήστης, δηλαδή θα έχουμε ταύτιση των σημείων.
  Επομένως θα ισχύει:
  $$|x_i - x_{i-1}| < tol \quad \text{όπου} \quad tol = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$
  με k τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων της επιθυμητής ακρίβειας.
- Η τιμή x_i να είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή να ισχύει ότι $f(x_i) = 0$.
- Οι επαναλήψεις που έχει δηλώσει ο χρήστης για την εύρεση της ρίζας εξαντλήθηκαν.

Μέθοδος Σταθερού Σημείου - Παράδειγμα

Να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ με

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

στο διάστημα $(-1, 1)$.

- **Πρώτη προσέγγιση.**
- Η εξίσωση $f(x) = 0$ θα γίνει

$$x^3 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = -x^3 - 1 \Rightarrow x_n = -x_{n-1}^3 - 1$$

Άρα,

$$g(x) = -x^3 - 1 \quad \text{με} \quad g'(x) = -3x^2$$

επομένως

$$\left| g'(x) = -3x^2 \right| < 3 \,, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Μέθοδος Σταθερού Σημείου - Παράδειγμα

και

$$g([-1,1]) = [-2,0]$$

δηλαδή, η g δεν πληροί τις προϋποθέσεις.
Αν υπολογίσουμε τις τιμές των $x_n = -x_{n-1}^3 - 1$ με αρχική τιμή $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= -1 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Μέθοδος Σταθερού Σημείου - Παράδειγμα

- **Δεύτερη προσέγγιση.**
- Η εξίσωση $f(x) = 0$ θα γίνει

$$x^3 + x + 1 = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) = -1 \Rightarrow$$
$$x = -\frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow x_n = -\frac{1}{x_{n-1}^2 + 1}$$

Άρα,

$$g(x) = -\frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{με} \quad g'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

επομένως

$$\left| g'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \right| < 0.65\,, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Μέθοδος Σταθερού Σημείου - Παράδειγμα

και

$$g([-1,1]) = [-1,-0.5]$$

δηλαδή, η g πληροί (εν μέρει) τις προϋποθέσεις.

Αν υπολογίσουμε τις τιμές των $x_n = -\dfrac{1}{x_{n-1}^2+1}$ με αρχική τιμή $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= -0.5 \\ x_4 &= -0.8 \\ x_5 &= -0.609756097560976 \end{aligned}$$

Μέθοδος Σταθερού Σημείου - Παράδειγμα

- **Τρίτη προσέγγιση.**
- Η εξίσωση $f(x) = 0$ θα γίνει

$$x^3 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 + 2x = x - 1 \Rightarrow$$
$$x = \frac{x-1}{x^2+2} \Rightarrow x_n = \frac{x_{n-1} - 1}{x_{n-1}^2 + 2}$$

Άρα,

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2+2} \quad \text{με} \quad g'(x) = -\frac{x^2 - 2x - 2}{(x^2+2)^2}$$

επομένως

$$\left| g'(x) = -\frac{x^2 - 2x - 2}{(x^2+2)^2} \right| < 0.6\,, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Μέθοδος Σταθερού Σημείου - Παράδειγμα

και

$$g([-1,1]) = [-0.7, 0]$$

δηλαδή, η g πληροί (εν μέρει) τις προϋποθέσεις.

Αν υπολογίσουμε τις τιμές των $x_n = \dfrac{x_{n-1} - 1}{x_{n-1}^2 + 2}$ με αρχική τιμή $x_1 = 0$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
x_2 &= -0.5 \\
x_3 &= -0.666666666666667 \\
x_4 &= -0.681818181818182 \\
x_5 &= -0.682313495389774
\end{aligned}$$

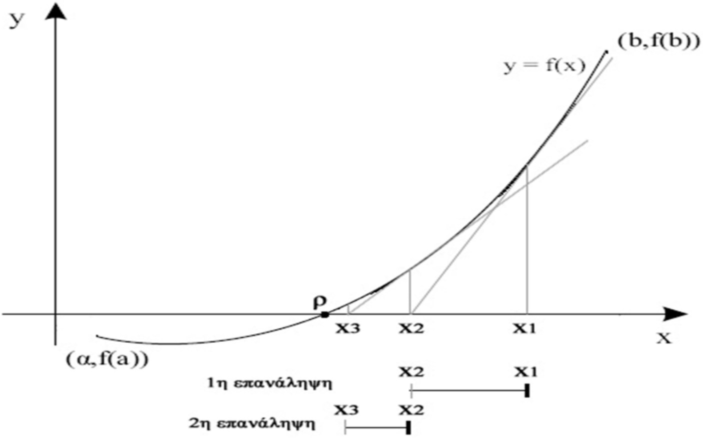
Μέθοδος Σταθερού Σημείου - Σύνοψη

- Η γενική επαναληπτική μέθοδος μπορεί να αποτύχει να συγκλίνει σε δυο περιπτώσεις:
  - Όταν η συνάρτηση $g(x)$ απειρίζεται.
  - Όταν η συνάρτηση $g(x)$ ταλαντώνεται.

Μέθοδος Σταθερού Σημείου - Σύνοψη

- Πλεονεκτήματα:
  1. Είναι η βασική επαναληπτική μέθοδος.
  2. Απαιτεί αρχική τιμή και όχι διάστημα.
- Μειονεκτήματα:
  1. Η μέθοδος είναι επιρρεπής σε ταλαντώσεις.
  2. Δεν υπάρχει εγγύηση ότι η μέθοδος αυτή θα συγκλίνει.
  3. Απαιτεί ανώτερες μαθηματικές γνώσεις για την σωστή επιλογή της συνάρτησης $g(x)$.

Μέθοδος Newton



Σχήμα: Γραφική αναπαράσταση της μεθόδου Newton

Μέθοδος Newton - Υλοποίηση

ΒΗΜΑ 1^o Επιλέγουμε ένα σημείο x_1 ως αρχική προσέγγιση της ρίζας.

ΒΗΜΑ 2^o Σε κάθε βήμα i βρίσκεται μία νέα προσέγγιση της ρίζας όπου είναι η τιμή του x_i για την οποία η εφαπτόμενη τέμνει τον άξονα $x'x$ η οποία δίνεται από την σχέση:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

ΒΗΜΑ 3^o Αν $f(x_i) = 0$ τότε το x_i είναι η ζητούμενη ρίζα και σταματάει η διαδικασία. Αυτή η περίπτωση όμως σπάνια συμβαίνει στην πράξη.

Μέθοδος Newton - Υλοποίηση

ΒΗΜΑ 4^o Επιστρέφουμε στο 2^o βήμα και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για να βρούμε τη νέα προσέγγιση x_{i+1}, μέχρι να εκπληρωθεί ένα από τα κριτήρια τερματισμού.

Μέθοδος Newton - Υλοποίηση

Κριτήρια τερματισμού:

- Όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της τρέχουσας προσεγγιστικής ρίζας (x_i) και της προηγούμενης προσεγγιστικής ρίζας (x_{i-1}) είναι μικρότερη από την ακρίβεια λύσης *tol* που έχει δηλώσει ο χρήστης, δηλαδή θα έχουμε ταύτιση των σημείων.
  Επομένως θα ισχύει:
  $$|x_i - x_{i-1}| < tol \quad \text{όπου} \quad tol = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$
  με k τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων της επιθυμητής ακρίβειας.
- Η τιμή x_i να είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή να ισχύει ότι $f(x_i) = 0$.
- Οι επαναλήψεις που έχει δηλώσει ο χρήστης για την εύρεση της ρίζας εξαντλήθηκαν.

Μέθοδος Newton - Παράδειγμα

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

με τη μέθοδο Newton με αρχική τιμή $x_1 = -1$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

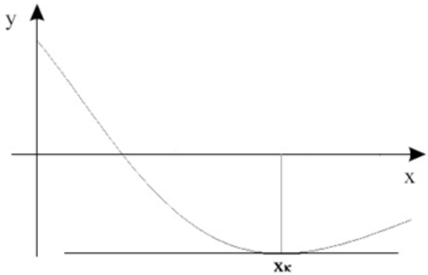
i	x_i	$f(x_i)$
1	-1	-1
2	-0.75	-0.171875
3	-0.686046511627907	-0.00894103663828338
4	-0.682339582597314	$-2.82306216856654 \times 10^{-5}$
5	-0.682327803946513	$-2.83994605609905 \times 10^{-10}$

η προσεγγιστική λύση βρέθηκε μετά από 5 επαναλήψεις και είναι $x_6 = -0.682327803828019$.

Μέθοδος Newton - Σύνοψη

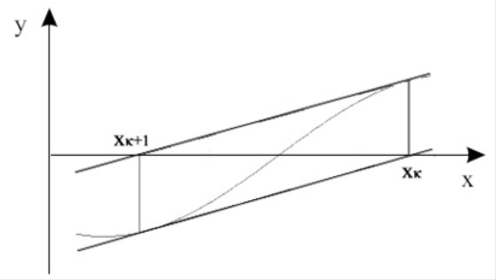
- Πλεονεκτήματα:
  1. Στις περισσότερες συναρτήσεις είναι και η πιο γρήγορη.
- Μειονεκτήματα:
  1. Η μέθοδος είναι επιρρεπής σε ταλαντώσεις.
  2. Δεν υπάρχει εγγύηση ότι η μέθοδος αυτή θα συγκλίνει.
  3. Απαιτεί σε κάθε ρίζα, η παράγωγος να είναι μη μηδενική, αλλιώς η μέθοδος αποτυγχάνει. Αν μηδενιστεί, τότε τείνει στο άπειρο η προσεγγιστική ρίζα και δεν μπορούμε να την επαναφέρουμε.
  4. Είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της παραγώγου.

Μέθοδος Newton - Σύνοψη



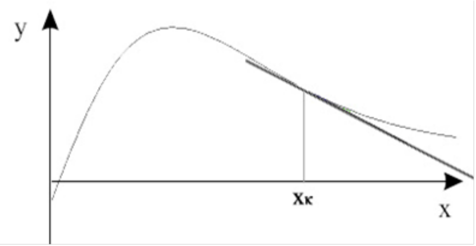
Σχήμα: Περίπτωση αποτυχίας της εφαρμογής της μεθόδου Newton όταν η παράγωγος της συνάρτησης μηδενίζεται.

Μέθοδος Newton - Σύνοψη



Σχήμα: Περίπτωση αποτυχίας της εφαρμογής της μεθόδου Newton όταν εισέρχεται σε κλειστό βρόχο.

Μέθοδος Newton - Σύνοψη



Σχήμα: Περίπτωση αποτυχίας της εφαρμογής της μεθόδου Newton όταν η συνάρτηση προσεγγίζει ασυμπτωτικά το 0 και γίνει λανθασμένη επιλογή του αρχικού σημείου.

Μέθοδος Newton - Αλγόριθμος

ΕΙΣΟΔΟΣ: $f(x)$, $f'(x)$, x_1, tol, n

ΒΗΜΑ 1^o Θέσε $x(1) = x_1$, $i = 2$

ΒΗΜΑ 2^o Όταν $i \leq n$ εκτέλεσε τα βήματα 3-5

ΒΗΜΑ 3^o Θέσε

$$x(i) = x(i-1) - \frac{f(x(i-1))}{f'(x(i-1))}$$

ΒΗΜΑ 4^o Αν $f(x(i)) = 0$ ή $|x(i) - x(i-1)| < tol$ τότε
ΕΞΟΔΟΣ: Το $x(i)$ είναι η λύση και τερμάτισε

ΒΗΜΑ 5 Θέσε $i = i + 1$

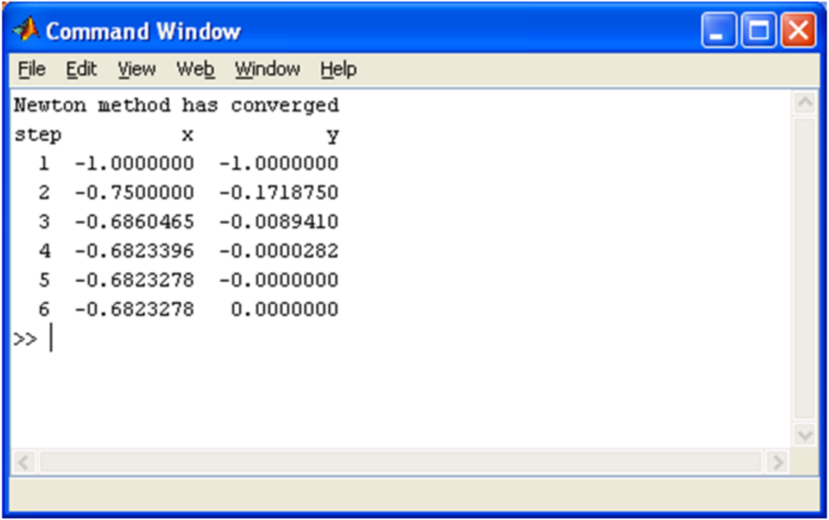
ΒΗΜΑ 6 ΕΞΟΔΟΣ: Η μέθοδος εξάντλησε όλες τις επαναλήψεις και τερμάτισε

Μέθοδος Newton - Αλγόριθμος

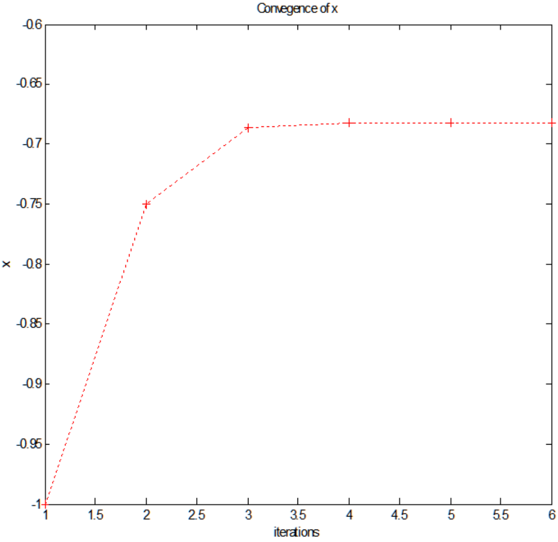
Υλοποίηση της μεθόδου Newton σε συνάρτηση Matlab

```
function out=newton(f, df, x1, tol, n)
x(1)=x1;
i=2;
while i<=n
    x(i)=x(i-1)-f(x(i-1))/df(x(i-1));
    if f(x(i))==0 || abs(x(i)-x(i-1))<tol
        break;
    end
    i = i + 1;
end
if i>n
    k=1:n;
else
    k=1:i;
end
out=[k', x', f(x)'];
```

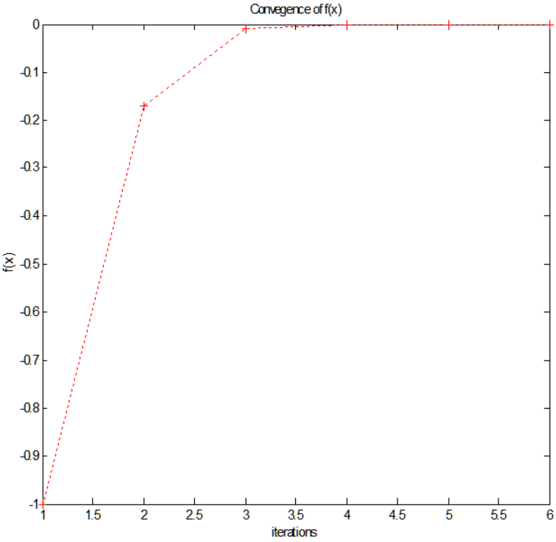
Μέθοδος Newton



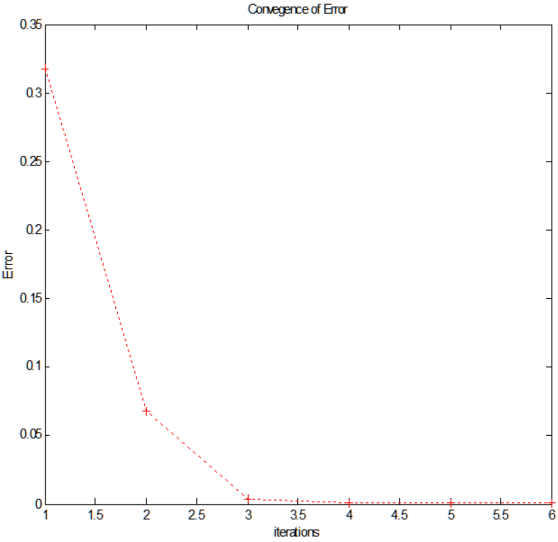
Μέθοδος Newton



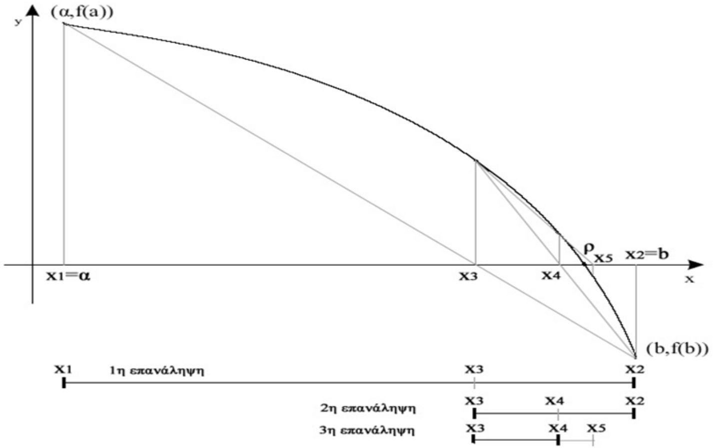
Μέθοδος Newton



Μέθοδος Newton



Μέθοδος Τέμνουσας



Σχήμα: Γραφική αναπαράσταση της μεθόδου Τέμνουσας

Μέθοδος Τέμνουσας - Υλοποίηση

ΒΗΜΑ 1^o Επιλέγουμε 2 σημεία x_1 και x_2.

ΒΗΜΑ 2^o Υπολογίζουμε ως νέα ρίζα (x_{i+1}), το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_i, f(x_i))$ με τον άξονα $x'x$ το οποίο δίνεται από την εξίσωση

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

ΒΗΜΑ 3^o Αν $f(x_i) = 0$ τότε το x_i είναι η ζητούμενη ρίζα και σταματάει η διαδικασία. Αυτή η περίπτωση όμως σπάνια συμβαίνει στην πράξη.

ΒΗΜΑ 4^o Επιστρέφουμε στο 2^o βήμα και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για να βρούμε τη νέα προσέγγιση x_{i+1}, μέχρι να εκπληρωθεί ένα από τα κριτήρια τερματισμού.

Μέθοδος Τέμνουσας - Υλοποίηση

Κριτήρια τερματισμού:

- Όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της τρέχουσας προσεγγιστικής ρίζας (x_i) και της προηγούμενης προσεγγιστικής ρίζας (x_{i-1}) είναι μικρότερη από την ακρίβεια λύσης *tol* που έχει δηλώσει ο χρήστης, δηλαδή θα έχουμε ταύτιση των σημείων.
  Επομένως θα ισχύει:
  $$|x_i - x_{i-1}| < tol \quad \text{όπου} \quad tol = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$$
  με k τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων της επιθυμητής ακρίβειας.
- Η τιμή x_i να είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή να ισχύει ότι $f(x_i) = 0$.
- Οι επαναλήψεις που έχει δηλώσει ο χρήστης για την εύρεση της ρίζας εξαντλήθηκαν.

Μέθοδος Τέμνουσας - Παράδειγμα

Να βρεθεί η ρίζα της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

με τη μέθοδο Τέμνουσας με αρχικές τιμές $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων και με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 50.

i	x_i	$f(x_i)$
1	-1	-1
2	1	3
3	-0.5	0.375
4	-0.714285714285714	-0.0787172011661808
5	-0.67710843373494	0.0124537144076378

η προσεγγιστική λύση βρέθηκε μετά από 6 επαναλήψεις και είναι $x_8 = -0.682327803752123$.

Μέθοδος Τέμνουσας - Σύνοψη

- Πλεονεκτήματα:
  1. Μπορούμε να βρούμε την ρίζα ακόμη κι αν δεν βρίσκεται ανάμεσα στις αρχικές τιμές x_1, x_2.
  2. Είναι ταχύτερη από την μέθοδο της Regula Falsi.
  3. Δεν χρειάζεται ο υπολογισμός της παραγώγου.
- Μειονεκτήματα:
  1. Επειδή η ρίζα δεν εγκλωβίζεται σε διάστημα, δεν υπάρχει εγγύηση ότι η μέθοδος θα συγκλίνει.

Μέθοδος Τέμνουσας - Αλγόριθμος

ΕΙΣΟΔΟΣ: $f(x)$, x_1, x_2, tol, n

ΒΗΜΑ 1^o Θέσε $x(1) = x_1$, $x(2) = x_2$, $i = 3$

ΒΗΜΑ 2^o Όταν $i \leq n$ εκτέλεσε τα βήματα 3-5

ΒΗΜΑ 3^o Θέσε

$$x(i) = x(i-1) - \frac{x(i-1) - x(i-2)}{f(x(i-1)) - f(x(i-2))} \cdot f(x(i-1))$$

ΒΗΜΑ 4^o Αν $f(x(i)) = 0$ ή $|x(i) - x(i-1)| < tol$ τότε
ΕΞΟΔΟΣ: Το $x(i)$ είναι η λύση και τερμάτισε

ΒΗΜΑ 5 Θέσε $i = i + 1$

ΒΗΜΑ 6 ΕΞΟΔΟΣ: Η μέθοδος εξάντλησε όλες τις επαναλήψεις και τερμάτισε

Μέθοδος Τέμνουσας - Αλγόριθμος

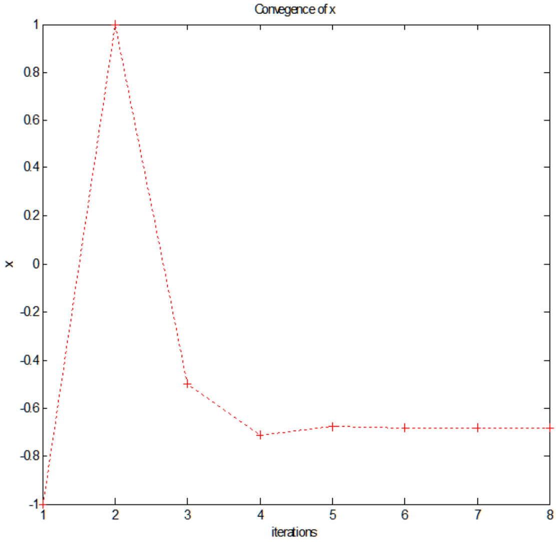
Υλοποίηση της μεθόδου Τέμνουσας σε συνάρτηση Matlab

```
function out=secant(f,x0,x1,tol,n)
x(1)=x0;
x(2)=x1;
i=3;
while i<=n
    x(i)=x(i-1)-f(x(i-1))*(x(i-1)-x(i-2))/(f(x(i-1))-f(x
        (i-2)));
    if f(x(i))==0||(abs(x(i)-x(i-1))<tol)
        disp('Secant method has converged');
        break;
    end
    i=i+1;
end
if i>n
    k=1:n;
else
    k=1:i;
end
```

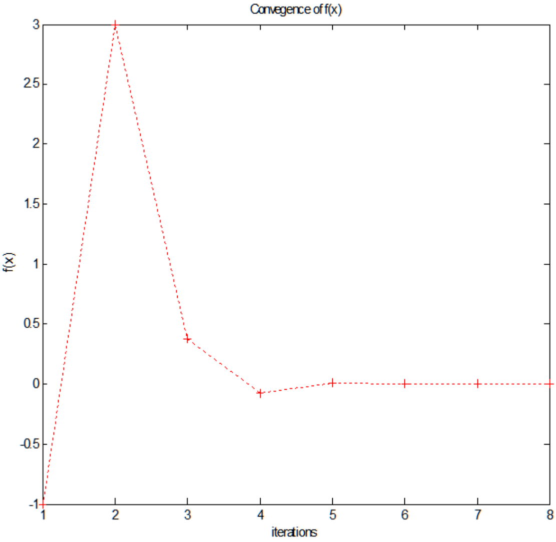
Μέθοδος Τέμνουσας - Αλγόριθμος

```
Secant method has converged
step          x            y
   1   -1.0000000   -1.0000000
   2    1.0000000    3.0000000
   3   -0.5000000    0.3750000
   4   -0.7142857   -0.0787172
   5   -0.6771084    0.0124537
   6   -0.6821868    0.0003380
   7   -0.6823284   -0.0000015
   8   -0.6823278    0.0000000
>>
```

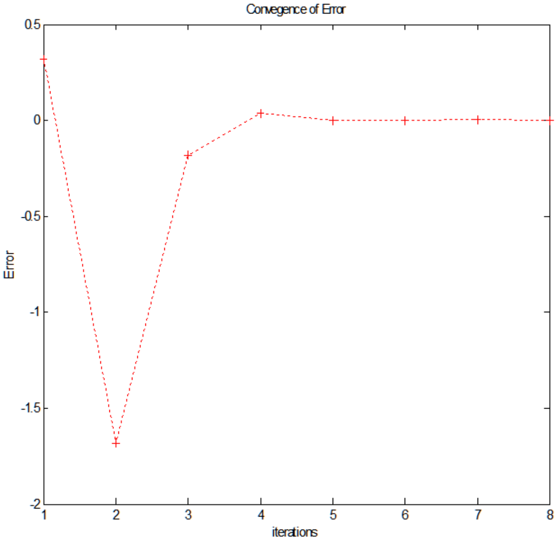
Μέθοδος Τέμνουσας - Αλγόριθμος



Μέθοδος Τέμνουσας - Αλγόριθμος



Μέθοδος Τέμνουσας - Αλγόριθμος



Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα

- Bisection method

  $x_{19} = -0.682331085205078$

- Regula-Falsi method

  $x_{10} = -0.682327310946516$

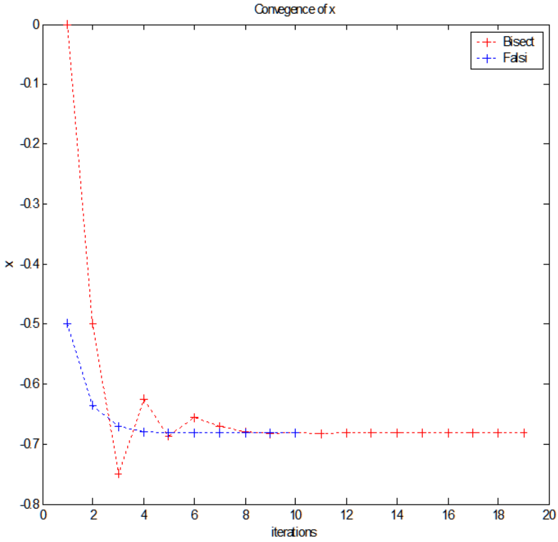
- Secant method

  $x_8 = -0.682327803752123$

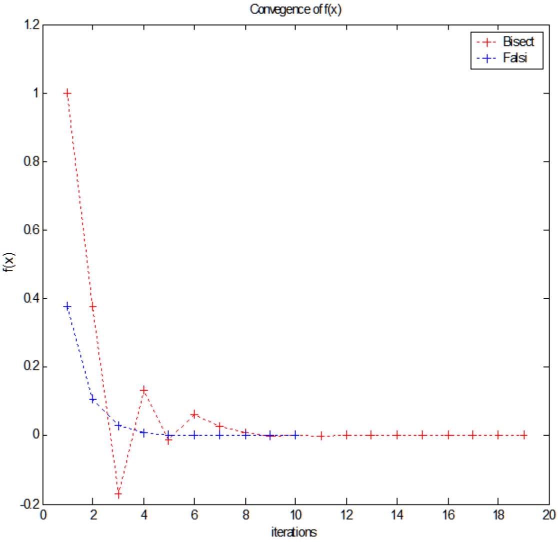
- Newton method

  $x_6 = -0.682327803828019$

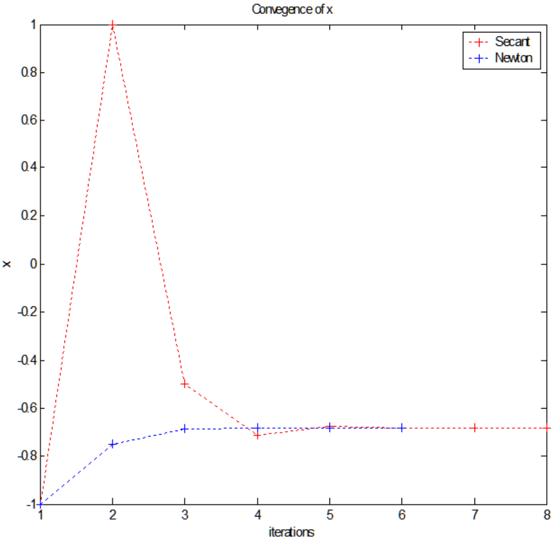
Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα



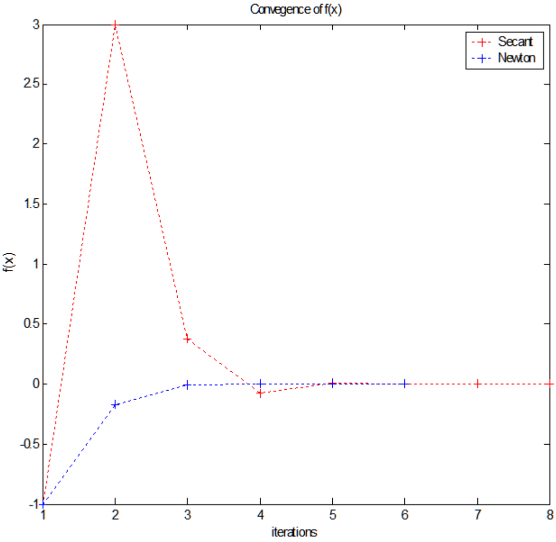
Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα



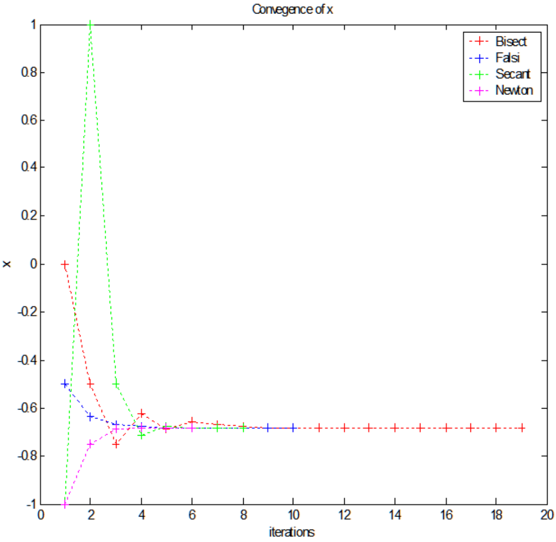
Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα



Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα



Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα



Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα