

**ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ**

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

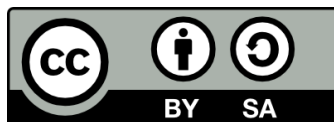
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
κ.ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΜΠΑΛΟΥΚΤΣΗΣ

ΣΕΡΡΕΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015



Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Το έργο αυτό αδειοδοτείται από την Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές Άδεια. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.el>.

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.

Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Πρόλογος	6
Κεφάλαιο 1	7
Στοιχεία ηλεκτρικών κυκλωμάτων	7
1.1 Γενικά	7
1.2 Βασικά ηλεκτρικά μεγέθη – μονάδες	8
1.2.1 Ηλεκτρικό φορτίο	8
1.2.2 Ηλεκτρικό δυναμικό	8
1.2.3 Ηλεκτρικό ρεύμα	9
1.2.4 Ηλεκτρική ισχύς	10
1.3 Ιδανικά στοιχεία κυκλώματος - νόμος του Ohm	11
1.3.1 Παθητικά στοιχεία κυκλώματος	11
Αντιστάτης.....	11
Πυκνωτής.....	13
Πηνίο	16
1.3.2 Ενεργητικά στοιχεία κυκλώματος.....	18
Ανεξάρτητη πηγή τάσης	18
Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος	19
1.4 Φορές αναφοράς - Τοπολογία κυκλωμάτων	19
1.4.1 Φορές αναφοράς	19
1.4.2 Τοπολογία κυκλωμάτων.....	21
1.5 Παραδείγματα	21
Παράδειγμα 1	21
Παράδειγμα 2	22
Παράδειγμα 3	23
Κεφάλαιο 2	27
Γενικές μέθοδοι ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων	27
2.1 Γενικά	27
2.2 Οι νόμοι του Kirchhoff	27
Παραδείγματα	29
2.3 Σύνδεση στοιχείων σε σειρά	30
Αντιστάσεις σε σειρά.....	30
Πυκνωτές σε σειρά	31
Πηνία σε σειρά.....	31
Αντιστάσεις παράλληλα.....	32
Πυκνωτές παράλληλα.....	33
Πηνία παράλληλα.....	33
Διαρέτης τάσης-Διαρέτης ρεύματος	33
Σύνδεση πηγών.....	34
Μετασχηματισμός πηγών.....	36
Παραδείγματα	37
2.4 Μετασχηματισμός τριγώνου σε αστέρα	41
Παράδειγμα.....	41
2.5 Μετασχηματισμός αστέρα σε τρίγωνο	42
Παράδειγμα.....	43
2.6 Συστηματικές μέθοδοι ανάλυσης κυκλωμάτων	43
Μέθοδος βρόχων	43

Παράδειγμα.....	44
Μέθοδος κόμβων.....	46
Παράδειγμα.....	47
2.7 Θεώρημα υπέρθεσης ή επαλληλίας.....	48
Παράδειγμα.....	48
2.8 Θεώρημα Thevenin	50
Παραδείγματα	51
Θεώρημα Norton.....	54
Παραδείγματα	54
Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος.....	56
Κεφάλαιο 3.....	58
Μονοφασικά εναλλασσόμενα ρεύματα.....	58
3.1 Βασικές έννοιες των εναλλασσομένων ρευμάτων	58
3.2 Παράσταση των ημιτονοειδών μεγεθών με διανύσματα και μεγαδικούς αριθμούς	60
3.2.1 Βασικές σχέσεις μεγαδικών αριθμών	62
3.2.2 Ανυσματικά διαγράμματα τάσεων και εντάσεων βασικών διπόλων.....	64
Παραδείγματα	66
3.2.3 Ισχύς.....	69
Ωμική αντίσταση.....	69
Επαγωγική αντίδραση.....	70
Χωρητική αντίδραση.....	71
Σύνθετη αντίδραση.....	71
Παραδείγματα	73
3.4 Κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος – Συντονισμός	77
Παραδείγματα	77
3.4.2 Συντονισμός.....	81
Συντονισμός σειράς.....	82
Συντονισμός παράλληλης σύνδεσης.....	83
Παραδείγματα.....	84
3.5 Αντιστάθμιση ισχύος.....	85
Καθορισμός απαιτούμενου πυκνωτή για αντιστάθμιση.....	87
Παράδειγμα.....	87
Κεφάλαιο 4.....	90
Τριφασικό Σύστημα.....	90
4.1 Γενικά	90
4.2 Τριφασική ισχύς.....	92
4.3 Τάσεις και εντάσεις τριφασικού συστήματος.....	93
4.4 Συμμετρικό τριφασικό σύστημα	94
Συμμετρικό τριφασικό σύστημα σε συνδεσμολογία Y-Y	94
Παράδειγμα.....	95
Συμμετρικό τριφασικό σύστημα σε συνδεσμολογία Δ-Δ.....	96
Παράδειγμα.....	97
Παράδειγμα.....	98
Βιβλιογραφία.....	100

Πρόλογος

Ο στόχος αυτών των σημειώσεων είναι να δώσουν στον αναγνώστη τις ουσιώδεις έννοιες των Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων, ώστε να μπορέσει να κατανοήσει τη βαθύτερη σημασία της δομής και των νόμων που τα διέπουν. Θέλω να πιστεύω ότι οι σημειώσεις μπορούν να αποτελέσουν ένα καλό οδηγό για κάθε έναν, ακόμη και μη Ηλεκτρολόγο Ηλεκτρονικό Μηχανικό, στη χρήση μεθόδων σχεδιασμού και τεχνικών ανάλυσης Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων σε επίπεδο ηλεκτρικών και ηλεκτρονικών συστημάτων.

Μεταξύ των τεχνικών που αναπτύσσονται στις σημειώσεις είναι οι νόμοι Kirchhoff, τα θεωρήματα Thevenin και Norton κλπ, τόσο στο συνεχές, όσο και στο εναλλασσόμενο ρεύμα. Επίσης αναλύονται θέματα τριφασικών συστημάτων.

Για την καλύτερη εμπέδωση του γνωστικού αντικειμένου των Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων, στις σημειώσεις περιλαμβάνονται ασκήσεις για τον αναγνώστη με τις λύσεις τους, ώστε να αναδεικνύεται η πρακτική χρησιμότητα των διαφόρων εννοιών που εισάγονται στη θεωρία, αλλά και ο σωστός τρόπος εφαρμογής των.

Κάθε παρατήρηση που θα συμβάλει στη βελτίωση των σημειώσεων, θα ληφθούν υπόψη κατά τη μελλοντική επανέκδοσή τους.

Αναστάσιος Μπαλουκτσής

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία ηλεκτρικών κυκλωμάτων

1.1 Γενικά

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι ένα σύνολο φυσικών ηλεκτρικών στοιχείων που συνδέονται μεταξύ τους. Σκοπός του ηλεκτρικού κυκλώματος είναι η μεταφορά, η διανομή και η μετατροπή της ηλεκτρικής ενέργειας. Η μετατροπή της ηλεκτρικής ενέργειας γίνεται είτε σε ηλεκτρική ενέργεια με διαφορετικά χαρακτηριστικά, είτε σε άλλης μορφής ενέργεια. Βασικές συνιστώσες ενός κυκλώματος είναι οι *πηγές ενέργειας*, οι *μετατροπείς ενέργειας* (καλούνται και *φορτία*), καθώς επίσης οι *αγωγοί* και τα *άλλα ηλεκτρικά στοιχεία* που συνδέουν τα παραπάνω.

Τα κυκλώματα διακρίνονται σε κυκλώματα εντοπισμένων και κυκλώματα διανεμημένων στοιχείων. Στο μάθημα θα ασχοληθούμε με τα κυκλώματα εντοπισμένων στοιχείων. Χαρακτηριστική ιδιότητα των εντοπισμένων στοιχείων είναι το μικρό μέγεθος αυτών σε σχέση με το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα του ρεύματος που τα διαρρέει. Συνεπώς για εντοπισμένα στοιχεία δύο ακροδεκτών, η ένταση του ρεύματος που εισέρχεται από τον έναν ακροδέκτη είναι ίση με την ένταση του ρεύματος που εξέρχεται από τον άλλον ακροδέκτη. Στα κυκλώματα με εντοπισμένα στοιχεία εφαρμόζονται οι νόμοι του Kirchhoff, οι οποίοι αποτελούν προσέγγιση των εξισώσεων Maxwell.

Η θεωρία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων βασίζεται κυρίως στην έννοια των ομοιωμάτων, τα οποία είναι κυκλώματα αποτελούμενα από εξιδανικευμένα ηλεκτρικά στοιχεία με γνωστές "καθαρές" ιδιότητες και παριστάνουν κάποιο φυσικό ηλεκτρικό στοιχείο. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται κάποια φυσικά ηλεκτρικά στοιχεία, που διατίθενται στο εμπόριο, και αντίστοιχα ομοιώματα τους:

αντιστάτης



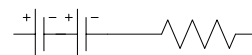
ομοίωμα



πηγή τάσης



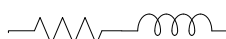
ομοίωμα



πηγίο



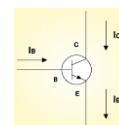
ομοίωμα



Τρανζίστορ



ομοίωμα



1.2 Βασικά ηλεκτρικά μεγέθη – μονάδες

1.2.1 Ηλεκτρικό φορτίο

Σύμφωνα με τη φυσική το ηλεκτρικό φορτίο είναι χαρακτηριστικό των στοιχειωδών σωματιδίων της ύλης. Το μικρότερο σωματίδιο με αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο είναι το **ηλεκτρόνιο**. Ένα άτομο ενός στοιχείου αποτελείται από ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια και έναν πυρήνα, ο οποίος φέρει θετικό ηλεκτρικό φορτίο. Το συνολικό φορτίο ενός ατόμου στην κανονική κατάσταση του είναι μηδέν. Άτομα τα οποία έχουν χάσει ή κερδίσει ηλεκτρόνια, είναι φορτισμένα θετικά ή αρνητικά και καλούνται **ιόντα**.

Η μονάδα του ηλεκτρικού φορτίου στο διεθνές σύστημα (SI) είναι το *Coulomb*, που ισούται με το συνολικό φορτίο $6,2 \cdot 10^{18}$ ηλεκτρονίων, δηλ. το φορτίο ενός ηλεκτρονίου είναι κατά προσέγγιση $1,602 \cdot 10^{-19}$ C. Τα ηλεκτρικά φορτία των άλλων φορτισμένων σωματιδίων είναι ακέραια πολλαπλάσια του στοιχειώδους αυτού φορτίου.

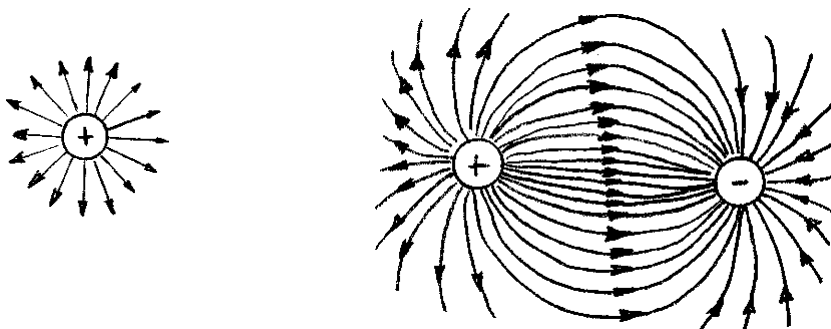
1.2.2 Ηλεκτρικό δυναμικό

Ο χώρος γύρω από ένα ηλεκτρικό φορτίο επηρεάζεται από την παρουσία του και δημιουργείται ένα ανυσματικό πεδίο δυνάμεων που ονομάζεται ηλεκτρικό πεδίο. Η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου σ' ένα σημείο του, ορίζεται ως η δύναμη που εξασκείται στη μονάδα του θετικού φορτίου q που βρίσκεται σ' αυτό το σημείο:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

1.1

Στο σχήμα 1.1 φαίνονται οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από δύο διατάξεις φορτίων:



Σχήμα 1.1 Δυναμικές γραμμές ηλεκτρικών πεδίων δύο διατάξεων φορτίου

Η μονάδα έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σύστημα SI είναι το Newton/C ή το Volt/m.

Το ηλεκτρικό πεδίο δεν περιγράφεται μόνο από το άνυσμα της έντασης αλλά επίσης και με ένα βαθμωτό μέγεθος, το *ηλεκτρικό δυναμικό* u . Το δυναμικό σ' ένα σημείο του χώρου, ορίζεται ως η ενέργεια ανά μονάδα φορτίου, που απαιτείται για να μεταφερθεί το φορτίο στο θεωρούμενο σημείο από κάποιο άλλο σημείο μηδενικού δυναμικού. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων του παραπάνω χώρου δείχνει την ενέργεια, που η μονάδα του φορτίου αποκτά ή χάνει, κατά τη μετακίνηση της από το ένα σημείο στο άλλο.

Η σχέση που συνδέει την ένταση με το δυναμικό είναι:

$$u_{AB} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad 1.2$$

όπου το ολοκλήρωμα 1.2 είναι ανεξάρτητο της διαδρομής l .

Η μονάδα δυναμικού στο σύστημα SI είναι το V (Volt) και είναι ίσο με Joule/Coulomb.

1.2.3 Ηλεκτρικό ρεύμα

Το ηλεκτρικό ρεύμα ορίζεται ως ο ρυθμός μιας συνισταμένης κίνησης φορτίων. Δηλαδή εάν στα άκρα ενός μεταλλικού αγωγού εφαρμοστεί μια διαφορά δυναμικού, τότε το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο έντασης \vec{E} δρα πάνω στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου και προκαλεί σ' αυτά συνισταμένη κίνηση με κατεύθυνση $-\vec{E}$. Αν από μια διατομή του αγωγού διέρχεται σε χρόνο dt φορτίο dq , τότε ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου είναι dq/dt και συνεπώς το ρεύμα ισούται με:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad 1.3$$

Η μονάδα του i είναι το A (Ampere), που ορίζεται ως το φορτίο ενός Coulomb που διέρχεται από μια διατομή σε χρόνο ενός sec. Θα πρέπει να σημειωθεί **ότι** ο πειραματικός προσδιορισμός του (A) γίνεται από τη δύναμη που δημιουργείται σε μακρείς παράλληλους αγωγούς όταν αυτοί διαρρέονται από ρεύμα. Εάν δύο παράλληλοι αγωγοί, μεγάλου μήκους, βρίσκονται σε απόσταση $1m$ και διαρρέονται από δύο ίσα ρεύματα ($i_a = i_b = i$), τότε επ' αυτών εξασκείται ελκτική δύναμη. Εάν η δύναμη αυτή είναι ίση με $2 \cdot 10^{-7} N/m$, τότε το ρεύμα του κάθε αγωγού ορίζεται ως $1A$.

Ένα άλλο μέγεθος που σχετίζεται με την ένταση του ρεύματος είναι η πυκνότητα του ρεύματος j .

Το άνυσμα της πυκνότητας ρεύματος, σε κάποιο σημείο, έχει τη διεύθυνση και τη φορά της κίνησης

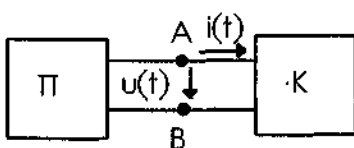
των θετικών φορτίων στο **συγκεκριμένο** σημείο. Η σχέση που συνδέει το ρεύμα και την πυκνότητα ρεύματος είναι:

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \vec{J} = \frac{di}{ds} \vec{n} \quad 1.4$$

όπου \vec{n} είναι το κάθετο άνωσμα στην επιφάνεια ds .

1.2.4 Ηλεκτρική ισχύς

Για τον ορισμό της ισχύος θα χρησιμοποιηθεί η παρακάτω διάταξη αποτελούμενη από ένα κύκλωμα Κ και μία πηγή Π:



Λόγω της πηγής τάσεως $u(t)$ εισέρχεται στο κύκλωμα ρεύμα εντάσεως $i(t)$. Το ρεύμα το οποίο εξέρχεται από το κύκλωμα Κ, στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας, είναι ίσο με το ρεύμα που εισέρχεται. Συνεπώς κατά τη μετακίνηση ενός στοιχειώδους φορτίου dq μεταξύ των άκρων A, B τάσης $u_{AB}(t) = u(t)$, καταναλώνεται ενέργεια, η οποία δίνεται σύμφωνα με τον ορισμό του δυναμικού, από τη σχέση:

$$dw = u(t) \cdot dq \quad 1.5$$

Επειδή η ισχύς είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας συνεπάγεται:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = u(t) \cdot i(t) \quad 1.6$$

Συνεπώς η στιγμιαία ισχύς που καταναλώνεται σε ένα ηλεκτρικό δίπολο είναι ίση με το γινόμενο της στιγμιαίας τάσεως που εφαρμόζεται στα άκρα του δίπολου $u(t)$ και του στιγμιαίου ρεύματος $i(t)$ που διέρχεται απ' αυτό. Η μονάδα ισχύος στο σύστημα SI είναι το W και είναι ίσο με Volt Ampere.

Η συνολική ενέργεια που καταναλώνεται σ' ένα ηλεκτρικό δίπολο για χρονικό διάστημα t είναι ίση με:

$$W = \int_0^t p(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau \quad 1.7$$

Στην περίπτωση σταθερής τάσης και ρεύματος, η ισχύς και η ενέργεια δίνονται από τις σχέσεις:

$$P = U \cdot I \quad \text{and} \quad W = U \cdot I \cdot t \quad 1.8$$

Μονάδα ενέργειας στο σύστημα SI είναι το *Joule* και είναι ίσο με $W \cdot \text{sec}$. Στην πράξη πολλές φορές χρησιμοποιείται η μονάδα της *kWh*:

$$1kWh = 1000 \cdot W \cdot h = 1000 \cdot 3600W \cdot \text{sec} = 36 \cdot 10^5 \cdot \text{Joule} \quad 1.9$$

1.3 Ιδανικά στοιχεία κυκλώματος - νόμος του Ohm

Η περιγραφή ηλεκτρικών συσκευών και κυκλωμάτων με κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα, που αποτελούνται από ορισμένα ιδανικά στοιχεία, με γνωστές "καθαρές" ιδιότητες, βοηθά στην απλοποίηση και κατανόηση της λειτουργίας του πραγματικού συστήματος. Τα ιδανικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: α) στα **παθητικά στοιχεία κυκλώματος** και β) στα **ενεργητικά στοιχεία κυκλώματος**.

1.3.1 Παθητικά στοιχεία κυκλώματος

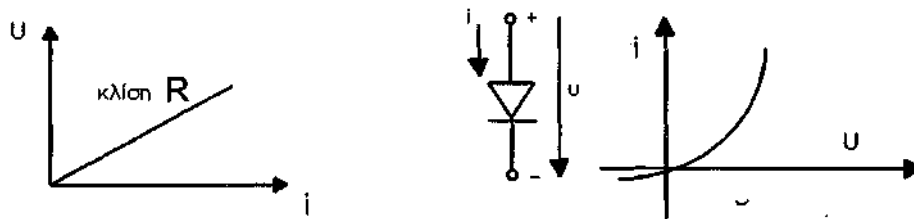
Αντιστάτης

Ο αντιστάτης είναι ένα στοιχείο, για το οποίο ισχύει ο νόμος του Ohm. Ο νόμος του Ohm είναι πειραματικός και σύμφωνα μ' αυτόν η τάση στους ακροδέκτες ενός αγωγού είναι ανάλογη προς την ένταση του ρεύματος η οποία το διαρρέει, ήτοι:

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad \text{ή} \quad i(t) = G \cdot u(t) \quad \text{όπου} \quad G = \frac{1}{R} \quad 1.10$$

Ο συντελεστής R καλείται αντίσταση, το δε αντίστροφο αυτής G καλείται αγωγιμότητα. Οι μονάδες στο σύστημα SI είναι για την αντίσταση το Ohm (Ω) και για την αγωγιμότητα το Siemens (S) ($1S=1\Omega^{-1}$).

Ο νόμος του Ohm προϋποθέτει αντίσταση R σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου t , της τάσης u και του ρεύματος i . Συνεπώς η σχέση που συνδέει τη τάση και το ρεύμα είναι μια ευθεία γραμμή όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2α.



Σχήμα 1.2 α) Χαρακτηριστική αντίστασης, β) Χαρακτηριστική διόδου

Υπάρχουν αρκετά στοιχεία τα οποία δεν ακολουθούν το νόμο του Ohm. Όπως δείχνεται στο σχήμα 1.2 β) η χαρακτηριστική μιας διόδου δεν είναι γραμμική. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσε το στοιχείο της διόδου να ονομασθεί μη γραμμικός αντιστάτης.

Ο αντιστάτης είναι στοιχείο στο οποίο καταναλίσκεται ενέργεια, που εμφανίζεται υπό μορφή θερμότητας. Η ισχύς η οποία καταναλίσκεται σ' ένα γραμμικό αντιστάτη είναι ίση με:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i(t)^2 = \frac{u(t)^2}{R} \quad 1.11$$

Η ωμική αντίσταση ενός αγωγού εξαρτάται από τις διαστάσεις του και από το υλικό του, και δίνεται από τη σχέση:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad 1.12$$

όπου l και S είναι το μήκος και η διατομή του αγωγού αντίστοιχα. Ο συντελεστής ρ ονομάζεται ειδική αντίσταση του υλικού και εξαρτάται κυρίως από το υλικό καθώς επίσης και από άλλες παραμέτρους, όπως είναι η θερμοκρασία. Η μονάδα του ρ στο σύστημα SI είναι το $\Omega \cdot m$. Στους αγωγούς, επειδή η διατομή τους εκφράζεται συνήθως σε mm^2 , χρησιμοποιείται στην πράξη η μονάδα $\Omega \cdot mm^2/m$.

Η αντίσταση ενός αγωγού μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία. Η αντίσταση των μετάλλων και των περισσότερων κραμάτων αυξάνεται με τη θερμοκρασία, ενώ η αντίσταση του άνθρακα και των ηλεκτρολυτών μειώνεται με τη θερμοκρασία. Είναι δυνατόν, σε ορισμένη περιοχή μεταβολής της θερμοκρασίας, να θεωρηθεί ότι η μεταβολή της αντίστασης είναι γραμμική. Η σχέση που δίνει τη μεταβολή της αντίστασης με τη θερμοκρασία είναι:

$$R_{\theta_2} = R_{\theta_1} \cdot [1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)] \quad 1.13$$

όπου $R_{\theta 1}$ και $R_{\theta 2}$ είναι οι τιμές της αντίστασης στις θερμοκρασίες θ_1 και θ_2 και α ο θερμοκρασιακός συντελεστής μεταβολής της αντίστασης.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει, για διάφορα μέταλλα, τις τιμές της ειδικής αντίστασης, ειδικής αγωγιμότητας (για θερμοκρασία περίπου 20°C), καθώς επίσης και τους συντελεστές θερμοκρασίας. Οι μικρές τιμές αντιστοιχούν σε μεγαλύτερο βαθμό καθαρότητας του μετάλλου.

Πίνακας 1.2

Υ λ ι κ ό	Ειδική αντίσταση ρ ($\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$)	Ειδική αγωγιμότητα k (S/m)	Συντελεστής θερμοκρασίας α ($^\circ\text{C}^{-1}$)
Άργυρος	0.0159...0.017	$5.9...6.3 \cdot 10^7$	$3.8 \cdot 10^{-3}$
Χαλκός	0.017...0.0178	$5.6...5.9 \cdot 10^7$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Αλουμίνιο	0.028...0.03	$3.3...3.6 \cdot 10^7$	$3.7 \cdot 10^{-3}$
Ψευδάργυρος	0.063	$1.6 \cdot 10^7$	$3.7 \cdot 10^{-3}$
Σίδηρος	0.09...0.15	$0.67...1.1 \cdot 10^7$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
Νικέλιο	0.071	$1.29 \cdot 10^7$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
Konstantan	0.49	$2.04 \cdot 10^6$	$-0.05 \cdot 10^{-3}$
Μαγγάνιο	0.43	$2.33 \cdot 10^6$	$0.01 \cdot 10^{-3}$
Αμορφος άνθρακας	35	$2.86 \cdot 10^4$	$-0.5 \cdot 10^{-3}$

Πυκνωτής

Το κύριο χαρακτηριστικό του πυκνωτή είναι η αποθήκευση ενέργειας με τη μορφή ηλεκτρικού φορτίου. Η τάση στα άκρα του πυκνωτή και το εναποθηκευμένο φορτίο σχετίζονται με μια καμπύλη στο επίπεδο (u, q) . Όπως και στον αντιστάτη, διακρίνουμε γραμμικούς και μη γραμμικούς πυκνωτές, καθώς επίσης σταθερούς και μεταβαλλόμενους σε συνάρτηση με το χρόνο πυκνωτές. Για ένα γραμμικό και σταθερό με το χρόνο πυκνωτή ισχύει:

$$q(t) = C \cdot u(t) \quad 1.14$$

όπου ο συντελεστής C είναι σταθερός και καλείται **χωρητικότητα** του πυκνωτή. Μονάδα της χωρητικότητας είναι το *Farad* (F) και είναι ίσο με *Coulomb/Volt* (συνήθως στην πράξη χρησιμοποιούνται τα υποπολλαπλάσια του F , όπως mF , pF , nF και μF). Το F είναι πολύ μεγάλη μονάδα και αυτό μπορεί εύκολα να φανεί εάν για παράδειγμα θελήσουμε να υπολογίσουμε πόση πρέπει να είναι η επιφάνεια των οπλισμών ενός πυκνωτή, χωρητικότητας

IF , με παράλληλους οπλισμούς που βρίσκονται σε απόσταση Imm και ο μεταξύ τους χώρος έχει αέρα. Χρησιμοποιώντας τη σχέση για τη χωρητικότητα του πυκνωτή:

$$C = \frac{A \cdot \epsilon_0}{d} \quad \text{όπου} \quad \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36 \pi}$$

προκύπτει ότι οι οπλισμοί πρέπει να έχουν επιφάνεια μεγαλύτερη από 112 km^2 .

Οι σχέσεις που συνδέουν την ένταση του ρεύματος και την τάση ενός πυκνωτή δίνονται από:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad \text{και} \quad u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) \cdot d(\tau) \quad 1.15$$

Από τις σχέσεις 1.15 συμπεραίνεται ότι

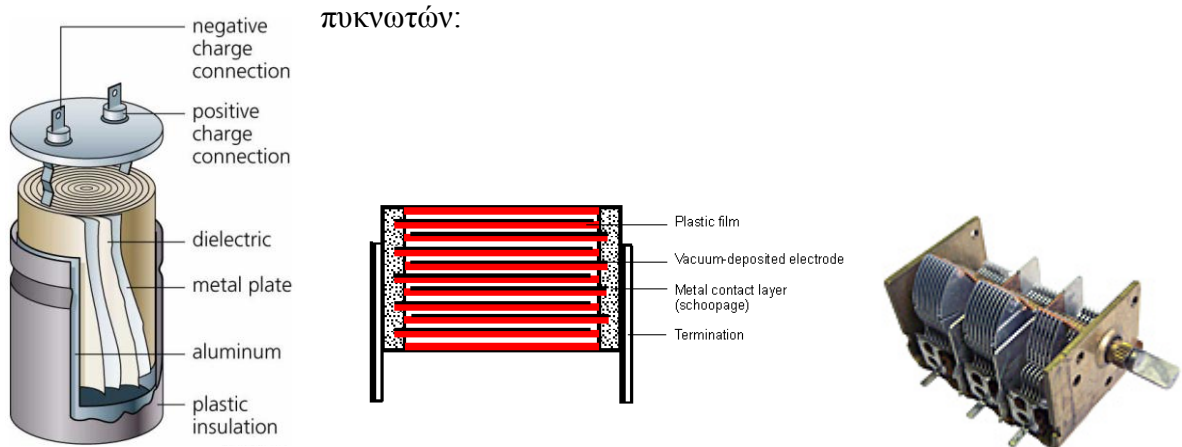
- α) η τάση στον πυκνωτή κατά το χρόνο t , εξαρτάται από την αρχική τιμή της τάσης $u(0)$, καθώς επίσης κι' από τις τιμές του ρεύματος, από την αρχική στιγμή μέχρι τη χρονική στιγμή t και
- β) εάν η επιβαλλόμενη τάση στις άκρες του πυκνωτή είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου), τότε το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή είναι μηδενικό και συνεπώς ο πυκνωτής δρα ως διακόπτης.

Η ενέργεια η οποία είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο ενός πυκνωτή, εφόσον ο ιδανικός πυκνωτής δεν καταναλώνει ενέργεια, είναι ίση με την ενέργεια η οποία δαπανήθηκε για να φτάσει ο πυκνωτής από μια, για παράδειγμα, αφόρτιστη κατάσταση σε μια κατάσταση φόρτισης με φορτίο $q(t)$ και τάση $u(t)$. Συνεπώς:

$$W(t)_c = \int_0^t u(\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot C \cdot \frac{du(\tau)}{d\tau} \cdot d\tau = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q(t)^2}{C} \quad 1.16$$

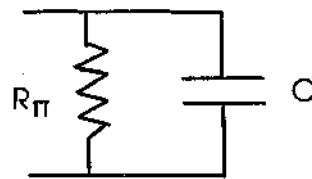
Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή μεταβάλλεται εάν ο χώρος μεταξύ των οπλισμών του πληρωθεί μ' ένα διηλεκτρικό υλικό όπως μίκα ή λάδι. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι αν μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο τοποθετηθεί διηλεκτρικό, εμφανίζονται σ' αυτό εξ' επαγωγής επιφανειακά φορτία που τείνουν να εξασθενήσουν το αρχικό πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό. Συνεπώς με την παρουσία του διηλεκτρικού, για έναν πυκνωτή φορτίου q , έχουμε μείωση της τάσης του u και άρα αύξηση της χωρητικότητας του C , όπως φαίνεται από τη σχέση 1.14. Ο λόγος της χωρητικότητας με διηλεκτρικό προς εκείνη χωρίς διηλεκτρικό καλείται σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ_σ του υλικού.

Στην πράξη, οι πυκνωτές κατασκευάζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να δίνουν τη μεγαλύτερη χωρητικότητα με το μικρότερο δυνατό όγκο. Στο σχήμα 1.3 φαίνονται διάφοροι τύποι



Σχήμα 1.3

Σ' έναν πραγματικό πυκνωτή έχουμε απώλειες ενέργειας λόγω ενός πολύ μικρού ρεύματος που διαρρέει το διηλεκτρικό και ονομάζεται ρεύμα διαρροής. Λόγω αυτού του ρεύματος προκύπτουν απώλειες διηλεκτρικού και απώλειες στους σπλισμούς, τις οποίες περιλαμβάνουμε στο ισοδύναμο κύκλωμα ενός πραγματικού πυκνωτή με μια αντίσταση, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4

Ως συντελεστής απωλειών ορίζεται ο λόγος της ισχύος του ωμικού μέρους (ισχύς απωλειών) προς την ισχύ του χωρητικού μέρους και συμβολίζεται με D . Από το ισοδύναμο κύκλωμα ενός πραγματικού πυκνωτή, σχήμα 1.4, προκύπτει:

$$D = \frac{1}{R_{\pi} \cdot \omega \cdot C} \quad 1.17$$

Επίσης μια άλλη παράμετρος που χαρακτηρίζει την πραγματική συμπεριφορά ενός πυκνωτή από την ιδανική είναι η διηλεκτρική διάσπαση. Όταν η τάση στους σπλισμούς ξεπεράσει μια καθορισμένη τιμή, οι δεσμοί των ηλεκτρονίων στα άτομα του υλικού διασπώνται και ρεύμα υψηλής εντάσεως διαρρέει τον πυκνωτή. Η τιμή της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου στην οποία συμβαίνει η ηλεκτρική διάσπαση του διηλεκτρικού είναι γνωστή ως διηλεκτρική αντοχή (μετράται σε V/cm).

Οι πυκνωτές ταξινομούνται κυρίως σύμφωνα με το διηλεκτρικό που περιέχουν. Κάποιοι κοινοί τύποι πυκνωτών είναι α) πυκνωτής χαρτιού με λάδι, β) πυκνωτές πλαστικού φύλλου, γ) πυκνωτές μίκας, δ) κεραμικοί πυκνωτές και ε) ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές. Χαρακτηριστική δομή παρουσιάζει ο ηλεκτρολυτικός πυκνωτής που χρησιμοποιείται κυρίως στη κατασκευή τροφοδοτικών συνεχούς ρεύματος και στο φραγμό της DC συνιστώσας σημάτων. Βασικά υπάρχουν δύο τύποι ηλεκτρολυτικών πυκνωτών: ο τύπος αλουμινίου του οποίου ο σπλισμός είναι λεπτά φύλλα αλουμινίου εμβαπτισμένα σε αγώγιμη ηλεκτρολυτική διάλυση και ο δεύτερος τύπος είναι ο πυκνωτής τανταλίου. Το διηλεκτρικό σχηματίζεται χημικά από λεπτό μονωτικό φιλμ στην επιφάνεια του ενός ή και των δύο σπλισμών. Η διηλεκτρική αντοχή των φιλμ μπορεί να φθάσει και μέχρι 10^7V/cm και έτσι η αποθηκευμένη ενέργεια ανά μονάδα όγκου μπορεί να είναι πολύ μεγάλη.

Πηνίο

Το κύριο χαρακτηριστικό του πηνίου είναι να αποθηκεύει ενέργεια με τη μορφή μαγνητικού πεδίου. Το ρεύμα $i(t)$ που διαρρέει το πηνίο και η εξ' αυτού προκύπτουσα πεπλεγμένη ροή $\psi(t)$ ¹ σχετίζονται με μια καμπύλη στο επίπεδο (i, ψ) . Όπως και στα προηγούμενα στοιχεία, διακρίνουμε γραμμικά και μη γραμμικά πηνία, καθώς επίσης σταθερά και μεταβαλλόμενα σε συνάρτηση με το χρόνο πηνία. Για ένα γραμμικό και σταθερό με το χρόνο πηνίο ισχύει:

$$\psi(t) = L \cdot i(t)$$

1.18

όπου L σταθερός συντελεστής, ανεξάρτητος των i και ψ , καλούμενος συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου. Η μονάδα της αυτεπαγωγής είναι το *henry* (H) και ισούται με $V \text{ sec/A}$ ή Wb/A .

Η σχέση που συνδέει την ένταση του ρεύματος και την τάση ενός πηνίου βρίσκεται από το συνδυασμό της σχέσεως 1.18 και του νόμου του της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής του Faraday.

¹ Πεπλεγμένη ροή ενός πηνίου ορίζεται ως το άθροισμα των ροών που διέρχονται από κάθε σπείρα του πηνίου και ορίζεται από τη σχέση:

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^w \phi_n(t)$$

όπου w είναι ο αριθμός των τυλιγμάτων του πηνίου και $\phi_n(t)$ η ροή στο τύλιγμα n .

Στην περίπτωση που το ϕ_n θεωρηθεί ίδιο για όλες τις σπείρες του πηνίου η πεπλεγμένη ροή προκύπτει από τη σχέση:

$$\psi(t) = w \cdot \phi_n(t)$$

Σύμφωνα μ' αυτόν το νόμο η τάση που επάγεται σ' ένα κύκλωμα είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της πεπλεγμένης ροής:

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt} \quad 1.19$$

Από τις σχέσεις 1.18 και 1.19 προκύπτει:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad \text{και} \quad i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau \quad 1.20$$

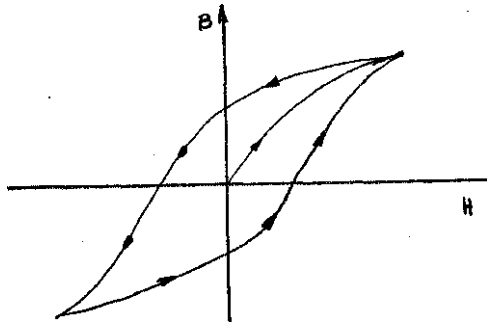
Από τις σχέσεις 1.20 συμπεραίνεται ότι α) το ρεύμα στο πηνίο εξαρτάται από την αρχική του τιμή $i(0)$, καθώς επίσης και από όλες τις τιμές της τάσεως, από την αρχική στιγμή μέχρι τη χρονική στιγμή t και β) εάν το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι σταθερό (ανεξάρτητο του χρόνου), τότε η τάση στο πηνίο είναι μηδενική και συνεπώς το πηνίο δρα ως βραχυκύκλωμα.

Η ενέργεια η οποία είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο ενός πηνίου, εφόσον το ιδανικό πηνίο δεν καταναλώνει ενέργεια, είναι ίση με την ενέργεια η οποία δαπανήθηκε για να φτάσει από μια π.χ. αφόρτιστη κατάσταση (μηδενική πεπλεγμένη μαγνητική ροή) σε μια κατάσταση φόρτισης με πεπλεγμένη μαγνητική ροή $\psi(t)$ και ρεύμα εντάσεως $i(t)$. Συνεπώς:

$$W(t)_c = \int_0^t u(\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t i(\tau) \cdot L \cdot \frac{di(\tau)}{d\tau} \cdot d\tau = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi(t)^2}{L} \quad 1.21$$

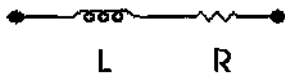
Τα πηνία στην πράξη, έχουν συνήθως πυρήνα από μαγνητικό υλικό για την αύξηση του συντελεστή αυτεπαγωγής. Στα σιδηρομαγνητικά υλικά, όπως ο σίδηρος, ο χαλκός, το νικέλιο, η πυκνότητα της μαγνητικής ροής B (μαγνητική επαγωγή) δεν είναι ανάλογη προς την ένταση του μαγνητικού πεδίου H . Συνεπώς η Χαρακτηριστική καμπύλη του πηνίου δεν είναι ευθεία, αλλά για μεγάλες εντάσεις του ρεύματος εμφανίζεται κορεσμός (σχήμα 1.5)

Επίσης στα σιδηρομαγνητικά υλικά εμφανίζεται και το φαινόμενο της υστέρησης με αποτέλεσμα να έχουμε το βρόχο υστέρησης, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.5. Παρατηρείται ότι ο ορισμός του πηνίου δεν καλύπτει την περίπτωση της μαγνητικής υστέρησης, διότι στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει μια καμπύλη στο επίπεδο (i, ψ) αλλά οικογένεια καμπυλών.



Σχήμα 1.5

Σ' ένα **πραγματικό** πηνίο παρουσιάζονται απώλειες πυρήνα, λόγω του φαινομένου υστέρησης και ωμικές απώλειες λόγω της ωμικής αντίστασης του τυλίγματος του. Συνεπώς το ισοδύναμο του κύκλωμα παριστάνεται με μία ιδανική αυτεπαγωγή σε σειρά με μία ωμική αντίσταση:



Σχήμα 1.6

Ορίζεται συντελεστής ποιότητας ενός πηνίου Q , ο λόγος:

$$Q = \frac{L\omega}{R} \quad 1.22$$

Ο συντελεστής ποιότητας συνήθως προσδιορίζεται από τους κατασκευαστές, αντί της αντίστασης του πηνίου. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του Q τόσο περισσότερο το πηνίο πλησιάζει την ιδανική κατάσταση.

1.3.2 Ενεργητικά στοιχεία κυκλώματος

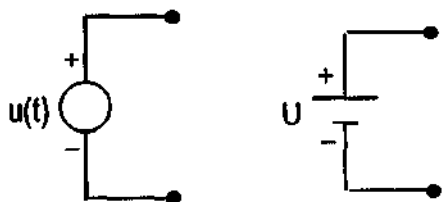
Ανεξάρτητη πηγή τάσης

Ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών καλείται ανεξάρτητη πηγή τάσης ή ιδανική πηγή τάσης ή και απλώς πηγή τάσης, εάν επιβάλλει καθορισμένη τάση $u(t)$ στους ακροδέκτες ενός οιοδήποτε κυκλώματος με το οποίο είναι συνδεδεμένη. Από τον ορισμό αυτό έπεται ότι η τάση στους ακροδέκτες της πηγής τάσης είναι ανεξάρτητη της έντασης του ρεύματος που τη διαρρέει και του κυκλώματος με το οποίο είναι συνδεδεμένη.

Εάν η συνάρτηση $u(t)$ (είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου), η πηγή λέγεται συνεχούς τάσης. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν ιδανικές πηγές τάσης. Παρ' όλα αυτά διάφορα είδη πηγών

μπορούν να εξομοιωθούν, για μια περιοχή τιμών της παραγόμενης έντασης, με πηγές τάσης. Για παράδειγμα, ως πηγές συνεχούς τάσης θα μπορούσαν να θεωρηθούν οι συσσωρευτές και ως πηγές εναλλασσόμενης τάσης οι οικιακές παροχές.

Στο σχήμα 1.7α δίνεται η σχηματική παράσταση μιας πηγής τάσης και στο σχήμα 1.7β δίνεται η σχηματική παράσταση μιας πηγής συνεχούς τάσης.



Σχήμα 1.7

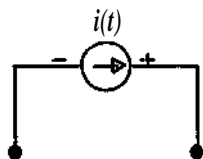
Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος

Ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών καλείται ανεξάρτητη πηγή ρεύματος ή ιδανική πηγή ρεύματος ή και απλώς πηγή ρεύματος, εάν επιβάλλει καθορισμένη ένταση ρεύματος $i(t)$ στους ακροδέκτες ενός οιοδήποτε κυκλώματος με το οποίο είναι συνδεδεμένη.

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι η παρερχόμενη από την πηγή ένταση ρεύματος, είναι ανεξάρτητη της τάσης στους ακροδέκτες της πηγής και του κυκλώματος με το οποίο είναι συνδεδεμένη. Εάν η συνάρτηση $i(t)$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου), η πηγή λέγεται συνεχούς ρεύματος.

Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν ιδανικές πηγές ρεύματος. Παρ' όλα αυτά διάφορα είδη πηγών μπορούν να εξομοιωθούν, για μια περιοχή τιμών της παραγόμενης τάσης, με πηγές ρεύματος. Για παράδειγμα, ως πηγές ρεύματος θα μπορούσαν να θεωρηθούν το τρανζίστορ και οι φωτοβολταϊκές μονάδες για συγκεκριμένη περιοχή φορτίων.

Στο σχήμα 1.8 δίνεται η σχηματική παράσταση μιας πηγής ρεύματος:



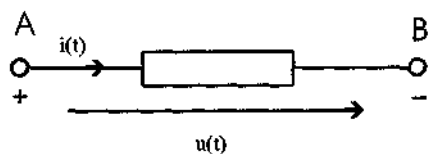
Σχήμα 1.8

1.4 Φορές αναφοράς - Τοπολογία κυκλωμάτων

1.4.1 Φορές αναφοράς

Θεωρούμε στοιχείο δύο ακροδεκτών A και B. Για τους υπολογισμούς είναι απαραίτητο να καθοριστούν φορές αναφοράς για το ρεύμα και την τάση στο στοιχείο. Η φορά αναφοράς για το

ρεύμα δίνεται με ένα βέλος, ενώ για τη τάση, ή με τα πρόσημα (+,-), ή με ένα βέλος από το + προς το - (σχήμα 1.9).



Σχήμα 1.9

Συμβατικά θεωρούμε ότι η ένταση του ρεύματος $i(t)$ κατά τη χρονική στιγμή t είναι θετική, εάν μια ροή θετικών φορτίων εισέρχεται από τον ακροδέκτη A και εξέρχεται από τον ακροδέκτη B (ή ροή ηλεκτρονίων εισέρχεται από το B και εξέρχεται από το A). Επίσης συμβατικά θεωρούμε ότι η τάση μεταξύ των σημείων A και B κατά τη χρονική στιγμή t , είναι θετική, εάν το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο A είναι μεγαλύτερο του ηλεκτρικού δυναμικού στο σημείο B. Η φορά αναφοράς της τάσης καθορίζεται με βέλος, έτσι ώστε να δείχνει την πτώση τάσης και συνεπώς η ακμή αυτού να βρίσκεται, στο σημείο με το αρνητικό πρόσημο.

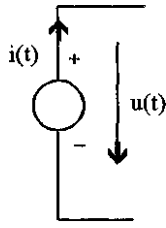
Ένας άλλος τρόπος καθορισμού φοράς αναφοράς για τις τάσεις και τα ρεύματα είναι με τη χρήση γραμμμάτων. Η τάση u_{AB} παριστάνει τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των A και B, δηλαδή $u_{AB} = u_A - u_B$. Επίσης με το σύμβολο i_{AB} παριστάνουμε το θετικό ρεύμα (ροή θετικών φορτίων) μεταξύ των A και B.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει:

$$u_{AB} = -u_{BA} \quad \text{και} \quad i_{AB} = -i_{BA} \quad 1.23$$

Επειδή σ' ένα κύκλωμα οι φορές αναφοράς που ορίζουμε για τις τάσεις και τα ρεύματα είναι αυθαίρετες, οι αλγεβρικές τιμές οι οποίες προκύπτουν, προκειμένου για κυκλώματα συνεχούς ρεύματος, από την επίλυση του κυκλώματος έχουν πρόσημο + ή -. Η φορά αναφοράς παριστάνει την πραγματική κατάσταση μόνο όταν η προκύπτουσα, με βάση την εκλεγείσα φορά, αλγεβρική τιμή είναι θετική. Στα κυκλώματα εναλλασσομένου ρεύματος, όπου η τάση και το ρεύμα είναι ανύσματα, ανάλογα με τη φορά η οποία επιλέγεται, προκύπτουν και η γωνίες των ανυσμάτων. Δηλαδή αντίθετες φορές θα δώσουν ανύσματα με το ίδιο μέτρο, αλλά διαφορά φάσης 180° .

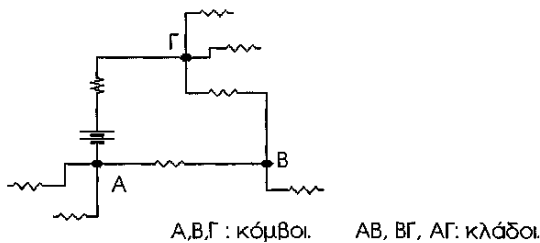
Οι παραπάνω φορές για το ρεύμα και την τάση θα μπορούσε να ήταν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη. Παρ' όλα αυτά κατά τη χρήση τους στην επίλυση ενός κυκλώματος χρησιμοποιούνται συνήθως οι συζευγμένες φορές αναφοράς κατά τέτοιο τρόπο ώστε, στα παθητικά στοιχεία ένα θετικό ρεύμα να εισέρχεται στον ακροδέκτη που φέρει το πρόσημο +, όπως δείχνεται και στο σχήμα 1.9, ενώ στις πηγές ενέργειας το ρεύμα να εξέρχεται από το σημείο που φέρει το πρόσημο +, όπως δείχνεται στο σχήμα 1.10.



Σχήμα 1.10

1.4.2 Τοπολογία κυκλωμάτων

Κόμβος ενός κυκλώματος ορίζεται ένα σημείο στο οποίο καταλήγουν τουλάχιστον τρεις αγωγοί. Κατ' επέκταση θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως κόμβο και ένα σημείο στο οποίο καταλήγουν δύο αγωγοί. Κλάδος ενός κυκλώματος είναι ένα τμήμα του μεταξύ δύο κόμβων.



Σχήμα 1.11

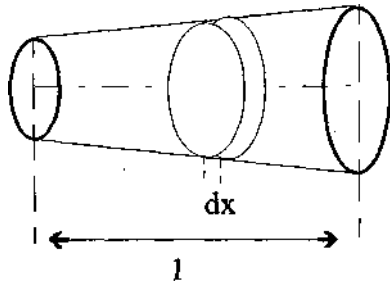
Κάθε κλειστή τροχιά, που αναχωρεί από ένα κόμβο και καταλήγει σ' αυτόν, διαρχόμενη μόνο μια φορά από κάθε κλάδο, καλείται βρόχος. Κλάδοι συνδέσμου ή συμπληρωματικοί κλάδοι ενός δέντρου καλούνται όλοι οι κλάδοι του κυκλώματος που δεν ανήκουν στο υπόψη δέντρο.

1.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν:

- η αντίσταση ενός αγωγού που έχει σχήμα κώνου μήκους l και ακτίνες βάσεων r_1 και r_2 , εάν το υλικό του είναι χαλκός,
- για $r_1=1cm$, $r_2=4cm$ και $l=2m$ να βρεθεί η καταναλωτική ισχύς εάν η τάση του αγωγού στα άκρα του είναι ίση με $0,2mV$, και
- να υπολογιστεί η αντίσταση του αγωγού στους $100^\circ C$.



Λύση

α) Η αντίσταση του στοιχειώδους τμήματος του κώνου πάχους dx δίνεται από τη σχέση:

$$dR = \rho \cdot \frac{dx}{S_x} = \rho \cdot \frac{dx}{\pi \cdot r_x^2} = \rho \cdot \frac{dx}{\pi \cdot \left[\frac{(1-x) \cdot r_1 + x \cdot r_2}{l} \right]^2}$$

συνεπώς για όλο το μήκος του αγωγού, η αντίσταση θα είναι ίση με:

$$R = \int_0^l dR = \int_0^l \rho \cdot \frac{dx}{\pi \cdot \left[\frac{(1-x) \cdot r_1 + x \cdot r_2}{l} \right]^2} = \rho \cdot \frac{l}{\pi \cdot r_1 \cdot r_2}$$

β) από τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας την ειδική αντίσταση για το χαλκό από τον πίνακα 1.2 προκύπτει:

$$R = 0,017 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m} \cdot \frac{2m}{\pi \cdot 10mm \cdot 40mm} = 2,7 \cdot 10^{-5} \Omega$$

οπότε η ισχύς που καταναλίσκεται στην αντίσταση είναι ίση με:

$$P = \frac{u^2}{R} = \frac{(2 \cdot 10^{-3} V)^2}{2,7 \cdot 10^{-5} \Omega} = 0,15 W$$

γ) χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.13 και τον πίνακα 1.2 προκύπτει:

$$R_{\theta_1} = R_{\theta_2} \cdot [1 + \alpha \cdot (\theta_2 - \theta_1)] = 2,7 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot [1 + 3,9 \cdot 10^{-3} (100 - 20)] = 3,54 \cdot 10^{-5} \Omega$$

Παράδειγμα 2

Μία αντίσταση από αλουμίνιο καταναλώνει $25W$ ισχύ όταν τροφοδοτείται από πηγή τάσης $50V$ στους $20^\circ C$. Να υπολογιστεί το ρεύμα σε μία δεύτερη αντίσταση η οποία

είναι από χαλκό, έχει την ίδια αντίσταση όπως και η πρώτη και καταναλώνει την τετραπλάσια ισχύ απ' ότι η πρώτη.

Λύση

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$R_1 = \frac{u^2}{P} = \frac{50^2}{25} = 100\Omega = R_2$$

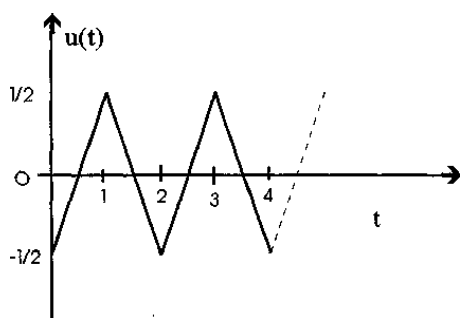
$$I_2^2 \cdot R_2 = 4 \cdot P \Rightarrow I_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 25}{100}} = 1A$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει ένα **α)** πυκνωτή και **β)** πηνίο τα οποία συνδέονται με πηγή τάσης με τις παρακάτω κυματομορφές:

1) $u(t) = u_o \cos(\omega t + \varphi)$ και

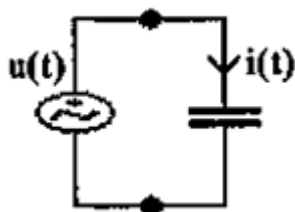
2) η $u(t)$ έχει την πριονωτή μορφή του σχήματος:



Λύση

α1)

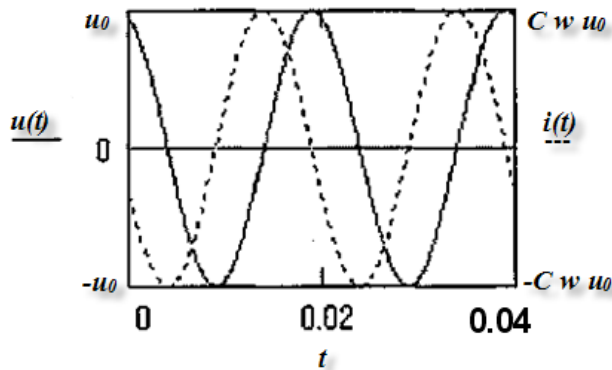
Από τη σχέση



1.15 προκύπτει:

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt}(u_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)) = C \cdot \omega \cdot u_0 \cdot (-\sin(\omega t + \phi)) = C \cdot \omega \cdot u_0 \cdot \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Στο παρακάτω σχήμα δείχνονται οι κυματομορφές της τάσης και του ρεύματος.



α2)

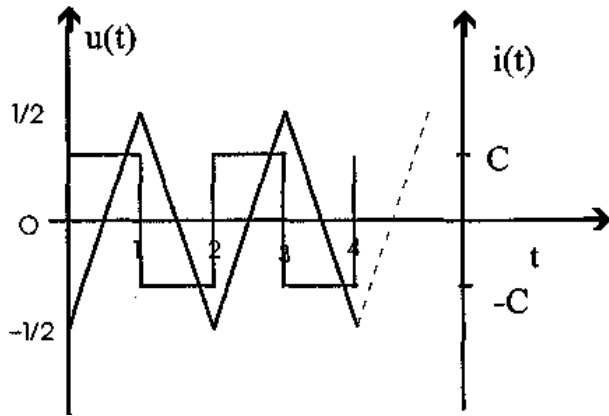
Η πριονωτή μορφή της τάσης μπορεί να εκφραστεί με τις σχέσεις:

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + t & \text{για } 0 \leq t < 1 \\ \frac{3}{2} - t & \text{για } 1 \leq t < 2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ A \pm t \end{cases}$$

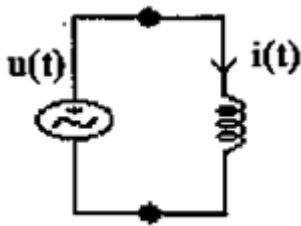
Το ρεύμα θα προκύψει χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.15. Συνεπώς

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt}(A \pm t) = \pm C$$

Στο παρακάτω σχήμα δείχνονται οι κυματομορφές του $u(t)$ και του $i(t)$:



β1)

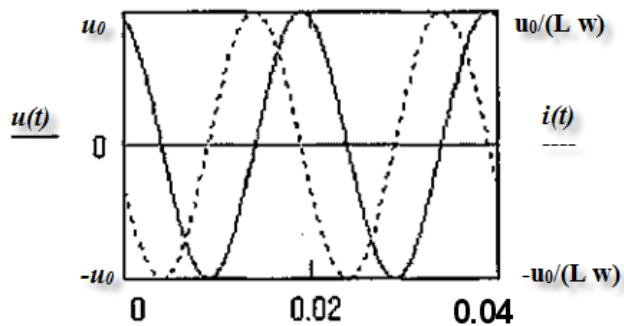


Από τη σχέση 1.20 προκύπτει

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t (u_0 \cdot \cos(\omega\tau + \phi)) d\tau =$$

$$= \frac{u_0}{L \cdot \omega} \sin(\omega t + \phi) = \frac{u_0}{L \cdot \omega} \cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})$$

Στο παρακάτω σχήμα δείχνονται οι κυματομορφές του $u(t)$ και του $i(t)$:



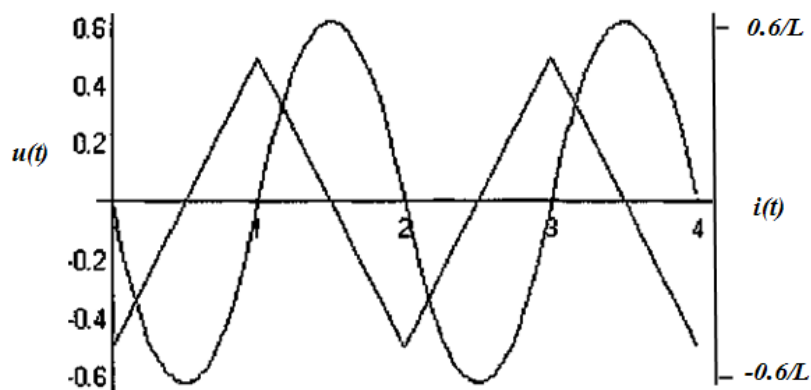
β2)

Η πριονωτή μορφή της τάσης μπορεί να εκφραστεί με τις σχέσεις που σημειώνονται στην

(α2). Συνεπώς το ρεύμα που προκύπτει χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.20 είναι ίσο με:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{1}{L} \left(-\frac{1}{2}t + \frac{t^2}{2} \right) & \text{για } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{L} \left(\frac{3}{2}t - \frac{t^2}{2} - 1 \right) & \text{για } 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{L} \left(-\frac{5}{2}t + \frac{t^2}{2} + 3 \right) & \text{για } 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

Στο παρακάτω σχήμα δείχνονται οι κυματομορφές του $u(t)$ και του $i(t)$:



Κεφάλαιο 2

Γενικές μέθοδοι ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων

2.1 Γενικά

Το κύριο αντικείμενο κατά τους υπολογισμούς των ηλεκτρικών κυκλωμάτων είναι ο προσδιορισμός των εντάσεων των ρευμάτων που διαρρέουν τους διάφορους κλάδους του κυκλώματος και των διαφορών δυναμικού (τάσεων) μεταξύ των κόμβων του κυκλώματος, δεδομένων των παθητικών και ενεργών στοιχείων του κυκλώματος.

Οι βασικές εξισώσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται προκύπτουν από τους νόμους του Kirchhoff. Οι υπολογισμοί όμως μπορούν να απλουστευθούν εφαρμόζοντας ορισμένα θεωρήματα, τα οποία θα αναλυθούν παρακάτω. Οι νόμοι και τα θεωρήματα εφαρμόζονται τόσο στο συνεχές όσο και στο εναλλασσόμενο ρεύμα. Η ανάλυση τους θα γίνει στο συνεχές, ενώ η εφαρμογή τους θα καταδειχτεί με παραδείγματα και στο συνεχές και στο εναλλασσόμενο ρεύμα.

2.2 Οι νόμοι του Kirchhoff

Οι νόμοι του Kirchhoff είναι δύο. Ο πρώτος νόμος ή **νόμος των κόμβων** και ο δεύτερος νόμος ή **νόμος των βρόχων**.

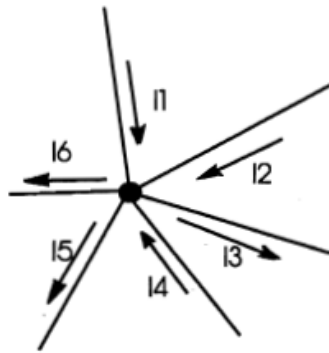
Ο πρώτος νόμος μας λέει ότι το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ρευμάτων σ' ένα κόμβο του κυκλώματος, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, είναι ίσο με μηδέν. Δηλαδή ισχύει:

$$\sum_i I_i = 0$$

2.1

Ο πρώτος νόμος του Kirchhoff πηγάζει από την αρχή διατήρησης της ποσότητας του ηλεκτρισμού. Συνεπώς σε κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει η ποσότητα ηλεκτρισμού η εισερχόμενη σε ένα κόμβο να είναι ίση με την

ποσότητα ηλεκτρισμού που εξέρχεται από αυτόν τον κόμβο.



Για τον παρακάτω κόμβο και σύμφωνα με τις φορές των ρευμάτων που έχουν παρθεί, εφαρμόζοντας τον πρώτο νόμο του Kirchhoff ισχύει:

$$I_1 + I_2 + I_4 - I_3 - I_5 - I_6 = 0$$

Ο δεύτερος νόμος μας λέει ότι **το αλγεβρικό άθροισμα όλων των τάσεων σ' ένα βρόχο του κυκλώματος, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, είναι ίσο με μηδέν**. Δηλαδή ισχύει:

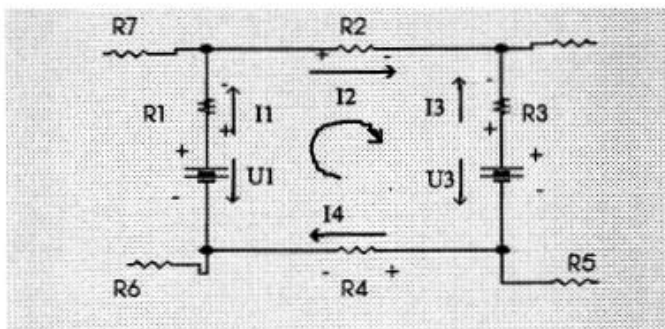
$$\sum_i U_i = 0$$

2.2

Ο δεύτερος νόμος του Kirchhoff πηγάζει από την αρχή του αστροβίλου του ηλεκτρικού πεδίου (δηλαδή: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$). Συνεπώς σε κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών δυναμικού μεταξύ σημείων που σχηματίζουν κλειστό δρόμο (βρόχο), να είναι ίσο με μηδέν.

Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Kirchhoff σε ένα βρόχο γίνεται ως εξής: Επιλέγονται οι φορές των ρευμάτων στους διάφορους κλάδους του βρόχου, κατόπιν σημειώνονται οι τάσεις στα παθητικά στοιχεία, χρησιμοποιώντας συνεζευγμένες φορές και τέλος επιλέγεται μία φορά (αυθαίρετα) στο βρόχο η οποία θεωρείται θετική. Κατά την αναγραφή των τάσεων στην εξίσωση θεωρούμε ως θετικές τις τάσεις (ενεργητικών ή παθητικών στοιχείων) όταν η εκλεγείσα ως θετική φορά στο βρόχο εξέρχεται από το σημείο + των τάσεων, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λαμβάνονται με το σημείο -.

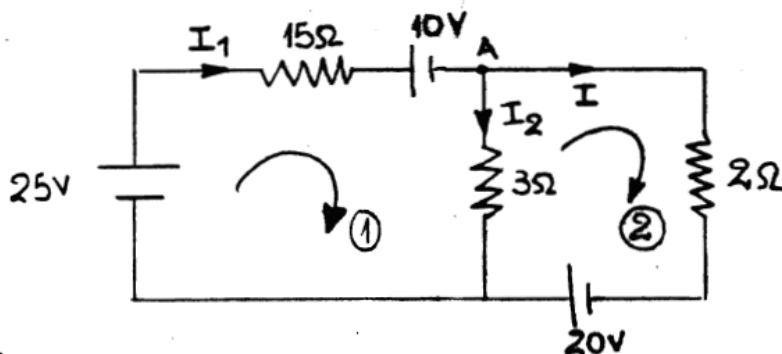
Στον παρακάτω βρόχο και σύμφωνα με τις φορές των ρευμάτων που έχουν παρθεί, εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Kirchhoff ισχύει:



$$U_1 - U_3 - U_{R1} - U_{R2} + U_{R3} - U_{R4} = 0$$

Παραδείγματα

2.1 Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθεί το ρεύμα I στην αντίσταση των $2\ \Omega$ και η τάση U_{AB} χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Kirchhoff



Λύση

Για τον κόμβο A ισχύει: $I_1 - I_2 - I = 0$

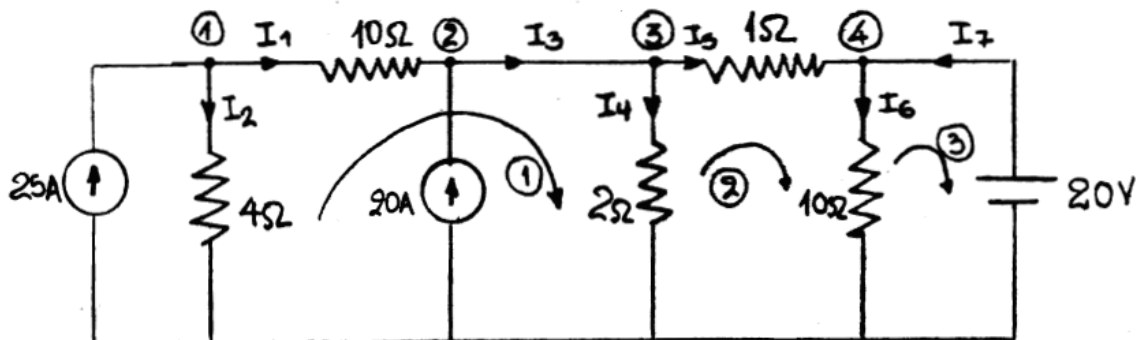
Για το βρόχο 1 ισχύει: $25 - 10 - 15I_1 - 3I_2 = 0 \Rightarrow 15I_1 + 3I_2 = 15$

Για το βρόχο 2 ισχύει: $20 - 2I + 3I_2 = 0 \Rightarrow -3I_2 + 2I = 20$

Από τις παραπάνω τρεις εξισώσεις προκύπτει:

$I_1 = 1,667\text{A}$, $I_2 = -3,333\text{A}$, $I = 5\text{A}$ και $U_{AB} = I_2 \cdot 3\Omega = -10\text{V}$

2.2 Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα ρεύματα $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$ χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Kirchhoff :



Λύση

Αφού οι άγνωστοι είναι 7 χρειάζονται επτά εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν εφαρμόζοντας τους νόμους του Kirchhoff στους κόμβους 1,2,3,4 και στους βρόχους 1,2,3:

κόμβος 1: $25 = I_1 + I_2$

κόμβος 2: $I_1 + 20 = I_3$

κόμβος 3: $I_3 = I_4 + I_5$

κόμβος 4: $I_5 + I_7 = I_6$

βρόχος 1: $4 \cdot I_2 - 10 \cdot I_1 - 2 \cdot I_4 = 0$

βρόχος 2: $-I_5 - 10 \cdot I_6 + 2 \cdot I_4 = 0$

βρόχος 3 $-20 + 10 \cdot I_6 = 0$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν οι λύσεις:

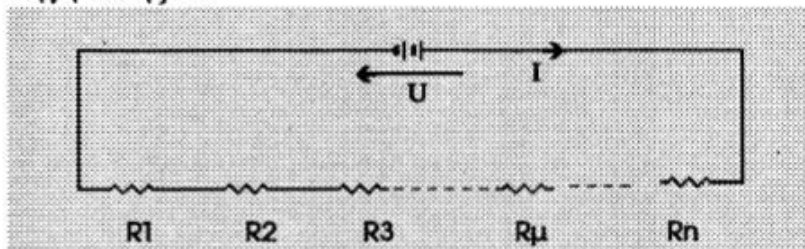
$I_1=5A,$ $I_2=20A,$ $I_3=25A,$ $I_4=15A,$ $I_5=10A,$ $I_6=2A,$
 $I_7=-8A.$

2.3 Σύνδεση στοιχείων σε σειρά

Συνήθως στην πράξη τα διάφορα στοιχεία ενός ηλεκτρικού κυκλώματος συνδέονται σε σειρά, παράλληλα ή μικτά. Από τους νόμους του Kirchhoff συμπεραίνεται εύκολα ότι τα στοιχεία που είναι συνδεδεμένα σε σειρά διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, ενώ τα στοιχεία που είναι συνδεδεμένα παράλληλα έχουν την ίδια τάση.

Αντιστάσεις σε σειρά

Έστω το κύκλωμα που δείχνεται στο σχήμα 2.1, όπου υπάρχουν οι αντιστάσεις R_1, R_2, \dots, R_n συνδεδεμένες σε σειρά και τροφοδοτούμενες από μία πηγή τάσης U :



Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Kirchhoff ισχύει:

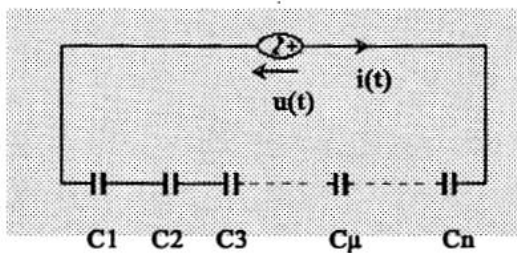
$$U = \sum_{i=1}^n I_i R_i = I \sum_{i=1}^n R_i \Rightarrow \frac{U}{I} = \sum_{i=1}^n R_i \Rightarrow R_{\text{ολ.}} = \sum_{i=1}^n R_i \quad 2.3$$

Από τη σχέση 2.3 εξάγεται ότι η τιμή της αντίστασης που είναι ισοδύναμη με ένα σύνολο αντιστάσεων συνδεδεμένων σε σειρά, είναι ίση με το άθροισμα αυτών. Εάν έχουμε n όμοιες αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά η συνολική αντίσταση θα είναι ίση με $n \cdot R$.

Πυκνωτές σε σειρά

Έστω το κύκλωμα που δείχνεται στο σχήμα 2.2, όπου υπάρχουν οι πυκνωτές C_1, C_2, \dots, C_n συνδεδεμένοι σε σειρά και τροφοδοτούμενοι από μία

πηγή τάσης:



Από τις σχέσεις 1.15 και εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Kirchhoff προκύπτει:

$$u(t) = u_{c_1}(t) + u_{c_2}(t) + \dots + u_{c_n}(t) \Rightarrow$$

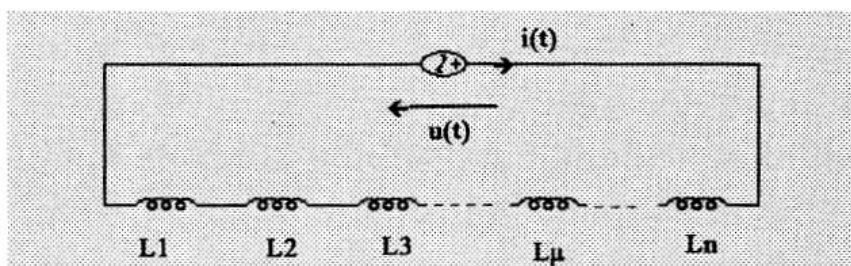
$$\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{C_1} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(\tau) d\tau + \dots + \frac{1}{C_n} \int_0^t i(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

2.4

Πηνία σε σειρά

Έστω το κύκλωμα που δείχνεται στο σχήμα 2.3, όπου υπάρχουν n πηνία συνδεδεμένα σε σειρά και τροφοδοτούμενα από μία πηγή τάσης:



Από τις σχέσεις 1.19 και εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Kirchhoff προκύπτει:

$$u(t) = u_{L_1}(t) + u_{L_2}(t) + \dots + u_{L_n}(t) \Rightarrow$$

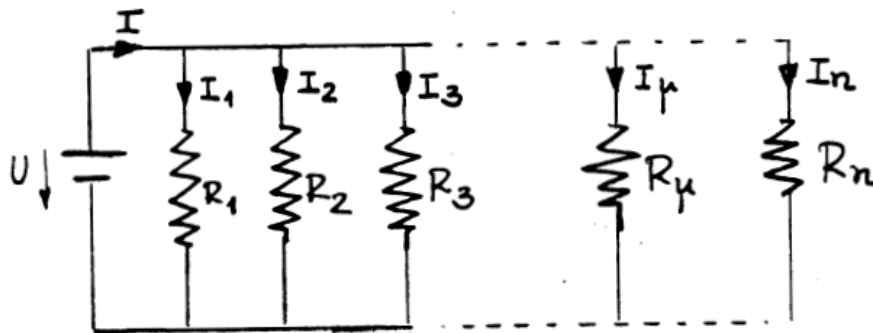
$$L \frac{di(t)}{dt} = L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} + \dots + L_n \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$L = \sum_{i=1}^n L_i$$

2.5

Αντιστάσεις παράλληλα

Έστω το κύκλωμα που δείχνεται στο σχήμα 2.4, όπου υπάρχουν n αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα και τροφοδοτούμενες από μία πηγή τάσης:



Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Kirchhoff ισχύει:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{U}{R_i} \Rightarrow \frac{U}{R_{\text{ολ.}}} = \sum_{i=1}^n \frac{U}{R_i} \Rightarrow \frac{1}{R_{\text{ολ.}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

2.6

Από τη σχέση 2.6 εξάγεται ότι εάν έχουμε n παράλληλες αντιστάσεις, η συνολική αντίσταση θα είναι μικρότερη της μικρότερης των παραλλήλων αντιστάσεων. Εάν οι αντιστάσεις είναι ίδιες, τότε ο παράλληλος συνδυασμός θα

δώσει συνολική αντίσταση ίση με $\frac{R}{n}$.

Πυκνωτές παράλληλα

Χωρίς απόδειξη δίνεται η σχέση που δίνει τη συνολική χωρητικότητα από n χωρητικότητες συνδεδεμένες παράλληλα:

$$C_{\text{ολ.}} = \sum_{i=1}^n C_i \quad 2.7$$

Πηνία παράλληλα

Χωρίς απόδειξη δίνεται η σχέση που δίνει τη συνολική αυτεπαγωγή από n πηνία συνδεδεμένα παράλληλα:

$$\frac{1}{L} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} \quad 2.8$$

Διαιρέτης τάσης-Διαιρέτης ρεύματος

Εάν έχουμε N αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά και στα άκρα της όλης αυτής διάταξης υπάρχει διαφορά δυναμικού U , τότε η τάση U_μ στα άκρα μίας αντίστασης, έστω R_μ δίνεται από τη σχέση:

$$U_\mu = \frac{R_\mu}{\sum_{i=1}^n R_i} \cdot U \quad 2.7$$

Η σχέση 2.7 αποδεικνύεται εύκολα από το γεγονός ότι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση R_μ είναι ίση με τη συνολική, συνεπώς

$$U_\mu / R_\mu = U / \sum_{i=1}^n R_i$$

Επειδή η διάταξη των αντιστάσεων σε σειρά κατανέμει τη συνολική τάση στις διάφορες αντιστάσεις, ονομάζεται διαιρέτης τάσης.

Εάν έχουμε N αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα και το ρεύμα το οποίο εισέρχεται στην όλη διάταξη είναι ίσο με I , τότε το ρεύμα I_μ που διαρρέει την αντίσταση R_μ δίνεται από τη σχέση:

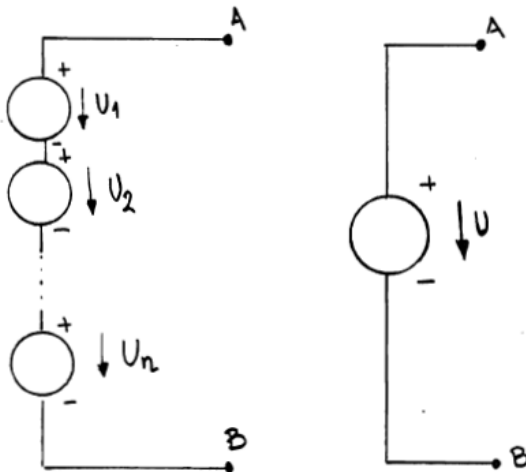
$$I_\mu = \frac{1/R_\mu}{\sum_{i=1}^n 1/R_i} \cdot I = \frac{G_\mu}{\sum_{i=1}^n G_i} \cdot I \quad 2.8$$

$$I_\mu \cdot R_\mu = I \cdot R_{\text{ολ.}} = I \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n 1/R_i} \Rightarrow I_\mu = \frac{1/R_\mu}{\sum_{i=1}^n 1/R_i} \cdot I$$

Επειδή η παραπάνω διάταξη διαιρεί το συνολικό ρεύμα στις διάφορες αντιστάσεις, ονομάζεται διαιρετής ρεύματος.

Σύνδεση πηγών

Οι ιδανικές πηγές τάσης όταν συνδέονται σε σειρά ισοδυναμούν με μια πηγή τάσης της οποίας η ηλεκτρεγερτική δύναμη U είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων των παραπάνω πηγών. Δηλαδή:



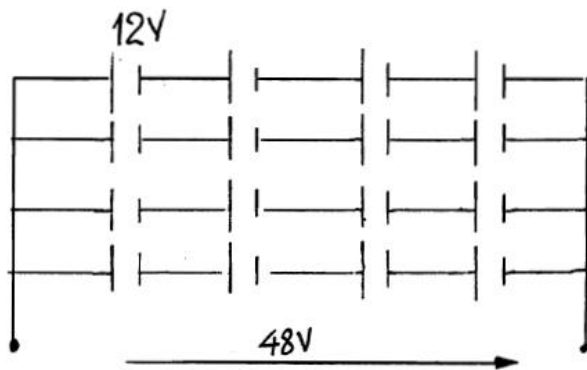
$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad 2.9$$

Οι ιδανικές πηγές τάσης γενικώς δεν μπορεί να συνδεθούν παράλληλα διότι αυτό θα ήταν αντίθετο προς τον ορισμό τους και το δεύτερο νόμο του Kirchhoff. Στην περίπτωση όμως που οι πηγές είναι ίδιες τότε μπορούν να συνδεθούν

παράλληλα και ο παράλληλος συνδυασμός τους να ισοδυναμεί με μία πηγή τάσης U , ίσης με της τάσης μιας εξ' αυτών.

Στην πράξη, όπου οι πηγές τάσης έχουν εσωτερική αντίσταση, μπορούν να συνδεθούν παράλληλα, όταν είναι ανόμοιες. Αυτό όμως θα πρέπει να αποφεύγεται, διότι στο κύκλωμα των πηγών κυκλοφορούν ρεύματα, χωρίς να υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο φορτίο στην έξοδο του κυκλώματος των πηγών, με αποτέλεσμα την κατανάλωση της ενέργειας των υγείων πηγών. Επίσης στην πράξη οι πηγές τάσης (π.χ συσσωρευτές) έχουν συγκεκριμένη ενέργεια την οποία μπορούν να αποδώσουν και να συμπεριφερθούν και ως πηγές τάσης, μόνο όταν το ρεύμα που παρέχουν είναι μικρότερο από κάποια ονομαστική τιμή. Συνεπώς όταν θέλουμε να πετύχουμε μεγαλύτερα ρεύματα θα πρέπει να συνδυάζουμε όμοιες πηγές τάσης συνδεδεμένες παράλληλα, ενώ όταν θέλουμε να πετύχουμε μεγαλύτερη τάση θα πρέπει να συνδυάζουμε πηγές τάσης συνδεδεμένες σε σειρά.

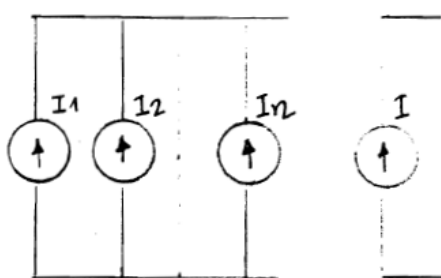
Για παράδειγμα εάν διαθέτουμε συσσωρευτές 12V, ονομαστικού ρεύματος 5A



και θέλουμε να κάνουμε μία πηγή 48V, 15A θα πρέπει να τοποθετήσουμε 3 παράλληλες σειρές που κάθε μία θα έχει 4 συσσωρευτές συνδεδεμένους σε σειρά.

Παρόμοια N ιδανικές πηγές ρεύματος συνδεδεμένες

παράλληλα ισοδυναμούν με πηγή ρεύματος της οποίας η ένταση ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των N πηγών. Δηλαδή:



$$I = \sum_{i=1}^N I_i$$

2.10

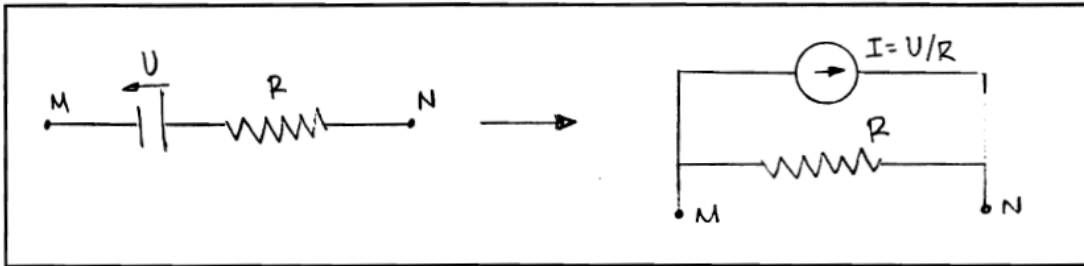
Για τη σύνδεση πηγών ρεύματος σε σειρά παρατηρούμε ότι αυτή είναι δυνατή, όπως προκύπτει από τον ορισμό της πηγής και από τον πρώτο νόμο του Kirchhoff, μόνο όταν

$$I_1 = I_2 = \dots = I_N$$

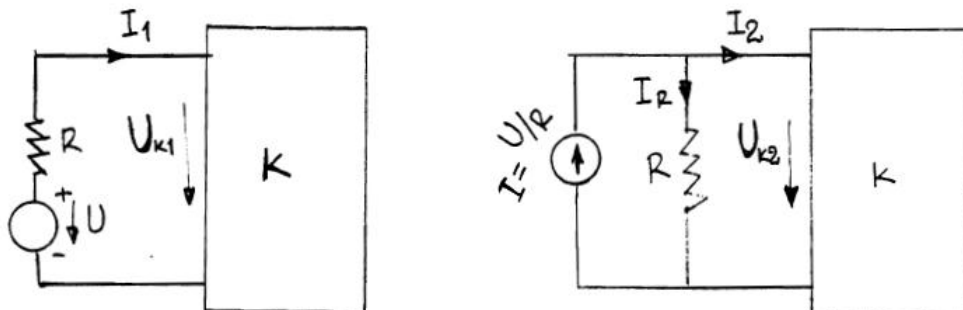
Μετασχηματισμός πηγών

Κατά την επίλυση ενός κυκλώματος πολλές φορές μας είναι ευκολότερο να το επιλύσουμε εάν κάποιες πηγές ρεύματος ήταν πηγές τάσης ή το αντίστροφο.

Μία πηγή τάσης U συνδεδεμένη σε σειρά με αντίσταση R είναι ισοδύναμη με μια πηγή ρεύματος $I = U/R$ και μια αντίσταση R συνδεδεμένη παράλληλα προς την πηγή ρεύματος.



Η απόδειξη της παραπάνω ισοδυναμίας γίνεται ως εξής: Θα αποδειχτεί ότι εάν αυτές οι διατάξεις είναι συνδεδεμένες στο ίδιο κύκλωμα, τότε το ρεύμα I , η τάση U_K και συνεπώς και η ισχύς $P_K = I \cdot U_K$ είναι ίδιες και στις δύο περιπτώσεις:



Η τάση U_K , στα άκρα του κυκλώματος K , είναι προφανώς συνάρτηση του ρεύματος I , ήτοι $U_K = f(I)$. Συνεπώς για την πρώτη περίπτωση ισχύει:

$$U_{x1} = f(I_1), \text{ Επίσης } I_1 = \frac{U - U_{x1}}{R} = \frac{U - f(I_1)}{R} \Rightarrow R \cdot I_1 + f(I_1) = U \quad 2.11$$

Στην δεύτερη περίπτωση ισχύει:

$$U_{x2} = f(I_2), \text{ Επίσης } f(I_2) = I_2 \cdot R = \left(\frac{U}{R} - I_2 \right) \cdot R \Rightarrow f(I_2) + R \cdot I_2 = U \quad 2.12$$

Επειδή οι εξισώσεις 2.11 και 2.12 είναι της ίδιας μορφής, προκύπτει ότι $I_1 = I_2 = I$. Επίσης για την πρώτη περίπτωση προκύπτει:

$$U_{x1} = U - R \cdot I$$

και για τη δεύτερη περίπτωση:

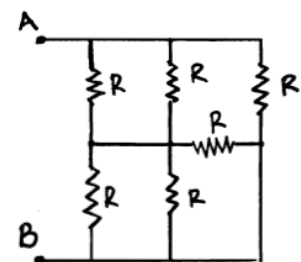
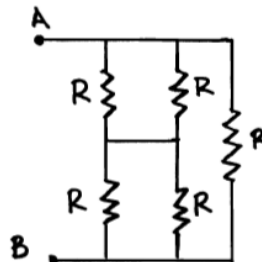
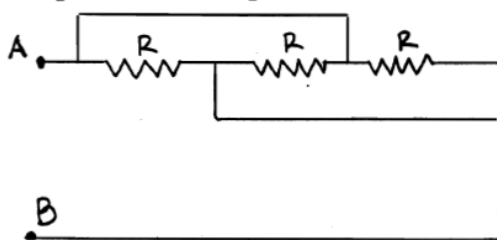
$$U_{x2} = \left(\frac{U}{R} - I \right) \cdot R = U - R \cdot I$$

Συνεπώς $U_{x1} = U_{x2} = U_K$ και άρα τα δύο κυκλώματα είναι ισοδύναμα

Παρόμοια, μία πηγή ρεύματος έντασης I συνδεδεμένη παράλληλα με αντίσταση R είναι ισοδύναμη με μια πηγή τάσης $U = I \cdot R$ και μια αντίσταση R συνδεδεμένη σε σειρά προς την πηγή τάσης.

Παραδείγματα

2.3 Να βρεθούν οι ισοδύναμες αντιστάσεις $R_{\text{ισοδ}}$, από τα άκρα A, B , των παρακάτω κυκλωμάτων:

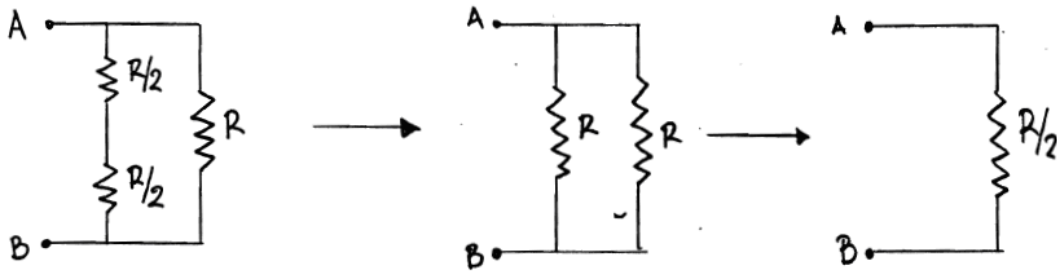


Λύση:

α) Για το πρώτο κύκλωμα παρατηρούμε ότι τα σημεία Γ και Ε είναι ισοδυναμικά με το άκρο Α, ενώ τα σημεία Δ και Ζ είναι ισοδυναμικά με το άκρο Β. Συνεπώς όλες οι αντιστάσεις έχουν τα δύο άκρα τους κοινά στα σημεία Α και Β και συνεπώς είναι παράλληλα συνδεδεμένες ή:

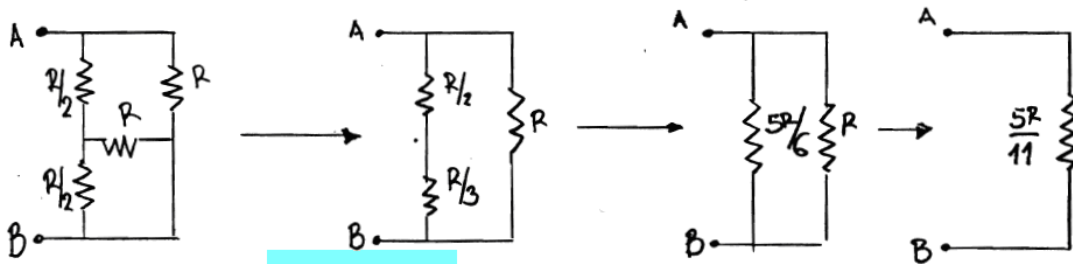
$$R_{\text{ισοδ.}} = \frac{R}{3}$$

β) Η όλη διαδικασία απλοποίησης και εύρεσης της $R_{\text{ισοδ.}}$ φαίνεται παρακάτω:



Συνεπώς $R_{\text{ισοδ.}} = \frac{R}{2}$

γ) Η όλη διαδικασία απλοποίησης και εύρεσης της $R_{\text{ισοδ.}}$ φαίνεται παρακάτω:



Οπότε

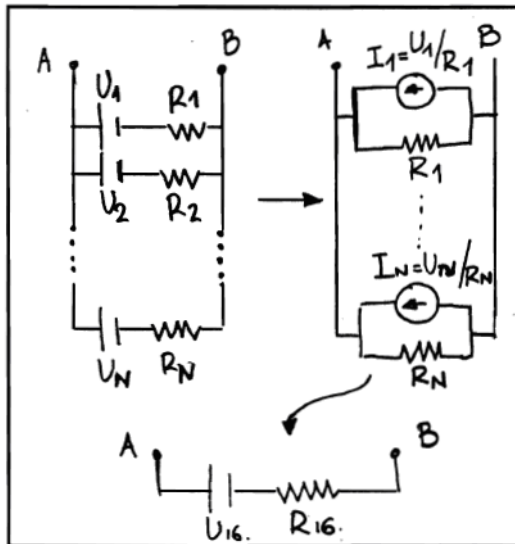
$$R_{\text{ισοδ.}} = \frac{5}{11} \cdot R.$$

2.4 Οι N πραγματικές πηγές ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων (ΗΕΔ), U_1, U_2, \dots, U_N και εσωτερικών αντιστάσεων R_1, R_2, \dots, R_N , που είναι συνδεδεμένες παράλληλα, να αποδειχτεί ότι είναι ισοδύναμες με μια πηγή τάσης ΗΕΔ

$$U_{\text{ισοδ.}} = R_{\text{ισοδ.}} \sum_{i=1}^N \frac{U_i}{R_i} \text{ και εσωτερικής αντίστασης } R_{\text{ισοδ.}}, \text{ η οποία δίνεται από τη}$$

σχέση: $R_{\text{ισοδ.}} = 1 / \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$. (Το παραπάνω είναι γνωστό και ως θεώρημα Millman).

Λύση



Μετατρέπουμε κατ' αρχήν όλες τις πηγές τάσης σε πηγές ρεύματος όπως φαίνεται στο παραπλεύρωσ σχήμα. Η φορά των ρευμάτων των πηγών έντασης καθορίζεται από τη φορά των ΗΕΔ των πηγών τάσης. Η τιμή της έντασης κάποιας πηγής έντασης, π.χ. της i , είναι ίση με:

$$I_i = \frac{U_i}{R_i}$$

Το κύκλωμα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με μία πηγή ρεύματος της οποίας η ένταση είναι το άθροισμα των εντάσεων των επί μέρους

πηγών: $I = \sum_{i=1}^N I_i = \sum_{i=1}^N \frac{U_i}{R_i}$ και μία αντίσταση

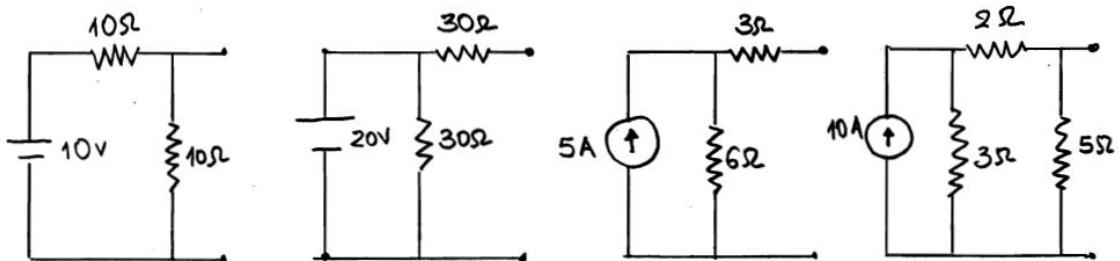
παράλληλα προς την πηγή που είναι ίση με τον παράλληλο συνδυασμό των επί μέρους αντιστάσεων.

Δηλαδή $R_{\text{ισοδ.}} = 1 / \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$. Μετατρέποντας την πηγή ρεύματος σε ισοδύναμη πηγή τάσης προκύπτει το

ζητούμενο. Δηλαδή:

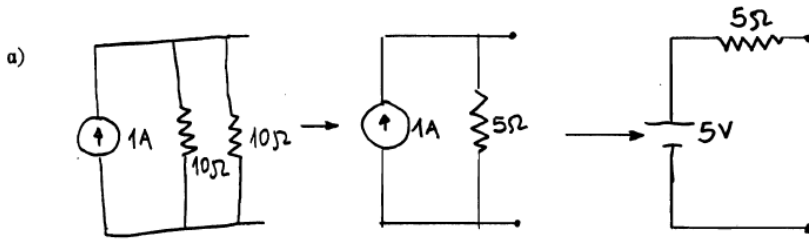
$$U_{\text{ισοδ.}} = R_{\text{ισοδ.}} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{U_i}{R_i} \quad \text{και} \quad R_{\text{ισοδ.}} = 1 / \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

2.5 Με συνεχείς μετασχηματισμούς να αντικατασταθούν τα παρακάτω κυκλώματα με μια πηγή τάσης και μία αντίσταση:

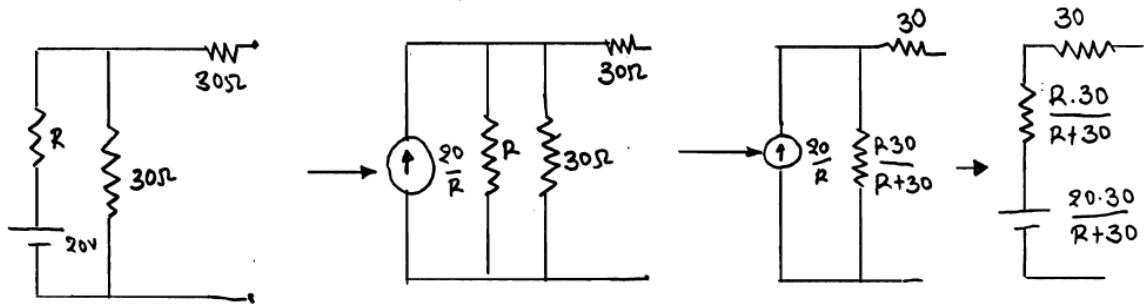


Λύση

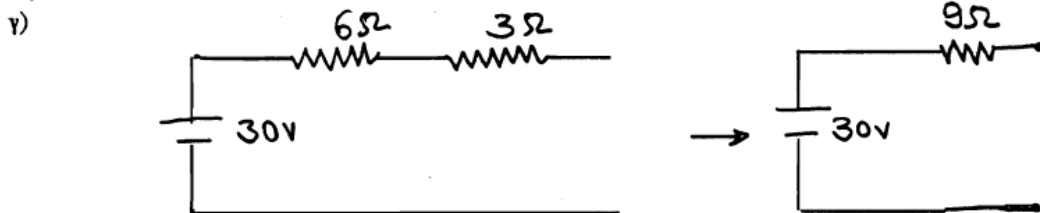
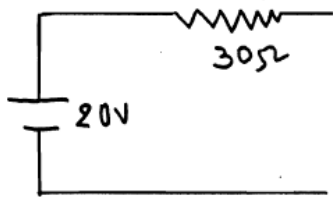
Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται οι διαδικασίες που ακολουθούνται στην κάθε περίπτωση:



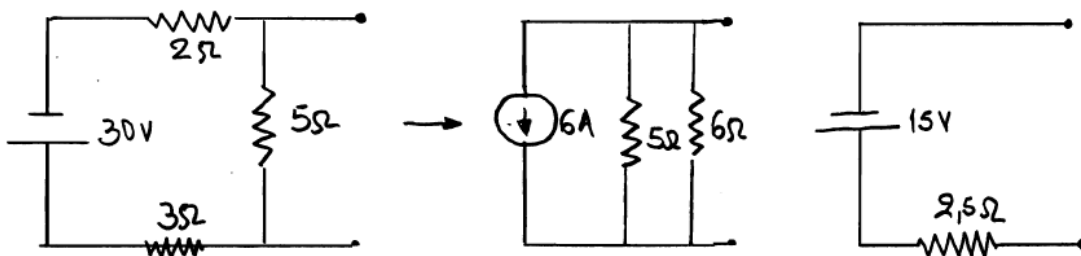
β) Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι σε σειρά με την πηγή τάσης υπάρχει μια αντίσταση R η οποία τείνει στο 0, $R \rightarrow 0$.



οπότε για $R \rightarrow 0$ γίνεται:



δ)



2.4 Μετασχηματισμός τριγώνου σε αστέρα

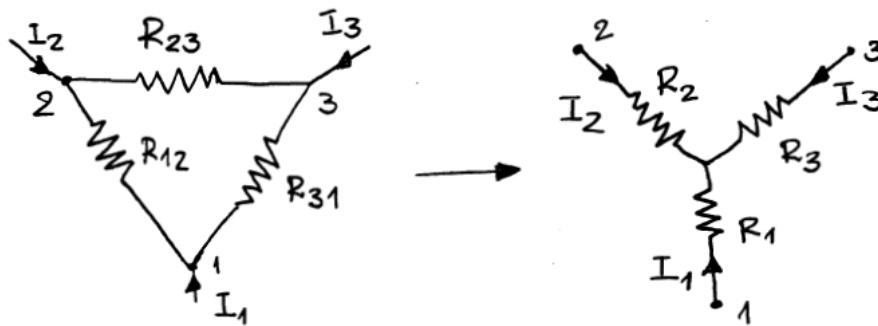
Τρεις αντιστάσεις R_{12} , R_{23} , R_{31} , συνδεδεμένες σε τρίγωνο με άκρα 1, 2, 3, ισοδυναμούν προς τρεις αντιστάσεις R_1 , R_2 , R_3 , συνδεδεμένες σε αστέρα μεταξύ ενός σημείου 0 και των τριών σημείων 1, 2 και 3. Οι αντιστάσεις προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

2.13

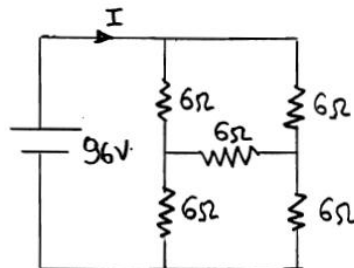


Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν εάν θεωρήσουμε ότι και στις τρεις περιπτώσεις και για το ίδιο σύστημα τάσεων U_{12} , U_{23} , U_{31} , προκύπτουν οι ίδιες εντάσεις ρευμάτων I_1 , I_2 και I_3 .

Στη γενική περίπτωση ο μετασχηματισμός ενός πολυγώνου n κόμβων (και επομένως $n \frac{n-1}{2}$ κλάδων στην περίπτωση πλήρους πολυγώνου με όλες τις διαγωνίες του) δεν είναι δυνατός.

Παράδειγμα

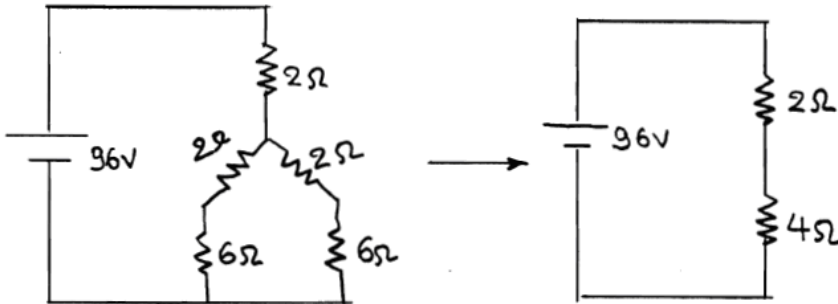
2.6 Να υπολογιστεί το ρεύμα I στο παρακάτω κύκλωμα:



Λύση

Μετατρέπουμε το τρίγωνο που αποτελείται από τις αντιστάσεις των 6Ω σε αστέρα όπου η κάθε αντίσταση σύμφωνα με τις σχέσεις 2.13 θα είναι ίσες με το $1/3$ των αντιστάσεων του τριγώνου, δηλαδή 2Ω . Κατόπιν όπως φαίνεται

στα παρακάτω σχήματα η ένταση προκύπτει ίση με: $I = \frac{96}{6} = 16 \text{ A}$.



2.5 Μετασχηματισμός αστέρα σε τρίγωνο

Τρεις αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 , συνδεδεμένες σε αστέρα με άκρα 1, 2, 3, ισοδυναμούν προς τρεις αντιστάσεις R_{12}, R_{23}, R_{31} , συνδεδεμένες σε τρίγωνο με άκρα τα σημεία 1, 2 και 3. Οι αντιστάσεις προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_2}$$

2.14

Στην γενική περίπτωση ο μετασχηματισμός ενός αστέρα N κλάδων μπορεί να αντικατασταθεί μ' ένα πολύγωνο N πλευρών και όλων των διαγωνίων του. Η αντίσταση ενός κλάδου του πολυγώνου που βρίσκεται μεταξύ των κόμβων k, i δίνεται από τη σχέση:

$$R_{ki} = R_k \cdot R_i \cdot \sum_{j=1}^N \frac{1}{R_j}$$

2.15

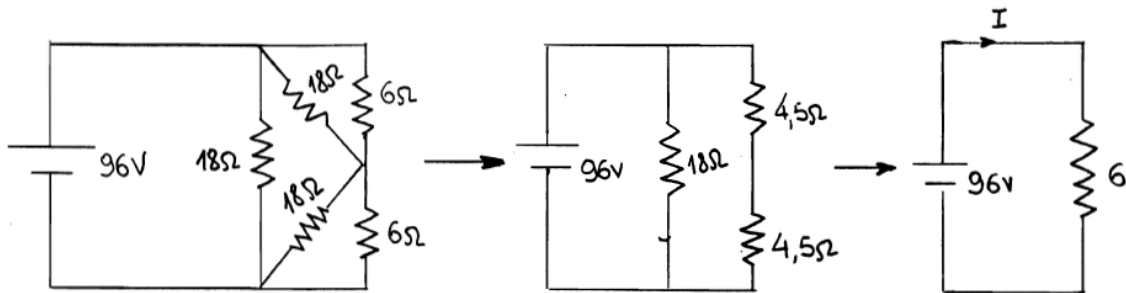
Παράδειγμα

2.7 Να υπολογιστεί το ρεύμα I του κυκλώματος της άσκησης 2.6 κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού αστερά \rightarrow τρίγωνο.

Λύση

Μετατρέπουμε ένα αστερά που αποτελείται από τις αντιστάσεις των 6Ω σε τρίγωνο, όπου η κάθε αντίσταση σύμφωνα με τις σχέσεις 2.14 θα είναι ίση με το τριπλάσιο της αντίστασης του αστερά, δηλαδή 18Ω . Κατόπιν όπως

φαίνεται στα παρακάτω σχήματα η ένταση προκύπτει ίση με: $I = \frac{96}{6} = 16 A$.



2.6 Συστηματικές μέθοδοι ανάλυσης κυκλωμάτων

Οι συστηματικές μέθοδοι ανάλυσης των ηλεκτρικών κυκλωμάτων είναι ουσιαστικά η συστηματική κατάστρωση και επίλυση των εξισώσεων Kirchhoff, ώστε αφ' ενός μεν να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, αφ' ετέρου να επιτυγχάνεται η απλούστευση της ανάλυσης των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και συνεπώς η ελαχιστοποίηση του απαιτούμενου χρόνου και η εξάλειψη των υπολογιστικών λαθών.

Δύο είναι οι κύριες μέθοδοι, η **μέθοδος βρόχων** και η **μέθοδος κόμβων**.

Μέθοδος βρόχων

Σύμφωνα με τη μέθοδο βρόχων κατ' αρχήν μετατρέπονται όλες οι πηγές ρεύματος σε πηγές τάσης έτσι ώστε όλοι οι κλάδοι του κυκλώματος να περιέχουν (εάν περιέχουν πηγές) μόνο πηγές τάσης. Κατόπιν εντοπίζονται όλοι οι ελάχιστοι βρόχοι² και σε κάθε βρόχο ορίζεται ένα ρεύμα βρόχου με φορά (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη) ίδια για όλους τους βρόχους. Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Kirchhoff για κάθε βρόχο προκύπτει μια εξίσωση της μορφής:

$$\sum U^{(i)} = \sum_{j=1}^N R_{ij} \cdot I_j$$

2.16

όπου $\sum U^{(i)}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα όλων των τάσεων των πηγών του βρόχου i . Θετικό λαμβάνεται το πρόσημο της τάσεως όταν το ρεύμα του βρόχου εξέρχεται από το θετικό πόλο της πηγής, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λαμβάνεται αρνητικό,

N είναι ο αριθμός των βρόχων,

R_{ii} είναι το άθροισμα όλων των αντιστάσεων του βρόχου i δηλαδή $R_{ii} = \sum R^{(i)}$ και

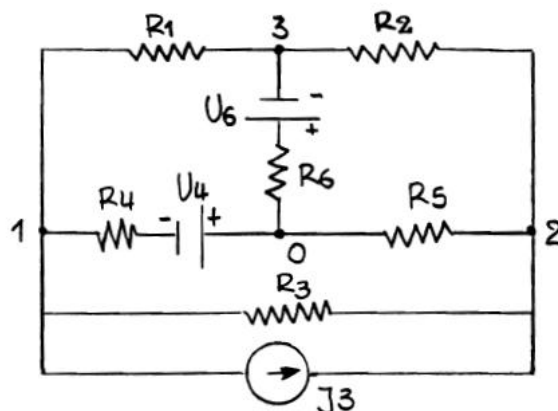
R_{ij} είναι το αρνητικό άθροισμα των κοινών αντιστάσεων μεταξύ του βρόχου i και του βρόχου j , δηλαδή $R_{ij} = -\sum R^{(ij)}$.

Η εξίσωση 2.16 ισχύει για όλους του βρόχους και συνεπώς προκύπτει ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους που είναι τα ρεύματα των βρόχων.

Το αρνητικό σημείο στο άθροισμα των αντιστάσεων που είναι κοινές μεταξύ δύο βρόχων ερμηνεύεται από το γεγονός ότι από τις αντιστάσεις αυτές διέρχονται τα ρεύματα των δύο βρόχων, τα όποια επειδή κατά την εκλογή τους επιλέχθηκαν με την ίδια φορά (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη) στους κοινούς κλάδους έχουν αντίθετη κατεύθυνση.

Παράδειγμα

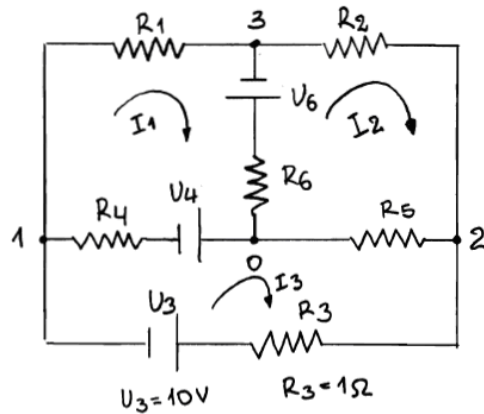
2.8 Στο κύκλωμα του σχήματος να υπολογιστούν οι τάσεις U_{10} , U_{20} , U_{30} με τη μέθοδο των βρόχων. Δίνεται ότι όλες οι αντιστάσεις είναι του 1Ω , οι ΗΕΔ είναι $10V$ και η πηγή ένταση $10A$



Λύση

Κατ' αρχήν μετατρέπουμε την πηγή έντασης σε πηγή τάσης και καθορίζουμε τρεις απλούς βρόχους όπως φαίνεται

στο σχήμα:



Σύμφωνα με τις φορές των ρευμάτων στους βρόχους προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$(R_1 + R_4 + R_6)I_1 - R_6I_2 - R_4I_3 = U_6 - U_4$$

$$-R_6I_1 + (R_2 + R_5 + R_6)I_2 - R_5I_3 = -U_6$$

$$-R_4I_1 - R_5I_2 + (R_3 + R_4 + R_5)I_3 = U_4 - U_3$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές τους προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$3I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$-I_1 + 3I_2 - I_3 = -10$$

$$-I_1 - I_2 + 3I_3 = 0$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει τις εξής λύσεις για τα ρεύματα:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -10 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-40}{16} = -2.5A, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -10 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{16} = -5A, \quad I_3 = -2.5A$$

Μετά την εύρεση των ρευμάτων οι τάσεις που ζητούνται βρίσκονται από τις σχέσεις:

$$U_{10} = (I_3 - I_1) \cdot R_4 - U_4 = -10V$$

$$U_{20} = (I_2 - I_3)R_5 = -2,5V$$

$$U_{30} = -U_6 + (I_1 - I_2)R_6 = -10V + 2,5V = -7,5V$$

Μέθοδος κόμβων

Σύμφωνα με τη μέθοδο κόμβων, κατ' αρχήν μετατρέπονται όλες οι πηγές τάσης σε πηγές ρεύματος έτσι ώστε όλοι οι κλάδοι του κυκλώματος να περιέχουν (εάν περιέχουν πηγές) μόνο πηγές ρεύματος και ταυτόχρονα εκφράζονται όλες οι αντιστάσεις υπό μορφή αγωγιμοτήτων. Κατόπιν εντοπίζονται όλοι οι κόμβοι του κυκλώματος, απαριθμούνται και έναν εξ' αυτών τον ονομάζουμε κόμβο αναφοράς ή κόμβο 0 (Ο κόμβος αναφοράς μπορεί να είναι οποιοσδήποτε κόμβος, αλλά συνηθίζεται να λαμβάνεται ο κόμβος με τους περισσότερους κλάδους).

Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Kirchhoff για κάθε κόμβο προκύπτει μια εξίσωση της μορφής:

$$\sum I^{(i)} = \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} \cdot U_j \quad 2.17$$

όπου $\sum I^{(i)}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ρευμάτων των πηγών ρεύματος που έχουν ως ένα άκρο τον κόμβο i . Θετικό λαμβάνεται το πρόσημο του ρεύματος όταν το ρεύμα της πηγής έχει κατεύθυνση προς τον κόμβο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λαμβάνεται αρνητικό,

N είναι ο αριθμός των κόμβων,

G_{ii} είναι το άθροισμα όλων των αγωγιμοτήτων που έχουν ως άκρο τους τον κόμβο i , δηλαδή $G_{ii} = \sum G^{(i)}$ και

G_{ij} είναι το αρνητικό άθροισμα των κοινών αγωγιμοτήτων μεταξύ του κόμβου i και του κόμβου j , δηλαδή $G_{ij} = -\sum G^{(ij)}$.

U είναι οι τάσεις των κόμβων ως προς τον κόμβο αναφοράς.

Η εξίσωση 2.17 ισχύει για όλους τους κόμβους και συνεπώς προκύπτει ένα σύστημα $N-1$ εξισώσεων με $N-1$ αγνώστους που είναι οι τάσεις των κόμβων ως προς τον κόμβο αναφοράς.

Το αρνητικό σημείο στο άθροισμα των αγωγιμοτήτων που είναι κοινές μεταξύ δύο κόμβων ερμηνεύεται από το γεγονός ότι οι αγωγιμότητες αυτές διαρρέονται από ρεύματα, τα οποία δίνονται από τη διαφορά τάσης μεταξύ των δύο κόμβων, επί την αγωγιμότητα. Για παράδειγμα, εάν η G είναι κοινή αγωγιμότη-

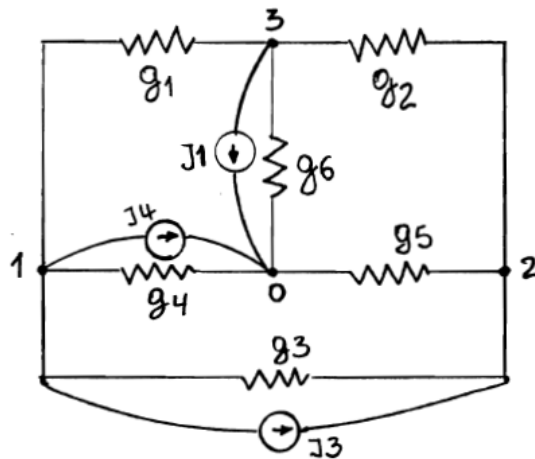
τα μεταξύ του κόμβου i και του κόμβου j , το ρεύμα που διαρρέει αυτή την αγωγιμότητα δίνεται από τη σχέση: $I_G = G \cdot (U_i - U_j)$.

Παράδειγμα

2.9 Στο κύκλωμα του σχήματος της άσκηση 2.9 να υπολογιστούν οι τάσεις U_{10} , U_{20} , U_{30} με τη μέθοδο των κόμβων.

Λύση

Καί αρχήν μετατρέπουμε τις πηγές τάσης σε πηγές έντασης και ορίζουμε τρεις κόμβους 1, 2, 3 και ένα κόμβο αναφοράς 0. Συνεπώς οι τάσεις U_1 , U_2 , και U_3 είναι οι τάσεις που ζητούνται, δηλαδή η U_{10} , U_{20} και U_{30} . Επίσης μετατρέπουμε όλες τις αντιστάσεις σε αγωγιμότητες των οποίων η τιμή είναι ίση με $1/10S$. Τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σύμφωνα με τη σχέση 2.17 προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$(G_1 + G_4 + G_3)U_1 - G_3U_2 - G_1U_3 = -J_4 - J_3$$

$$-G_3U_1 + (G_2 + G_3 + G_5)U_2 - G_2U_3 = J_3$$

$$-G_1U_1 - G_2U_2 + (G_1 + G_2 + G_6)U_3 = -J_1$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές τους, προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$3U_1 - U_2 - U_3 = -20$$

$$-U_1 + 3U_2 - U_3 = 10$$

$$-U_1 - U_2 + 3U_3 = -10$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει τις εξής λύσεις για τα ρεύματα:

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} -20 & -1 & -1 \\ 10 & 3 & -1 \\ -10 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-160}{16} = -10V.$$

$$U_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 & -1 \\ -1 & 10 & -1 \\ -1 & -10 & 3 \end{vmatrix}}{16} = -2,5V.$$

$$U_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 20 \\ -1 & 3 & 10 \\ -1 & -1 & -10 \end{vmatrix}}{16} = -7,5V$$

2.7 Θεώρημα υπέρθεσης ή επαλληλίας

Το θεώρημα αυτό μας λέει το εξής:

Σ' ένα γραμμικό κύκλωμα που περιλαμβάνει πολλά ενεργά στοιχεία τα οποία δρουν ταυτόχρονα, η επίδραση τους σ' ένα τμήμα ή στοιχείο του κυκλώματος μπορεί να προκύψει από το άθροισμα των επιδράσεων που είναι αποτέλεσμα της δράσης του κάθε ενεργού στοιχείου του κυκλώματος ξέχωρα.

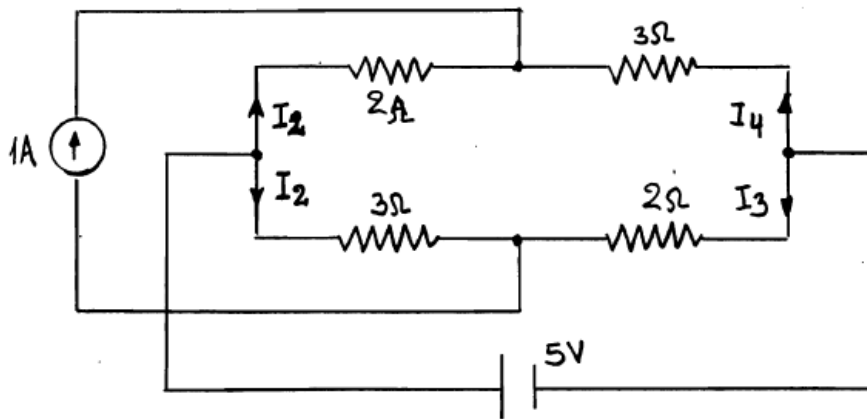
Η αρχή αυτή προκύπτει εύκολα, από το γεγονός ότι όπως αναπτύχθηκε στην παράγραφο 2.6, τόσο τα ρεύματα όσο και οι τάσεις στα διάφορα σημεία του κυκλώματος είναι γραμμικές συναρτήσεις των τάσεων των πηγών τάσης και των ρευμάτων των πηγών έντασης.

Επειδή η αρχή της υπέρθεσης προκύπτει από τη γραμμικότητα των συστημάτων που πρέπει να επιλυθούν για την εύρεση των ρευμάτων και των τάσεων, συνεπάγεται ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί απ' ευθείας για μεγέθη που δεν είναι γραμμικές συναρτήσεις των ρευμάτων και των τάσεων, όπως για παράδειγμα συμβαίνει με την ισχύ.

Σημειώνεται ότι η αντικατάσταση των πηγών τάσης γίνεται με βραχυκύκλωση, ενώ των πηγών ρεύματος με ανοικτό κύκλωμα.

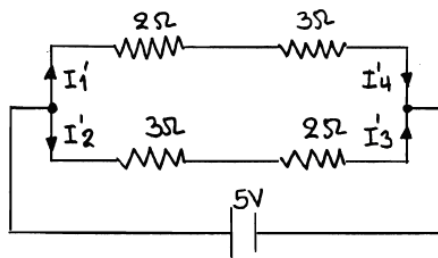
Παράδειγμα

2.10 Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα ρεύματα I_1 , I_2 , I_3 και I_4 εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης:



Λύση

Κατ' αρχήν θεωρούμε μόνο την πηγή τάσης οπότε το κύκλωμα γίνεται:



Σύμφωνα με τις φορές των ρευμάτων που έχουμε ορίσει προκύπτουν τα εξής:

$$I'_1 = \frac{5V}{5\Omega} = 1A, \quad I'_2 = \frac{5V}{5\Omega} = 1A$$

$$I_4 = I'_1$$

$$I_3 = I'_2$$

Κατόπιν θεωρούμε μόνο την πηγή ρεύματος, οπότε το κύκλωμα γίνεται:

Σύμφωνα με τις φορές των ρευμάτων που έχουμε ορίσει προκύπτουν τα εξής:

$$I''_1 = \frac{3\Omega}{5\Omega} \cdot 1A = 0,6A,$$

$$I''_2 = \frac{2\Omega}{5\Omega} \cdot 1A = 0,4A$$

$$I''_3 = \frac{3\Omega}{5\Omega} \cdot 1A = 0,6A,$$

$$I''_4 = \frac{2\Omega}{5\Omega} \cdot 1A = 0,4A$$

Τα τελικά ρεύματα προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 1 - 0,6 = 0,4A,$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = 1 + 0,4 = 1,4A$$

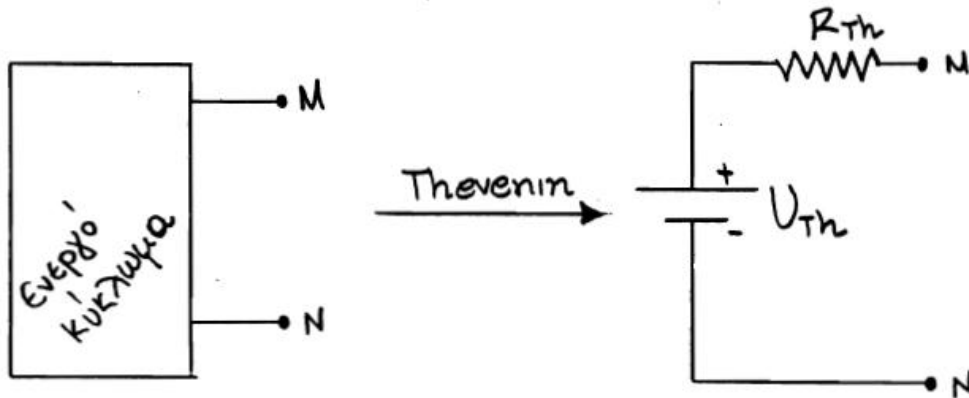
$$I_3 = I''_3 - I'_3 = 0,6 - 1 = -0,4A$$

$$I_4 = -I''_4 - I'_4 = -1 - 0,4 = -1,4A$$

2.8 Θεώρημα Thevenin

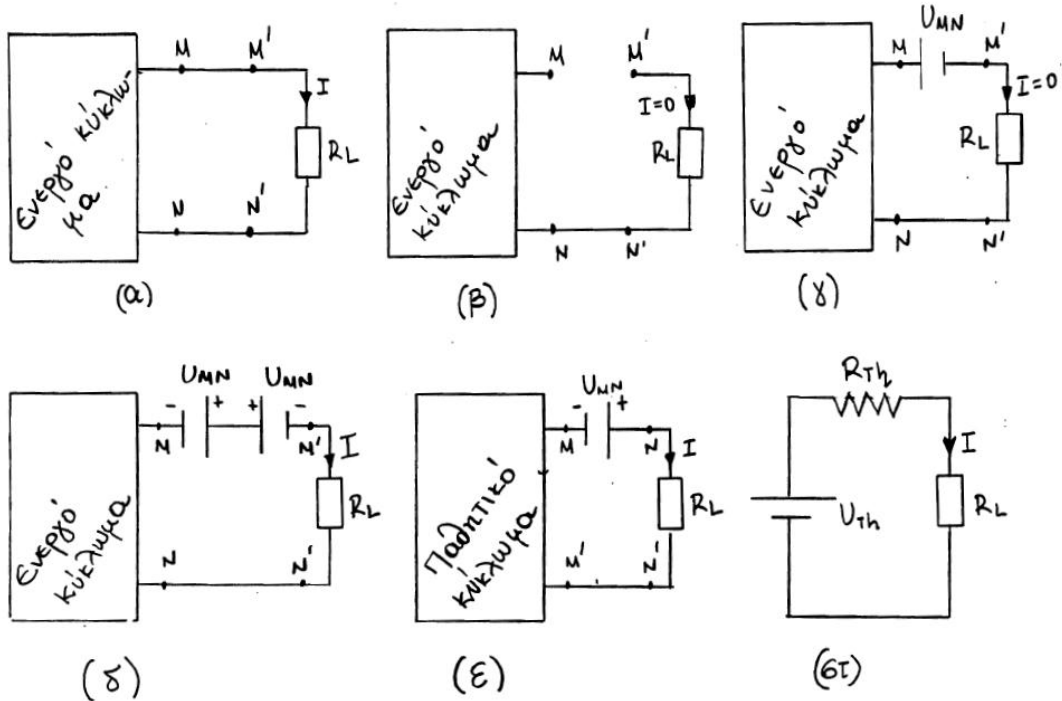
Σύμφωνα μ' αυτό το θεώρημα, ένα ενεργό γραμμικό δίπολο (δηλαδή ένα ενεργό γραμμικό κύκλωμα θεωρούμενο από δύο σημεία του M και N) είναι ισοδύναμο προς μία ηλεκτρική πηγή ηλεκτρεγερτικής δυνάμεως U_0 , σε σειρά με μία ωμική αντίσταση R .

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη της διπολικής πηγής ισούται με την τάση μεταξύ των άκρων M και N , U_{MN} και η αντίσταση R είναι ίση με την αντίσταση που εμφανίζει το κύκλωμα εάν το κοιτάξουμε από τα άκρα M , N και όπου τις μεν πηγές τάσεις τις έχουμε αντικαταστήσει με βραχυκύκλωμα, τις δε πηγές έντασης με ανοικτό κύκλωμα.



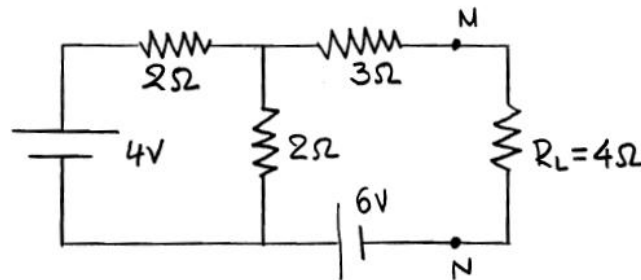
Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής: Εστω ότι έχουμε ένα ενεργό κύκλωμα στον οποίο τα άκρα M , N συνδέεται μια ωμική αντίσταση R_L . Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (β) εάν ανοίξουμε τα άκρα M , M' , το ρεύμα από την αντίσταση R_L θα είναι 0 και η τάση μεταξύ των άκρων M , M' θα είναι ίση με την τάση U_{MN} που έχουμε στα άκρα M, N , όταν το ενεργό κύκλωμα είναι ανοικτό από αυτά τα άκρα. Εάν τοποθετηθεί μία πηγή τάσης στα άκρα M, M' με τάση ίση και αντίθετη της U_{MN} , όπως φαίνεται στο σχήμα (γ), το ρεύμα θα παραμείνει ίσο με 0 . Αυτό σημαίνει, σύμφωνα με το θεώρημα της υπέρθεσης, ότι η ενεργός αυτή πηγή δημιουργεί επί της R_L ρεύμα $-I$ που είναι ίσο και αντίθετο με το ρεύμα που δημιουργούν όλες οι άλλες πηγές μαζί του αρχικού κυκλώματος. Εάν τοποθετηθεί μία ακόμη πηγή τάσης με τάση ίση με U_{MN} όπως φαίνεται στο σχήμα (δ), τότε το όλο κύκλωμα θα δημιουργεί στην αντίσταση ρεύμα I και συνεπώς θα είναι ισοδύναμο με το κύκλωμα (α). Επίσης όπως προαναφέρθηκε μπορούμε να διώξουμε όλες τις πηγές του ενεργού κυκλώματος, καθώς επίσης και την πηγή $-U_{MN}$, χωρίς καμία διαφοροποίηση της όλης κατάστασης, δηλαδή το κύκλωμα (ε) είναι ισοδύναμο με το αρχικό κύκλωμα.

Αντικαθιστώντας πλέον το παθητικό κύκλωμα με μία ισοδύναμη αντίσταση προκύπτει το κύκλωμα (στ) που είναι το ισοδύναμο κύκλωμα κατά 'Thevenin.



Παραδείγματα

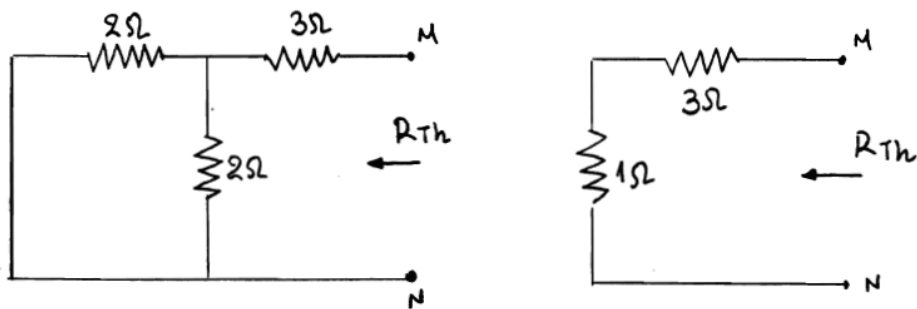
9.11 Να βρεθεί η ισχύς στην R_L του παρακάτω κυκλώματος χρησιμοποιώντας το θεώρημα Thevenin.



Λύση

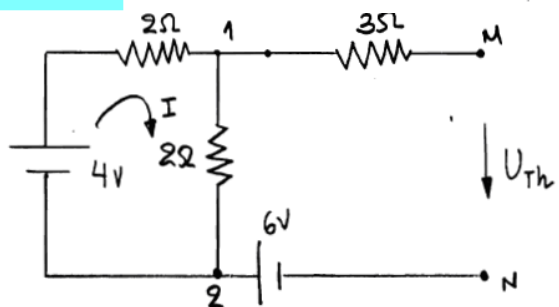
Κατ' αρχήν βρίσκεται το ισοδύναμο κατά Thevenin του κυκλώματος από τα άκρα M, N . Η ισοδύναμη αντίσταση βρίσκεται εάν βραχυκυκλώσουμε τις δυο πηγές τάσης και προκύπτει όπως φαίνεται από το σχήμα 1ση με:

$$R_{Th} = 2 // 2 + 3 = 1\Omega + 3\Omega = 4\Omega$$



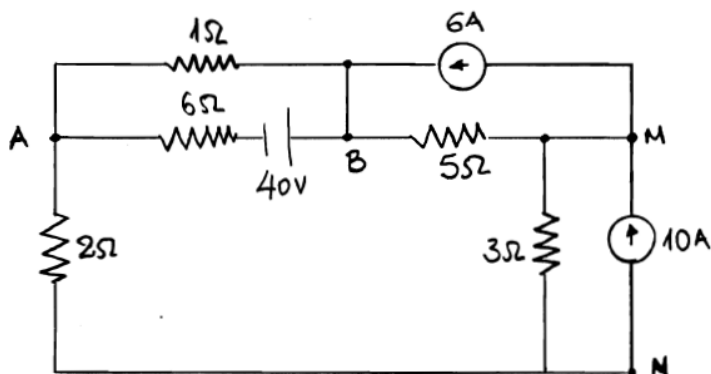
Η ισοδύναμη τάση κατά Thevenin βρίσκεται ως εξής: Όπως φαίνεται στο σχήμα υπάρχει ένας μόνο βρόχος στον οποίο κυκλοφορεί ρεύμα. Συνεπώς η τάση U_{12} στην αντίσταση των 2Ω είναι ίση με $\frac{2\Omega}{4\Omega} \cdot 4V = 2V$. Η τάση κατά Thevenin είναι ίση με την τάση μεταξύ των άκρων M, N και συνεπώς προκύπτει από το άθροισμα των τάσεων στην αντίσταση των 2Ω και της πηγής των $6V$:

$$U_{Th} = 2 + 6 = 8V$$



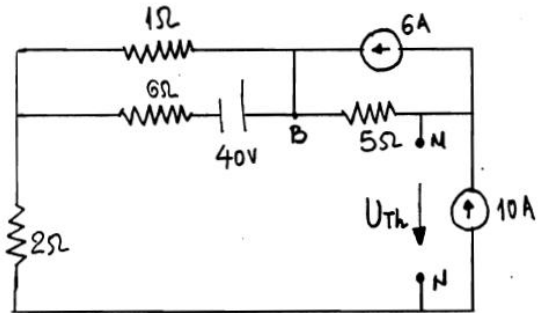
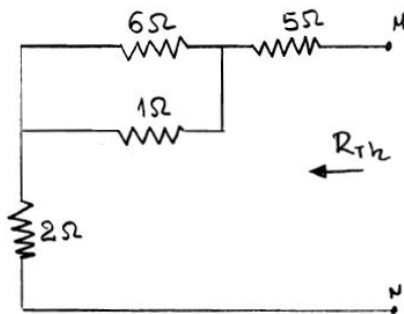
Συνεπώς η ισχύς είναι ίση με: $P = I^2 R = \left(\frac{8}{4+4}\right)^2 4 = 4W$

9.12 Να βρεθεί το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 3Ω στο παρακάτω κύκλωμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Thevenin.



Λύση

Όπως φαίνεται στα σχήματα (α) και (β) έχουμε τα δύο ισοδύναμα κυκλώματα για να βρούμε την αντίσταση και την τάση του κυκλώματος Thevenin.



Από το σχήμα (α) προκύπτει για την αντίσταση:

$$R_{Th} = 5 + 1 // 6 + 2 = 5 + \frac{1 \cdot 6}{1 + 6} + 2 = \frac{55}{7} \Omega$$

Από το σχήμα (β) προκύπτει:

$$U_{AN} = 2 \Omega \cdot 10 A = 20 V \quad U_{MB} = (10 - 6) A \cdot 5 V = 20 V \quad \times 1$$

$$\frac{U_{BA}}{1 \Omega} + \frac{U_{BA} - 40 V}{6} = 10 A \Rightarrow U_{BA} = \frac{100}{7} V \quad \text{Συνεπώς:}$$

$$U_{Th} = U_{MN} = U_{MB} + U_{BA} + U_{AN} = 20 + \frac{100}{7} + 20 = \frac{380}{7} V$$

Τοποθετώντας την αντίσταση των 3Ω το ρεύμα που τη διαρρέει θα είναι:

$$I_{3 \Omega} = \frac{U_{Th}}{3 + R_{Th}} = \frac{380 / 7}{3 + 55 / 7} = 5 A$$

Θεώρημα Norton

Το θεώρημα Norton μπορεί να θεωρηθεί ως μία άλλη διατύπωση του θεωρήματος Thevenin, επειδή το ισοδύναμο κύκλωμα Norton μπορεί να ληφθεί απ' ευθείας από το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin.

Σύμφωνα μ' αυτό το θεώρημα, ένα ενεργό γραμμικό δίπολο (δηλαδή ένα ενεργό γραμμικό κύκλωμα θεωρούμενο από δύο σημεία του M και N) είναι ισοδύναμο προς μία ηλεκτρική πηγή ρεύματος εντάσεως I_0 , παράλληλα με μία ωμική αντίσταση R.

Η ένταση του ρεύματος της διπολικής πηγής είναι ίση με την ένταση που διαρρέει το βραχυκύκλωμα μεταξύ των άκρων M και N και η αντίσταση R είναι ίση με την αντίσταση που εμφανίζει το κύκλωμα εάν το κοιτάξουμε από τα άκρα M, N και όπου τις μεν πηγές τάσης τις έχουμε αντικαταστήσει με βραχυκύκλωμα, τις δε πηγές έντασης με ανοικτό κύκλωμα.

Η απόδειξη του θεωρήματος Norton είναι παρόμοια της απόδειξης του θεωρήματος Thevenin και ως εκ τούτου δεν αναπτύσσεται εδώ.

Παραδείγματα

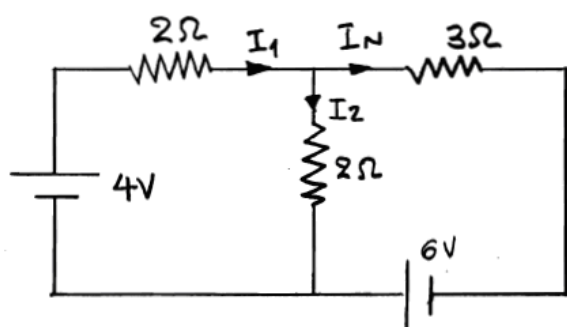
9.13 Να επιλυθεί η άσκηση 9.11 χρησιμοποιώντας το θεώρημα Norton.

Λύση

Η ισοδύναμη αντίσταση κατά Norton είναι ίση με την ισοδύναμη αντίσταση κατά Thevenin. Συνεπώς

$$R_N = R_{Th} = 4\Omega.$$

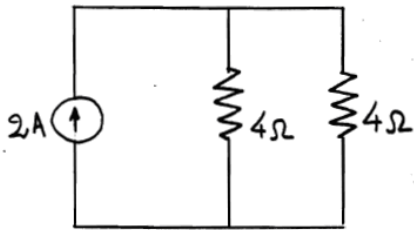
Η ισοδύναμη ένταση βρίσκεται από το παρακάτω κύκλωμα ως εξής:



Εφαρμόζοντας τους δύο νόμους του Kirchhoff προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$I_1 = I_2 + I_N \quad 4 = 2I_1 + 2I_2 \quad 6 = 3I_N - 2I_2$$

Η λύση των παραπάνω εξισώσεων μας δίνει $I_N = 2A$. Συνεπώς από το ισοδύναμο κατά Norton βρίσκουμε ότι:



$$P = \left(\frac{4\Omega}{4\Omega + 4\Omega} 2A \right)^2 4\Omega = 4W$$

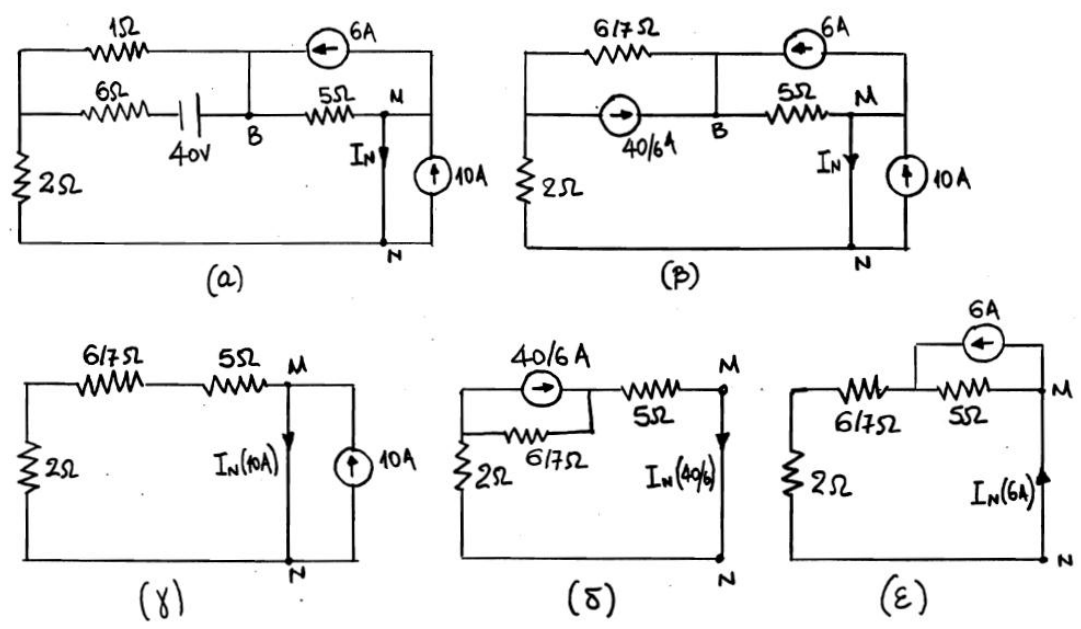
2.14 Να επιλυθεί η άσκηση 9.11 χρησιμοποιώντας το θεώρημα Norton.

Λύση

Η ισοδύναμη αντίσταση κατά Norton είναι ίση με την ισοδύναμη αντίσταση κατά Thevenin. Συνεπώς

$$R_N = R_{Th} = \frac{55}{7} \Omega.$$

Η ισοδύναμη ένταση είναι το ρεύμα που διαρρέει το βραχυκύκλωμα μεταξύ των άκρων M και N. Ένας τρόπος εύρεσης αυτής της έντασης είναι ο εξής:



Κατ' αρχήν μετατρέπουμε την πηγή τάσης σε πηγή έντασης και κατόπιν χρησιμοποιώντας το θεώρημα της υπέρθεσης προκύπτει για το ρεύμα:

$$I_N = I_{N(10A)} + I_{N(40/6A)} - I_{N(6A)}$$

όπου από τα κυκλώματα γ, δ, ε προκύπτουν:

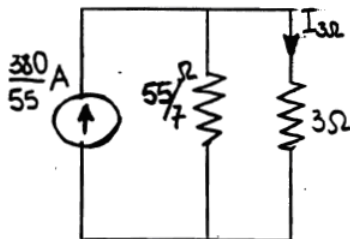
$$I_{N(10A)} = 10A \quad I_{N(40/6A)} = \left(\frac{6/7\Omega}{(6/7+2+5)\Omega} \right) \frac{40}{6} A = \frac{40}{55} A$$

$$I_{N(6A)} = \left(\frac{5\Omega}{(5+6/7+2)\Omega} \right) 6A = \frac{210}{55} A$$

Συνεπώς

$$I_N = 10 + \frac{40}{55} - \frac{210}{55} = \frac{380}{55} A$$

Τοποθετώντας την αντίσταση των τριών Ω στο ισοδύναμο κατά Norton προκύπτει:



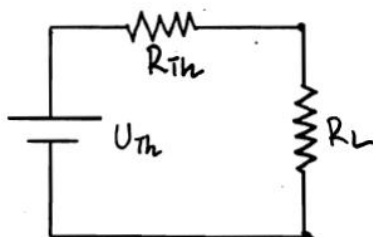
$$I_{3\Omega} = \frac{55/7}{3+55/7} \cdot \frac{380}{55} = 5A$$

Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό υπολογίζουμε την αντίσταση φορτίου (στο εναλλασσόμενο πρόκειται για σύνθετη αντίσταση) που πρέπει να συνδεθεί σε κάποιο ενεργό κύκλωμα ώστε να επιτυγχάνεται η μέγιστη μεταφορά ισχύος. Αποδεικνύεται ότι για να έχουμε τη μέγιστη μεταφορά ισχύος θα πρέπει η αντίσταση του φορτίου να είναι ίση με την ισοδύναμη αντίσταση κατά Thevenin του κυκλώματος όπως φαίνεται από τα άκρα που συνδέεται το φορτίο.

Απόδειξη:

Σύμφωνα με το θεώρημα κατά Thevenin ένα ενεργό κύκλωμα μπορεί να



αντικατασταθεί από μία πηγή τάσης και μία αντίσταση. Συνεπώς όταν έχουμε και την αντίσταση φορτίου R_L η όλη διάταξη είναι όπως φαίνεται στο σχήμα:

Το ρεύμα που διαρρέει την R_L είναι ίσο με

$$I = \frac{U_{\pi}}{R_{\pi} + R_L}$$

2.18

και η ισχύς στην αντίσταση του φορτίου είναι ίση με:

$$P_L = I^2 R_L = \frac{U_{\pi}^2}{(R_{\pi} + R_L)^2} R_L \quad 2.19$$

Η μέγιστη τιμή της P_L προκύπτει από την εξίσωση: $\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.18 και 2.19 συνεπάγεται:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{U_{\pi} (R_{\pi} + R_L)^2 - 2U_{\pi} R_L (R_{\pi} + R_L)}{(R_{\pi} + R_L)^4} = 0 \Rightarrow R_L = R_{\pi} \quad 2.20$$

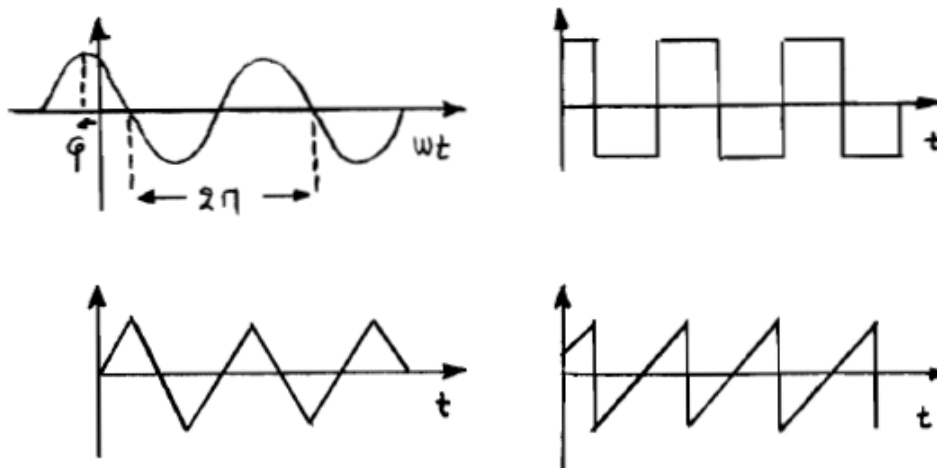
Το θεώρημα της μέγιστης μεταφοράς ισχύος έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές στην ηλεκτρολογία και στα ηλεκτρονικά. Για παράδειγμα μπορεί να προσαρμοστεί κάποιο φορτίο στο δίκτυο ή σε κάποια γεννήτρια ώστε η ισχύς που παίρνουμε στο φορτίο να είναι η μέγιστη. Στα ηλεκτρονικά το θεώρημα εφαρμόζεται για τη προσαρμογή των ενισχυτικών βαθμίδων με τη βαθμίδα εξόδου όπως, είναι για παράδειγμα τα ηχεία.

Κεφάλαιο 3

Μονοφασικά εναλλασσόμενα ρεύματα

3.1 Βασικές έννοιες των εναλλασσομένων ρευμάτων

Εναλλασσόμενο ρεύμα (τάση) είναι περιοδικά μεταβαλλόμενο ρεύμα (τάση) σε συνάρτηση με το χρόνο. Η τιμή του ρεύματος σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή, ορίζεται ως στιγμιαία τιμή του ρεύματος. Ένα ρεύμα είναι πλήρως ορισμένο εάν γνωρίζουμε τις στιγμιαίες τιμές του ως συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή είναι γνωστή η συνάρτηση $i(t) = f(t)$. Οι σπουδαιότερες μορφές εναλλασσομένου ρεύματος είναι η ημιτονοειδής, η ορθογώνια, η τριγωνική και η πριονωτή μορφή, (σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1 Σπουδαιότερες μορφές εναλλασσομένου ρεύματος.

Στην ενεργειακή θεώρηση των ηλεκτρικών μηχανών αλλά και γενικότερα των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας σημασία έχουν μόνο τα ημιτονοειδή μεγέθη (υπό μονοφασική ή τριψα-

σική μορφή). Βέβαια στην πράξη οι παραγόμενες τάσεις, ρεύματα και μαγνητικές ροές δεν είναι καθαρά ημιτονοειδείς αλλά περιέχουν εκτός της βασικής αρμονικής και υψηλές αρμονικές των οποίων η συχνότητα είναι ακέραια πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας. Οι υπολογισμοί γίνονται με τη βασική αρμονική και σε ειδικές μόνο περιπτώσεις λαμβάνονται υπόψη οι υψηλές αρμονικές (ρεύματα μαγνήτισης μετασχηματιστών, ρεύματα διατάξεων ηλεκτρονικών ισχύος και ασύμμετρων φορτίων).

Η χρονική συνάρτηση της βασικής αρμονικής της εντάσεως και της τάσεως είναι:

$$i(t) = i_m \cos(\omega \cdot t + \varphi_i) \quad 3.1$$

$$u(t) = u_m \cos(\omega \cdot t + \varphi_u) \quad 3.2$$

όπου i_m, u_m οι μέγιστες τιμές,

$\omega = 2\pi f$ η κυκλική συχνότητα σε rad/sec ,

f η συχνότητα σε $1/sec$ ή Herz (Hz),

$T=1/f$ είναι η περίοδος σε sec ,

φ_i, φ_u είναι οι γωνίες μεταξύ του σημείου $t = 0$ και του σημείου που αντιστοιχεί στη πλησιέστερη μέγιστη θετική στιγμιαία τιμή (σχήμα 3.1). Οι γωνίες αυτές ονομάζονται και διαφορές φάσεως ή ψασικές αποκλίσεις των παραπάνω συναρτήσεων ως προς τις αντίστοιχες συναρτήσεις με μηδενικά τα φ_i, φ_u . Όταν οι γωνίες είναι θετικές τότε εκφράζουν προπορεία ενώ διαφορετικά εκφράζουν επιπορεία.

Εξ' ορισμού η ενδεικνυμένη τιμή ενός περιοδικού μεγέθους είναι ίση προς τη μέση τετραγωνική τιμή αυτού. Συνεπώς η ενδεικνυμένη τιμή του ρεύματος (τάσεως) ορίζεται από τη σχέση:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} i_m^2 \cdot \cos^2(\omega t) dt} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \quad 3.3$$

και αντίστοιχα της τάσης:

$$U = \frac{u_m}{\sqrt{2}}$$

3.4

Αποδεικνύεται ότι η ενδεικνυμένη τιμή ρεύματος χαρακτηρίζει το θερμικά ισοδύναμο μέγεθος συνεχούς ρεύματος. Δηλαδή η ενδεικνυμένη τιμή ενός εναλλασσομένου ρεύματος είναι ίση με την ένταση του συνεχούς ρεύματος που σε χρονική περίοδο μιας περιόδου T , παράγει την ίδια ποσότητα θερμότητας, όταν σε μία αντίσταση R , με τη θερμότητα που παράγεται στην ίδια αντίσταση, σε μια περίοδο, όταν διαρρέεται από το εναλλασσόμενο ρεύμα.

3.2 Παράσταση των ημιτονοειδών μεγεθών με διανύσματα και μιγαδικούς αριθμούς

Η ανάλυση κυκλωμάτων που διαρρέονται από εναλλασσόμενο ημιτονοειδές ρεύμα είναι σημαντικά ευκολότερη εάν τα μεγέθη που εμπλέκονται παρασταθούν με διανύσματα ή μιγαδικούς αριθμούς.

Από τις σχέσεις 3.1 και 3.2 φαίνεται ότι τα μεγέθη του εναλλασσομένου ρεύματος είναι της μορφής

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

3.5

Από τη φυσική είναι γνωστό ότι η σχέση 3.5 παριστάνει την εξίσωση της απλής αρμονικής κίνησης επάνω σε μία ευθεία γραμμή και η οποία μπορεί να περιγραφεί σαν προβολή επάνω σε μια διάμετρο της ομαλής κυκλικής κίνησης. Το σημείο M (σχήμα 3.2) που διαγράφει την ομαλή κυκλική κίνηση κινείται κατά την ανθρωπολογιακή φορά, με γωνιακή ταχύτητα ω , σε περιφέρεια με ακτίνα ίση με x_m . Η προβολή της ακτίνας OM επάνω στον άξονα x , x' περιγράφεται από τη συνάρτηση 3.5. Εάν θεωρηθεί ότι η κίνηση περιγράφεται στο μιγαδικό επίπεδο όπου ο άξονας x , x' είναι ο πραγματικός άξονας και ο y , y' ο φανταστικός τότε η θέση του σημείου M παριστάνεται από ένα άνυσμα της μορφής:

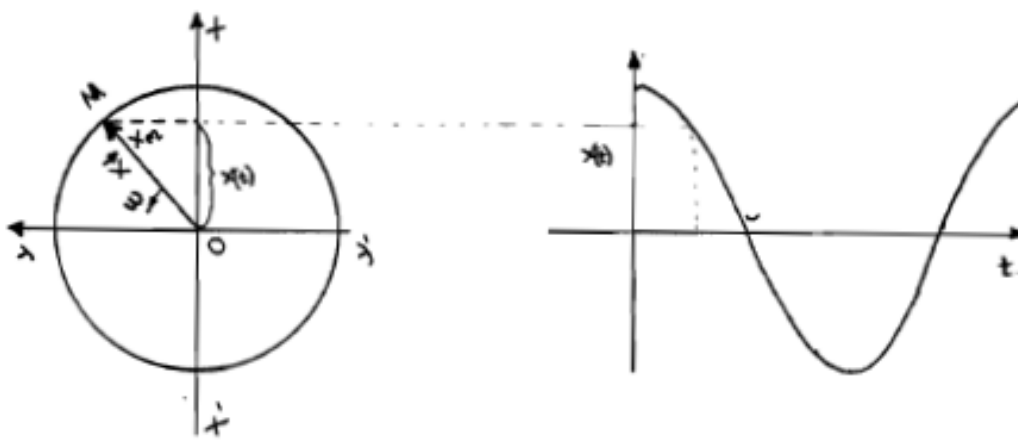
$$\bar{X} = x_m \cos(\omega t + \varphi) + jx_m \sin(\omega t + \varphi) = x_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

3.6

Από τη σχέση 3.6 φαίνεται ότι το $x(t)$ είναι ίσο με το πραγματικό μέρος του ανύσματος \bar{X} , δηλαδή:

$$x(t) = \text{Re}\{\bar{X}\}$$

3.7



Σχήμα 3.2

Μια περαιτέρω ανάλυση της σχέσης 3.7 μας δίνει τη σχέση:

$$x(t) = \text{Re}\{x_m e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \text{Re}\left\{\sqrt{2} \frac{x_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\{\sqrt{2} X_1 e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\sqrt{2} \bar{X}_1 e^{j\omega t}\}$$

3.8

όπου \bar{X}_1 , ονομάζεται άνυσμα της ενδεικνυμένης τιμής του μεγέθους $x(t)$. Το δεξιό μέρος της σχέσης 3.8, που είναι μέσα στις αγκύλες, παριστάνει ένα στρεφόμενο άνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο του οποίου η προβολή στο πραγματικό άξονα ισούται με το ημιτονοειδές μέγεθος. Δηλαδή υπάρχει μια αμψιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ του στρεφόμενου ανύσματος και των στιγμιαίων τιμών του ημιτονοειδούς μεγέθους.

Κατά την ανάλυση γραμμικών συστημάτων στη μόνιμη κατάσταση, ο όρος $e^{j\omega t}$ εμφανίζεται σ' όλες τις τάσεις και εντάσεις και έτσι μπορεί να παραλειφθεί και η απεικόνιση να γίνει μεταξύ του ανύσματος της ενδεικνυμένης τιμής και του ημιτονοειδούς μεγέθους. Επίσης επειδή τόσο στους υπολογισμούς ισχύος όσο και στις μετρήσεις τάσεων και εντάσεων υπεισέρχεται η έννοια της ενδεικνυμένης τιμής, είναι πιο βολικό οι υπολογισμοί να γίνονται με τα μιγαδικά μεγέθη των ενδεικνυμένων ανυσμάτων \bar{U} και \bar{I} .

3.2.1 Βασικές σχέσεις μιγαδικών αριθμών

Ένα μιγαδικό μέγεθος μπορεί να παρασταθεί με τις παρακάτω μορφές

$$\bar{X} = A + jB = X e^{j\varphi} = X(\cos\varphi + j\sin\varphi) = X \angle \varphi \quad 3.9$$

όπου $X = \sqrt{A^2 + B^2}$ το μέτρο του μιγαδικού μεγέθους και

$$\varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \text{ η γωνία του μιγαδικού μεγέθους.}$$

Ο συζυγής ενός μιγαδικού μεγέθους ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{X}^* = X \cdot e^{-j\varphi} = X(\cos\varphi - j\sin\varphi) = A - jB \quad 3.10$$

Το αλγεβρικό άθροισμα μεταξύ δύο μιγαδικών αριθμών

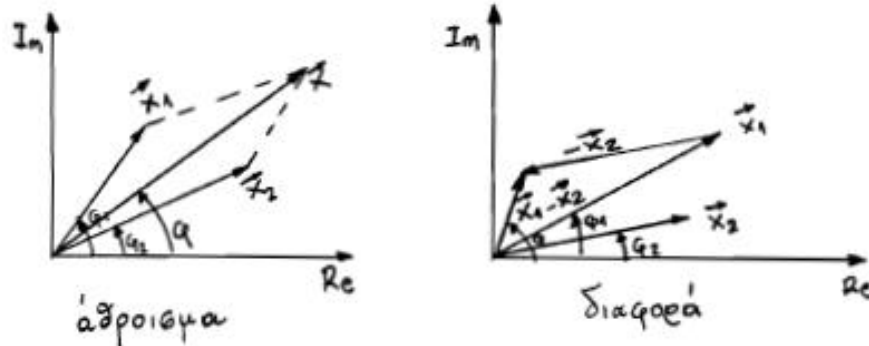
$\bar{X}_1 = A_1 + jB_1$ και $\bar{X}_2 = A_2 + jB_2$, που είναι σε ορθογώνια μορφή, είναι ίσο με:

$$\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2 = (A_1 \pm A_2) + j(B_1 \pm B_2) \quad 3.11$$

Στην περίπτωση που οι μιγαδικοί αριθμοί δίνονται στην εκθετική ή πολική μορφή θα πρέπει για το αλγεβρικό άθροισμα τους να τους μετατρέψουμε στην ορθογώνια μορφή:

$$\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2 = X_1 \angle \varphi_1 \pm X_2 \angle \varphi_2 = (X_1 \cos\varphi_1 \pm X_2 \cos\varphi_2) + j(X_1 \sin\varphi_1 \pm X_2 \sin\varphi_2) \quad 3.12$$

Παρακάτω φαίνεται το άθροισμα και η διαφορά των δύο ανυσμάτων \vec{X}_1 και \vec{X}_2 στο μιγαδικό επίπεδο.



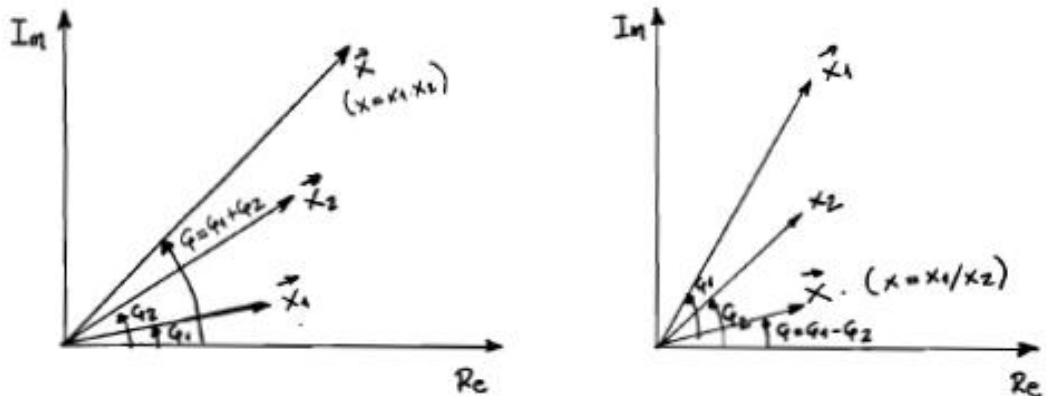
Για την εύρεση του γινομένου ή του πηλίκου δύο μιγαδικών αριθμών είναι πολύ πιο εύκολο να εργαζόμαστε με την εκθετική ή πολική μορφή παρά με την ορθογώνια μορφή:

$$\vec{X}_1 \cdot \vec{X}_2 = (A_1 + jB_1)(A_2 + jB_2) = (A_1A_2 - B_1B_2) + j(A_1B_2 + B_1A_2) = \quad 3.13$$

$$= X_1 \cdot X_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = X_1 \cdot X_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\frac{\vec{X}_1}{\vec{X}_2} = \frac{(A_1A_2 + B_1B_2) + j(A_2B_1 - A_1B_2)}{A_2^2 + B_2^2} = \frac{X_1}{X_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{X_1}{X_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2 \quad 3.14$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται τι γινόμενο και το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών υπό μορφή ανυσμάτων στο μιγαδικό επίπεδο:



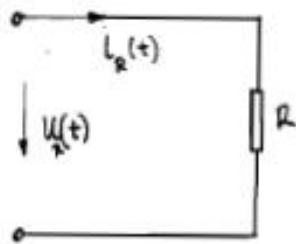
Από τις σχέσεις 3.13 και 3.14 συμπεραίνετε εύκολα ότι ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με τη φανταστική μονάδα ισοδυναμεί προς τη στροφή αυτού κατά $\pi/2$ κατά τη θετική φορά, ενώ το πηλίκο με τη φανταστική μονάδα ισοδυναμεί προς τη στροφή αυτού κατά $\pi/2$ κατά την αρνητική φορά. :

$$j\bar{X}_1 = X_1 \left| \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \right. \qquad \frac{\bar{X}_1}{j} = X_1 \left| \varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right.$$

Επίσης ισχύει: $1/j = -j$.

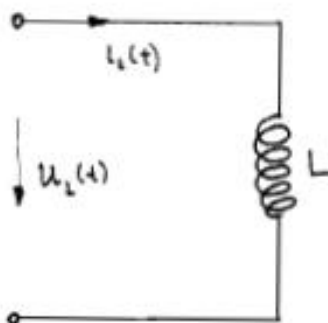
3.2.2 Ανυσματικά διαγράμματα τάσεων και εντάσεων βασικών διπόλων

Για τα βασικά δίπολα ισχύουν οι σχέσεις:



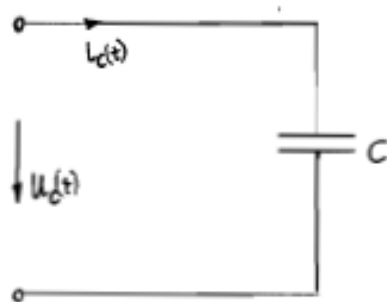
$$u_R(t) = R i_R(t)$$

3.16



$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

3.17



$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt$$

3.18

Εάν στις χρονικές συναρτήσεις των τάσεων και εντάσεων των σχέσεων 3.16, 3.17, 3.18 αντικαταστήσουμε τα αντίστοιχα ανύσματα των ενδεικνυμένων τιμών αποδεικνύονται οι παρακάτω σχέσεις:

$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I}_R \quad 3.19$$

$$\bar{U}_L = j \cdot L \cdot \omega \cdot \bar{I}_L = j \cdot X_L \cdot \bar{I}_L \quad 3.20$$

$$\bar{U}_C = \frac{1}{j \cdot C \cdot \omega} \bar{I}_C = -j \cdot X_C \cdot \bar{I}_C \quad 3.21$$

οπού $X_L = L\omega$ ονομάζεται επαγωγική αντίδραση και

$X_C = \frac{1}{C\omega}$ ονομάζεται χωρητική αντίδραση.

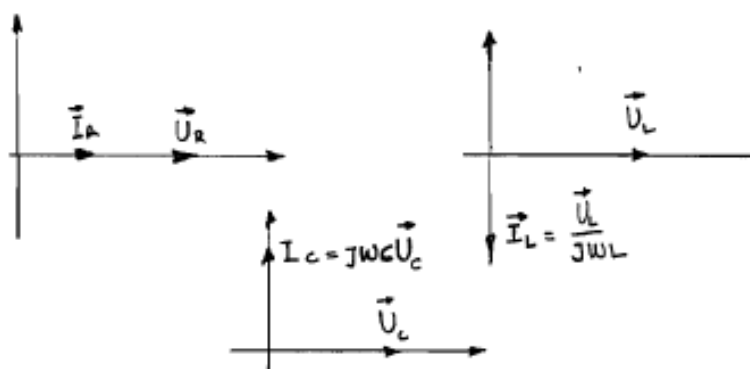
Παρακάτω αποδεικνύεται η σχέση 3.20, ενώ για τις 3.19 και 3.21 οι αποδείξεις είναι παρόμοιες.

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.8 και αντικαθιστώντας την στην 3.20 τόσο για τη τάση όσο και για την ένταση προκύπτει:

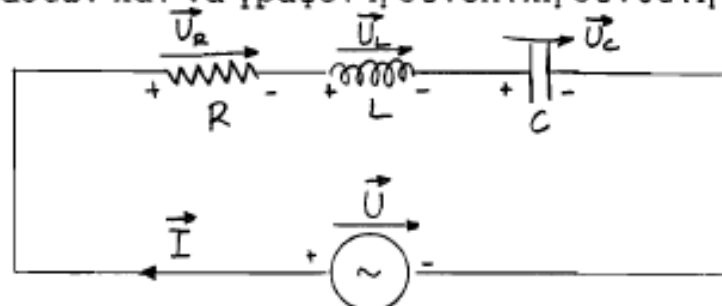
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\sqrt{2}\vec{U}_L e^{j\omega t}\} &= L \frac{d(\operatorname{Re}\{\sqrt{2}\vec{I}_L e^{j\omega t}\})}{dt} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{Re}\{\sqrt{2}\vec{U}_L e^{j\omega t}\} &= L \cdot \operatorname{Re}\{\sqrt{2}\vec{I}_L \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{U}_L &= jL\omega\vec{I}_L \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις 3.19, 3.20, 3.21 συμπεραίνεται ότι στην καθαρά ωμική αντίσταση η τάση και το ρεύμα είναι ομοφασικά, στην καθαρή επαγωγή η τάση προηγείται του ρεύματος κατά $\pi/2$ και στην καθαρή χωρητικότητα η τάση έπεται του ρεύματος κατά $\pi/2$. Τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα:



Παραδείγματα

3.1 Στο παρακάτω κύκλωμα να γίνει το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων και να γραφεί η συνολική σύνθετη αντίσταση.

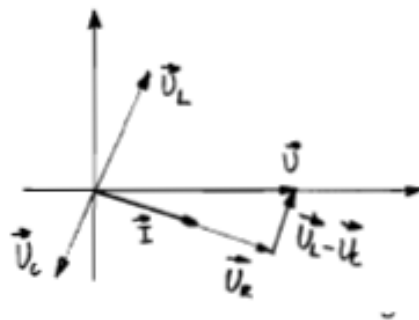


Λύση

Επειδή το ρεύμα είναι το ίδιο και στα τρία στοιχεία συνεπάγεται ότι η τάση στην ωμική αντίσταση θα είναι συμφασική με το ρεύμα, η τάση στην επαγωγή θα προηγείται του ρεύματος κατά γωνία $\pi/2$ και η τάση στη χωρητικότητα θα έπεται κατά $\pi/2$. Επίσης εάν θεωρήσουμε ότι η συνολική τάση έχει

γωνία 0 (πάντα στους υπολογισμούς μας είναι βολικό να θεωρούμε ένα ανυσματικό μέγεθος με γωνία 0) τότε το ρεύμα θα παρουσιάζει γωνία $-\varphi$ σε σχέση με την τάση, όπου φ είναι η γωνία της σύνθετης αντίστασης. Το τελευταίο προκύπτει από τη σχέση:

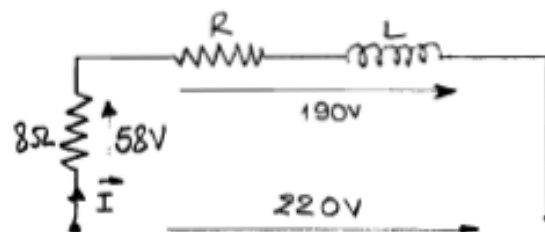
$$\vec{I} = \frac{\vec{U}}{\vec{Z}} = \frac{U|_0}{Z|\varphi} = \frac{U}{Z}|-\varphi \quad \text{και} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im } \vec{Z}}{\text{Re } \vec{Z}}\right)$$



Η σύνθετη αντίσταση είναι ίση με:

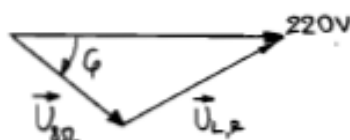
$$\vec{Z} = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C) = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

3.2 Πρόκειται να υπολογιστεί η ωμική αντίσταση και η επαγωγή ενός πηνίου. Διατίθενται ένα βολτόμετρο και μία αντίσταση 8Ω . Η αντίσταση των 8Ω συνδέεται σε σειρά με το πηνίο και όλο το κύκλωμα τροφοδοτείται με τάση $220V$, $50Hz$. Εάν με το βολτόμετρο μετράμε τάση $58V$ κατά μήκος της αντίστασης των 8Ω και τάση $190V$ κατά μήκος του πηνίου, να υπολογιστεί το R και L του πηνίου.



Λύση

Από το νόμο του συνημιτόνου στο τρίγωνο των ανυσμάτων προκύπτει:



$$U_{R,L}^2 = U_{8\Omega}^2 + 220^2 - 2 \cdot 220 \cdot 58 \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{220^2 + 58^2 - 190^2}{2 \cdot 220 \cdot 58} = 0.614 \Rightarrow \varphi = 52,1^\circ$$

Ευνεπώς προκύπτει ότι:

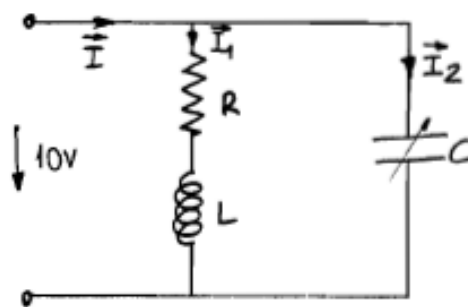
$$\vec{U}_{\text{ισ}} = 58 \angle -52,1^\circ \text{ V}$$

$$\vec{U}_{L,R} = 220\text{V} - 58 \angle -52,1^\circ = 190 \angle 14^\circ \text{ V} \quad \vec{I} = \frac{\vec{U}_{\text{ισ}}}{8\Omega} = 7,25 \angle -52,1^\circ \text{ A}$$

$$\vec{Z}_{L,R} = \frac{\vec{U}_{L,R}}{\vec{I}} = \frac{190 \angle 14^\circ}{7,25 \angle -52,1^\circ} = 26,2 \angle 66,1^\circ \Omega = 10,6 + j24\Omega$$

Ευνεπώς $R=10,6\Omega$ και $L=24/(2\pi \cdot 50)=76,4\text{mH}$.

3.3 Ένας μεταβλητός πυκνωτής συνδέεται παράλληλα με ένα πηνίο επαγωγής $L=0,2\text{H}$ και μία αντίσταση 10Ω . Το όλο σύστημα τροφοδοτείται με μία πηγή 10V , 50Hz . Να βρεθεί η τιμή της χωρητικότητας C ώστε το ρεύμα από την πηγή να είναι ελάχιστο.



Λύση

Το ρεύμα I_1 είναι ίσο με:

$$\vec{I}_1 = \frac{10\text{V}}{10\Omega + j0,2 \cdot 2\pi \cdot 50} = \frac{10}{10 + j62,8} \text{ A} = 0,025 - j0,155\text{A}$$

Για να είναι ελάχιστο το I θα πρέπει το $\vec{I}_2 = -j \cdot \text{Im}(\vec{I}_1)$, δηλαδή

$$\vec{I}_c = j0,155A$$

Επίσης ισχύει :

$$\frac{1}{jC2\pi50} = \frac{10V}{j0.155A} \Rightarrow C = \frac{0.155}{2\pi \cdot 50 \cdot 10} = 49,34 \mu F$$

3.2.3 Ισχύς

Η χρονική συνάρτηση της στιγμιαίας ισχύος προκύπτει από τη σχέση:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

3.22

Η μέση τιμή της $p(t)$ ονομάζεται ενεργός ισχύς και είναι αυτή η οποία παράγει έργο και μετράται σε [W]. Το γινόμενο $U \cdot I$ ονομάζεται φαινομένη ισχύς και μετράται σε [V·A]. Η φαινομένη ισχύς δεν έχει φυσική σημασία αλλά τεχνική. Οι γραμμές μεταφοράς, τα μέσα παραγωγής και μετατροπής ενέργειας (γεννήτριες, κινητήρες, μετασχηματιστές), θα πρέπει να αντέχουν στη μέγιστη τάση και μέγιστο ρεύμα που θα εμφανιστεί σ' αυτά και τα οποία προσδιορίζονται από το μέγεθος της φαινομένης ισχύος. Επίσης, ανάλογα με τη φύση του φορτίου, υπάρχει στην ισχύ $p(t)$ ένας εναλλασσόμενος όρος του οποίου το εύρος ονομάζεται άεργος ισχύς και μετράται σε var. Η άεργος ισχύς δεν παράγει έργο αλλά είναι το "μεταφορικό" μέσο της ενεργού ισχύος, δηλαδή δημιουργεί το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο, τα οποία είναι αναγκαία για τη λειτουργία του ηλεκτρικού συστήματος.

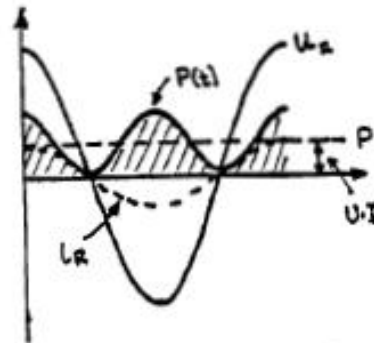
Για τα βασικά δίπολα, καθώς επίσης και για το δίπολο μιας σύνθετης αντίδρασης προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για την ισχύ:

Ωμική αντίσταση

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t) \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t) = 2 \cdot U \cdot I \cdot \cos^2(\omega t) =$$

$$= U \cdot I \cdot [1 + \cos(2\omega t)] \quad 3.23$$

Δηλαδή η στιγμιαία ισχύς στην καθαρή ωμική αντίσταση είναι μια ταλαντωμένη ισχύς (όχι εναλλασσόμενη) μεταξύ του μηδενός και μιας μέγιστης τιμής $2 \cdot U \cdot I$. Η μέση τιμή της ισχύος αυτής που είναι και η ενεργός ισχύς προκύπτει πολύ εύκολα ότι είναι ίση με $U \cdot I$ (σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.3 Τάση, ένταση και ισχύς σε ωμική αντίσταση.

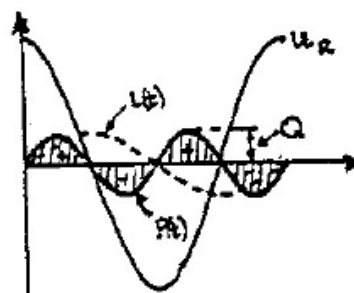
Επαγωγική αντίδραση

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t) \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) =$$

3.24

$$2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = U \cdot I \cdot \sin(2\omega t)$$

Δηλαδή η στιγμιαία ισχύς στη καθαρή επαγωγική αντίδραση είναι μια εναλλασσόμενη ισχύς μεταξύ $U \cdot I$ και $-U \cdot I$. Συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό της αέργου ισχύος η αέργος ισχύς είναι ίση με $U \cdot I$. Η μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος $p(t)$ είναι μηδέν. Συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό της ενεργούς ισχύος, η ενεργός ισχύς είναι μηδέν. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα 3.4.

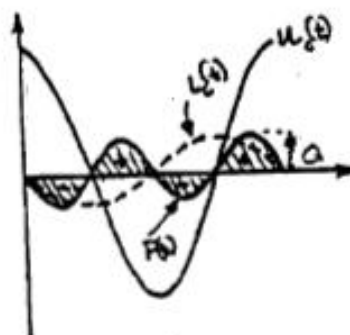


Σχήμα 3.4 Τάση, ένταση και ισχύς σε επαγωγική αντίδραση.

Χωρητική αντίδραση

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t) \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) =$$
$$2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = -U \cdot I \cdot \sin(2\omega t)$$

3.25



Σχήμα 3.5 Τάση, ένταση και ισχύς σε χωρητική αντίδραση.

Δηλαδή η στιγμιαία ισχύς στη καθαρή χωρητική αντίδραση είναι μια εναλλασσόμενη ισχύς μεταξύ $U I$ και $-U I$. Συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό της αέργου ισχύος η αέργος ισχύς είναι ίση με $U I$. Η μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος $p(t)$ είναι μηδέν. Συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό της ενεργού ισχύος, η ενεργός ισχύς είναι μηδέν.

Εδώ θα πρέπει να επισημανθεί, όπως φαίνεται και από τα σχήματα 3.4 και 3.5, ότι η ισχύς $p(t)$ στην επαγωγική αντίδραση και στη χωρητική αντίδραση έχει αντίθετη ροή. Αυτό σημαίνει ότι όταν το ένα στοιχείο απορροφά άεργο ισχύ το άλλο στοιχείο αποδίδει. Συμβατικά έχει επικρατήσει να θεωρούμε ότι το πηνίο απορροφά άεργο ισχύ, ενώ η χωρητικότητα αποδίδει.

Σύνθετη αντίδραση

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) =$$
$$2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i - (\varphi_u - \varphi_i)) = 2 \cdot U \cdot I \cdot$$

$$\begin{aligned} & \left[\cos^2(\omega t + \varphi_v) \cdot \cos(\varphi_v - \varphi_i) + \sin(\omega t + \varphi_v) \cdot \cos(\omega t + \varphi_v) \cdot \sin(\varphi_v - \varphi_i) \right] = \\ & = U \cdot I \cdot \left[2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_v) \cdot \cos \varphi + \sin[2(\omega t + \varphi_v)] \cdot \sin \varphi \right] \end{aligned} \quad 3.26$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση 3.26 η στιγμιαία ισχύς αποτελείται από δύο όρους: Ο πρώτος όρος μεταβάλλεται μεταξύ μηδενός και της μέγιστης στιγμιαίας τιμής $2 U I \cos \varphi$. Η μέση τιμή αυτού του όρου που είναι και η μέση τιμή της $p(t)$, είναι η ενεργός ισχύς και ισούται με:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad 3.27$$

Ο δεύτερος όρος είναι εναλλασσόμενος με μέση τιμή μηδέν και εύρος που είναι η άεργη ισχύς Q :

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad 3.28$$

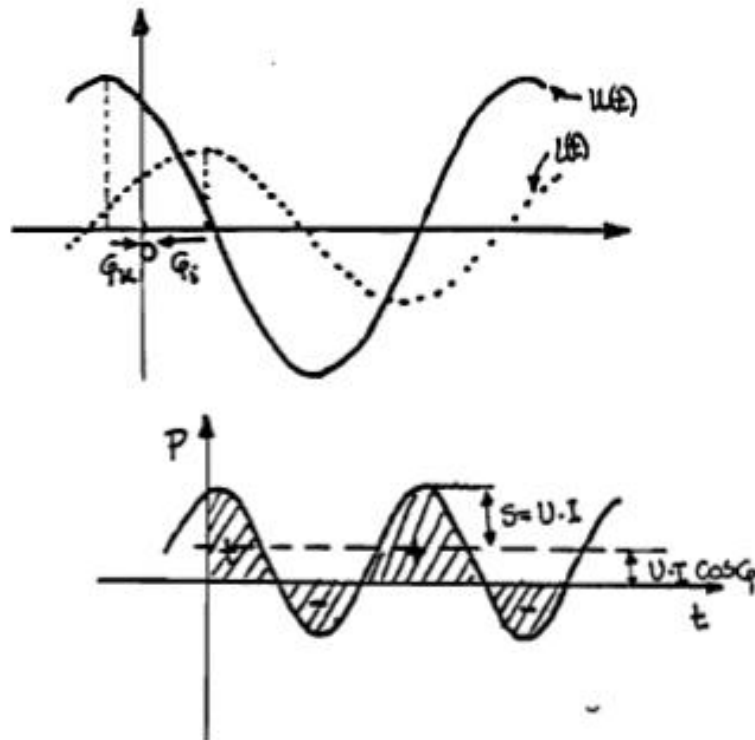
Γενικά σ^ο ένα σύνθετο φορτίο εκτός της πραγματικής και της άεργου ισχύος, υπάρχει κι' ο ορισμός της φαινομένης ισχύος και της μιγαδικής ισχύος. Η φαινομένη ισχύς ορίζεται ως το γινόμενο:

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad 3.29$$

και η μιγαδική ισχύς ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{S} = P + jQ = \bar{U} \cdot \bar{I}^* \quad 3.30$$

Δηλαδή το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ισχύος είναι η ενεργός ισχύς, το φανταστικό είναι η άεργος ισχύς και το μέτρο της είναι η φαινομένη ισχύς.



Σχήμα 3.6 Τάση, ένταση και ισχύς στη γενική περίπτωση μιγαδικής αντίστασης Z .

Παραδείγματα

3.4 Η τάση και το ρεύμα ενός επαγωγικού κινητήρα είναι 220V και 15A, αντίστοιχα, και η φασική γωνία μεταξύ του ρεύματος και της τάσης είναι 40° . Να υπολογιστούν α) η φαινομένη ισχύς, β) η ενεργός ισχύς, γ) η άεργος ισχύς, δ) ο συντελεστής ισχύος και ε) η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση του φορτίου.

Λύση.

α) Η φαινομένη ισχύς είναι:

$$S = 220V \cdot 15A = 3300VA$$

β) Η ενεργός ισχύς είναι:

$$P = 220V \cdot 15A \cdot \cos(40) = 2528W$$

γ) Η άεργος ισχύς είναι:

$$Q = 220V \cdot 15A \cdot \sin(40) = 2121Var$$

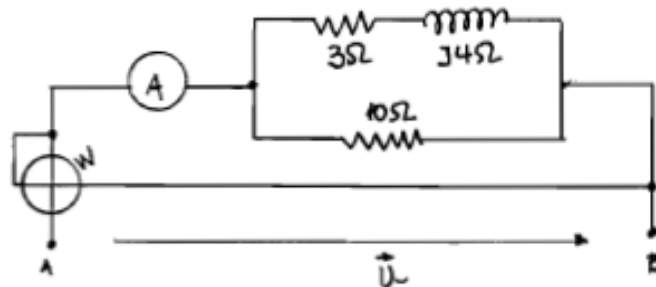
δ) Ο συντελεστής ισχύος είναι:

$$\cos \varphi = \cos(40) = 0,77 \text{ επαγωγικό.}$$

ε) Η ισοδύναμη αντίσταση είναι:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{220|0^\circ V}{15|-40^\circ A} = 14,67|40^\circ \Omega.$$

3.5 Στο παρακάτω κύκλωμα η συνολική ενεργός ισχύς την οποία παίρνουμε από την ένδειξη του βαττομέτρου, είναι ίση με 1100W. Να Βρεθεί η ισχύς σε κάθε αντίσταση, καθώς επίσης και η ένδειξη του αμπερομέτρου.



Λύση

Από το κύκλωμα προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{3+4j}, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}}{10} \Rightarrow \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{\bar{U}/(3+4j)}{\bar{U}/10} = \frac{10}{3+4j} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

Η ενεργός ισχύς είναι η ισχύς που καταναλίσκεται επάνω στις ωμικές αντιστάσεις. Συνεπώς $P_{3\Omega} + P_{10\Omega} = 1100W$. Επίσης ισχύουν οι σχέσεις:

$$P_{3\Omega} = I_1^2 \cdot 3\Omega \quad \text{και} \quad P_{10\Omega} = I_2^2 \cdot 10\Omega \quad \text{Συνεπώς} \quad \frac{P_{3\Omega}}{P_{10\Omega}} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$P_{3\Omega} = 600W, \quad P_{10\Omega} = 500W, \quad I_1 = 14,14A \quad \text{και} \quad I_2 = 7,07A$$

θεωρώντας $\bar{U} = U|0^\circ V$ συνεπάγεται ότι $\bar{I}_1 = 14,14|-53,1^\circ A$ και $\bar{I}_2 = 7,07|0^\circ A$

Συνεπώς $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 19,25|-36^\circ A$ και η ένδειξη του αμπερομέτρου θα είναι 19,25A.

3.6 Στο παρακάτω κύκλωμα δίδονται:

$$U=220V, \quad C=2,5mF, \quad R_1=6\Omega, \quad L_1=11mH, \quad L_2=25mH.$$

Να υπολογιστούν

α) Οι μιγαδικές αντιστάσεις:

\bar{Z}_1 για τον κλάδο R_1, L_1 ,

\bar{Z}_2 για τον κλάδο L_2 ,

\bar{Z}_{AB} για το κύκλωμα μεταξύ των κόμβων Α και Β.

\bar{Z} για το συνολικό κύκλωμα.

β) Οι εντάσεις \bar{I}, \bar{I}_1 και \bar{I}_2 .

γ) Οι τάσεις $\bar{U}_C, \bar{U}_{AB}, \bar{U}_{R_1}$ και \bar{U}_{L_1} .

δ) Οι μιγαδικές και φαινομενικές ισχύεις:

\bar{S}, S για το συνολικό κύκλωμα,

\bar{S}_1, S_1 για τον κλάδο R_1, L_1 ,

\bar{S}_2, S_2 για τον κλάδο L_2 ,

\bar{S}_{AB}, S_{AB} για το κύκλωμα μεταξύ των κόμβων Α και Β και

\bar{S}_C, S_C για τον πυκνωτή.

Να επαληθευθεί ότι: $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_C$ και $S \neq S_1 + S_2 + S_C$

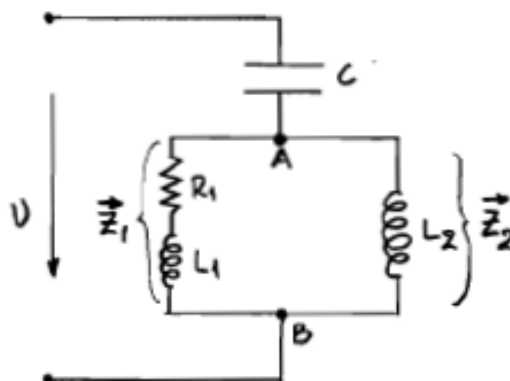
ε) Να σχεδιαστούν τα ανυσματικά διαγράμματα:

των αντιστάσεων,

των εντάσεων,

των τάσεων και

των ισχύων



Λύση

Παρακάτω δίδονται οι σωστές απαντήσεις στις διάφορες ερωτήσεις:

$$\bar{Z}_1 = 6 + 3,456j \, \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = 7,854j \, \Omega$$

$$\bar{Z}_{AB} = 2,258 + 3,598j \, \Omega$$

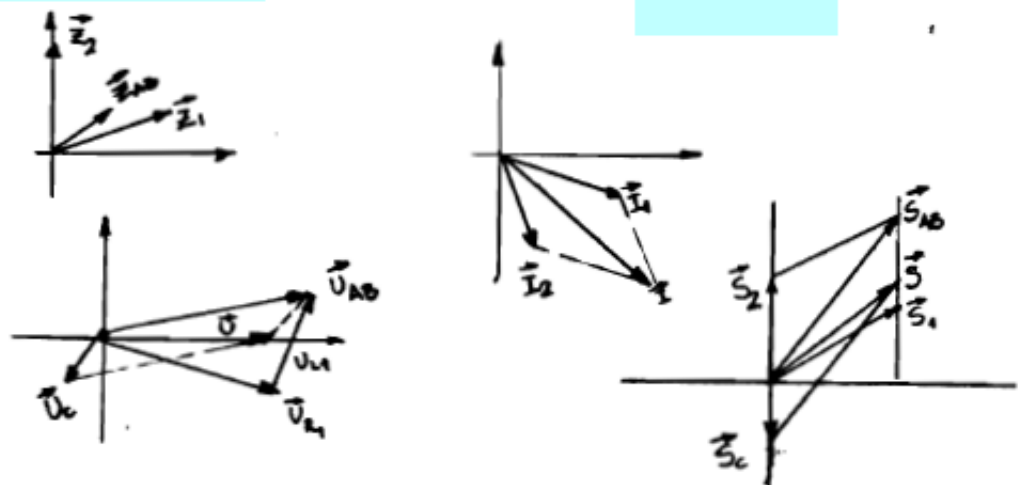
$$\bar{Z} = 2,258 + 2,324j \, \Omega$$

$$\begin{aligned} \vec{I} &= 47,302 - 48,695j \text{ A} \quad I = 67,887 \text{ A} & \vec{I}_1 &= 39,634 - 12,79j \text{ A} \\ I_1 &= 41,646 \text{ A} & \vec{I}_2 &= 7,668 - 30,905j \text{ A} \quad I_2 = 36,715 \text{ A} \\ \vec{U}_C &= -62 - 60,227j \text{ V} \quad U_C = 86,437 \text{ V} & \vec{U}_{AB} &= 282 + 60,227j \text{ V} \\ U_{AB} &= 288,36 \text{ V} \quad \vec{U}_{R1} = 237,8 - 76,738j \text{ V} & U_{R1} &= 249,878 \text{ V} \\ \vec{U}_{L1} &= 44,198 + 136965j \text{ V} & U_{L1} &= 143,92 \text{ V} \\ \vec{S} &= 10,41 \text{ kW} + j10,71 \text{ kvar} & S &= 14,94 \text{ kVA} \\ \vec{S}_1 &= 10,41 \text{ kW} + j5,994 \text{ kvar} & S_1 &= 12,01 \text{ kVA} & \vec{S}_2 &= 10,59j \text{ kvar} \\ S_2 &= 10,59 \text{ kVA} \\ \vec{S}_{AB} &= 10,41 \text{ kW} + 16,58j \text{ kvar} & S_{AB} &= 19,58 \text{ kVA} & \vec{S}_C &= -5,868j \text{ kvar} \\ S_C &= 5,868 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω τιμές υπολογίζεται ότι :

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = 10,41 \text{ kW} + 10,71j \text{ kvar} = \vec{S}$$

και $S_1 + S_2 + S_3 = 28,46 \text{ kVA}$ που είναι διάφορο του $S = 14,94 \text{ kVA}$.



Ανυσματικά διαγράμματα.

3.4 Κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος – Συντονισμός

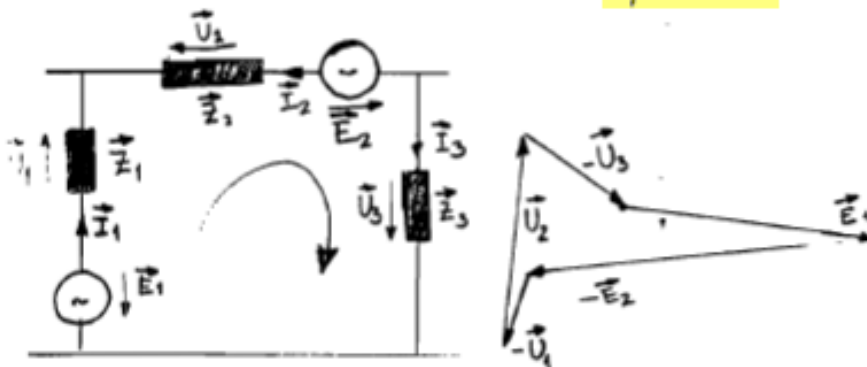
Οι νόμοι του Kirchhoff, αλλά και τα υπόλοιπα θεωρήματα που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3, ισχύουν και στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος με τη διαφορά ότι στην προκειμένη περίπτωση στις διάφορες σχέσεις έχουμε ανύσματα ή στιγμιαίες τιμές. Για παράδειγμα οι σχέσεις για τους δύο νόμους του Kirchhoff, προκειμένου για ανύσματα, είναι οι εξής:

πρώτος νόμος του Kirchhoff: $\sum \vec{I}_i = 0$



Σχήμα ανυσμάτων ρευμάτων

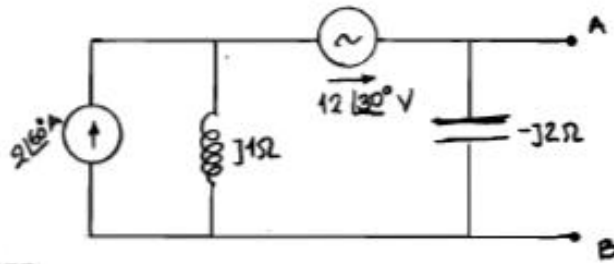
δεύτερος νόμος του Kirchhoff είναι: $\sum \vec{U}_i = 0$



Σχήμα για ανύσματα τάσεων.

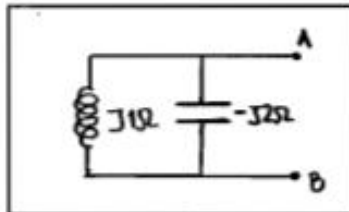
Παραδείγματα

3.7 Να βρεθεί το ισοδύναμο κατά Norton, από τα άκρα A, B, του παρακάτω κυκλώματος:



Λύση

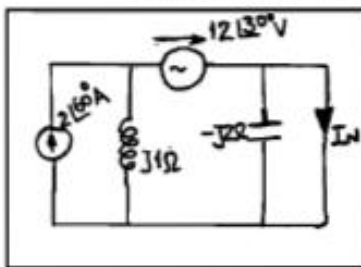
Η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση κατά Norton προκύπτει από το κύκλωμα:



οπότε:

$$\bar{Z}_N = \frac{(j1)(-j2)}{j1 - j2} = j2$$

Η ένταση της πηγής ρεύματος κατά Norton προκύπτει από το κύκλωμα που δείχνεται παρακάτω χρησιμοποιώντας το θεώρημα της υπέρθεσης.



Για τις δύο διαφορετικές πηγές έχουμε:

Πηγή ρεύματος:

$$\bar{I}_N^{(1)} = 2\angle 60^\circ \text{ A}$$

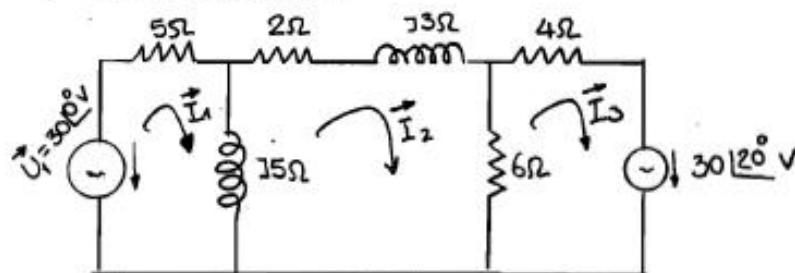
Όταν υπάρχει μόνο η πηγή τάσης τότε προκύπτει:

$$\bar{I}_N^{(2)} = -\frac{12\angle 30^\circ}{j1} = -12\angle -60^\circ \text{ A}$$

Οπότε η ισοδύναμη ένταση του ρεύματος κατά Norton είναι:

$$\bar{I}_N = \bar{I}_N^{(1)} + \bar{I}_N^{(2)} = 2\angle 60^\circ - 12\angle -60^\circ = 13,1\angle 112,4^\circ \text{ A}$$

3.8 Στο παρακάτω κύκλωμα να υπολογιστεί το ρεύμα που ρέει από τη σύνθετη αντίσταση $2 + j3 \Omega$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο βρόχων.



Λύση

Όπως φαίνεται από τα ρεύματα των βρόχων το ζητούμενο ρεύμα είναι ίσο με το ρεύμα \vec{I}_2 . Συνεπώς από τις εξισώσεις των βρόχων ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\angle 0^\circ \\ 0 \\ 30\angle 20^\circ \end{bmatrix}$$
 από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει

ότι:

$$\vec{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

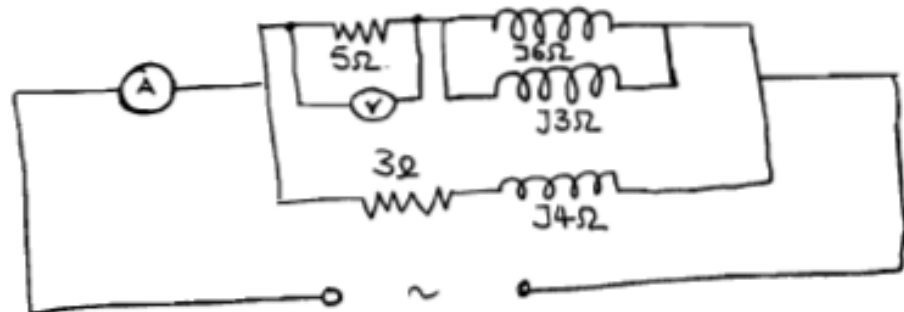
όπου

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j8 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 70 + j620 = 624\angle 83,5^\circ$$

$$\text{και } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5+j5 & 30\angle 0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & -6 \\ 0 & 30\angle 20^\circ & 10 \end{vmatrix} = 537,9 + j2654 \quad \text{και συνεπώς}$$

$$\vec{I}_2 = \frac{537,9 + j2654}{70 + j620} = 4,32 - j0,38 \text{ A}$$

3.9 Στο παρακάτω κύκλωμα το βολτόμετρο έχει ένδειξη 45V. Ποιά είναι η ένδειξη του αμπερομέτρου;



Λύση

$$\text{Το ρεύμα } I_1 \text{ είναι ίσο με: } \vec{I}_1 = \frac{45\text{V}}{5\Omega} = 9\angle 0^\circ \text{ A}$$

Συνεπώς η τάση U είναι ίση με:

$$\bar{U} = 45V + \bar{I}_1 \cdot (6j / 13j) = 45V + 9A \cdot \frac{3j \cdot 6j}{3j + 6j} = (45 + 18j)V$$

Το ρεύμα I_2 είναι ίσο με:

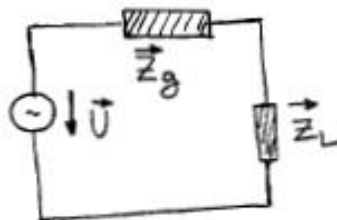
$$\bar{I}_2 = \frac{45 + 18j}{3 + 4j} = (8,28 - 5,04j)A$$

οπότε

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 17,28 - 5,04j \text{ και η ένδειξη του αμπερομέτρου}$$

είναι το μέτρο του I : $|\bar{I}| = 18A$

3.10 Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθεί η σχέση που πρέπει να ισχύει μεταξύ της σύνθετης αντίστασης \bar{Z}_L του φορτίου και της σύνθετης αντίστασης \bar{Z}_s , ώστε να έχουμε τη μέγιστη μεταφορά πραγματικής ισχύος στο φορτίο.



Λύση

Για να έχουμε τη μέγιστη μεταφορά ισχύος θα πρέπει να ισχύει:

$$P = I^2 R\{\bar{Z}_L\} = \max \quad \text{ή} \quad P = \frac{U^2}{|\bar{Z}_s + \bar{Z}_L|^2} \cdot R\{\bar{Z}_L\} = \max \text{ από τα παραπάνω}$$

προκύπτει το σύστημα:

$$\frac{\partial P}{\partial I\{\bar{Z}_L\}} = 0 \Rightarrow R\{\bar{Z}_L\} \frac{\partial |\bar{Z}_s + \bar{Z}_L|^2}{\partial I\{\bar{Z}_L\}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \left[(R\{\bar{Z}_L\} + R\{\bar{Z}_s\})^2 + (I\{\bar{Z}_L\} + I\{\bar{Z}_s\})^2 \right]}{\partial I\{\bar{Z}_L\}} = 0$$

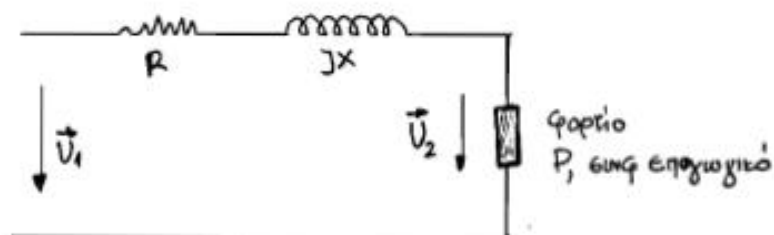
από την παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι:

$$I\{\bar{Z}_L\} = -I\{\bar{Z}_s\}$$

και από τη σχέση:

$$\frac{\partial P}{\partial R\{\bar{Z}_L\}} = 0 \Rightarrow (R\{\bar{Z}_L\} + R\{\bar{Z}_s\})^2 - R\{\bar{Z}_L\} \cdot 2 \cdot (R\{\bar{Z}_L\} + R\{\bar{Z}_s\}) = 0 \Rightarrow R\{\bar{Z}_s\} = R\{\bar{Z}_L\}$$

3.11 Παρακάτω δείχνεται το ισοδύναμο κύκλωμα μιας γραμμής μεταφοράς ισχύος σ^ο ένα φορτίο. Η γραμμή παριστάνεται με μία ωμική αντίσταση $R=6\Omega$ και μία επαγωγική αντίδραση $x=6\Omega$. Το φορτίο είναι 500kW, με $\cos\varphi=0,9$ επαγωγικό και η τάση $U_2=5,5kV$. Να βρεθεί η τάση τροφοδοσίας U_1 .



Λύση

Το ρεύμα του φορτίου και κατά συνέπεια το ρεύμα της γραμμή είναι ίσο με:

$$I = \frac{P}{U_2 \cdot \cos\varphi} = \frac{500000W}{5500V \cdot 0,9} = 101A \quad \text{και} \quad \vec{I} = 101 \angle \underline{-\arccos(0,9)} A = 101 \angle \underline{-25,84^\circ} A$$

Η τάση στην αρχή της γραμμής είναι ίση με:

$$\vec{U}_1 = \vec{U}_2 + \vec{I}(R + jx) = 5500V + 101 \angle \underline{-25,84^\circ} A \cdot (6 + j6)\Omega = 6310 + 281,3jV$$

και $U_1 = 6316V$

3.4.2 Συντονισμός

Ένα παθητικό κύκλωμα που περιέχει πηνία και πυκνωτές θεωρείται ότι βρίσκεται σε συντονισμό όταν η παρεχόμενη τάση \vec{U} και το αντίστοιχο ρεύμα \vec{I} είναι σε ψάση. Συνεπώς κατά το συντονισμό η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος ισοδυναμεί με μια ωμική αντίσταση R .

Συντονισμός σειράς

Το κύκλωμα RLC σειράς έχει μια σύνθετη αντίσταση:

$$\bar{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right).$$

Το κύκλωμα είναι σε

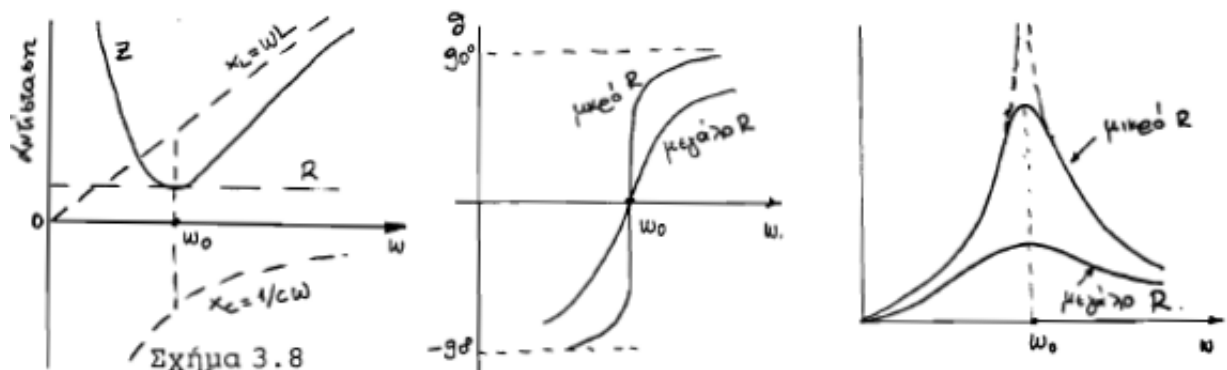
συντονισμό όταν $X =$

0, δηλαδή όταν $\omega L = 1/\omega C$, ή $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. Επειδή επίσης $\omega = 2\pi f$, συνεπάγεται ότι η συχνότητα συντονισμού δίνεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$

3.34

Στο σχήμα 3.8α δίνεται η μεταβολή του μέτρου της σύνθετης αντίστασης Z , καθώς επίσης και των τριών μεγεθών R , X_L και X_C σε συνάρτηση με το ω .



Στο σημείο όπου $\omega = \omega_0$ η επαγωγική και η χωρητική αντίδραση είναι ίσες και συνεπώς $\bar{Z} = R$. Επίσης, επειδή $\bar{I} = \bar{U} / \bar{Z}$, συνεπάγεται ότι το ρεύμα κατά το συντονισμό είναι μέγιστο.

Στις συχνότητες για τις οποίες το $\omega < \omega_0$, η χωρητική αντίδραση είναι μεγαλύτερη της επαγωγικής, και η γωνία της σύνθετης αντίστασης είναι αρνητική.

Εάν η αντίσταση είναι μικρή, η γωνία αλλάζει πολύ ταχύτερα με τη συχνότητα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.8β. Καθώς το ω προσεγγίζει το μηδέν η γωνία του \bar{Z} προσεγγίζει το -90° .

Σε συχνότητες πάνω από ω_0 η επαγωγική αντίδραση είναι μεγαλύτερη της χωρητικής αντίδρασης και η γωνία του \vec{Z} είναι θετική και προσεγγίζει τις $+90^\circ$ καθώς $\omega \gg \omega_0$.

Στο σχήμα 3.8γ, δείχνεται η μεταβολή της αγωγιμότητας $\vec{G} = 1/\vec{Z}$, ως συνάρτηση του ω . Επειδή το ρεύμα $\vec{I} = \vec{G} \cdot \vec{U}$, έπεται ότι και η μεταβολή του ρεύματος θα γίνεται κατά παρόμοιο τρόπο. Συνεπώς το μέγιστο ρεύμα, ή το ελάχιστο \vec{Z} , συμβαίνουν όταν $\omega = \omega_0$.

Τα μέτρα των τάσεων στα τρία στοιχεία δίνονται από τις σχέσεις (δισαιρέτης τάσεως) :

$$U_R = U \frac{R}{|\vec{Z}|} \quad U_L = U \frac{L\omega}{|\vec{Z}|} \quad U_C = U \frac{1}{|\vec{Z}|C\omega} \quad \text{όπου } |\vec{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

3.35

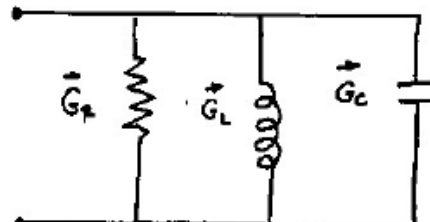
Στο σχήμα 3.9 δείχνονται οι τάσεις ως συνάρτηση της συχνότητας ω . Παρατηρούνται τα εξής: α) Η τάση στην ωμική αντίσταση παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $\omega = \omega_0$ και είναι ίση με U . β) Οι τάσεις στο πηνίο και στη χωρητικότητα μπορούν να αποκτήσουν τιμές μεγαλύτερες από την τάση U (υπερτάσεις), ενώ εμφανίζουν μέγιστες τιμές σε διαφορετικές κυκλικές συχνότητες. Οι συχνότητες αυτές βρίσκονται από τις εξισώσεις $dU_L/d\omega = 0$ και $dU_C/d\omega = 0$ και είναι ίσες με:

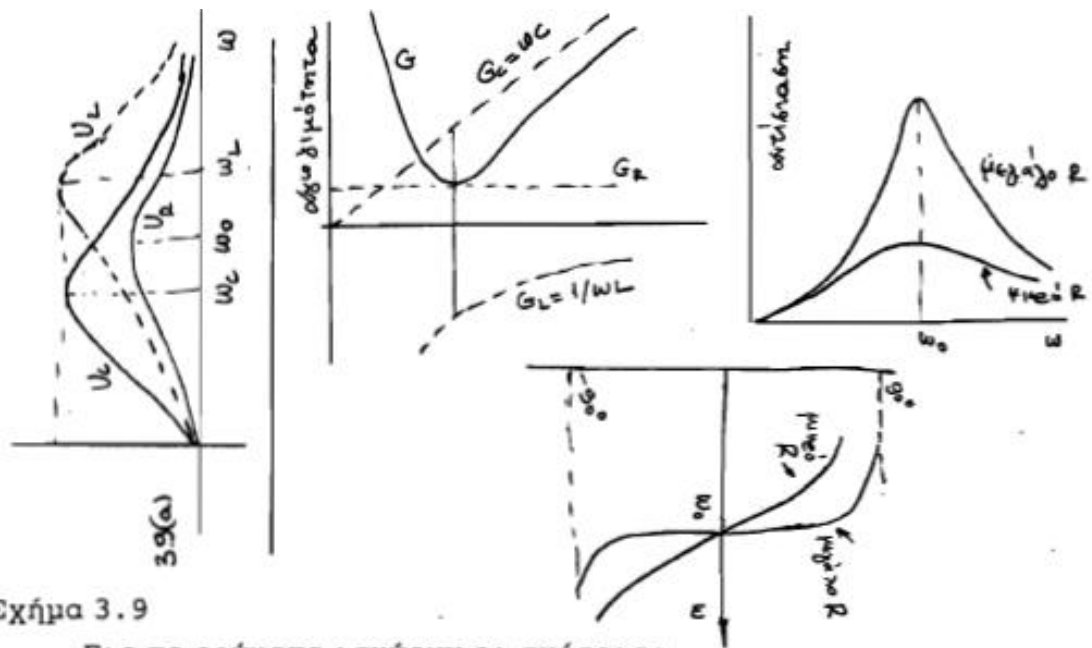
$$\omega_L = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} \quad \omega_C = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

3.36

Συντονισμός παράλληλης σύνδεσης

Το παράλληλο κύκλωμα συνίσταται από τρεις κλάδους με καθαρή ωμική αντίσταση, καθαρή επαγωγή και καθαρή χωρητικότητα. Το ιδανικό παράλληλο κύκλωμα έχει συχνότητα συντονισμού όπως και το κύκλωμα σειράς η οποία δίνεται από τη σχέση 3.34. Στο σχήμα 3.9 δίνονται τα διαγράμματα των G , θ , Z σε συνάρτηση με το ω . Παρατηρείται ότι υπάρχει μια δυαδικότητα ως προς τη σύνθετη αντίσταση και τη σύνθετη αγωγιμότητα.





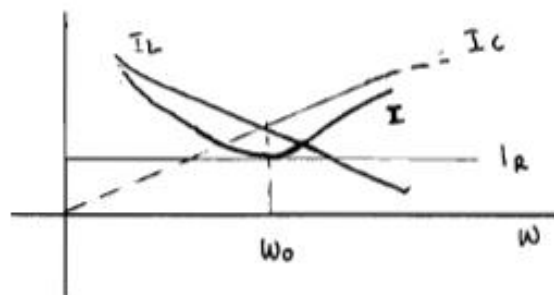
Σχήμα 3.9

Για τα ρεύματα ισχύουν οι σχέσεις:

$$I = G \cdot U \quad I_R = G_R \cdot U \quad I_L = G_L \cdot U \quad I_C = G_C \cdot U \quad 3.37$$

όπου $G = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}$, $G_R = 1/R$ $G_L = 1/\omega L$ $G_C = \omega C$

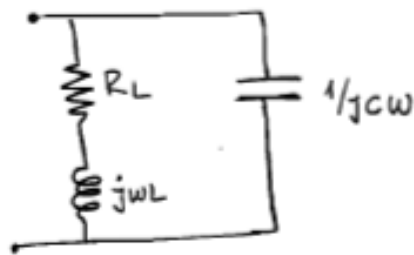
Στο σχήμα 3.10 δείχνονται τα διαγράμματα των ρευμάτων σε συνάρτηση με το ω . Παρατηρείται ότι τα ρεύματα I_L και I_C στον συντονισμό είναι μεγαλύτερα του ρεύματος I (υπερεντάσεις) και ότι πάντα το ένα τουλάχιστον εξ' αυτών είναι μεγαλύτερο του ρεύματος I .



Σχήμα 3.10

Παραδείγμα

Στο παρακάτω κύκλωμα παριστάνεται μια παράλληλη σύνδεση ενός πυκνωτή και ενός πηνίου του οποίου η ωμική αντίσταση είναι R_L . Να βρεθεί η συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος.



Λύση

Η ολική αγωγιμότητα του κυκλώματος είναι :

$$\vec{G} = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C$$

Συνεπώς

$$G = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

Στο συντονισμό το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας G θα πρέπει να είναι μηδέν. Συνεπώς :

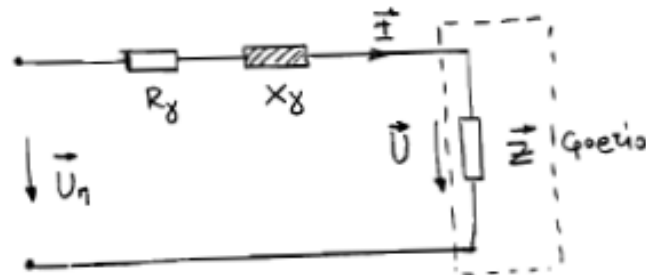
$$\frac{\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}}$$

3.5 Αντιστάθμιση ισχύος

Η αντιστάθμιση ισχύος είναι γνωστή κι ' ως διόρθωση του συντελεστή ισχύος $\cos\psi$. Η αντιστάθμιση μπορεί να γίνει είτε σ' ένα σύνολο καταναλωτών (π.χ. στα φορτία μιας βιομηχανίας), είτε τοπικά σε μικρούς μονοφασικούς καταναλωτές, (π.χ. λυχνίες ψθορισμού), σε τριφασικούς κινητήρες (π.χ. επαγωγικούς κινητήρες) κλπ. Επειδή, όπως θα αναφερθεί στο κεφάλαιο περί τριφασικών ρευμάτων, κάθε συμμετρικό τριφασικό σύστημα μπορεί να παρασταθεί μ' ένα αντίστοιχο μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα συνεπάγεται ότι όσο θ' αναφερθούν στο κεφάλαιο αυτό ισχύουν και τα τριφασικά κυκλώματα.

Τα πλεονεκτήματα της διόρθωσης του $\cos\psi$ μπορούν να δειχθούν ως εξής: Έστω ότι ένας καταναλωτής ισχύος P και

συνψ τροφοδοτείται, μέσω μιας γραμμής σύνθετης αντίστασης $\bar{Z}_\gamma = R_\gamma + jX_\gamma$, από μία πηγή τάσης \bar{U}_γ .



Σχήμα 3.11

Εάν η τάση στον καταναλωτή είναι U τότε το ρεύμα της γραμμής, οι απώλειες της γραμμής και η απόδοσή της δίνονται από τις σχέσεις:

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos\varphi} \quad P_\gamma = R_\gamma I^2 = R_\gamma \frac{P^2}{U^2 \cos^2\varphi} \quad \eta = \frac{1}{1 + R_\gamma \frac{P}{U^2 \cos^2\varphi}}$$

3.38

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνονται, για δεδομένη τάση και πραγματική ισχύ κατανάλωσης, τα εξής:

- το ρεύμα είναι αντιστρόφως ανάλογο του συνψ και οι απώλειες στη γραμμή τροφοδότησης αντιστρόφως ανάλογες του $\cos^2\varphi$.
- το ρεύμα και οι απώλειες ελαττώνονται και ο βαθμός απόδοσης αυξάνεται με την αύξηση (βελτίωση) του συνψ.
- το ρεύμα και οι απώλειες αποκτούν την ελάχιστη τιμή τους και ο βαθμός απόδοσης τη μέγιστη τιμή του για $\cos\varphi=1$.
- Για δεδομένη διατομή γραμμής (δεδομένη μέγιστη επιτρεπόμενη ένταση φόρτισης της γραμμής) η βελτίωση του συνψ παρέχει τη δυνατότητα αύξησης της μεταφερόμενης ισχύος.

Για τους παραπάνω λόγους οι επιχειρήσεις ηλεκτρισμού παρακολουθούν και την άεργη ισχύ μεγάλων καταναλωτών και παρέχουν οικονομικά κίνητρα για βελτίωση του συνψ (συνήθως σε τιμές μεγαλύτερες από 0,85). Πάντως και για μικρούς κα-

ταναλωτές με μικρο συνψ επιβάλλεται η αντιστάθμιση της άεργης ισχύος. Επίσης σε μεγάλες εγκαταστάσεις, η διόρθωση του συνψ, εκτός από την την τιμολογιακή ελάφρυνση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε η εσωτερική διανομή να γίνεται με μικρότερες απώλειες ή να γίνει η εγκατάσταση με μικρότερες διατομές.

Οι καταναλωτές έχουν συνήθως επαγωγικό χαρακτήρα και η αντιστάθμιση γίνεται με την παράλληλη σύνδεση πυκνωτή στην κατανάλωση. Η σύνδεση πυκνωτή σε σειρά επιφέρει τα ίδια αποτελέσματα όσον αφορά το συνψ, αλλά προκαλεί αλλαγή της τάσης, σε σχέση με την τάση χωρίς αντιστάθμιση, γι' αυτό δε χρησιμοποιείται.

Καθορισμός απαιτούμενου πυκνωτή για αντιστάθμιση

Έστω ότι στο κύκλωμα του σχήματος 3.1 τοποθετείται ένας πυκνωτής έτσι ώστε το συνψ να γίνει ψ' . Η άεργος ισχύς πριν την τοποθέτηση του πυκνωτή ήταν $Q_L = S \cdot \eta \mu \phi = P \cdot \epsilon \phi \phi$ και μετά την τοποθέτηση του πυκνωτή η άεργος ισχύς είναι $Q' = P \cdot \epsilon \phi \phi'$. Η διαφορά των δύο ισχύων είναι η άεργος ισχύς που παρέχει ο πυκνωτής, ή

$$-Q_c = Q_L - Q' = P(\epsilon \phi \phi - \epsilon \phi \phi')$$

όμως

$$-Q_c = \omega C U^2 = P(\epsilon \phi \phi - \epsilon \phi \phi') \Rightarrow C = \frac{P}{\omega U^2} (\epsilon \phi \phi - \epsilon \phi \phi') \quad 3.39$$

Παράδειγμα

Μια λυχνία ψθορισμού ισχύος P_λ συμβολίζεται με την ωμική αντίσταση R_λ . Σε σειρά με τη λυχνία είναι συνδεδεμένο ένα πηνίο με ωμική αντίσταση R_π , επαγωγική αντίδραση X_π και απώλειες P_π .

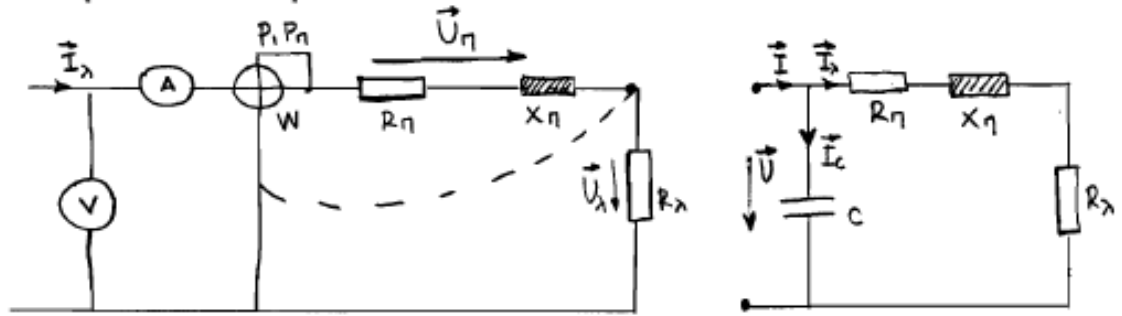
Με τα όργανα του σχήματος μετρούνται οι τιμές:
 $U=220V$, $I_\lambda=0,425A$, $P=49,2W$, $P_\pi=9W$.

Να υπολογιστούν τα εξής:

α) ο συντελεστής ισχύος

β) Η ισχύς P_λ , η αντίσταση R_λ και η τάση U_λ της λυχνίας.

- γ) Η άεργη ισχύς Q_{Π} , η ωμική αντίσταση R_{Π} , η επαγωγική αντίδραση X_{Π} και η τάση U_{Π} του πηνίου.
- δ) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή C , συνδεδεμένου παράλληλα προς τη λυχνία, ώστε ο συντελεστής ισχύος να είναι τουλάχιστον $\cos\varphi=0,95$ και να εκλεγεί ο κατάλληλος από τους τυποποιημένους πυκνωτές $4\mu F, 4,5\mu F, 5\mu F$.
- ε) Ποιο είναι το $\cos\varphi$ και η ένταση του ρεύματος I μετά τη σύνδεση του πυκνωτή.



Λύση

$$a) \cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{U \cdot I_1} = \frac{49,2}{220 \cdot 0,425} = 0,526$$

$$b) P_1 = P - P_n = 49,2 - 9 = 40,2W \approx 40W,$$

$$R_1 = P_1 / I^2 = 40,2W / 0,425^2 = 222,6\Omega \approx 223\Omega$$

$$U_1 = I \cdot R_1 = 0,425 \cdot 223 \approx 95V$$

$$γ) Q_n = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(U \cdot I_1)^2 - P^2} = \sqrt{93,5^2 - 49,2^2} = 79,5 \text{ var}$$

$$R_n = P_n / I^2 = 9W / 0,425^2 = 49,8\Omega \approx 50\Omega$$

$$X_n = Q_n / I^2 = 79,5W / 0,425^2 = 440,1\Omega \approx 440\Omega$$

$$U_n = I \cdot \sqrt{R_n^2 + X_n^2} = 0,425 \cdot \sqrt{49,8^2 + 440^2} \approx 188V$$

δ)

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\varphi') = \frac{49,2W}{2\pi 50 \cdot 220^2} [\varepsilon\varphi(\cos\varphi_{\text{αρχ}} 0,526) - \varepsilon\varphi(\cos\varphi_{\text{τελ}} 0,95)] = 4,2\mu F$$

άρα επιλέγεται ο πυκνωτής των $4,5\mu F$.

$$\begin{aligned} \gamma) \quad Q_c &= -C\omega U^2 = -4,5 \cdot 10^{-6} 2\pi 50 \cdot 220^2 = -68,4 \text{ var}, \\ Q &= Q_a + Q_c = 79,5 - 68,4 = 11,1 \text{ var} \end{aligned}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{49,2}{\sqrt{49,2^2 + 11,1^2}} = 0,976,$$

$$I = S / U = 50,4 \text{ VA} / 220 \text{ V} = 0,229 \text{ A}$$

Κεφάλαιο 4

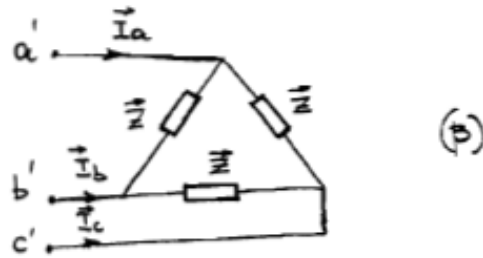
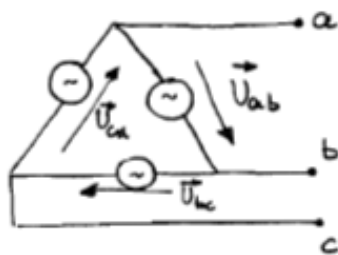
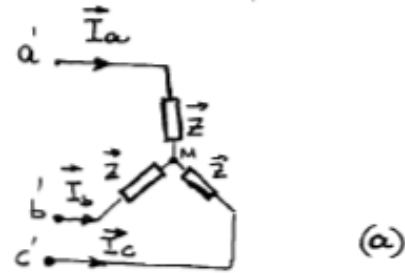
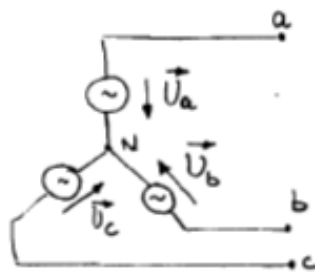
Τριφασικό Σύστημα

4.1 Γενικά

Η ηλεκτρική ενέργεια παράγεται ως επί το πλείστον με σύγχρονες τριφασικές γεννήτριες και τα τριφασικά συστήματα χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά για τη παραγωγή, μεταφορά και διανομή ηλεκτρικής ενέργειας. Τα βασικά πλεονεκτήματα των τριφασικών συστημάτων έναντι των μονοφασικών είναι:

- α) Η δημιουργία στρεφόμενου μαγνητικού πεδίου (περισσότερη ανάλυση γίνεται στο κεφάλαιο των μηχανών εναλλασσομένου ρεύματος).
- β) Η μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας είναι πιο οικονομική σε σύγκριση με τη μεταφορά με ένα διφασικό ή μονοφασικό σύστημα.
- γ) Η ισχύς ως συνάρτηση του χρόνου είναι για συμμετρική φόρτιση σταθερή. Στο μονοφασικό σύστημα η ισχύς είναι ταλαντούμενη με συχνότητα διπλάσια της συχνότητας της τάσεως.

Τα τυλίγματα των γεννητριών, των μετασχηματιστών και τα φορτία σ' ένα τριφασικό (ή γενικά σ' ένα πολυφασικό σύστημα) συνδέονται με δύο βασικούς τρόπους: σ' αστέρα ή τρίγωνο (πολύγωνο). Στο σχήμα 4.1 δείχνεται μια γεννήτρια και ένα φορτίο που συνδέεται σε αστέρα (α) και σε τρίγωνο (β). Εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι η σύνδεση των τριών τυλιγμάτων της πηγής (ή των τριών πηγών τάσης) ισοδυναμεί με βραχυκύκλωμα. Αυτό όμως δεν είναι αληθές μια και οι τρεις τάσεις των πηγών, όπως φαίνεται εύκολα από τις σχέσεις 4.1, έχουν άθροισμα 0.



Σχήμα 4.1

Η μέθοδος της διασύνδεσης που χρησιμοποιείται για τα τυλίγματα μιας γεννήτριας είναι ανεξάρτητη του τρόπου διασύνδεσης του φορτίου. Δηλαδή στο ίδιο κύκλωμα μπορεί να έχουμε συνδέσεις φορτίων και γεννητριών και σε μορφή τριγώνου και σε αστέρα.

Για το τριφασικό συμμετρικό σύστημα ισχύουν οι σχέσεις για τις τάσεις των πηγών:

$$u_a(t) = u_{\max} \cos(\omega t + \varphi_a)$$

$$u_b(t) = u_{\max} \cos(\omega t + \varphi_a - 2\pi/3)$$

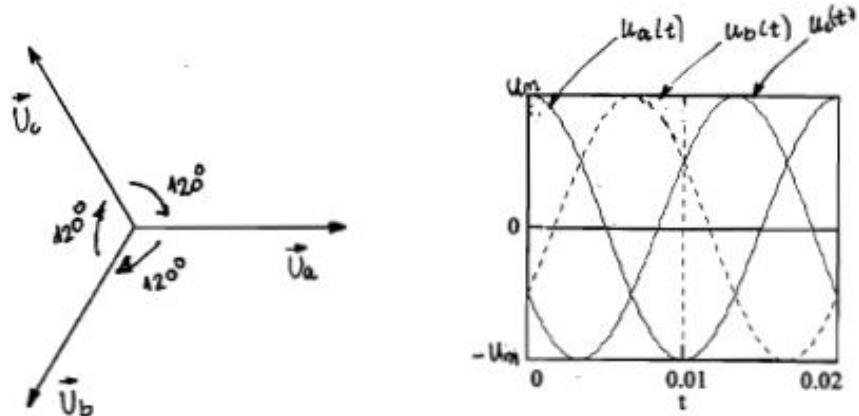
$$u_c(t) = u_{\max} \cos(\omega t + \varphi_a + 2\pi/3)$$

4.1

Για τις αντίστοιχες ανυσματικές τάσεις και για $\psi_u = 0$ ισχύει:

$$\vec{U}_a = U|0^\circ, \quad \vec{U}_b = U|_{-120^\circ} = \bar{a}^2 \vec{U}_a, \quad \vec{U}_c = U|_{+120^\circ} = \bar{a} \vec{U}_a, \quad \text{όπου} \quad \bar{a} = e^{j2\pi/3} \quad 42$$

Στο σχήμα 4.2 φαίνεται το συμμετρικό τριφασικό σύστημα των τάσεων στο μιγαδικό και πραγματικό επίπεδο.



Σχήμα 4.2 Συμμετρικό τριφασικό σύστημα ψασικών τάσεων α) στο μιγαδικό και β) στο πραγματικό επίπεδο.

4.2 Τριφασική ισχύς

Η τριφασική ισχύς σ' ένα τριφασικό συμμετρικό σύστημα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$p(t) = u_a(t)i_a(t) + u_b(t)i_b(t) + u_c(t)i_c(t) \tag{4.3}$$

Επειδή θεωρήθηκε συμμετρικό φορτίο, από το σχήμα 4.1α, εύκολα συμπεραίνεται χρησιμοποιώντας το νόμο του Ohm ότι τα ρεύματα θα έχουν τη μορφή:

$$i_a(t) = i_{max} \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$i_b(t) = i_{max} \cos(\omega t + \varphi_i - 2\pi/3) \tag{4.4}$$

$$i_c(t) = i_{max} \cos(\omega t + \varphi_i + 2\pi/3)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις 4.1 και 4.4 και αντικαθιστώντας στην 4.3 προκύπτει, κάνοντας τις κατάλληλες τριγωνομετρικές απλοποιήσεις ότι:

$$p(t) = 3UI \cos(\varphi) \tag{4.5}$$

όπου $U = u_{\max}/\sqrt{2}$, $I = i_{\max}/\sqrt{2}$, και $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

Σύμφωνα με την 4.5 η στιγμιαία ισχύς s' ένα τριφασικό συμμετρικό σύστημα είναι σταθερή και έχει τιμή που είναι τρεις φορές η πραγματική ισχύς στο μονοφασικό εναλλασσόμενο σύστημα:

$$P_{3\phi}(t) = P_{3\phi} = 3P$$

4.6

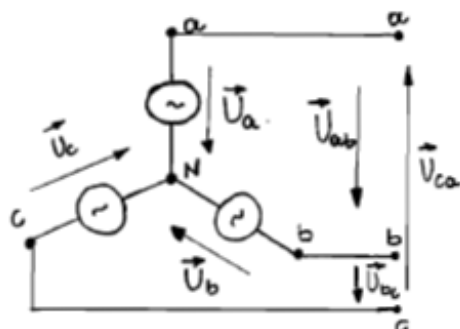
Επίσης από τη σχέση 4.5 θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι η άεργος ισχύς είναι μηδέν. Αυτό είναι λάθος, διότι η άεργος ισχύς υπάρχει σε κάθε φάση και απλώς μόνο σαν άθροισμα είναι μηδέν. Άλλωστε το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με τα ρεύματα. Η άεργος ισχύς ορίζεται κατά αντιστοιχία της ενεργού ισχύος ως εξής:

$$Q = 3UI \sin(\varphi)$$

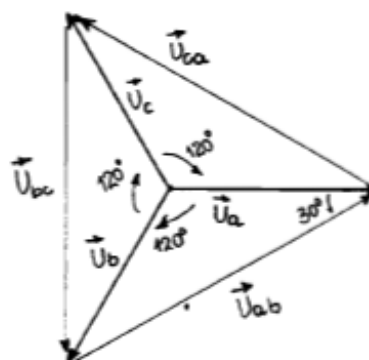
4.7

4.3 Τάσεις και εντάσεις τριφασικού συστήματος

Σ' ένα συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων άσχετα με το αν το φορτίο είναι συμμετρικό ή ασύμμετρο, οι τάσεις του συστήματος είναι της μορφής των σχέσεων 4.1 ή 4.2. Κατά την τροφοδότηση τριφασικών φορτίων απαιτούνται συνήθως οι τρεις αγωγοί των φάσεων. Στα δίκτυα χαμηλής τάσης χρησιμοποιούνται οι τρεις αγωγοί των φάσεων και ο ουδέτερος αγωγός επειδή εκεί συνήθως τα φορτία είναι μονοφασικά και κατανέμονται ως τριφασικά στις τρεις φάσεις από τη ΔΕΗ. Οι τάσεις μεταξύ των φάσεων ονομάζονται πολικές τάσεις, ενώ μεταξύ φάσεως και ουδετέρου ονομάζονται φασικές τάσεις. Η σχέση που συνδέει μεταξύ τους τις τάσεις βρίσκεται εύκολα αν παραστήσει κανείς τα ανύσματα των τάσεων:



Εκτίμα 43



$$\vec{U}_{ab} = \vec{U}_a - \vec{U}_b = \vec{U}_s(1 - \bar{a}^2) = \sqrt{3} \cdot \vec{U}_s \cdot e^{j30^\circ}$$

$$\vec{U}_{bc} = \vec{U}_b - \vec{U}_c = \vec{U}_s(\bar{a}^2 - \bar{a}) = \sqrt{3} \cdot \vec{U}_s \cdot e^{-j30^\circ}$$

4.8

$$\vec{U}_{ca} = \vec{U}_c - \vec{U}_a = \vec{U}_s(\bar{a} - 1) = \sqrt{3} \cdot \vec{U}_s \cdot e^{j150^\circ}$$

Από τις σχέσεις 4.8 εξάγεται ότι το μέτρο της πολικής τάσης είναι κατά $\sqrt{3}$ μεγαλύτερο του μέτρου της φασικής τάσης.

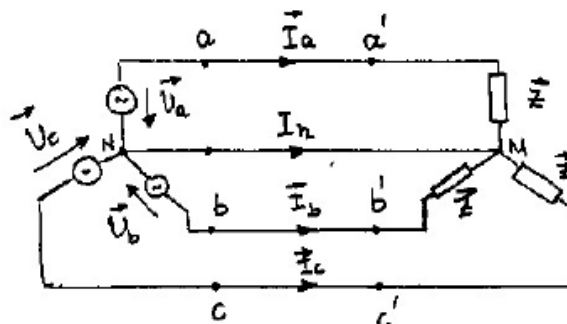
Τα ρεύματα τα οποία ρέουν σ' ένα τριφασικό σύστημα εξαρτώνται από τις τάσεις και τις αντιστάσεις του φορτίου. Δηλαδή για να είναι κι' αυτά συμμετρικά, όπως στις σχέσεις 4.4, θα πρέπει τόσο οι τάσεις όσο και το τριφασικό φορτίο να είναι συμμετρικά. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο παρακάτω κεφάλαιο όπου εξετάζεται το τριφασικό συμμετρικό σύστημα.

4.4 Συμμετρικό τριφασικό σύστημα

Το συμμετρικό τριφασικό σύστημα είναι ένα σύστημα στο οποίο οι πηγές είναι τριφασικές συμμετρικές πηγές και τα φορτία τριφασικά συμμετρικά φορτία. Επειδή υπάρχουν δύο είδη συνδεσμολογιών (αστέρας και τρίγωνο) τόσο για τις πηγές όσο και για τα φορτία, στην πράξη μπορεί να υπάρξουν διάφορες διατάξεις και συνδυασμοί των παραπάνω. Παρακάτω εξετάζονται δύο περιπτώσεις (πηγή αστέρας - φορτίο αστέρας) και (πηγή τρίγωνο, φορτίο τρίγωνο), ενώ για τις άλλες τα συμπεράσματα είναι παρόμοια.

Συμμετρικό τριφασικό σύστημα σε συνδεσμολογία Y-Y

Η συνδεσμολογία του σχήματος 4.4 παριστάνει ένα συμμετρικό σύστημα συνδεσμολογίας Y-Y. Ο αγωγός που συνδέει τους δύο ουδέτερους N, M λέγεται ουδέτερος αγωγός, ή ουδέτερος.



Σχήμα 4.4

Λύση

$$\vec{Z}_{\text{ολ}} = 5 + j1 - j5 = 6 - j4 \Omega$$

$$\vec{I} = \frac{\vec{U}}{\vec{Z}_{\text{ολ}}} = \frac{220 \angle 0^\circ \text{ V}}{6 - j4 \Omega} = 30,5 \angle 33,7^\circ \text{ A}$$

Συνεπώς

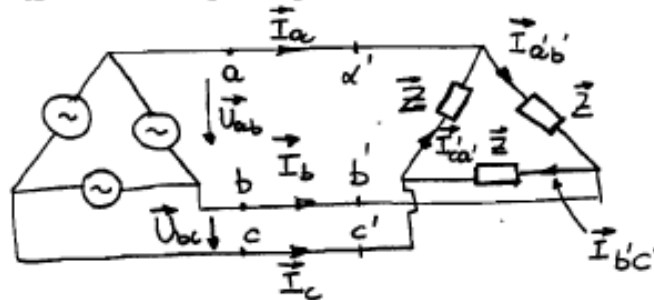
$$\vec{I}_a = \vec{I} = 30,5 \angle 33,7^\circ \text{ A}$$

$$\vec{I}_b = 30,5 \angle 33,7^\circ - 120^\circ \text{ A} = 30,5 \angle -86,3^\circ \text{ A}$$

$$\vec{I}_c = 30,5 \angle 33,7^\circ + 120^\circ \text{ A} = 30,5 \angle 153,7^\circ \text{ A}$$

Συμμετρικό τριφασικό σύστημα σε συνδεσμολογία Δ-Δ

Η συνδεσμολογία του σχήματος 4.6 παριστάνει ένα συμμετρικό σύστημα συνδεσμολογίας Δ-Δ.



Σχήμα 4.6

Εάν το φορτίο στις τρεις φάσεις είναι $\vec{Z} = Z \angle \varphi$, τα ρεύματα στο φορτίο προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$\vec{I}_{a'b'} = \frac{\vec{U}_{a'b'}}{\vec{Z}} = \left(\frac{U_{\text{φάση}}}{Z} \right) e^{-j\varphi} \quad \vec{I}_{b'c'} = \frac{\vec{U}_{b'c'}}{\vec{Z}} = \left(\frac{U_{\text{φάση}}}{Z} \right) e^{-j(120^\circ + \varphi)}$$

$$\vec{I}_{c'a'} = \frac{\vec{U}_{c'a'}}{\vec{Z}} = \left(\frac{U_{\text{φάση}}}{Z} \right) e^{j(120^\circ - \varphi)}$$

4.10

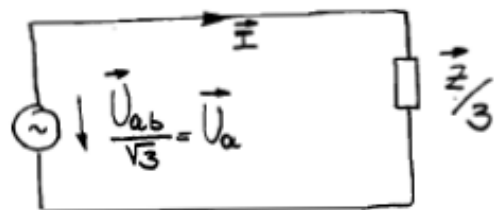
και τα ρεύματα της γραμμής είναι :

$$\vec{I}_a = \vec{I}_{a'c'} - \vec{I}_{c'a'} \quad \vec{I}_b = \vec{I}_{b'c'} - \vec{I}_{c'b'} \quad \vec{I}_c = \vec{I}_{c'a'} - \vec{I}_{a'b'} \quad 4.11$$

Από τις σχέσεις 4.10 και 4.11 φαίνεται ότι τα ρεύματα τόσο στο φορτίο όσο και στις γραμμές είναι συμμετρικό. Επίσης από το σχήμα 4.7 όπου υπάρχουν τα ανύσματα των ρευμάτων, προκύπτει ότι:

$$I_a = I_b = I_c = \sqrt{3} I_{\phi}$$

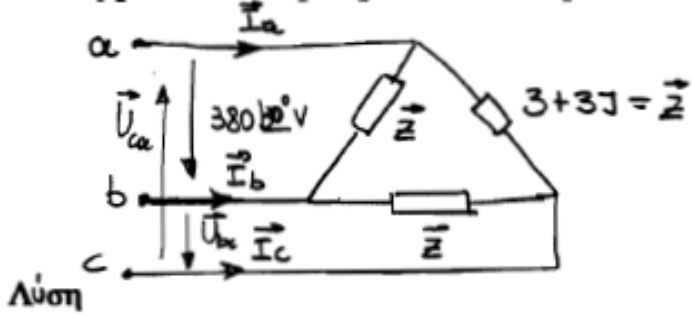
δηλαδή σ' ένα συμμετρικό τριφασικό σύστημα Δ-Δ τα τρία ρεύματα της γραμμής είναι μεγαλύτερα κατά $\sqrt{3}$ από τα ρεύματα του φορτίου. Επίσης επειδή δεν υπάρχει αγωγός επιστροφής το άθροισμα των ρευμάτων της γραμμής είναι ίσο με το μηδέν. Επίσης γίνεται φανερό ότι η ανάλυση ενός τριφασικού συμμετρικού συστήματος Δ-Δ μπορεί να αναχθεί στην ανάλυση ενός μονοφασικού κυκλώματος με πηγή τάσης τη φασική τάση και αντίσταση φορτίου την αντίσταση του ισοδύναμου αστερά ή $\vec{Z}/3$. Το ισοδύναμο μονοφασικό κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα 4.8.

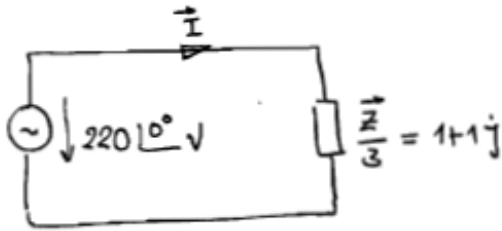


Σχήμα 4.8

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα:





$$\vec{I} = \frac{220 \angle 0^\circ}{1 + 1j} = 110 - 110j = 155,6 \angle -45^\circ \text{ A}$$

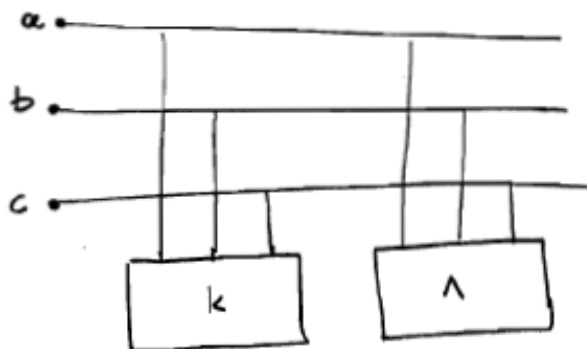
οπότε $\vec{I}_a = 155,6 \angle -45^\circ \text{ A}$, $\vec{I}_b = 155,6 \angle -165^\circ \text{ A}$, $\vec{I}_c = 155,6 \angle 75^\circ \text{ A}$

Παράδειγμα

Δύο τριφασικοί καταναλωτές Κ και Λ είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, όπως φαίνεται στο σχήμα, σε δίκτυο πολικής τάσης $U_n = 380 \text{ V}$.

Να βρεθούν:

- Η φαινομένη και η άεργη ισχύς του κάθε καταναλωτή,
- Η συνολική φαινομένη, ενεργή και άεργη ισχύς.
- Το συνολικό ρεύμα γραμμής και ο συνολικός συντελεστής ισχύος $\cos\psi$.
- Εάν ο συντελεστής $\cos\psi$ διορθωθεί σε $\cos\psi' = 0,95$, ποιά θα είναι η νέα τιμή του ρεύματος I' ;
Ποιά είναι η απαραίτητη χωρητική ισχύς και η χωρητικότητα των πυκνωτών
 - για σύνδεση σε τρίγωνο
 - για σύνδεση σε αστέρα



$$P_K = 25 \text{ kW}$$

$$\cos\varphi_K = 0,68 \text{ επαγωγικό}$$

$$P_\Lambda = 40 \text{ kW}$$

$$\cos\varphi_\Lambda = 0,75 \text{ επαγωγικό}$$

Λύση

$$a) S_k = \frac{P_k}{\cos \varphi_k} = \frac{25 \text{ kW}}{0,68} \approx 36,8 \text{ kVA}, \quad Q_k = S_k \sin \varphi_k = P_k \tan \varphi_k = 25 \text{ kW} \cdot \tan 47,16^\circ = 27 \text{ kVar.}$$

$$S_A = \frac{P_A}{\cos \varphi_A} = \frac{40}{0,75} = 53,3 \text{ kVA}, \quad Q_A = P_A \tan \varphi_A = 40 \cdot \tan 41,4^\circ = 35,3 \text{ kVar.}$$

$$b) P_{o\lambda} = 25 + 40 = 65 \text{ kW}, \quad Q_{o\lambda} = 27 + 35,3 = 62,3 \text{ kVar} \quad S_{o\lambda} = \sqrt{P_{o\lambda}^2 + Q_{o\lambda}^2} = \sqrt{65^2 + 62,3^2} = 90 \text{ kVA.}$$

$$g) I = \frac{S_{o\lambda}}{\sqrt{3} U_\eta} = \frac{90000 \text{ VA}}{\sqrt{3} \cdot 380 \text{ V}} = 136,7 \text{ A.} \quad \cos \varphi = \frac{P_{o\lambda}}{S_{o\lambda}} = \frac{65}{90} = 0,722 \text{ επαγωγικό}$$

$$\text{και } \vec{I} = 136,7 \angle -43,8^\circ \text{ A.}$$

$$d) I = \frac{P_{o\lambda}}{\sqrt{3} U_\eta \cos \varphi'} = \frac{65000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,95} = 104 \text{ A.}$$

$$Q'_{o\lambda} = P_{o\lambda} \tan \varphi' = 65 \cdot \tan 18,2^\circ = 21,4 \text{ kVar.} \quad \acute{\alpha}\rho\alpha$$

$$Q_{\text{πυκνωτών}} = Q_{o\lambda} - Q'_{o\lambda} = 62,3 - 21,4 = 40,9 \text{ kVar.}$$

$$\text{και για σύνδεση σε τρίγωνο } C_\Delta = \frac{Q_\eta}{3 U_\eta^2 \omega} = \frac{40900}{3 \cdot 380^2 \cdot 2\pi \cdot 50} = 300 \mu\text{F}$$

$$\text{και για αστερά } C_Y = 3 C_\Delta = 900 \mu\text{F.}$$

Βιβλιογραφία

- [1] G. Zeveke, P. Ionkin, A. Netushil, S. Strakhov, "ANALYSIS of ELECTRIC CIRCUITS", Mir Publishers, 1973 Moscow.
- [2] J. A. Edminister, "ELECTRIC CIRCUITS", Schaum's outline series, McGraw-Hill.
- [3] Δ. Κ. Τσανάκας, "ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ", Δ.Π.Θ., Ξάνθη 1988.
- [4] Δ. Γ. Ευθυμιάτος, "ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ, Τόμος Α'", Α.Π.Θ., Θεσ/νίκη 1974.
- [5] Δ. Γ. Ευθυμιάτος, "ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ, Τόμος Β'", Α.Π.Θ., Θεσ/νίκη 1974.
- [6] Γ. Ι. Βαχτσεβάνος, "ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ" Δ.Π.Θ., Ξάνθη 1983.
- [7] Ν. Ι. Μάργαρης, "ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ Τόμος Ι_α", Α.Π.Θ., Θεσ/νίκη 1986.
- [8] Ν. Ι. Μάργαρης, "ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ Τόμος Ι_β", Α.Π.Θ., Θεσ/νίκη 1986.
- [9] Ε. Ν. Πρωτονοτάριος, "ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΙΔΙΚΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑΣ Τόμος Α'", Ε.Μ.Π. Αθήνα 1984.
- [10] Ο. Ι. Elgerd, "ELECTRIC ENERGY SYSTEMS THEORY", TATA, McGraw-Hill.
- [11] M. Kaufman, A.H. Seidman, "HANDBOOK OF ELECTRONICS CALCULATIONS", McGraw-Hill.
- [12] D.G.Fink, H.W. Beaty, "STANDARD HANDBOOK for ELECTRICAL ENGINEERING", McGraw-Hill 1955.
- [13] L.P. Huelsman, "BASIC CIRCUIT THEORY", Prentice-Hall, 1984.
- [14] C.A. Desoer, E.S. Kuh, "BASIC CIRCUIT THEORY", McGraw-Hill, 1969.
- [15] S.B. Hammond, D.K. Gehmlich, "ELECTRICAL ENGINEERING", McGraw-Hill, 1961.