ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

κ.ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΜΠΑΛΟΥΚΤΣΗΣ

***ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ***

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

CC BY SA

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.

- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

BY SA

ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Ηλεκτρικά κυκλώματα

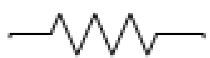
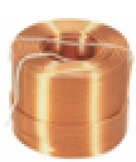
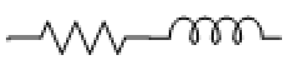
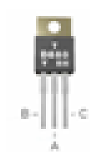
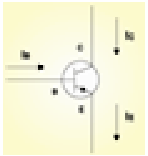
- Το εκπαιδευτικό υλικό βασίζεται στο εγκεκριμένο από το Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών περίγραμμα του μαθήματος « Ηλεκτρικά κυκλώματα »
- Συντάκτης: **Αναστάσιος Μπαλουκτσής**

# Γενικά

- Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι ένα σύνολο φυσικών ηλεκτρικών στοιχείων που συνδέονται μεταξύ τους. Σκοπός του ηλεκτρικού κυκλώματος είναι η μεταφορά, η διανομή και η μετατροπή της ηλεκτρικής ενέργειας, καθώς επίσης και η μετάδοση ηλεκτρικών σημάτων.
- Τα κυκλώματα διακρίνονται σε κυκλώματα εντοπισμένων και κυκλώματα διανεμημένων στοιχείων. Χαρακτηριστική ιδιότητα των εντοπισμένων στοιχείων είναι το μικρό μέγεθος αυτών σε σχέση με το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα του ρεύματος που τα διαρρέει. Συνεπώς, για εντοπισμένα στοιχεία δύο ακροδεκτών, η ένταση του ρεύματος που εισέρχεται από τον έναν ακροδέκτη είναι ίση με την ένταση του ρεύματος που εξέρχεται από τον άλλον ακροδέκτη. Στα κυκλώματα με εντοπισμένα στοιχεία εφαρμόζονται οι νόμοι του Kirchhoff, οι οποίοι αποτελούν προσέγγιση των εξισώσεων Maxwell

# Ομοιώματα ηλεκτρικών κυκλωμάτων

- Τα ομοιώματα είναι κυκλώματα αποτελούμενα από εξιδανικευμένα ηλεκτρικά στοιχεία με γνωστές "καθαρές" ιδιότητες.

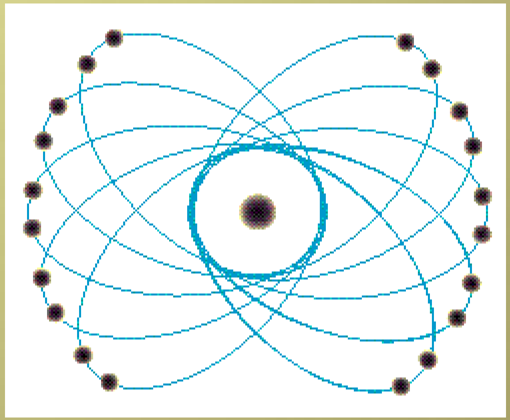
| αντιστάτης | ομοίωμα | πηγή τάσης | ομοίωμα |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| πηνίο | ομοίωμα | Τρανζίστορ | ομοίωμα |
|  |  |  |  |

# Βασικά ηλεκτρικά μεγέθη – μονάδες

## Ηλεκτρικό φορτίο

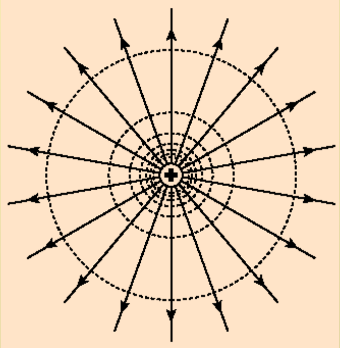
Σύμφωνα με τη φυσική το ηλεκτρικό φορτίο είναι χαρακτηριστικό των στοιχειωδών σωματιδίων της ύλης. Το μικρότερο σωματίδιο με αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο είναι το ***ηλεκτρόνιο.***

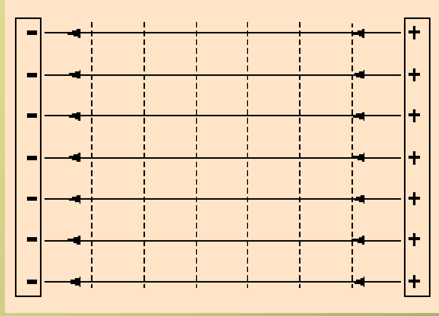
Η μονάδα του ηλεκτρικού φορτίου στο διεθνές σύστημα (SI) είναι το *Coulomb*, που ισούται με το συνολικό φορτίο $6{,}2\cdot10^{18}$ ηλεκτρονίων, δηλαδή το φορτίο ενός ηλεκτρονίου είναι κατά προσέγγιση $1{,}602\cdot 10^{-19}$ C.



# Ηλεκτρικό δυναμικό

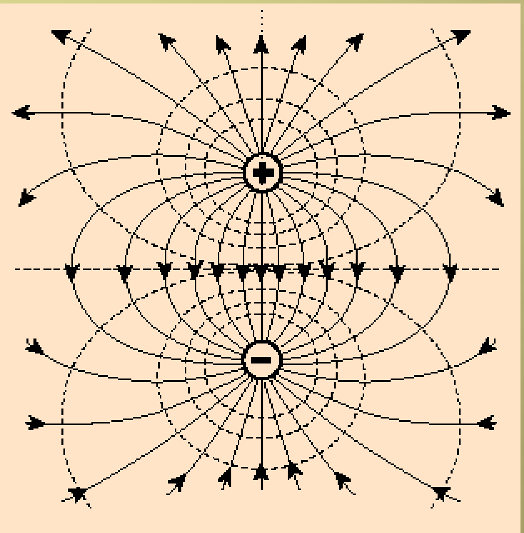
Ο χώρος γύρω από ένα ηλεκτρικό φορτίο επηρεάζεται από την παρουσία του και δημιουργείται ένα ανυσματικό πεδίο δυνάμεων που ονομάζεται ηλεκτρικό πεδίο.





Η *ένταση* $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου σ' ένα σημείο του ορίζεται ως η δύναμη που εξασκείται στη μονάδα του θετικού φορτίου $q$ που βρίσκεται σ' αυτό το σημείο και ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$



## *Η μονάδα έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σύστημα SI είναι το **Newton/C** ή το **Volt/m**.*

Το ηλεκτρικό πεδίο δεν περιγράφεται μόνο από το άνυσμα της έντασης αλλά επίσης και με ένα βαθμωτό μέγεθος, το *ηλεκτρικό δυναμικό u*. Το δυναμικό σ' ένα σημείο του χώρου ορίζεται ως η ενέργεια ανά μονάδα φορτίου, που απαιτείται για να μεταφερθεί το φορτίο στο θεωρούμενο σημείο από κάποιο άλλο σημείο μηδενικού δυναμικού. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων του παραπάνω χώρου δείχνει την ενέργεια, που η μονάδα του φορτίου αποκτά ή χάνει, κατά τη μετακίνησή της από το ένα σημείο στο άλλο.

Η σχέση που συνδέει την ένταση με το δυναμικό είναι:

$$u_{AB} = \int_{l} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

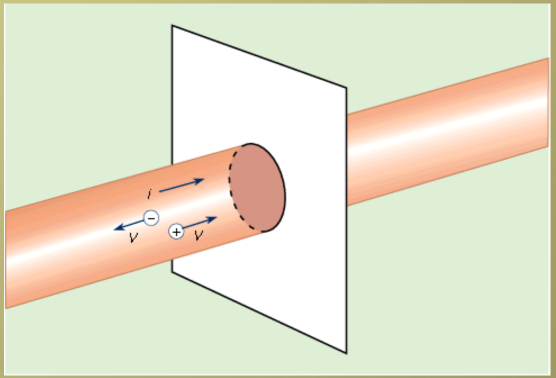
*Η μονάδα δυναμικού στο σύστημα SI είναι το* ***V*** *(Volt) και είναι ίσο με* ***Joule/Coulomb***

# Ηλεκτρικό ρεύμα

Το ηλεκτρικό ρεύμα ορίζεται ως ο ρυθμός μιας συνισταμένης κίνησης φορτίων. Δηλαδή, εάν στα άκρα ενός μεταλλικού αγωγού εφαρμοστεί μια διαφορά δυναμικού, τότε το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο έντασης δρα πάνω στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μετάλλου και προκαλεί σ' αυτά συνισταμένη κίνηση με κατεύθυνση -$\vec{E}$. Αν από μια διατομή του αγωγού διέρχεται σε χρόνο $dt$ φορτίο $dq$, τότε ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου είναι $dq/dt$ και συνεπώς το ρεύμα ισούται με:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \vec{J} = \frac{di}{ds}\vec{n}$$

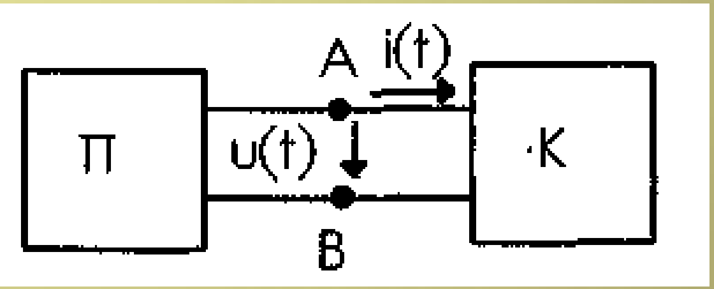


•

- *Η μονάδα του ρεύματος* **i** *είναι το* **A** *(Ampere), που ορίζεται ως το φορτίο ενός Coulomb που διέρχεται από μια διατομή σε χρόνο  ενός sec*

# Ηλεκτρική ισχύς

Κατά τη μετακίνηση ενός στοιχειώδους φορτίου *dq* μεταξύ των άκρων *A, B* τάσης $u_{AB}(t)= u(t)$, καταναλώνεται ενέργεια, η οποία δίνεται σύμφωνα με τον ορισμό του δυναμικού, από τη σχέση: $dw = u(t)\cdot dq$




Επειδή η ισχύς είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας, συνεπάγεται:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq}\cdot\frac{dq}{dt} = u(t)\cdot i(t)$$

$$W = \int_0^t p(\tau)\cdot d\tau = \int_0^t u(\tau)\cdot i(\tau)\cdot d\tau$$

*Η μονάδα ισχύος στο σύστημα SI είναι το **W** και είναι ίσο με **Volt Ampere***

# Ιδανικά στοιχεία κυκλώματος

Η περιγραφή ηλεκτρικών συσκευών και κυκλωμάτων με κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα, που αποτελούνται από ορισμένα ιδανικά στοιχεία, με γνωστές "***καθαρές***" ιδιότητες, βοηθά στην απλοποίηση και κατανόηση της λειτουργίας του πραγματικού συστήματος. Τα ιδανικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: α) στα ***παθητικά*** *στοιχεία κυκλώματος* και β) στα ***ενεργητικά*** *στοιχεία κυκλώματος*.

*Κύρια παθητικά στοιχεία κυκλώματος:*
***Αντιστάτης, Πυκνωτής, Πηνίο***

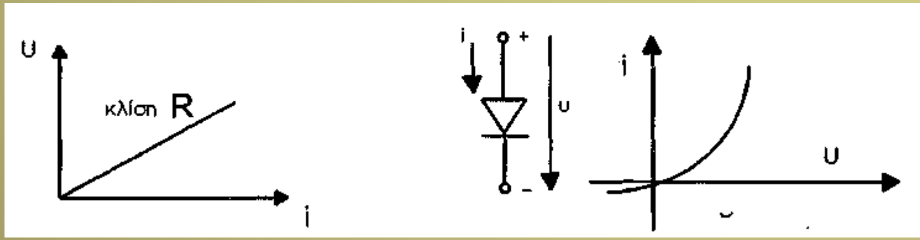
*Ενεργητικά στοιχεία κυκλώματος*
***Ανεξάρτητη πηγή τάσης, Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος***

# Αντιστάτης

Ο αντιστάτης είναι ένα στοιχείο, για το οποίο ισχύει ο νόμος του Ohm.

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad ή \quad i(t) = G \cdot u(t) \quad όπου \quad G = \frac{1}{R}$$

Οι μονάδες στο σύστημα SI είναι για την αντίσταση το Ohm (Ω) και για την αγωγιμότητα το Siemens (S) ($1S=1\Omega^{-1}$)




$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i(t)^2 = \frac{u(t)^2}{R}$$

Η ωμική αντίσταση ενός αγωγού εξαρτάται από τις διαστάσεις του και από το υλικό του, και δίνεται από τη σχέση:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

όπου $l$ και $S$ είναι το μήκος και η διατομή του αγωγού αντίστοιχα. Ο συντελεστής $\rho$ ονομάζεται ειδική αντίσταση του υλικού και εξαρτάται κυρίως από το υλικό καθώς επίσης και από άλλες παραμέτρους, όπως είναι η θερμοκρασία. Η μονάδα του $\rho$ στο σύστημα SI είναι το Ω·m. Στους αγωγούς, επειδή η διατομή τους εκφράζεται συνήθως σε $mm^2$, χρησιμοποιείται στην πράξη η μονάδα $\Omega.mm^2/m$.

Η σχέση που δίνει τη μεταβολή της αντίστασης με τη θερμοκρασία είναι:

$$R_{\theta 2} = R_{\theta 1} \cdot [1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)]$$

| Υλικό | Ειδική αντίσταση ρ ($\Omega\, mm^2/m$) | Συντελεστής θερμοκρασίας α ($^\circ C^{-1}$) |
|---|---|---|
| Άργυρος | 0,0159...0,017 | $3{,}8\ 10^{-3}$ |
| Χαλκός | 0,017...0,0178 | $3{,}9\ 10^{-3}$ |
| Αλουμίνιο | 0,028...0,03 | $3{,}7\ 10^{-3}$ |
| Ψευδάργυρος | 0,063 | $3{,}7\ 10^{-3}$ |
| Σίδηρος | 0,09...0,15 | $4{,}5\ 10^{-3}$ |

# Πυκνωτής

Για ένα γραμμικό και σταθερό με το χρόνο πυκνωτή **ισχύει:**

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

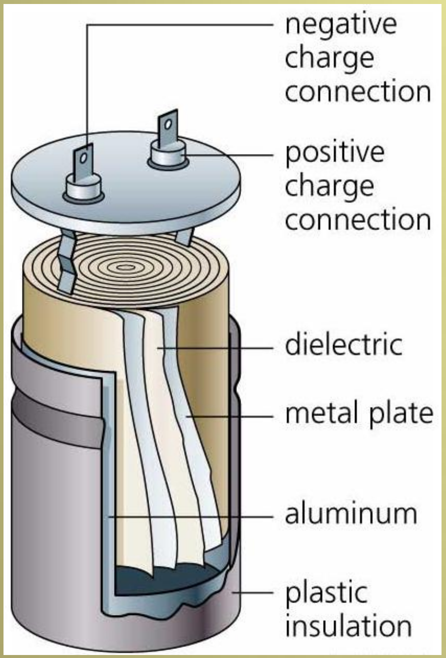
ο συντελεστής C είναι σταθερός και καλείται **χωρητικότητα** του πυκνωτή. Μονάδα της χωρητικότητας είναι το *Farad (F)* και είναι ίσο με *Coulomb/Volt* (συνήθως στην πράξη χρησιμοποιούνται τα υποπολλαπλάσια του *F*, όπως *mF*, *pF*, *nF* και *pF*).

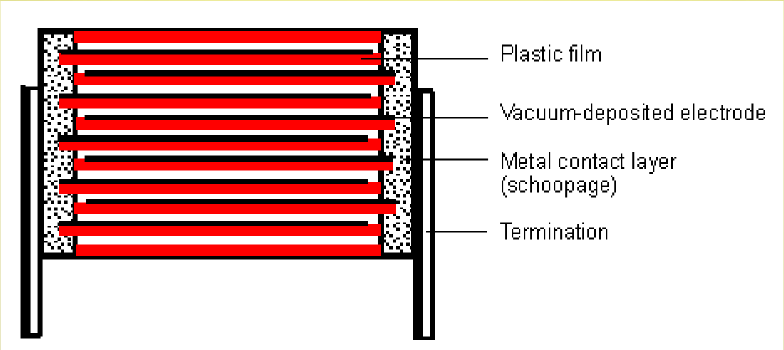
Οι σχέσεις που συνδέουν την ένταση του ρεύματος και την τάση ενός πυκνωτή δίνονται από:

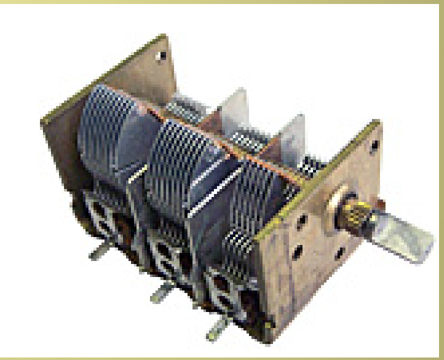
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad \kappa\alpha\iota \quad u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) \cdot d(\tau)$$

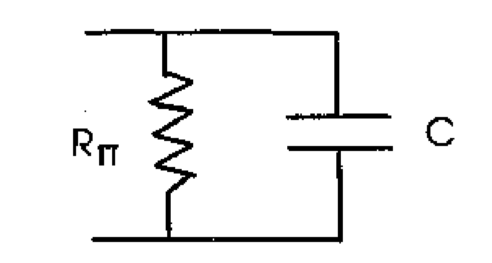
Η ενέργεια η οποία είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο ενός πυκνωτή, εφόσον ο ιδανικός πυκνωτής δεν καταναλώνει ενέργεια, είναι ίση με την ενέργεια η οποία δαπανήθηκε για να φτάσει ο πυκνωτής από μια, για παράδειγμα, αφόρτιστη κατάσταση σε μια κατάσταση φόρτισης με φορτίο *q(t)* και τάση *u(t)*. Συνεπώς:

$$W(t)_c = \int_0^t u(\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot C \cdot \frac{du(\tau)}{d\tau} \cdot d\tau = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q(t)^2}{C}$$






συντελεστής απωλειών

$$D = \frac{1}{R_{\pi} \cdot \omega \cdot C}$$

# Πηνίο

Για ένα γραμμικό και σταθερό με το χρόνο πηνίο ισχύει:

$$\psi(t) = L \cdot i(t)$$

όπου *L* σταθερός συντελεστής, ανεξάρτητος των *i* και *ψ*, καλούμενος συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου. Η μονάδα της αυτεπαγωγής είναι το *henry (H)* και ισούται με *V sec/A* ή *Wb/A*

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Faraday

$$u(t) = \frac{d\psi}{dt}$$

προκύπτει:

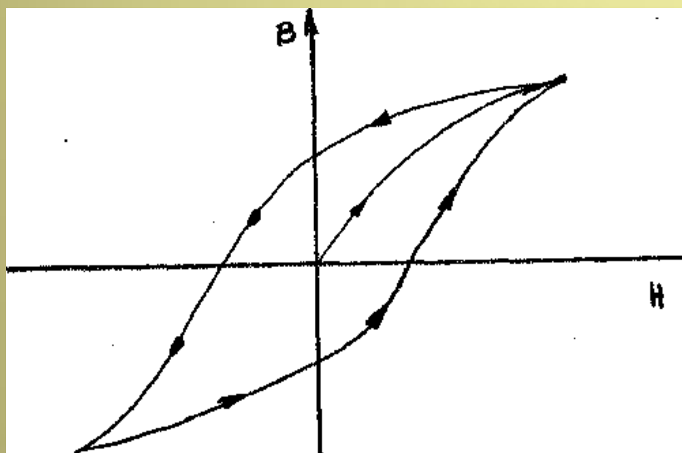
$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad \kappa\alpha\iota \quad i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u(\tau)d\tau$$

α) το ρεύμα στο πηνίο εξαρτάται από την αρχική του τιμή *i(0)*, καθώς επίσης και από όλες τις τιμές της τάσεως, από την αρχική στιγμή μέχρι τη χρονική στιγμή *t* και β) εάν το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι σταθερό (ανεξάρτητο του χρόνου), τότε η τάση στο πηνίο είναι μηδενική και συνεπώς το πηνίο δρα ως βραχυκύκλωμα.

Η ενέργεια η οποία είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο ενός πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$W(t)_c = \int_0^t u(\tau)\cdot i(\tau)\cdot d\tau = \int_0^t i(\tau)\cdot L\cdot\frac{di(\tau)}{d\tau}\cdot d\tau = \frac{1}{2}\cdot L\cdot i(t)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\psi(t)^2}{L}$$

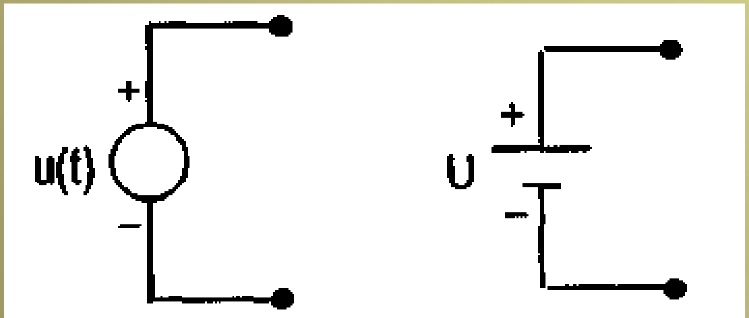
φαινόμενο της υστέρησης




$$Q = \frac{L\omega}{R}$$

# Ανεξάρτητη πηγή τάσης

Ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών καλείται ανεξάρτητη πηγή τάσης ή ιδανική πηγή τάσης ή και απλώς πηγή τάσης, εάν επιβάλλει καθορισμένη τάση *u(t)* στους ακροδέκτες ενός οιουδήποτε κυκλώματος με το οποίο είναι συνδεδεμένη. Από τον ορισμό αυτό έπεται ότι η τάση στους ακροδέκτες της πηγής τάσης είναι ανεξάρτητη της έντασης του ρεύματος που τη διαρρέει και του κυκλώματος με το οποίο είναι συνδεδεμένη.



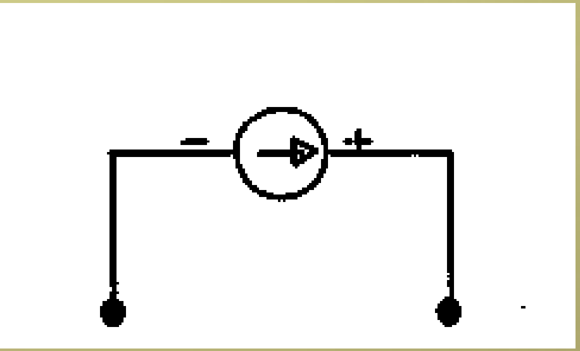

Εάν η συνάρτηση *u(t)* είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου), η πηγή λέγεται συνεχούς τάσης. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν ιδανικές πηγές τάσης. Παρ’ όλα αυτά διάφορα είδη πηγών μπορούν να εξομοιωθούν, για μια περιοχή τιμών της παραγόμενης έντασης, με πηγές τάσης.

# Ανεξάρτητη πηγή ρεύματος

Ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών καλείται ανεξάρτητη πηγή ρεύματος ή ιδανική πηγή ρεύματος ή και απλώς πηγή ρεύματος, εάν επιβάλλει καθορισμένη ένταση ρεύματος *i(t)* στους ακροδέκτες ενός οιουδήποτε κυκλώματος με το οποίο είναι συνδεδεμένη.

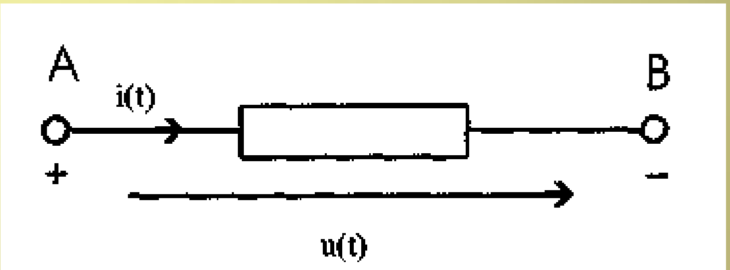
Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι η παρεχόμενη από την πηγή ένταση ρεύματος, είναι ανεξάρτητη της τάσης στους ακροδέκτες της πηγής και του κυκλώματος με το οποίο είναι συνδεδεμένη.

Εάν η συνάρτηση *i(t)* είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου), η πηγή λέγεται συνεχούς ρεύματος.



# Φορές αναφοράς

Η φορά αναφοράς για το ρεύμα δίνεται με ένα βέλος, ενώ για τη τάση, ή με τα πρόσημα (+,-), ή με ένα βέλος από το + προς το – .




Συμβατικά θεωρούμε ότι η ένταση του ρεύματος *i(t)* κατά τη χρονική στιγμή *t* είναι θετική, εάν μια ροή θετικών φορτίων εισέρχεται από τον ακροδέκτη Α και εξέρχεται από τον ακροδέκτη Β (ή ροή ηλεκτρονίων εισέρχεται από το Β και εξέρχεται από το Α). Επίσης, συμβατικά θεωρούμε ότι η τάση μεταξύ των σημείων Α και Β κατά τη χρονική στιγμή *t* είναι θετική, εάν το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Α είναι μεγαλύτερο του ηλεκτρικού δυναμικού στο σημείο Β.

Η φορά αναφοράς της τάσης καθορίζεται με βέλος, έτσι ώστε να δείχνει την πτώση τάσης και συνεπώς η ακμή αυτού να βρίσκεται στο σημείο με το αρνητικό πρόσημο.

Επειδή σ' ένα κύκλωμα οι φορές αναφοράς που ορίζουμε για τις τάσεις και τα ρεύματα είναι αυθαίρετες, οι αλγεβρικές τιμές οι οποίες προκύπτουν, προκειμένου για κυκλώματα συνεχούς ρεύματος, από την επίλυση του κυκλώματος έχουν πρόσημο + ή -.

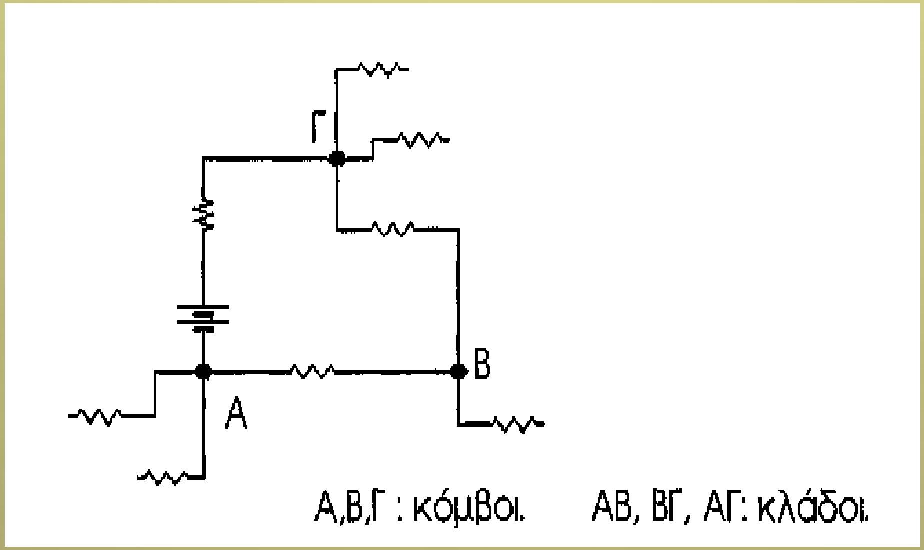
Η φορά αναφοράς παριστάνει την πραγματική κατάσταση μόνο όταν η προκύπτουσα, με βάση την εκλεγείσα φορά, αλγεβρική τιμή είναι θετική.

Στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος, όπου η τάση και το ρεύμα είναι ανύσματα, ανάλογα με τη φορά η οποία επιλέγεται, προκύπτουν και η γωνίες των ανυσμάτων. Δηλαδή, αντίθετες φορές θα δώσουν ανύσματα με το ίδιο μέτρο, αλλά διαφορά φάσης $180^o$.

Οι παραπάνω φορές για το ρεύμα και την τάση θα μπορούσαν να είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη. Παρ' όλα αυτά, κατά τη χρήση τους στην επίλυση ενός κυκλώματος, χρησιμοποιούνται συνήθως οι συζευγμένες φορές αναφοράς κατά τέτοιο τρόπο ώστε, στα παθητικά στοιχεία ένα θετικό ρεύμα να εισέρχεται στον ακροδέκτη που φέρει το πρόσημο +, ενώ στις πηγές ενέργειας το ρεύμα να εξέρχεται από το σημείο που φέρει το πρόσημο.

# Τοπολογία κυκλωμάτων

Κόμβος ενός κυκλώματος ορίζεται ένα σημείο στο οποίο καταλήγουν τουλάχιστον τρεις αγωγοί. Κατ' επέκταση θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως κόμβο και ένα σημείο στο οποίο καταλήγουν δύο αγωγοί. Κλάδος ενός κυκλώματος είναι ένα τμήμα του μεταξύ δύο κόμβων.



Κάθε κλειστή τροχιά, που αναχωρεί από ένα κόμβο και καταλήγει σ' αυτόν, διερχόμενη μόνο μια φορά από κάθε κλάδο, καλείται βρόχος.

Κλάδοι συνδέσμου ή συμπληρωματικοί κλάδοι ενός δέντρου καλούνται όλοι οι κλάδοι του κυκλώματος που δεν ανήκουν στο υπόψη δέντρο

# Γενικές μέθοδοι ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων

Το κύριο αντικείμενο κατά τους υπολογισμούς των ηλεκτρικών κυκλωμάτων είναι ο προσδιορισμός των τάσεων και των ρευμάτων που διαρρέουν τους διαφόρους κλάδους του κυκλώματος και των διαφορών δυναμικού (τάσεων) μεταξύ των κόμβων, δεδομένων των παθητικών και ενεργών στοιχείων του κυκλώματος.

Οι βασικές εξισώσεις, οι οποίες χρησιμοποιούνται, προκύπτουν από τους νόμους του Kirchhoff. Οι υπολογισμοί όμως μπορούν να απλουστευθούν, εφαρμόζοντας ορισμένα θεωρήματα, τα οποία θα αναλυθούν παρακάτω. Οι νόμοι και τα θεωρήματα εφαρμόζονται τόσο στο συνεχές όσο και στο εναλλασσόμενο ρεύμα.

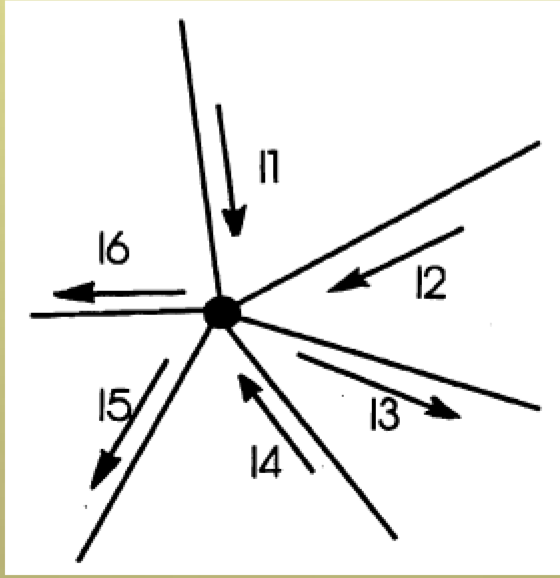
Η ανάλυσή τους θα γίνει στο συνεχές, ενώ η εφαρμογή τους θα καταδειχτεί με παραδείγματα και στο συνεχές και στο εναλλασσόμενο ρεύμα

# Οι νόμοι του Kirchhoff

Οι νόμοι του Kirchhoff είναι δύο. Ο πρώτος νόμος, ή νόμος των κόμβων και ο δεύτερος νόμος, ή νόμος των βρόχων.

***Πρώτος νόμος:*** το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ρευμάτων σ' ένα κόμβο του κυκλώματος, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, είναι ίσο με μηδέν. $\sum_n I_n$

Ο πρώτος νόμος του Kirchhoff πηγάζει από την αρχή διατήρησης της ποσότητας του ηλεκτρισμού.

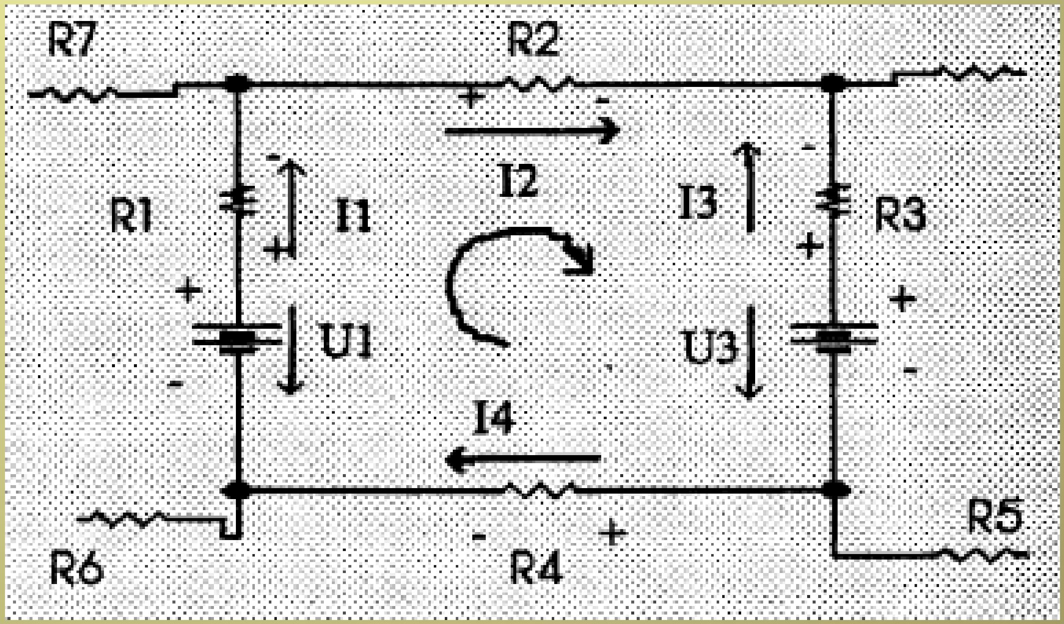



$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 - I_6$$

***Δεύτερος νόμος:*** το αλγεβρικό άθροισμα όλων των τάσεων σε ένα βρόχο του κυκλώματος, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, είναι ίσο με μηδέν: $\sum_n U_n$

Ο δεύτερος νόμος του Kirchhoff πηγάζει από την αρχή του αστροβίλου του ηλεκτρικού πεδίου,

δηλαδή: $\oint_{\beta\rho\acute{o}\chi o} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$



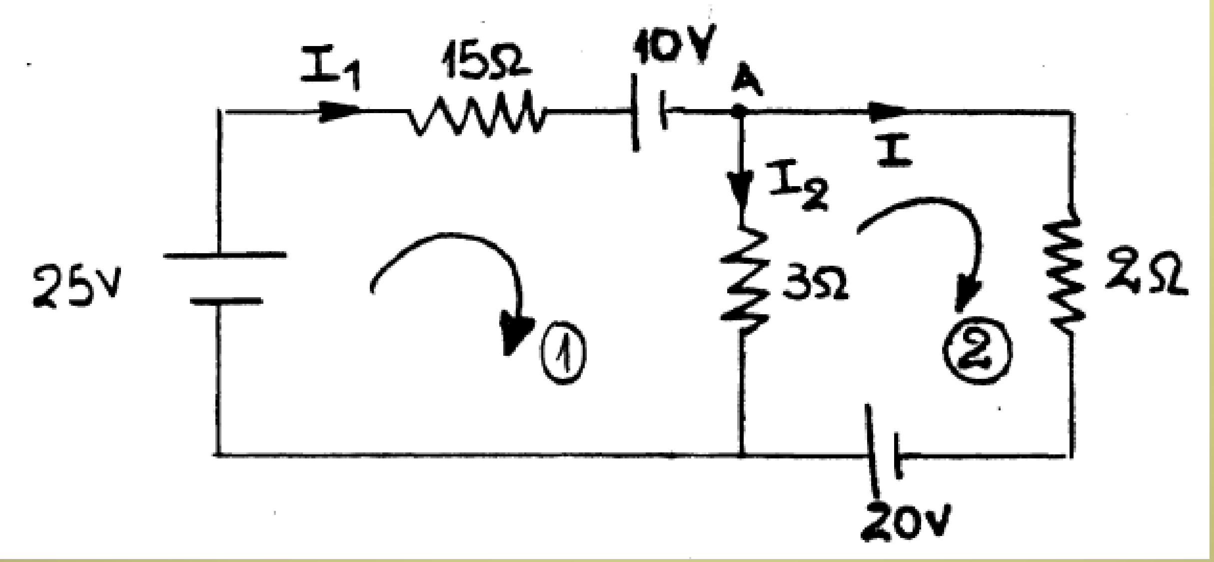

$$U_1 - U_3 - R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0$$

***Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Kirchhoff σε ένα βρόχο γίνεται ως εξής:***

Επιλέγονται *(αυθαίρετα)* οι φορές των ρευμάτων στους διάφορους κλάδους του βρόχου, κατόπιν σημειώνονται οι τάσεις στα παθητικά στοιχεία, χρησιμοποιώντας συζευγμένες φορές. Τέλος, επιλέγεται μία φορά (αυθαίρετα) στο βρόχο, η οποία θεωρείται θετική.

Κατά την αναγραφή των τάσεων στην εξίσωση θεωρούμε ως θετικές τις τάσεις (ενεργητικών ή παθητικών στοιχείων) όταν η εκλεγείσα ως θετική φορά στο βρόχο εξέρχεται από το σημείο + των τάσεων, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λαμβάνονται με το σημείο -.

# Παραδείγ-
# ματα




κόμβος Α ισχύει : $I_1$-$I_2$-I=0

βρόχος 1 ισχύει: 25-10-15$I_1$-3$I_2$=0=>15$I_1$+3$I_2$=15

βρόχος 2 ισχύει: 20-2I+3$I_2$=0=>-3$I_2$+2I=20 κόμβος 1: $25= I_1+I_2$

κόμβος 2: $I_1+20=I_3$

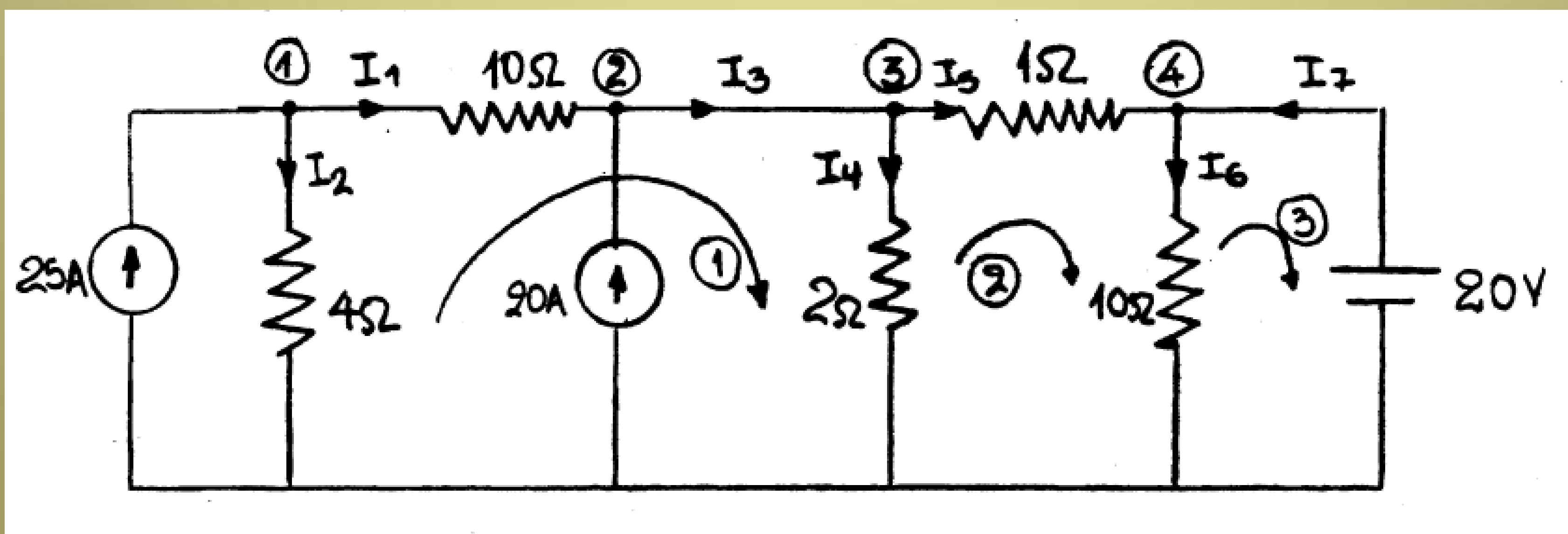
κόμβος 3: $I_3=I_4+I_5$

κόμβος 4: $I_5+I_7=I_6$

βρόχος 1: $4I_2-10I_1 \ 2I_4=0$

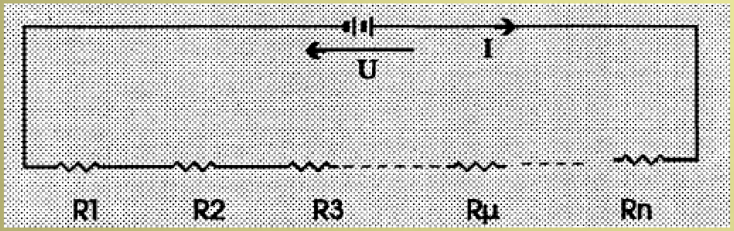
βρόχος 2: $-I_5 \ 10I_6+2I_4=0$

βρόχος 3: $-20+10I_6=0$



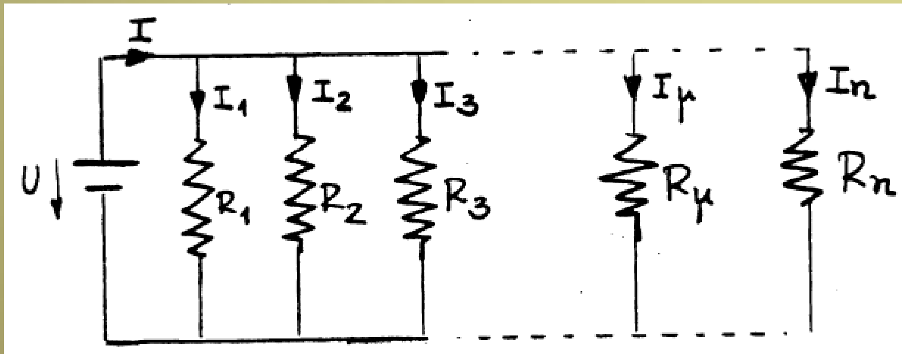
# Σύνδεση στοιχείων σε σειρά και παράλληλα

*Αντιστάσεις σε σειρά:*




$$U = \sum_{i=1}^{n} I_i R_i = I \sum_{i=1}^{n} R_i => \frac{U}{I} = \sum_{i=1}^{n} R_i => R_{ol} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

*Αντιστάσεις παράλληλα:*



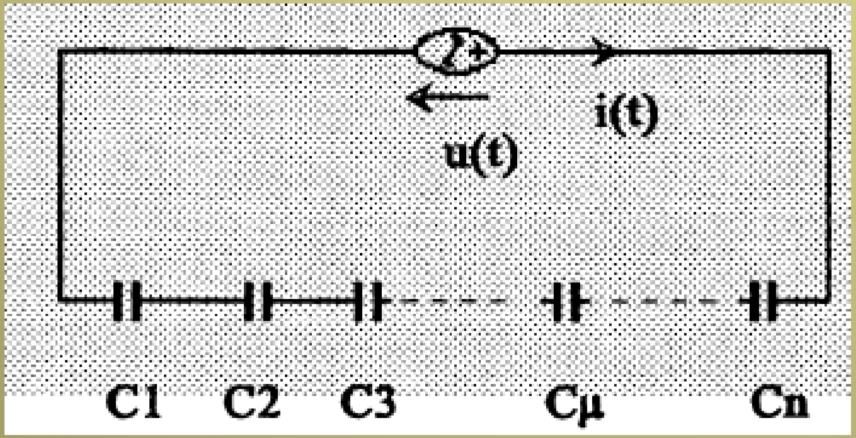

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{U}{R_i} => \frac{U}{R_{ol}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{U}{R_i} => \frac{1}{R_{ol}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

# Πυκνωτές σε σειρά

$$u(t) = u_{c1}(t) + u_{c2}(t) + \ldots + u_{cn}(t) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = \frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)d\tau + \frac{1}{C_2}\int_0^t i(\tau)d\tau + \ldots. + \frac{1}{C_n}\int_0^t i(\tau)d\tau \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$




***Πυκνωτές παράλληλα***

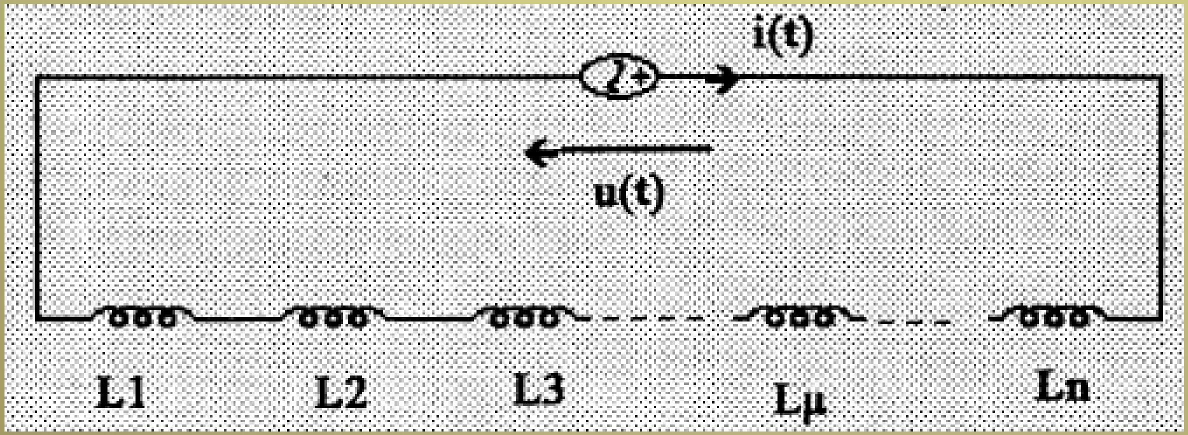
$$C_{ol} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

# Πηνία σε σειρά

$$u(t) = u_{L1}(t) + u_{L2}(t) + \ldots + u_{Ln}(t) =>$$

$$\frac{Ld(i)}{dt} = \frac{L_1 d(i)}{dt} + \frac{L_2 d(i)}{dt} + \ldots. + \frac{L_n d(i)}{dt} =>$$

$$L \sum_{i=1}^{n} L_1$$




*Πηνία παράλληλα*

$$\frac{1}{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$$

# Διαιρέτης τάσης - Διαιρέτης ρεύματος

Εάν έχουμε ***N*** αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά και στα άκρα της όλης αυτής διάταξης υπάρχει διαφορά δυναμικού ***U***, τότε η τάση ***Uμ*** στα άκρα μιας αντίστασης, έστω της ***Rμ***, δίνεται από τη σχέση:

$$U_\mu = \frac{R_\mu}{\sum_{i=1}^{n} R_i} U$$

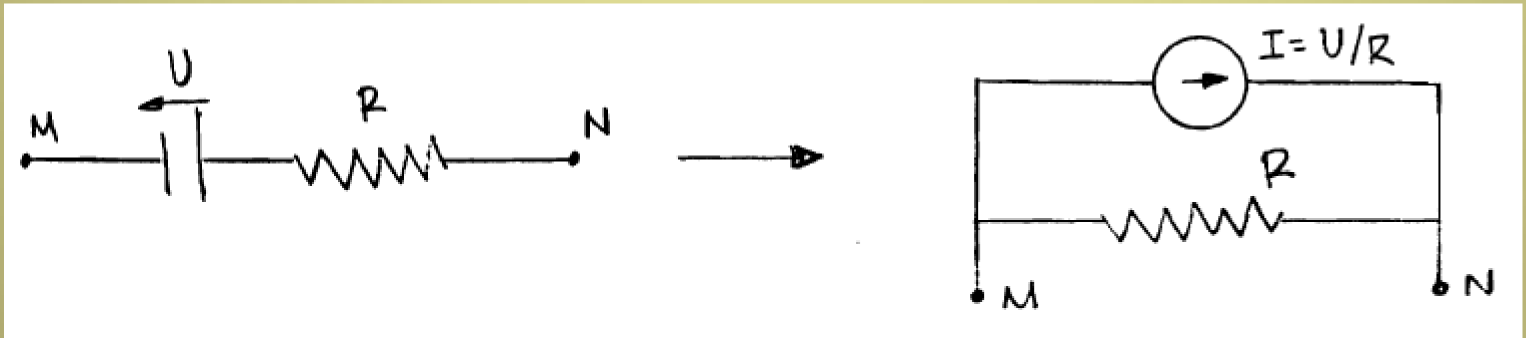
Εάν έχουμε ***N*** αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα και το ρεύμα το οποίο εισέρχεται στην όλη διάταξη είναι ίσο με ***I***, τότε το ρεύμα ***Iμ*** που διαρρέει την αντίσταση, έστω ***Rμ***, δίνεται από τη σχέση:

$$I_\mu = \frac{\frac{1}{R_\mu}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} I = \frac{G_\mu}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$$

*όπου* $G_i = 1/R_i$

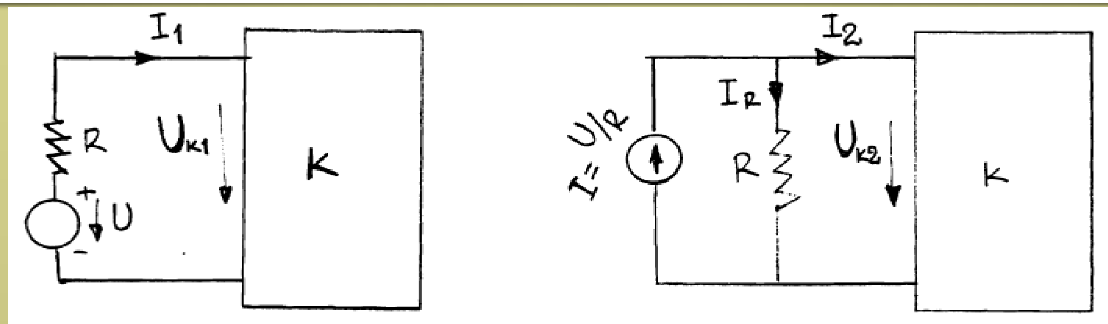
# Μετασχηματισμός πηγών

Μία πηγή τάσης *U* συνδεδεμένη σε σειρά με αντίσταση *R* είναι ισοδύναμη με μια πηγή ρεύματος εντάσεως *I=U/R* και μια αντίσταση R συνδεδεμένη παράλληλα προς την πηγή ρεύματος




***Απόδειξη***

θα αποδειχτεί ότι εάν οι παραπάνω διατάξεις είναι συνδεδεμένες στο ίδιο κύκλωμα, τότε το ρεύμα *I*, η τάση *Uκ* και συνεπώς και η ισχύς *Pκ=I·Uκ* είναι ίδιες και στις δύο περιπτώσεις




$$U_{k1} = f(I_1), \text{ Επίσης } \quad I_1 = \frac{U - U_{k1}}{R} = \frac{U - f(I_1)}{R} \Rightarrow RI_1 + f(I_1) = U$$

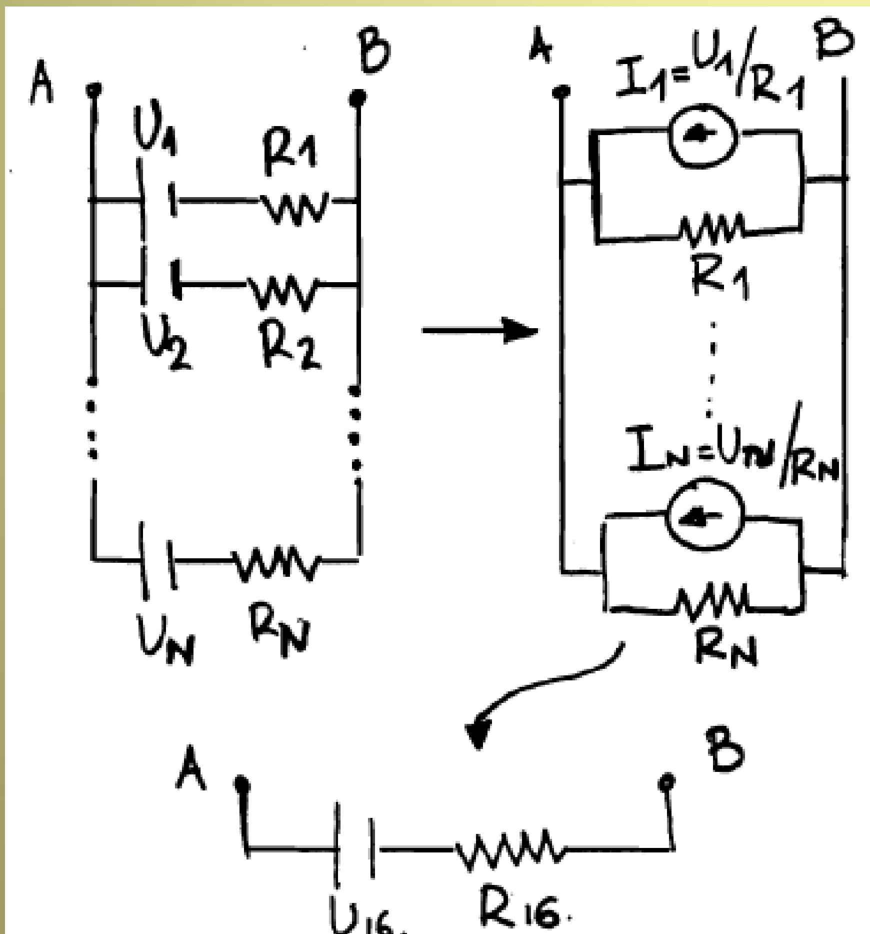
$$U_{k1} = U - RI$$

$$U_{k2} = f(I_2), \text{ Επίσης } \; f(I_2) = I_R R = \left(\frac{U}{R} - I_2\right)R \Rightarrow f(I_2) + RI_2 = U$$

$$U_{k2} = \left(\frac{U}{R} - I\right)R = U - RI$$

$$U_{k1} = U_{k2} = U_k$$

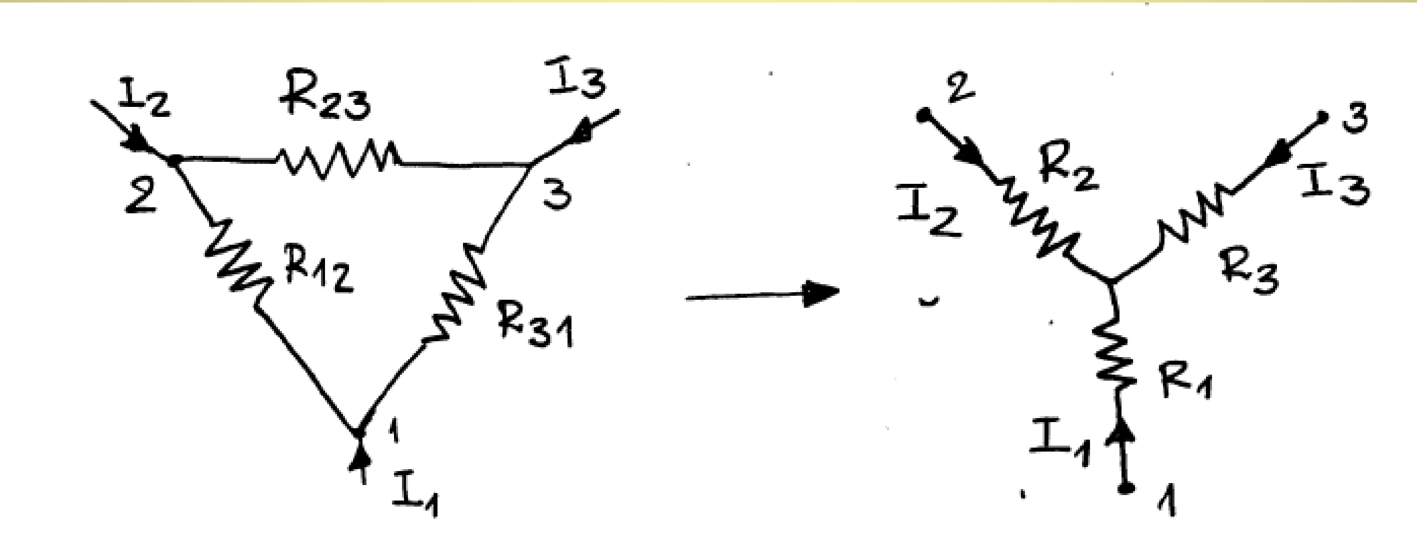
# Θεώρημα Millman




$$U_{eis.} = R_{eis} \sum_{i=1}^{N} \frac{U_1}{R_1}$$

$$R_{eis} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}$$

# Μετασχηματισμός τριγώνου σε αστέρα




$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

# Μετασχηματισμός αστέρα σε τρίγωνο

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3} \qquad R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1} \qquad R_{31} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}$$

Στη γενική περίπτωση, ο μετασχηματισμός ενός αστέρα Ν κλάδων μπορεί να αντικατασταθεί μ' ένα πολύγωνο Ν πλευρών και όλων των διαγωνίων του. Η αντίσταση ενός κλάδου του πολυγώνου που βρίσκεται μεταξύ των κόμβων *k,i* δίνεται από τη σχέση:

$$R_{ki} = R_k R_i \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{R_j}$$

***Μέθοδος βρόχων***

Σύμφωνα με τη μέθοδο βρόχων κατ' αρχήν μετατρέπονται όλες οι πηγές ρεύματος σε πηγές τάσης, έτσι ώστε όλοι οι κλάδοι του κυκλώματος να περιέχουν (εάν περιέχουν πηγές) μόνο πηγές τάσης. Κατόπιν εντοπίζονται όλοι οι ελάχιστοι βρόχοι και σε κάθε βρόχο ορίζεται ένα ρεύμα βρόχου με φορά (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη) ίδια για όλους τους βρόχους; Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Kirchhoff, για κάθε βρόχο προκύπτει μια εξίσωση της μορφής:

$$\sum U^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} R_{ij} I_j$$

όπου $\sum U^{(i)}$

- είναι το αλγεβρικό άθροισμα όλων των τάσεων των πηγών του βρόχου *i*. Θετικό λαμβάνεται το πρόσημο της τάσεως όταν το ρεύμα του βρόχου εξέρχεται από το θετικό πόλο της πηγής, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λαμβάνεται αρνητικό,
- $N$ είναι ο αριθμός των βρόχων,
- $R_{ii}$ είναι το άθροισμα όλων των αντιστάσεων του βρόχου $i$ δηλαδή,

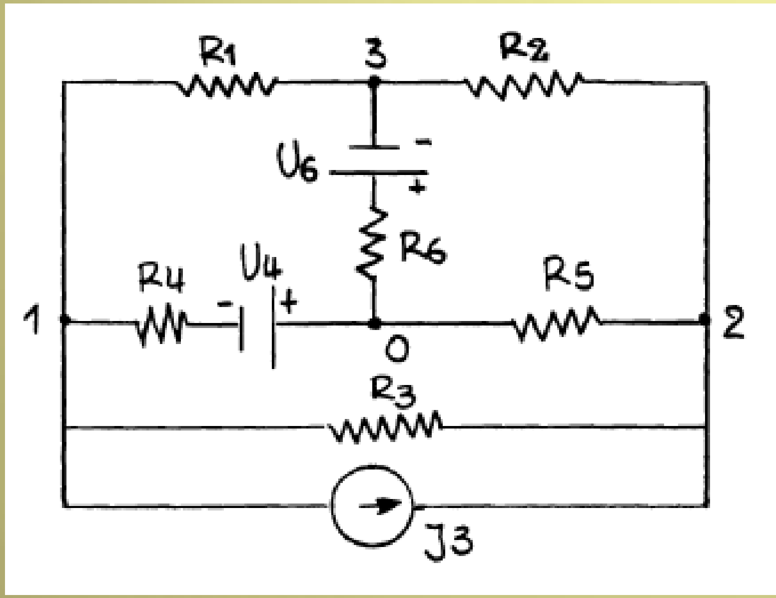
$$R_{ii} = \sum R^{(i)}$$

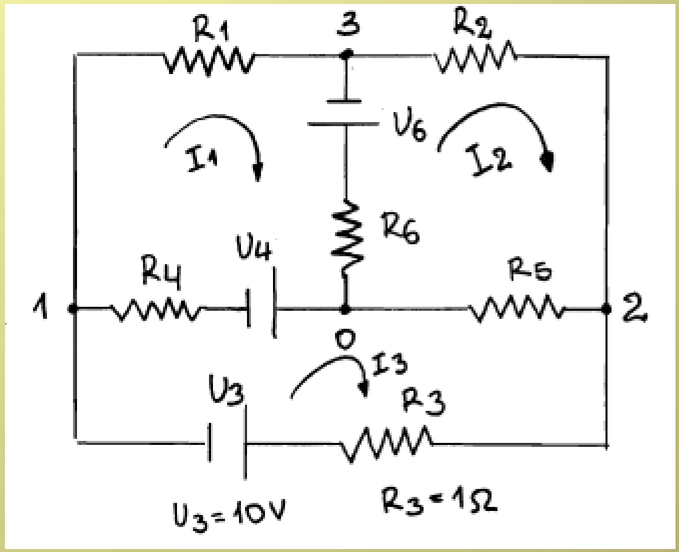
- όπου *Rij* είναι το αρνητικό άθροισμα των κοινών αντιστάσεων μεταξύ  του βρόχου *i* και του βρόχου *j*, δηλαδή

$$R_{ij} = \sum R^{(ij)}$$

Γενικά προκύπτει ένα σύστημα *N* εξισώσεων με *N* αγνώστους που είναι τα ρεύματα των βρόχων.

# Παράδειγμα




$$(R_1 + R_4 + R_6)I_1 - R_6 I_2 - R_4 I_3 = U_6 - U_4$$

$$-R_6 I_1 + (R_2 + R_5 + R_6)I_2 - R_5 I_3 = -U_6$$

$$-R_4 I_1 - R_5 I_2 + (R_3 + R_4 + R_5)I_3 = U_4 - U_3$$

$$3I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$-I_1 + 3I_2 - I_3 = -10$$

$$-I_1 - I_2 + 3I_3 = 0$$

***Μέθοδος κόμβων***

Σύμφωνα με τη μέθοδο κόμβων, κατ' αρχήν μετατρέπονται όλες οι πηγές τάσης σε πηγές ρεύματος, έτσι ώστε όλοι οι κλάδοι του κυκλώματος να περιέχουν (εάν περιέχουν πηγές) μόνο πηγές ρεύματος και ταυτόχρονα εκφράζονται όλες οι αντιστάσεις υπό μορφή αγωγιμοτήτων.

Κατόπιν εντοπίζονται όλοι οι κόμβοι του κυκλώματος, απαριθμούνται και έναν εξ' αυτών τον ονομάζουμε κόμβο αναφοράς, ή κόμβο 0 ( ο κόμβος αναφοράς μπορεί να είναι οποιοσδήποτε κόμβος, αλλά συνηθίζεται να λαμβάνεται ο κόμβος με τους περισσότερους κλάδους ).

Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Kirchhoff για κάθε κόμβο προκύπτει μια εξίσωση της μορφής

$$\sum I^{(i)} = \sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} U_j$$

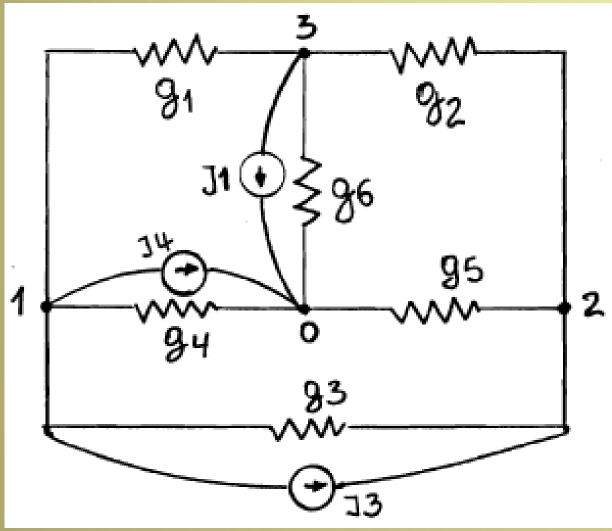
όπου $\sum I^{(i)}$

- είναι το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ρευμάτων των πηγών ρεύματος που έχουν ως ένα άκρο τον κόμβο $i$. Θετικό λαμβάνεται το πρόσημο του ρεύματος όταν το ρεύμα της πηγής έχει κατεύθυνση προς τον κόμβο, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λαμβάνεται αρνητικό,
- $N$ είναι ο αριθμός των κόμβων,

- $G_{ii}$ είναι το άθροισμα όλων των αγωγιμοτήτων που έχουν ως άκρο τους τον κόμβο *i*, δηλαδή $G_{ii} = \sum G^{(i)}$
- $G_{ij}$ είναι το αρνητικό άθροισμα των κοινών αγωγιμοτήτων μεταξύ του κόμβου *i* και του κόμβου *j*, δηλαδή $G_{ij} = \sum G^{(ij)}$
- *U* είναι οι τάσεις των κόμβων ως προς τον κόμβο αναφοράς, 0

Γενικά προκύπτει ένα σύστημα *N-1* εξισώσεων με *N-1* αγνώστους που είναι οι τάσεις των κόμβων ως προς τον κόμβο αναφοράς

# Παράδειγμα




$$(G_1 + G_4 + G_3)U_1 - G_3U_2 - G_1U_3 = -J_4 - J_3$$

$$-G_3U_1 + (G_2 + G_5 + G_3)U_2 - G_2U_3 = J_3$$

$$-G_1U_1 - G_2U_2 + (G_1 + G_2 + G_6)U_3 = -J_1$$

$$3U_1 - U_2 - U_3 = -20$$

$$-U_1 + 3U_2 - U_3 = 10$$

$$-U_1 - U_2 + 3U_3 = -10$$

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} -20 & -1 & -1 \\ 10 & 3 & -1 \\ -10 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-160}{16} = -10V$$

$$U_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 & -1 \\ -1 & 10 & -1 \\ -1 & -10 & 3 \end{vmatrix}}{16} = -2{,}5V$$

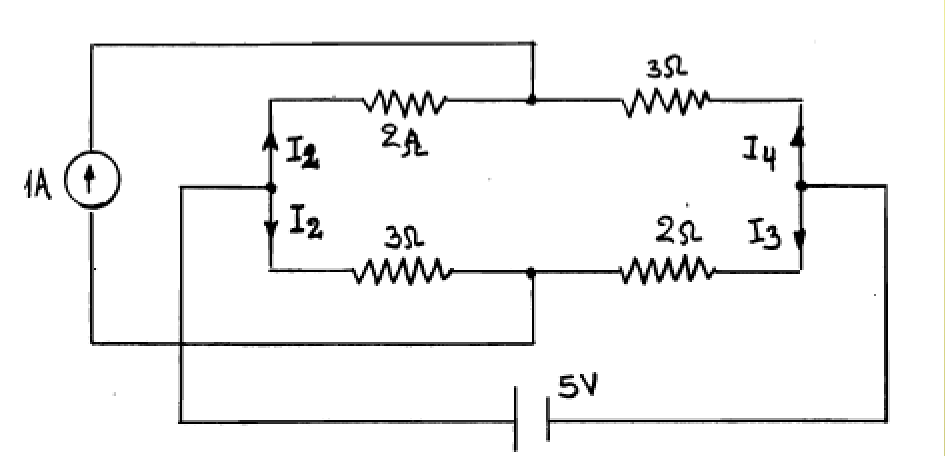
$$U_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 20 \\ -1 & 3 & 10 \\ -1 & -1 & -10 \end{vmatrix}}{16} = -7{,}5V$$

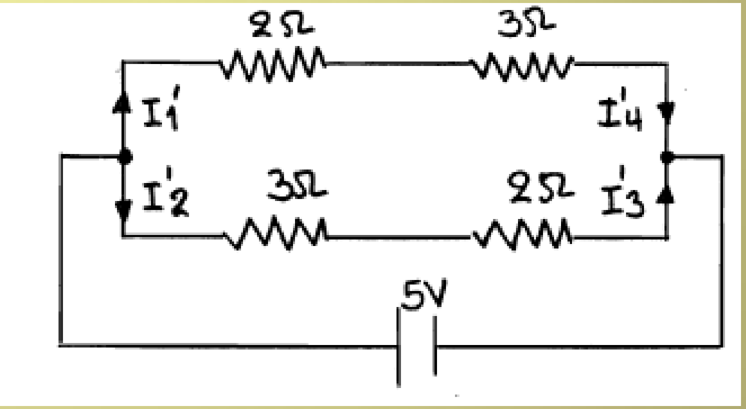
# Θεώρημα υπέρθεσης ή επαλληλίας

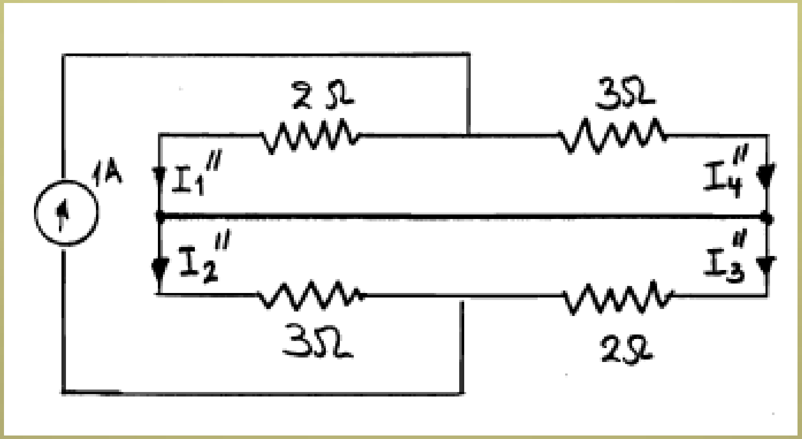
Το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:
Σ' ένα γραμμικό κύκλωμα που περιλαμβάνει πολλά ενεργά στοιχεία, τα οποία δρουν ταυτόχρονα, η επίδρασή τους σ' ένα τμήμα ή στοιχείο του κυκλώματος μπορεί να προκύψει από το άθροισμα των επιδράσεων που είναι αποτέλεσμα της δράσης του κάθε ενεργού στοιχείου του κυκλώματος ξέχωρα.
Η αρχή αυτή προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι, τόσο τα ρεύματα όσο και οι τάσεις στα διάφορα σημεία του κυκλώματος, είναι γραμμικές συναρτήσεις των τάσεων των πηγών τάσης και των ρευμάτων των πηγών έντασης.

Επειδή η αρχή της υπέρθεσης προκύπτει από τη γραμμικότητα των συστημάτων που πρέπει να επιλυθούν για την εύρεση των ρευμάτων και των τάσεων, συνεπάγεται ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί απ' ευθείας για μεγέθη που δεν είναι γραμμικές συναρτήσεις των ρευμάτων και των τάσεων, όπως για παράδειγμα συμβαίνει με την ισχύ.
Σημειώνεται ότι η αντικατάσταση των πηγών τάσης γίνεται με βραχυκύκλωση, ενώ των πηγών ρεύματος με ανοικτό κύκλωμα.

# Παράδειγμα

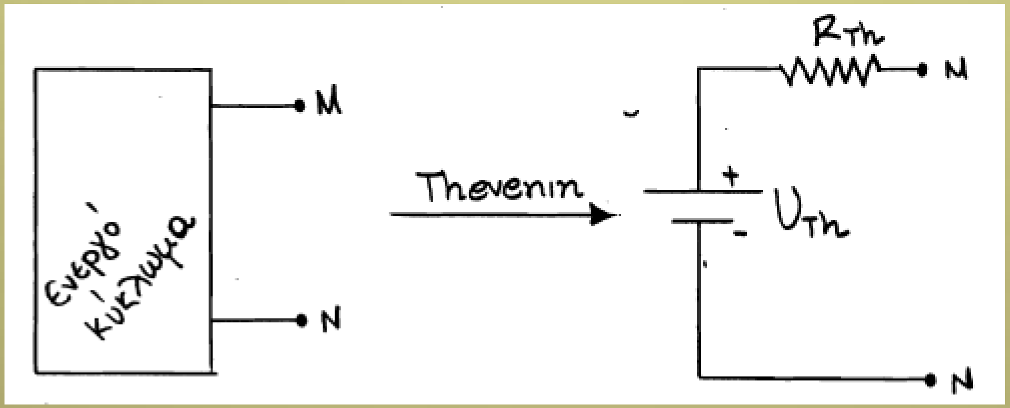

1A
3Ω
2Ω
$I_1$
$I_4$
$I_2$
3Ω
2Ω
$I_3$
5V


2Ω
3Ω
$I'_1$
$I'_4$
$I'_2$
3Ω
2Ω
$I'_3$
5V


2Ω
3Ω
1A
$I''_1$
$I''_4$
$I''_2$
$I''_3$
3Ω
2Ω

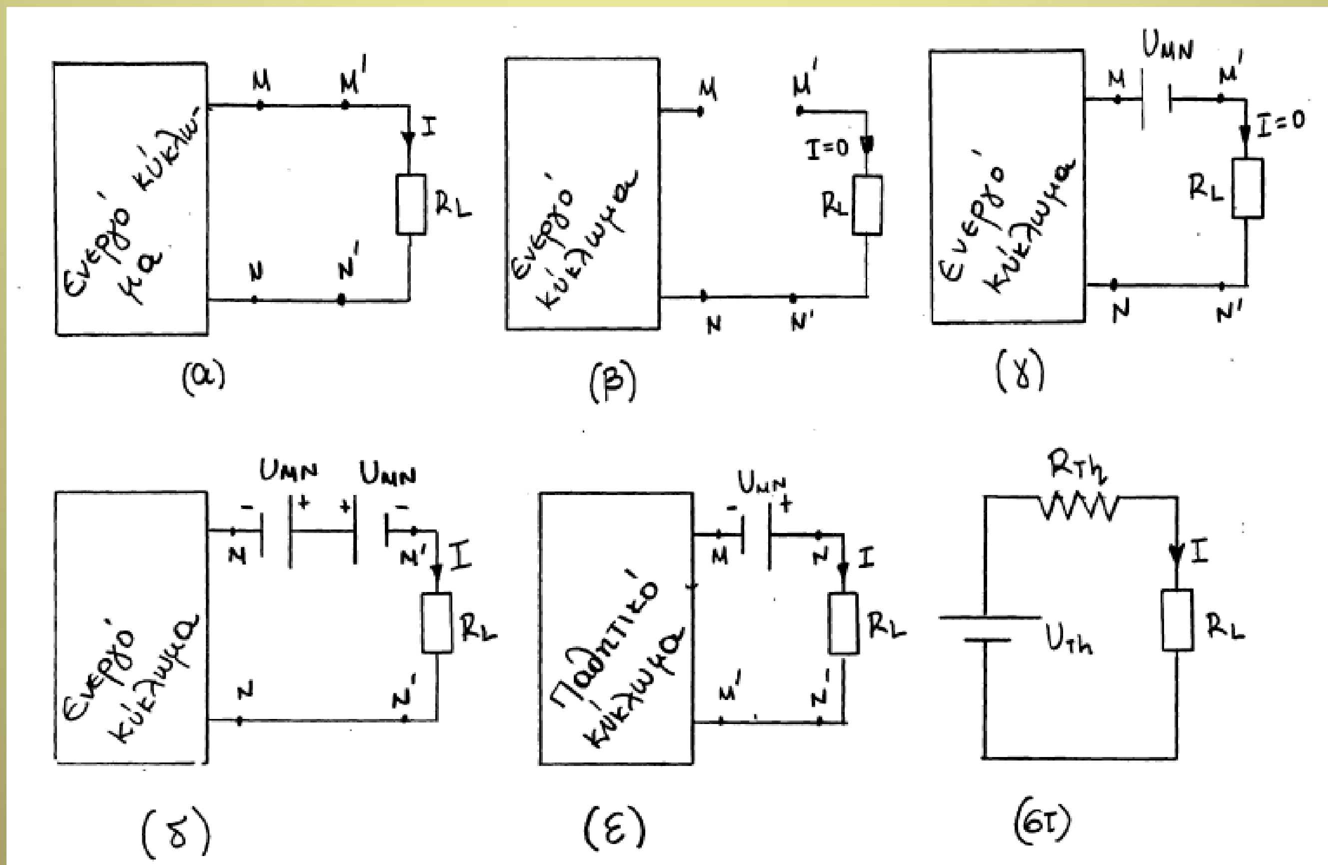
# Θεώρημα Thevenin

Σύμφωνα μ' αυτό το θεώρημα, ένα ενεργό γραμμικό δίπολο (δηλαδή ένα ενεργό γραμμικό κύκλωμα θεωρούμενο από δύο σημεία του *M* και *N*) είναι ισοδύναμο προς μία ηλεκτρική πηγή ηλεκτρεγερτικής δυνάμεως $U_0$ σε σειρά με μία ωμική αντίσταση *R*.



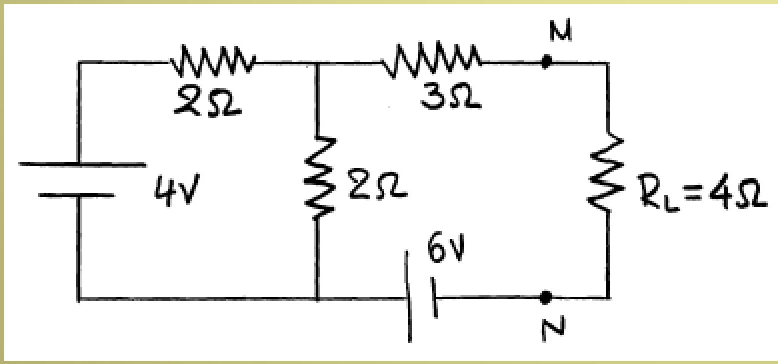
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη της διπολικής πηγής ισούται με την τάση μεταξύ των άκρων *M* και *N*, $U_{MN}$ και η αντίσταση *R* είναι ίση με την αντίσταση που εμφανίζει το κύκλωμα, εάν το κοιτάξουμε από τα άκρα *M, N* και όπου τις μεν πηγές τάσης τις έχουμε αντικαταστήσει με βραχυκύκλωμα, τις δε πηγές έντασης με ανοικτό κύκλωμα.

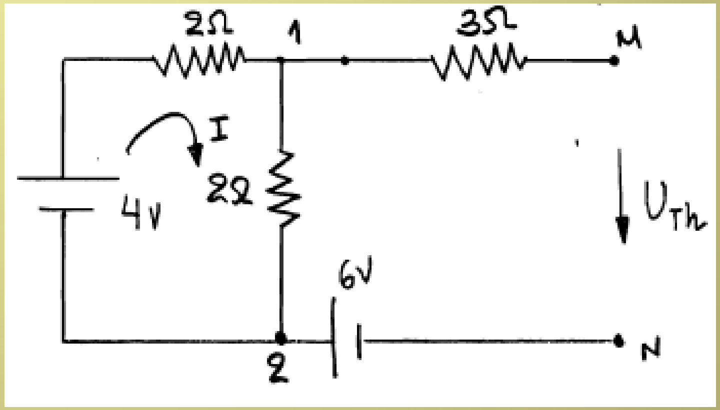
Απόδειξη θεωρήματος

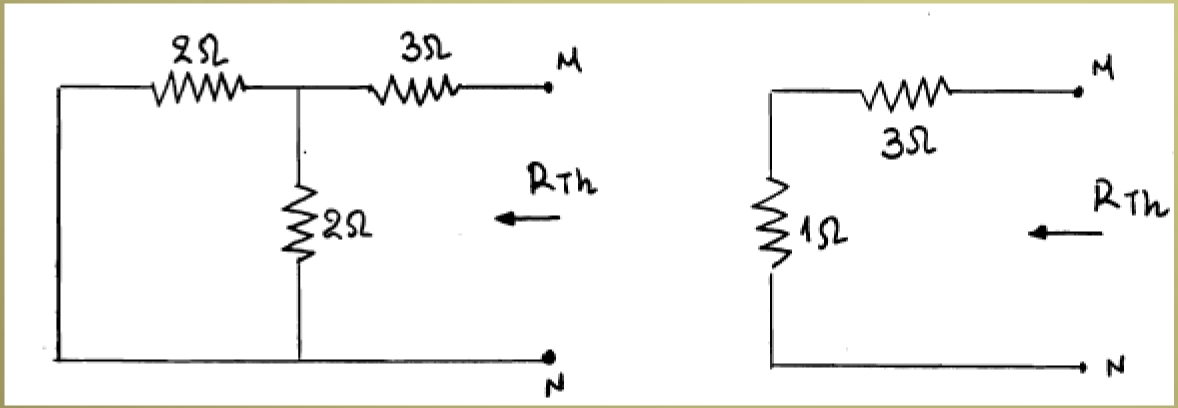


# Παράδειγμα

Να βρεθεί η ισχύς στην $R_L$ του παρακάτω κυκλώματος χρησιμοποιώντας το θεώρημα Thevenin




$$R_n = 2//2+3 = 1\Omega + 3\Omega = 4\Omega$$

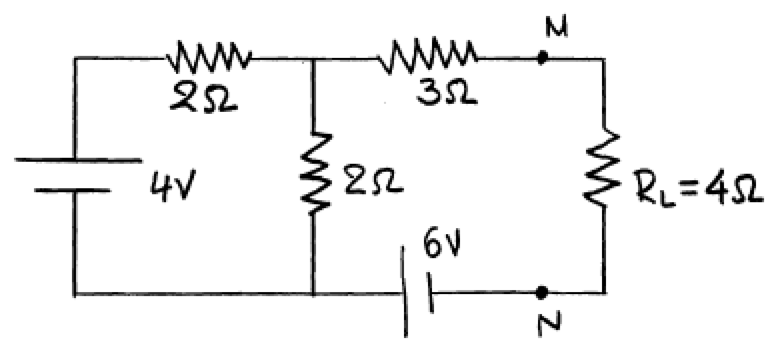
$$U_n = 2+6 = 8V$$

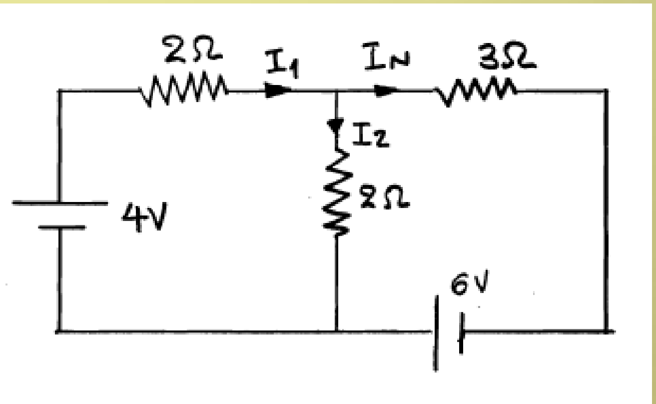
# Θεώρημα Norton

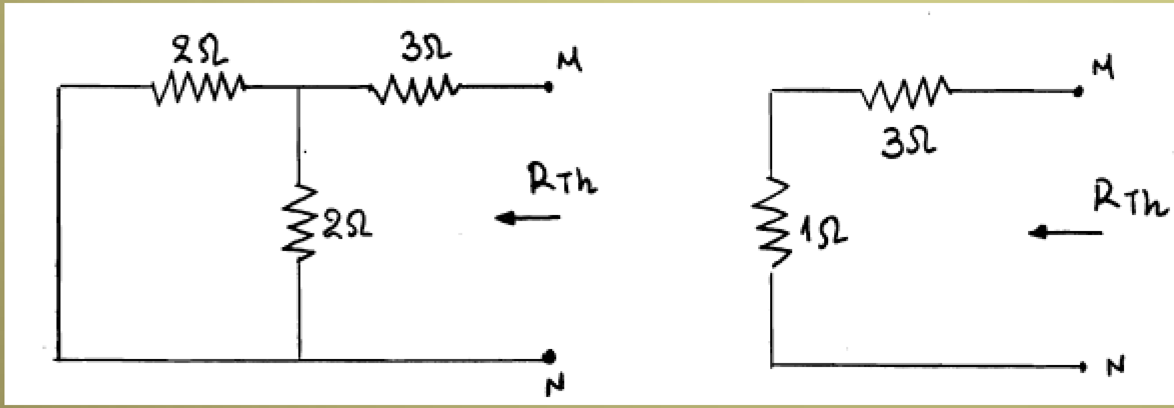
Το θεώρημα Norton μπορεί να θεωρηθεί ως μία άλλη διατύπωση του θεωρήματος Thevenin, επειδή το ισοδύναμο κύκλωμα Norton μπορεί να ληφθεί απ' ευθείας από το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin. Σύμφωνα με το θεώρημα, ένα ενεργό γραμμικό δίπολο (δηλαδή, ένα ενεργό γραμμικό κύκλωμα θεωρούμενο από δύο σημεία του *M* και *N*) είναι ισοδύναμο προς μία ηλεκτρική πηγή ρεύματος εντάσεως $I_0$, παράλληλα με μία ωμική αντίσταση *R*.
Η ένταση του ρεύματος της διπολικής πηγής είναι ίση με την ένταση που διαρρέει το βραχυκύκλωμα μεταξύ των άκρων *M* και *N* και η αντίσταση R είναι ίση με την αντίσταση που εμφανίζει το κύκλωμα, εάν το κοιτάξουμε από τα άκρα *M, N* και όπου, τις μεν πηγές τάσης τις έχουμε αντικαταστήσει με βραχυκύκλωμα, τις δε πηγές έντασης με ανοικτό κύκλωμα.

# Παράδειγμα

Να βρεθεί η ισχύς στην $R_L$ του παρακάτω κυκλώματος χρησιμοποιώντας το θεώρημα Norton



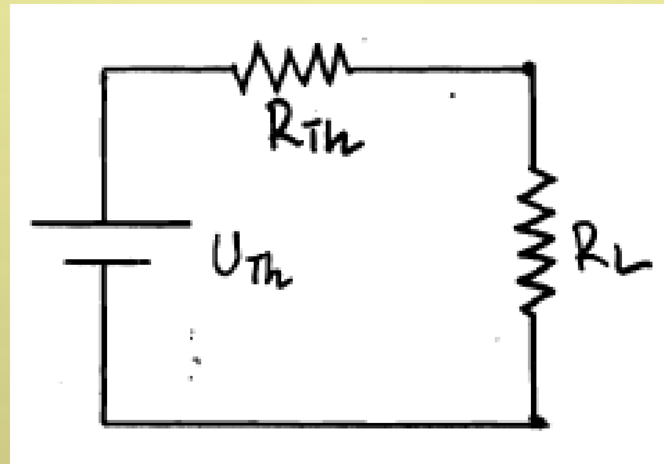




$$R_n = 2 // 2 + 3 = 1\Omega + 3\Omega = 4\Omega$$

$$I_n = 2A$$

# Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος

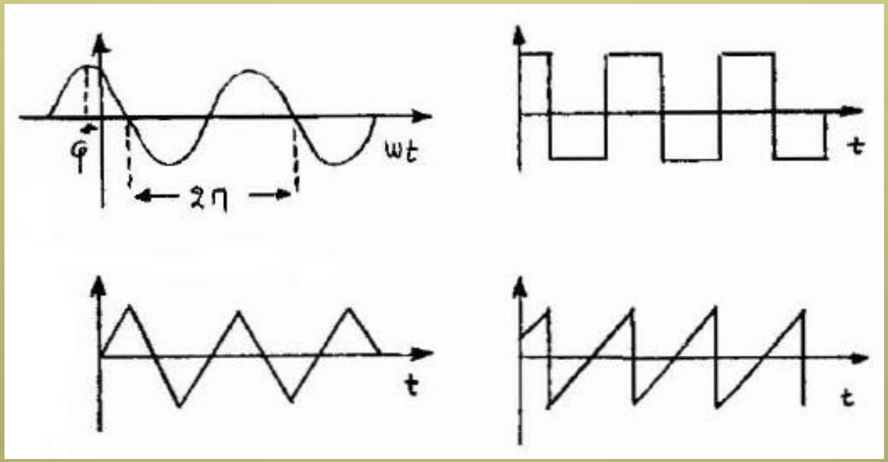



$$P_L = I^2 R_L = \frac{U_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2} R_L$$

$$\frac{\theta P_L}{\theta R_L} = \frac{U_{th}(R_{th} + R_L)^2 - 2U_{th} R_L (R_{th} + R_L)}{(R_{th} + R_L)^4} = 0 => R_L = R_{th}$$

# Μονοφασικά εναλλασσόμενα ρεύματα

Εναλλασσόμενο ρεύμα ( τάση) είναι περιοδικά μεταβαλλόμενο ρεύμα (τάση) σε συνάρτηση με το χρόνο. Η τιμή του ρεύματος σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή ορίζεται ως στιγμιαία τιμή του ρεύματος. Ένα ρεύμα είναι πλήρως ορισμένο εάν γνωρίζουμε τις στιγμιαίες τιμές του ως συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή είναι γνωστή η συνάρτηση *i(t)= f (t ).*



Η χρονική συνάρτηση της βασικής αρμονικής της εντάσεως και της τάσεως είναι της μορφής:

$$i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi_\iota)$$

$$u(t) = u_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

όπου $i_{m,}$ $u_m$ οι μέγιστες τιμές,

Ω=2πf η κυκλική συχνότητα σε rad/sec,

f η συχνότητα σε 1/sec ή Hertz (Hz),

T=1/f είναι η περίοδος σε sec.

Οι $\varphi_\iota$, $\varphi_u$, είναι οι γωνίες μεταξύ του σημείου $t=0$ και του σημείου που αντιστοιχεί στην πλησιέστερη μέγιστη θετική στιγμιαία τιμή. Οι γωνίες αυτές ονομάζονται και διαφορές φάσεως ή φασικές αποκλίσεις των παραπάνω συναρτήσεων, ως προς τις αντίστοιχες συναρτήσεις, με μηδενικά τα $\varphi_\iota$, $\varphi_u$. Όταν οι γωνίες είναι θετικές εκφράζουν προπορεία ενώ διαφορετικά εκφράζουν επιπορεία

## Ενεργός, ή Ενδεικνυμένη τιμή περιοδικού μεγέθους

Η ενδεικνυμένη, ή ενεργός τιμή ενός περιοδικού μεγέθους είναι ίση προς τη μέση τετραγωνική τιμή του. Συνεπώς, η ενδεικνυμένη ή ενεργός τιμή του ρεύματος (τάσεως) ορίζεται από τη σχέση:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_i}^{T+t} i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_i}^{T+t_i} i_m^2 \cos^2(\omega t)dt} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}$$

$$U = \frac{u_m}{\sqrt{2}}$$

Αποδεικνύεται ότι η ενδεικνυμένη τιμή ρεύματος χαρακτηρίζει το θερμικά ισοδύναμο μέγεθος συνεχούς ρεύματος.

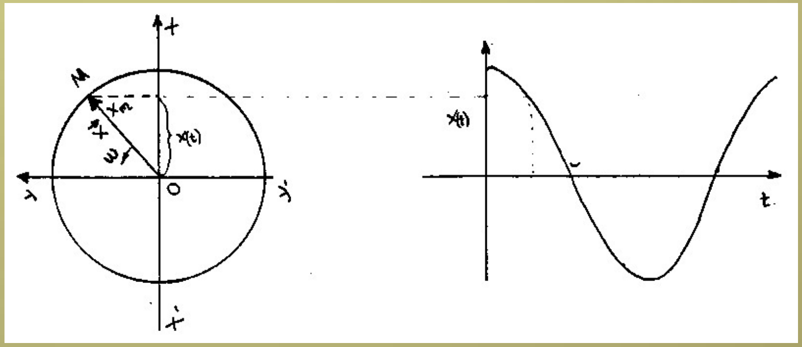
## Παράσταση των ημιτονοειδών μεγεθών με ανύσματα και μιγαδικούς αριθμούς

Η ανάλυση κυκλωμάτων που διαρρέονται από εναλλασσόμενο ημιτονοειδές ρεύμα είναι σημαντικά ευκολότερη εάν τα μεγέθη που εμπλέκονται παρασταθούν με ανύσματα, ή μιγαδικούς αριθμούς.

Τα μεγέθη του εναλλασσομένου ρεύματος είναι της μορφής

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

η οποία παριστάνει την εξίσωση της απλής αρμονικής κίνησης επάνω σε μία ευθεία γραμμή και η οποία μπορεί να περιγραφεί ως η προβολή μιας ομαλής κυκλικής κίνησης επάνω στη διάμετρό της.



Η εξίσωση της αρμονικής κίνησης μπορεί να γραφεί με τη χρήση μιγαδικών αριθμών ως εξής

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{x_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = \mathrm{Re}\{\sqrt{2}\,\frac{x_m}{\sqrt{2}}\,e^{j\varphi}e^{j\omega t}\} =$$

$$= \mathrm{Re}\{\sqrt{2}X_L e^{j\varphi}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\sqrt{2}X_L e^{j\omega t}\}$$

όπου $\overrightarrow{X_t}$ ονομάζεται το άνυσμα της ενδεικνυμένης τιμής του μεγέθους *x(t)*. Το δεξιό μέρος της σχέσης, που είναι μέσα στις αγκύλες, παριστάνει ένα στρεφόμενο άνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο του οποίου η προβολή στο πραγματικό άξονα ισούται με το ημιτονοειδές μέγεθος. Δηλαδή, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ του στρεφόμενου ανύσματος και των στιγμιαίων τιμών του ημιτονοειδούς μεγέθους.

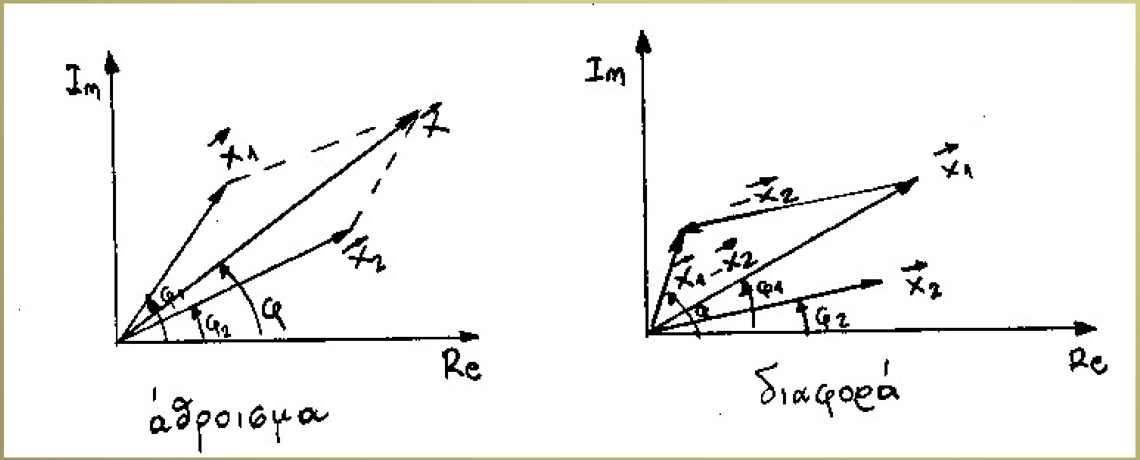
Κατά την ανάλυση γραμμικών συστημάτων στη μόνιμη κατάσταση, ο όρος $e^{j\omega t}$ εμφανίζεται σε όλες τις τάσεις και εντάσεις και έτσι μπορεί να παραλειφθεί. Η απεικόνιση γίνεται μεταξύ του ανύσματος της ενδεικνυμένης τιμής και του ημιτονοειδούς μεγέθους. Επίσης, επειδή τόσο στους υπολογισμούς ισχύος όσο και στις μετρήσεις τάσεων και εντάσεων υπεισέρχεται η έννοια της ενδεικνυμένης τιμής, είναι πιο βολικό οι υπολογισμοί να γίνονται με τα μιγαδικά μεγέθη των ενδεικνυμένων ανυσμάτων $\vec{U}$ και $\vec{I}$

## Βασικές σχέσεις μιγαδικών αριθμών

Ένα μιγαδικό μέγεθος μπορεί να παρασταθεί με τις παρακάτω μορφές: $\overrightarrow{X} = A + jB = Xe^{j\phi} = X(\cos\phi + j\sin\phi) = X\underline{\lfloor\phi}$

όπου $X = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\qquad \phi = \arctan\left(\dfrac{B}{A}\right)$

Αλγεβρικό άθροισμα δύο μιγαδικών αριθμών

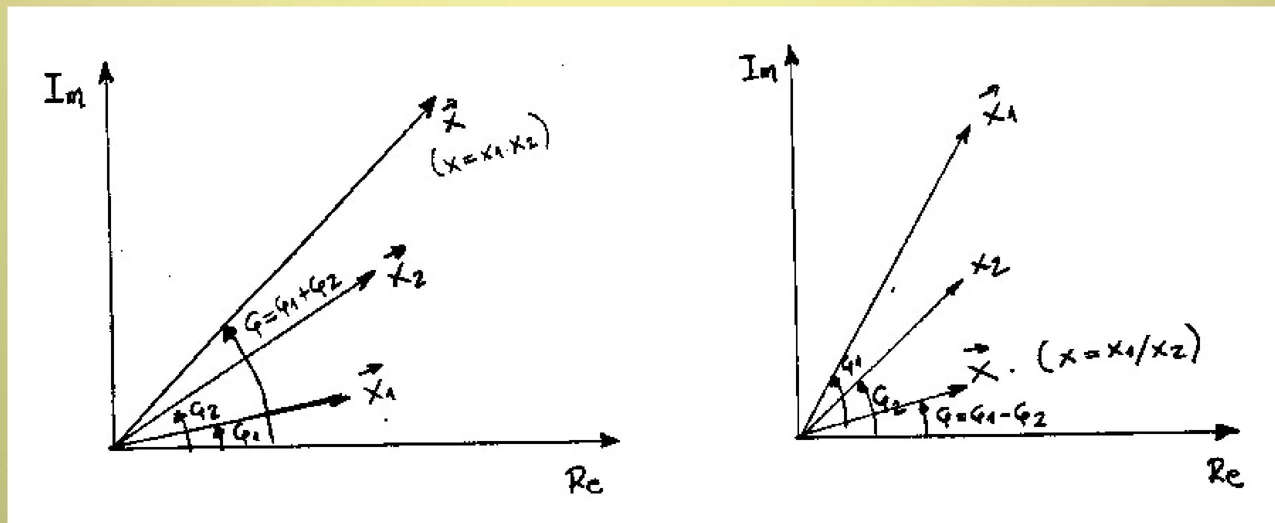



$$\vec{X}_1 \pm \vec{X}_2 = (A_1 \pm A_2) + j(B_1 \pm B_2)$$

$$\vec{X}_1 \pm \vec{X}_2 = X_1\underline{\lfloor\varphi_1} \pm X_2\underline{\lfloor\varphi_2} =$$

$$(X_1\cos\varphi_1 \pm X_2\cos\varphi_2) +$$

$$j(X_1\sin\varphi_1 + X_2\sin\varphi_2)$$

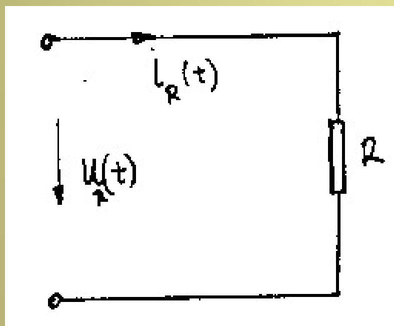



$$\vec{X}_1 \vec{X}_2 = (A_1 + jB_1)(A_2 + jB_2) = (A_1A_2 - B_1B_2) + j(A_1B_2 + B_1A_2) =$$

$$X_1X_2e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = X_1X_2\underline{\left|\varphi_1+\varphi_2\right.}$$

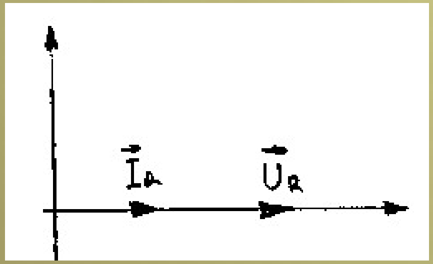
$$\frac{\vec{X}_1}{\vec{X}_2} = \frac{(A_1A_2 + B_1B_2) + j(A_2B_1 - A_1B_2)}{A_2^2+B_2^2} = \frac{X_1}{X_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{X_1}{X_2}\underline{\left|\varphi_1-\varphi_2\right.}$$

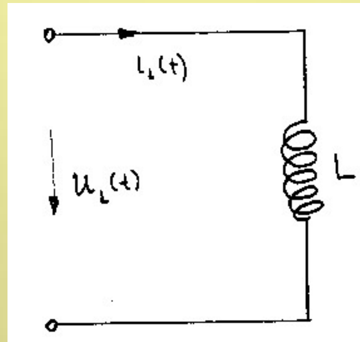
# Ανυσματικά διαγράμματα τάσεων και εντάσεων βασικών διπόλων




$$u_R(t) = R i_R(t)$$

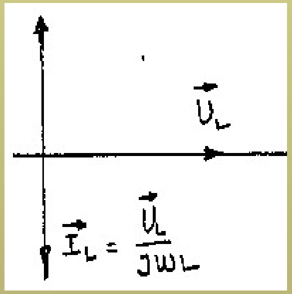
$$\vec{U}_R = R\,\vec{I}_R$$

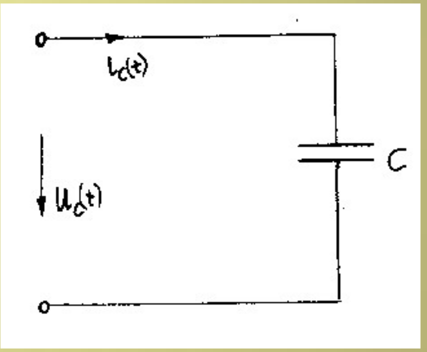



$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

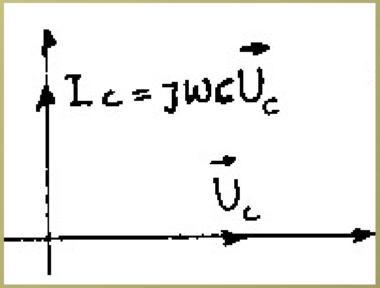
$$\vec{U}_L = JL\omega\,\vec{I}_L = jX_L\,\vec{I}_L$$



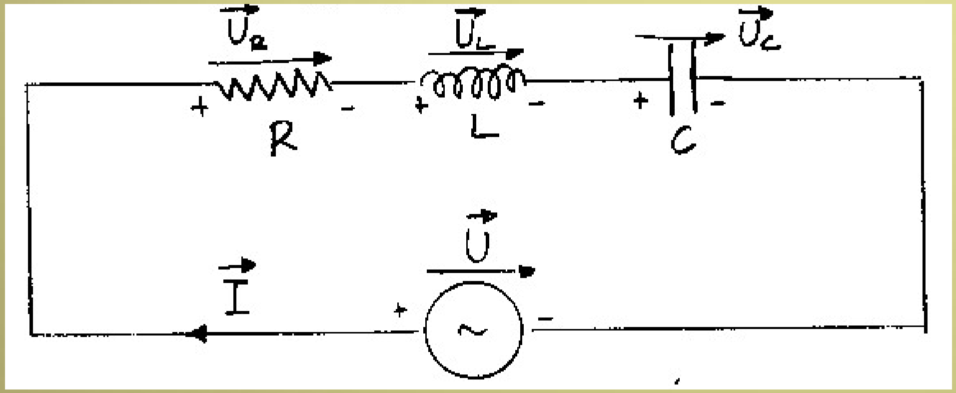

$$u_c(t) = \frac{1}{C}\int i_c(t)dt$$

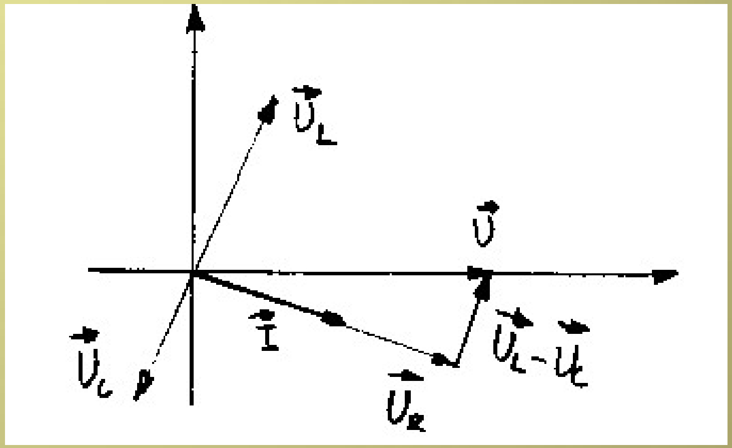
$$\vec{U}_c = \frac{1}{jC\omega}\vec{\mathrm{I}}_c = -jX_c\,\vec{I}_c$$



# Παραδείγματα

Στο παρακάτω κύκλωμα να γίνει το ανυσματικό διάγραμμα των τάσεων και να γραφεί η συνολική σύνθετη αντίσταση




$$Z = R + jX_L - jX_c = R + j(X_L - X_c) = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

# ΙΣΧΥΣ

Η χρονική συνάρτηση της στιγμιαίας ισχύος προκύπτει από τη σχέση:

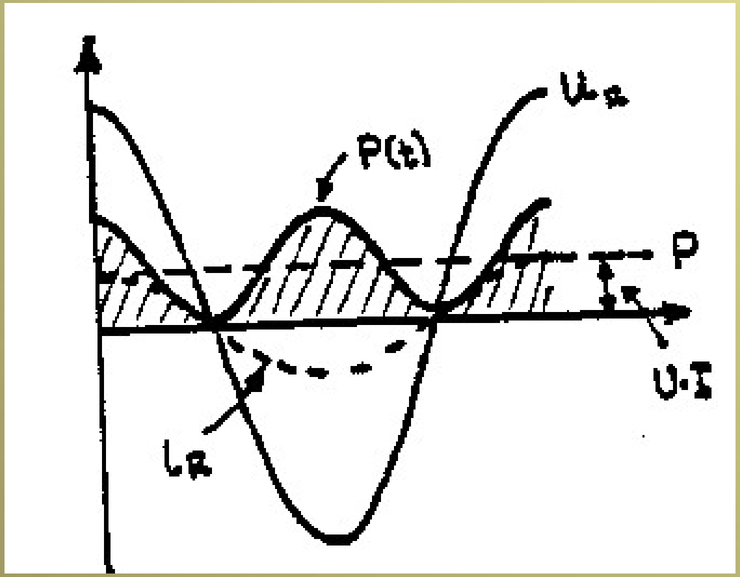
$$p(t) = i(t) \cdot u(t)$$

Η μέση τιμή της *p(t)* ονομάζεται ενεργός ισχύς και είναι αυτή η οποία παράγει έργο και μετράται σε *[W]*. Το γινόμενο *U*I* ονομάζεται φαινόμενη ισχύς και μετράται σε *[V·A]* . Η φαινόμενη ισχύς δεν έχει φυσική σημασία αλλά τεχνική. Επίσης, ανάλογα με τη φύση του φορτίου, υπάρχει στην ισχύ ένας εναλλασσόμενος όρος του οποίου το εύρος ονομάζεται άεργος ισχύς και μετράται σε VAr. Η άεργος ισχύς δεν παράγει έργο αλλά είναι το "μεταφορικό" μέσο της ενεργού ισχύος, δηλαδή δημιουργεί το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο, τα οποία είναι αναγκαία για τη λειτουργία του ηλεκτρικού συστήματος.

# Ισχύς σε βασικά δίπολα

## Ωμική αντίσταση

$$p(t) = i(t)\cdot u(t) = \sqrt{2}\cdot U\cos(\omega t)\cdot\sqrt{2}\cdot I\cos(\omega t) = 2UI\cos^2(\omega t) =$$
$$U\cdot I\cdot[1+\cos(2\omega t)]$$




**P=UI**

**Q=0**

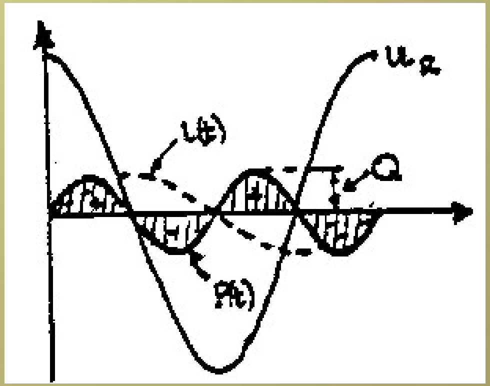
**Επαγωγική αντίδραση**

$$p(t) = i(t)\cdot u(t) = \sqrt{2}\cdot U\cos(\omega t)\cdot\sqrt{2}\cdot I\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) =$$

$$2UI\cos(\omega t)\cdot\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = U\cdot I\cdot\sin(2\omega t)$$

**P=0**

**Q=UI**



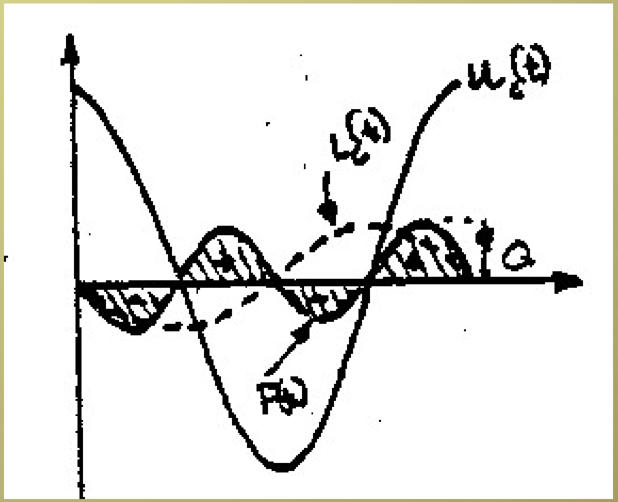
**Χωρητική αντίδραση**

$$p(t) = i(t)\cdot u(t) = \sqrt{2}\cdot U\cos(\omega t)\cdot\sqrt{2}\cdot I\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) =$$

$$2UI\cos(\omega t)\cdot\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -U\cdot I\cdot\sin(2\omega t)$$

***P=0***

***Q=-UI***



## Σύνθετη αντίδραση

$$p(t) = i(t)\cdot u(t) = \sqrt{2}\cdot U\cos(\omega t + \phi_u)\cdot\sqrt{2}\cdot I\cos(\omega t + \phi_i) =$$

$$2UI\cos(\omega t + \phi_u)\cdot\cos(\omega t + \phi_u - (\phi_u - \phi_i)) =$$

$$2\cdot U\cdot I[\cos^2(\omega t + \phi_u)\cos(\phi_u - \phi_i) + \sin(\omega t + \phi_u)\cos(\omega t + \phi_u)\sin(\phi_u - \phi_i)] =$$

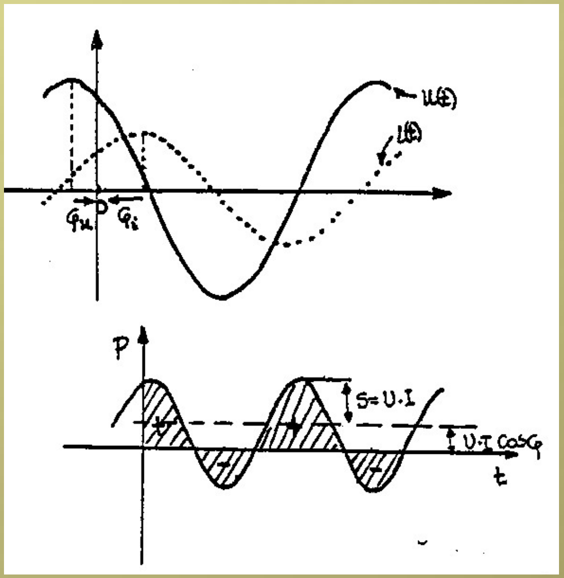
$$U\cdot I[2\cos^2(\omega t + \phi_u)\cos\phi + \sin[2(\omega t + \phi_u)]\cdot\sin\phi]$$

$$P = UI\cos\phi$$

$$Q = UI\sin\phi$$

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

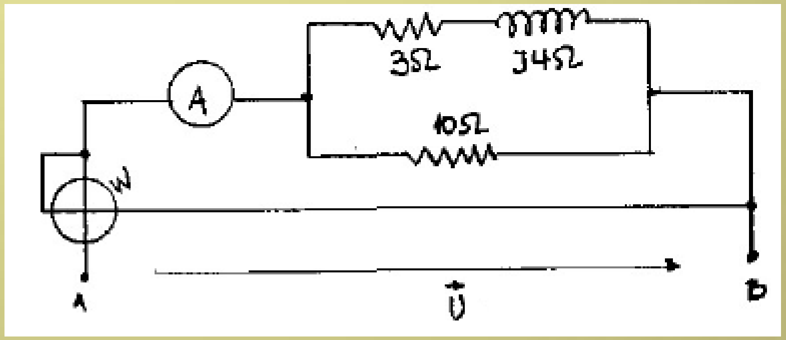
$$\vec{S} = P + jQ = \vec{U}\cdot\vec{I}^{*}$$



## Παραδείγματα

Στο παρακάτω κύκλωμα η συνολική ενεργός ισχύς, την οποία λαμβάνουμε από την ένδειξη του βατομέτρου, είναι ίση με 1100W. Να βρεθεί η ισχύς σε κάθε αντίσταση, καθώς επίσης και η ένδειξη του αμπερομέτρου.

$$P_{3\Omega} + P_{10\Omega} = 1100W$$




$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{U}}{3+4j}, \vec{I}_2 = \frac{\vec{U}}{10} => \frac{\vec{I}_1}{\vec{I}_2} = \frac{\vec{U}/(3+4j)}{\vec{U}/10} = \frac{10}{3+4j} => \frac{I_1}{I_2} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

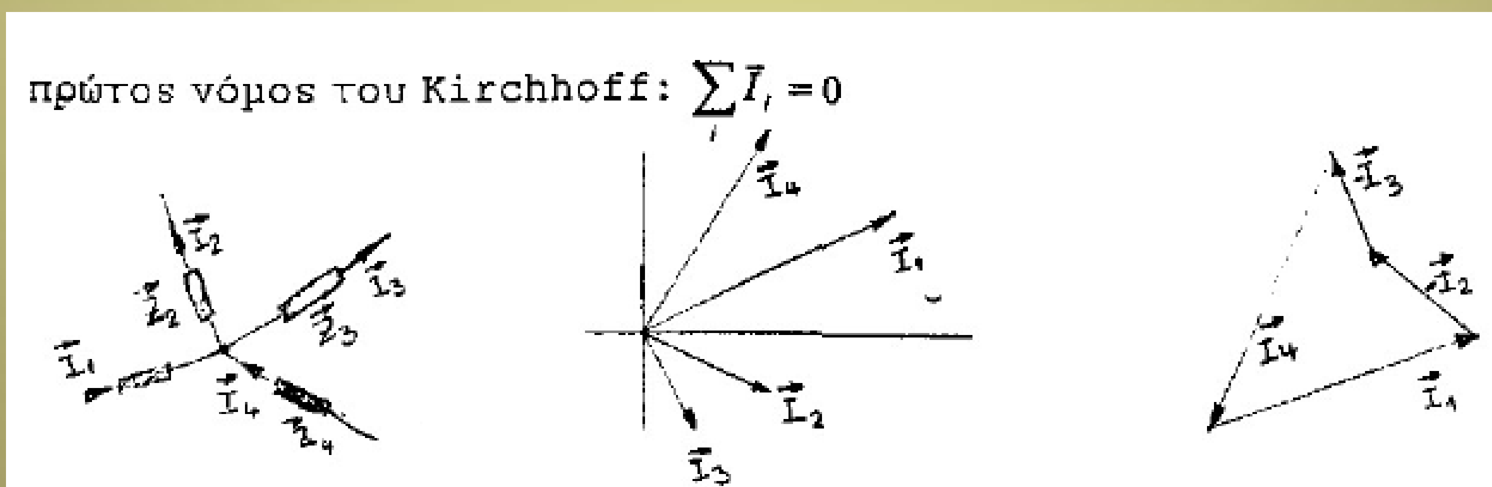
$$P_{3\Omega} = I_1^2 \cdot 3\Omega \;\; \kappa\alpha\iota \; P_{10\Omega} = I_2^2 \cdot 10\Omega \qquad \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma \; \frac{P_{3\Omega}}{P_{10\Omega}} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

Θεωρώντας $\vec{U} = U\angle 0^0 V$ συνεπάγεται ότι $\vec{I}_1 = 14,14\angle -53,1^0 A$ και

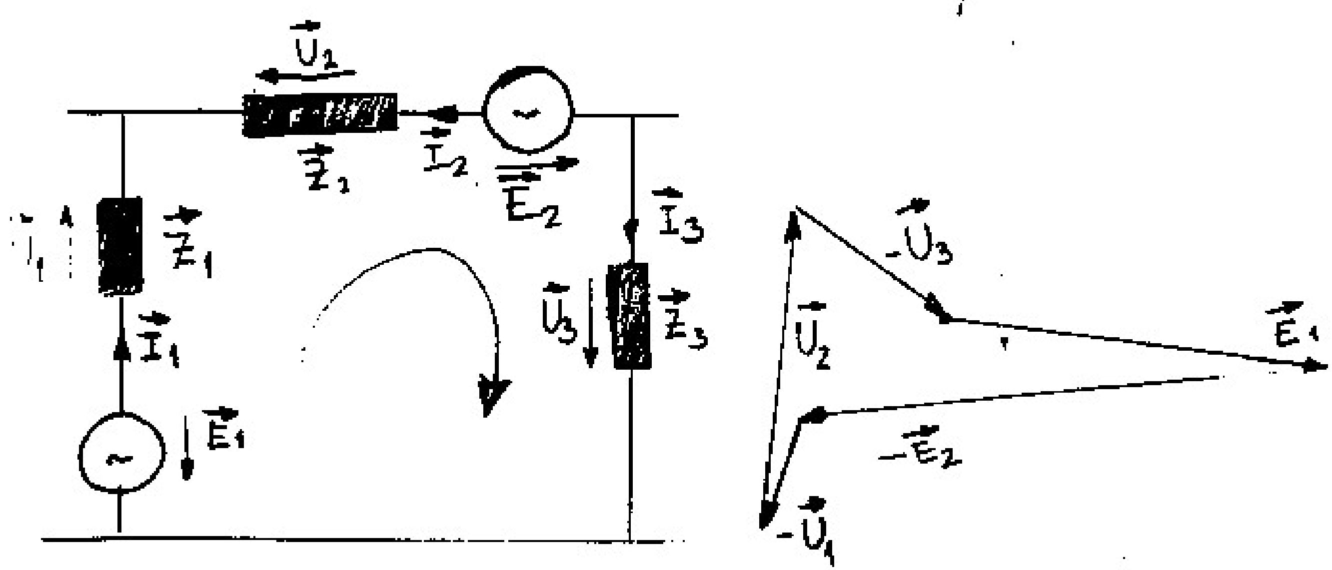
$\vec{I}_2 = 7,07\angle 0^0 A$ . Συνεπώς $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 19,25\angle -36^0 A$ και η ένδειξη του

αμπερομέτρου θα είναι 19,25A

Οι νόμοι του Kirchhoff, αλλά και τα υπόλοιπα θεωρήματα που αναφέρθηκαν στο συνεχές ρεύμα, ισχύουν και στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος με τη διαφορά ότι στην προκείμενη περίπτωση στις διάφορες σχέσεις έχουμε ανύσματα ή στιγμιαίες τιμές. Για παράδειγμα οι σχέσεις για τους δύο νόμους του Kirchhoff, προκειμένου για ανύσματα, έχουν ως εξής:

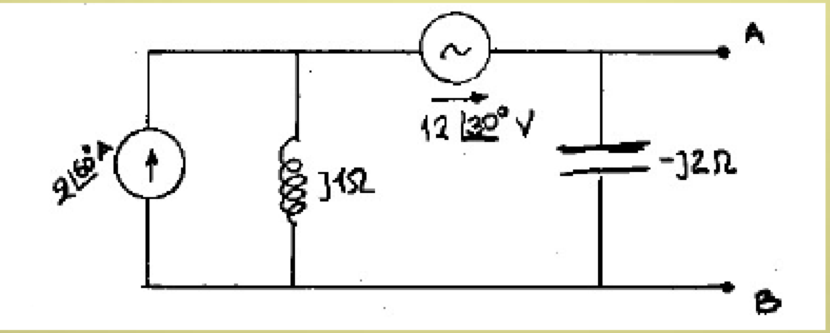


δεύτερος νόμος του Kirchhoff είναι: $\sum_i \bar{U}_i = 0$

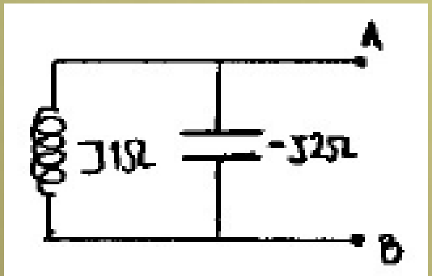


# Παραδείγματα

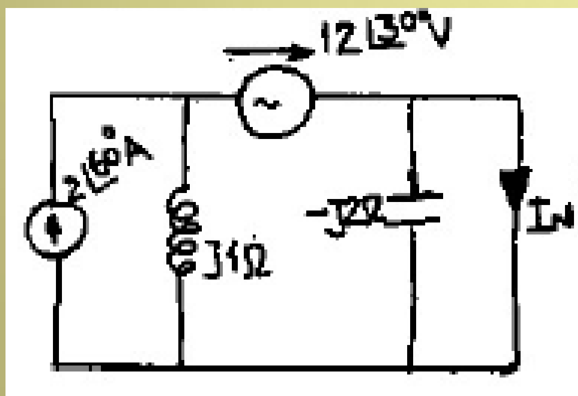
Να βρεθεί το ισοδύναμο κατά Norton, από τα άκρα Α, Β, του παρακάτω κυκλώματος:




Η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση είναι:




$$\vec{Z}_N = \frac{(j1)(-2j)}{j1 - j2} = j2$$




Χρησιμοποιώ υπέρθεση

$$\vec{I}_N = \vec{I}_N^{(1)} + \vec{I}_N^{(2)} =$$

$$2\angle 60^0 - 12\angle -60^0 = 13,1\angle 112,4A$$

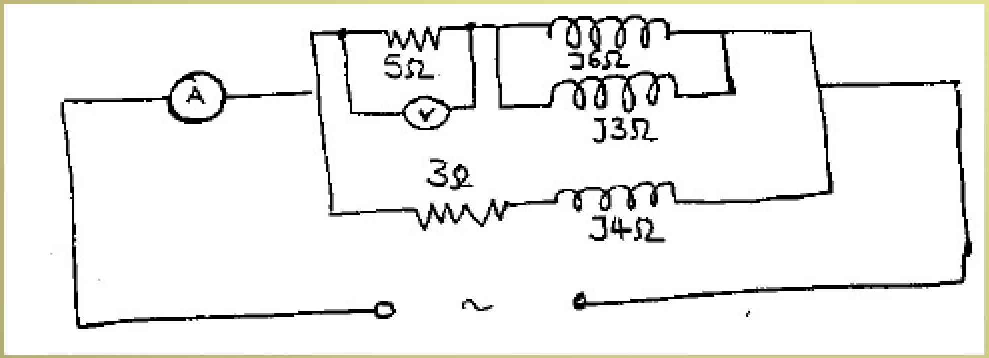
$$\text{Μόνο}\ \pi\eta\gamma\acute{\eta}\ \rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha\tau o\varsigma:$$

$$\vec{I}_N^{(1)} = 2\angle 60^0 A$$

$$\text{Μόνο}\ \pi\eta\gamma\acute{\eta}\ \tau\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma$$

$$\vec{I}_N^{(2)} = -\frac{12\angle 30^0}{j} = -12\angle -60^0 A$$

Στο παρακάτω κύκλωμα το βολτόμετρο έχει ένδειξη 45V. Ποια είναι η ένδειξη του αμπερομέτρου;




Λύση

$$\vec{I}_1 = \frac{45V}{5\Omega} = 9\underline{|0^0}\,A$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \eta\ \tau\acute{\alpha}\sigma\eta\ U\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\eta\ \mu\varepsilon:$

$$\vec{U} = 45V + \vec{I}_1(6j // 3j) = 45V + 9A\cdot\frac{3j\cdot 6j}{3j+6j} = (45+18j)V$$

$\mathrm{T}o\ \rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha\ \mathrm{I}_2\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma o\ \mu\varepsilon:\ \vec{\mathrm{I}}_2 = \dfrac{(45+18j)}{(3+4j)} = (8{,}28-5{,}04j)A$

$o\pi\acute{o}\tau\varepsilon$

$$\vec{I}_2 = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 17{,}28 - 5{,}04j$$

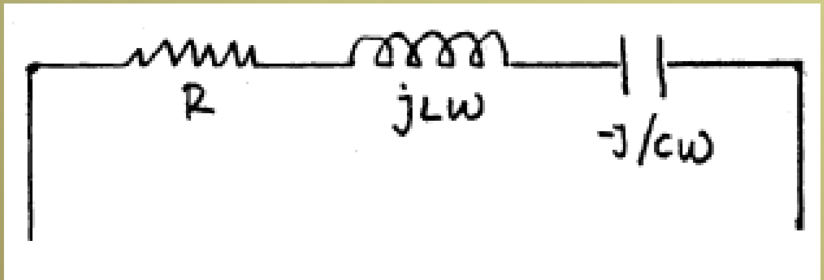
$\kappa\alpha\iota\ \eta\ \acute{\varepsilon}\nu\delta\varepsilon\iota\xi\eta\ \tau o\upsilon\ \alpha\mu\pi\varepsilon\rho o\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\upsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau o\ \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \tau o\upsilon\ \mathrm{I}:$

$$\left|\vec{I}\right| = 18A$$

# Συντονισμός

Ένα παθητικό κύκλωμα που περιέχει πηνία και πυκνωτές θεωρείται ότι βρίσκεται σε συντονισμό όταν η παρεχόμενη τάση $\vec{U}$ και το ρεύμα $\vec{I}$ είναι σε φάση. Συνεπώς, κατά το συντονισμό η συνθέτη αντίσταση του κυκλώματος ισοδυναμεί με μια ωμική αντίσταση $R$.

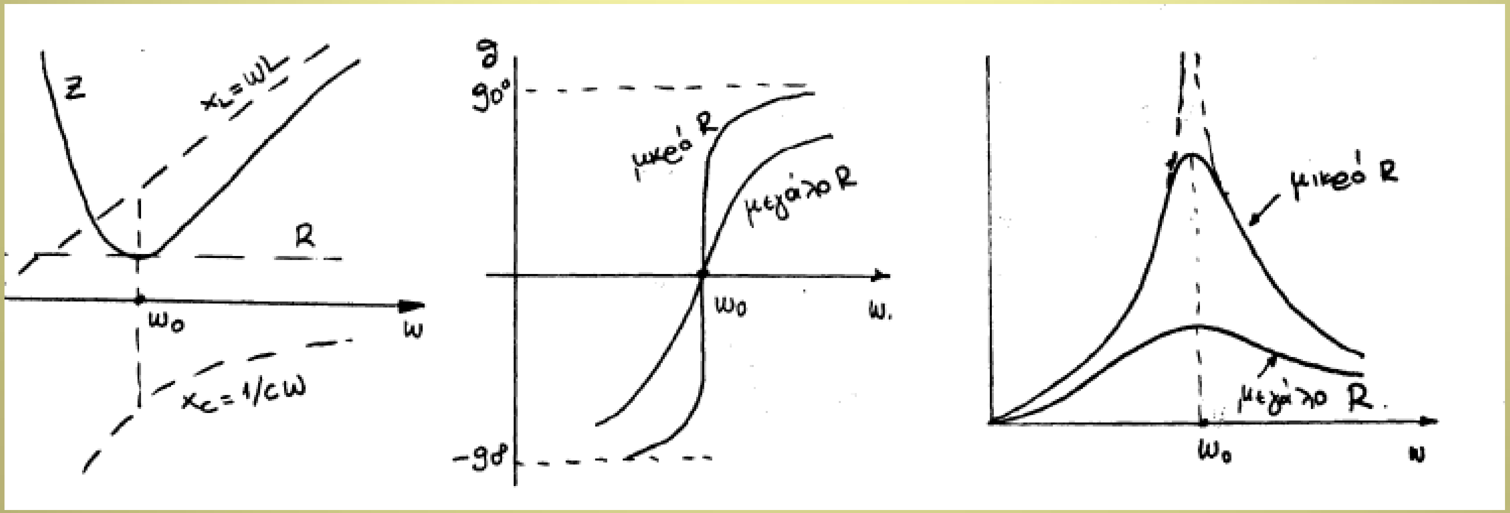
**Συντονισμός σύνδεσης σειράς**




$$\vec{Z} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

$$\omega L = 1/C\omega, \; \omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} Hz$$



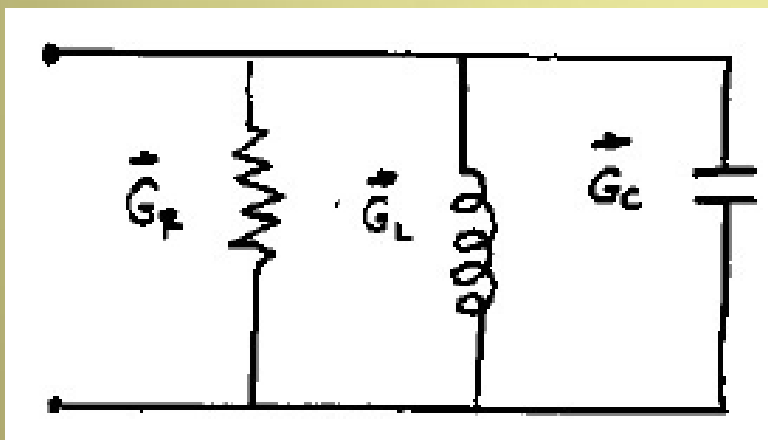

$$U_R = U\frac{R}{\left|\vec{Z}\right|},\quad U_L = U\frac{L\omega}{\left|\vec{Z}\right|},\quad U_C = U\frac{1}{\left|\vec{Z}\right|C\omega}$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \left|\vec{Z}\right| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

Οι τάσεις στο πηνίο και στη χωρητικότητα μπορούν να αποκτήσουν τιμές μεγαλύτερες από την τάση U (υπερτάσεις)

$$\omega_L = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}}, \quad \omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

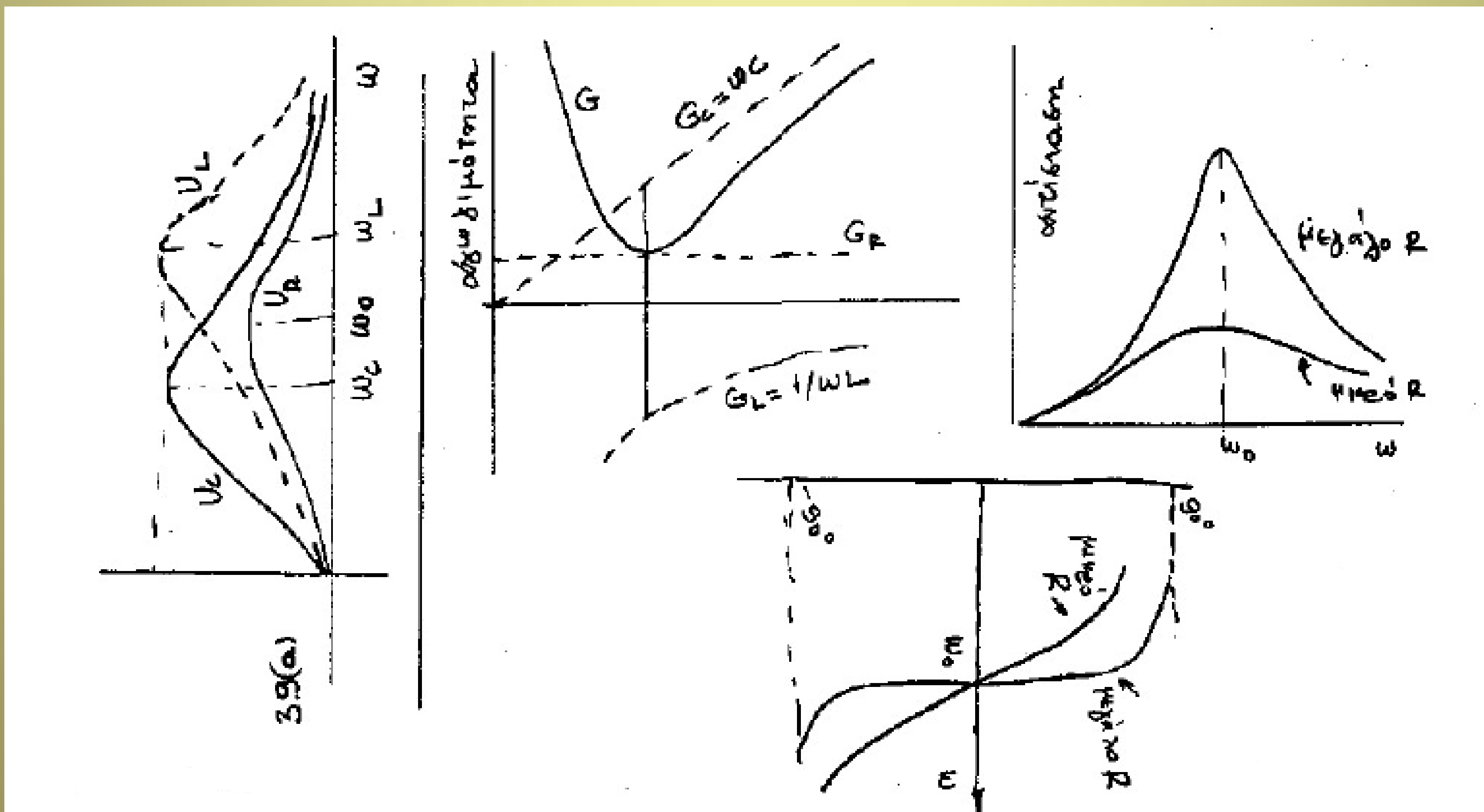
**Συντονισμός παράλληλης σύνδεσης**




$$I = GU,\; I_R = G_R U,\; I_L = G_L U,\; I_C = G_C U$$

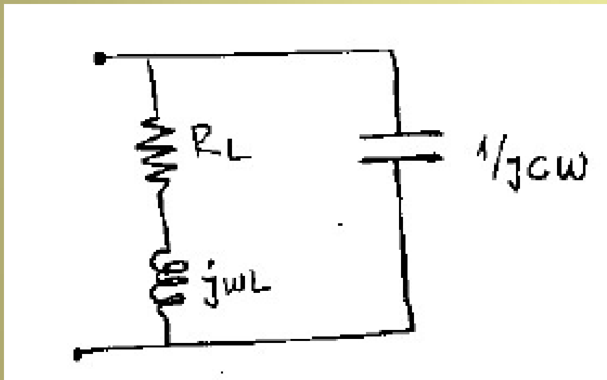
$$\acute{o}\pi o\upsilon\; G = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}$$

$$G_R = 1/R,\; G_L = 1/L\omega,\; G_c = \omega C$$



G
G_C = ωC
G_R
G_L = 1/ωL
ω_0
ω
39(a)

# Παράδειγμα




$$H \; ολική \; αγωγιμότητα \; του \; κυκλώματος \; είναι:$$

$$\vec{G} = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C$$

$$Συνεπώς$$

$$G = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2})$$

$$Στο \; συντονισμό \; το \; φανταστικό \; μέρος \; της \; αγωγιμότητας \; G \; θα$$
$$πρέπει \; να \; είναι \; μηδέν. Συνεπώς:$$

$$\frac{\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0{}^2 L^2} = \omega_0 C => \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}}$$

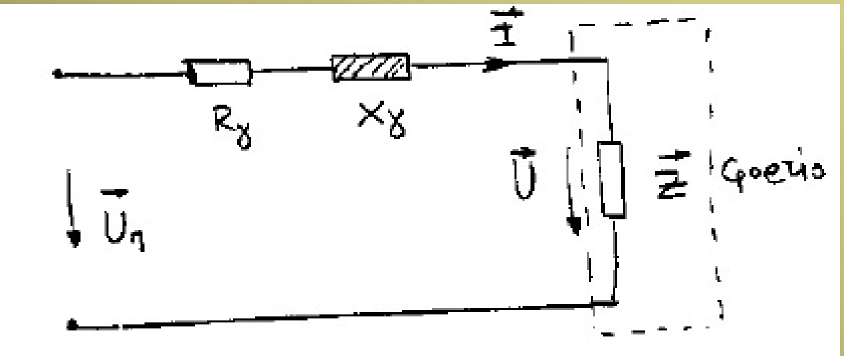
# Αντιστάθμιση ισχύος

Η αντιστάθμιση ισχύος είναι γνωστή κι' ως διόρθωση του συντελεστή ισχύος *συνφ*. Η αντιστάθμιση μπορεί να γίνει είτε σ' ένα σύνολο καταναλωτών (π.χ. στα φορτία μιας βιομηχανίας), είτε τοπικά σε μικρούς μονοφασικούς καταναλωτές, (π.χ. λυχνίες φθορισμού) , σε τριφασικούς κινητήρες (π.χ. επαγωγικούς κινητήρες) κλπ. Επειδή κάθε συμμετρικό τριφασικό σύστημα μπορεί να παρασταθεί μ' ένα αντίστοιχο μονοφασικό ισοδύναμο κύκλωμα, συνεπάγεται ότι όσα θ' αναφερθούν εδώ, ισχύουν και για τα τριφασικά κυκλώματα.

Τα πλεονεκτήματα της διόρθωσης του συνφ μπορούν να δειχθούν ως εξής:

έστω ότι ένας καταναλωτής ισχύος $P$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi$ τροφοδοτείται, μέσω μιας γραμμής σύνθετης αντίστασης $Z_r = R_r + jX_r$

και από μια πηγή τάσης $\vec{U}_x$




$$I = \frac{P}{U \cdot \cos\phi}, \quad n = \frac{1}{1 + R_r \cdot \dfrac{P}{U^2 \cos^2\phi}}$$

$$P_r = R_r I^2 = R_r \frac{P^2}{U^2 \cos^2\phi}$$

Για δεδομένη διατομή γραμμής (δεδομένη μέγιστη επιτρεπόμενη ένταση φόρτισης της γραμμής αυτής), η βελτίωση του cosφ παρέχει τη δυνατότητα αύξησης της μεταφερόμενης ισχύος.
Οι καταναλωτές έχουν συνήθως επαγωγικό χαρακτήρα και η αντιστάθμιση γίνεται με την παράλληλη σύνδεση πυκνωτή στην κατανάλωση. Η σύνδεση του πυκνωτή σε σειρά αποφέρει τα ίδια ,όσον αφορά το cosφ, αλλά προκαλεί αλλαγή της τάσης χωρίς αντιστάθμιση, γι’αυτό δεν χρησιμοποιείται

# Καθορισμός απαιτούμενου πυκνωτή για αντιστάθμιση

Η άεργος ισχύς πριν την τοποθέτηση του πυκνωτή ήταν $Q_L = S \cdot \sin\phi = P \cdot \tan\phi$ και μετά την τοποθέτηση του πυκνωτή η άεργος ισχύς είναι $Q' = P \cdot (\tan\phi')$ . Η διαφορά των δύο ισχύων είναι η άεργος ισχύς που παρέχει ο πυκνωτής, ή

$$-Q_c = Q_L - Q' = P(\tan\phi - (\tan\phi'))$$

Όμως

$$-Q_C = \omega C U^2 = P(\tan\phi - (\tan\phi)') ) => C = \frac{P}{\omega U^2}(\tan\phi - (\tan\phi)')$$

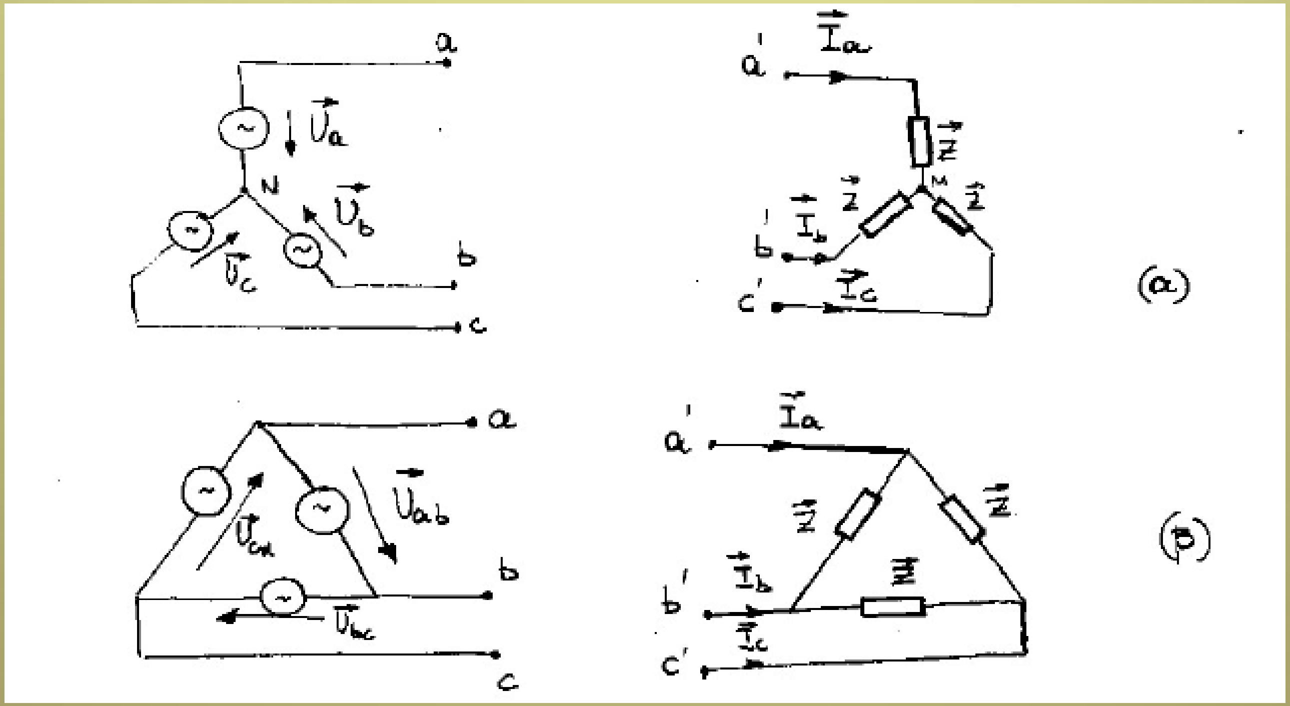
# Τριφασικό σύστημα

Η ηλεκτρική ενέργεια παράγεται ως επί το πλείστον με σύγχρονες τριφασικές γεννήτριες και τα τριφασικά συστήματα χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά για την παραγωγή, μεταφορά και διανομή ηλεκτρικής ενέργειας.

Τα τυλίγματα των γεννητριών, των μετασχηματιστών και τα φορτία σ’ ένα τριφασικό ή γενικά σ’ ένα πολυφασικό σύστημα συνδέονται με δύο βασικούς τρόπους: σ’ αστέρα, ή τρίγωνο (πολύγωνο)

Εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι η σύνδεση των τριών τυλιγμάτων της πηγής (ή των τριών πηγών τάσης) ισοδυναμεί με βραχυκύκλωμα. Αυτό όμως δεν είναι αληθές αφού και οι τρεις τάσεις των πηγών έχουν άθροισμα 0.

Η μέθοδος της διασύνδεσης που χρησιμοποιείται για τα τυλίγματα μιας γεννήτριας είναι ανεξάρτητη του τρόπου διασύνδεσης του φορτίου. Δηλαδή, στο ίδιο κύκλωμα μπορεί να έχουμε συνδέσεις φορτίων και γεννητριών και σε μορφή τριγώνου και σε αστέρα.



Για το τριφασικό συμμετρικό σύστημα ισχύουν οι σχέσεις για τις τάσεις των πηγών

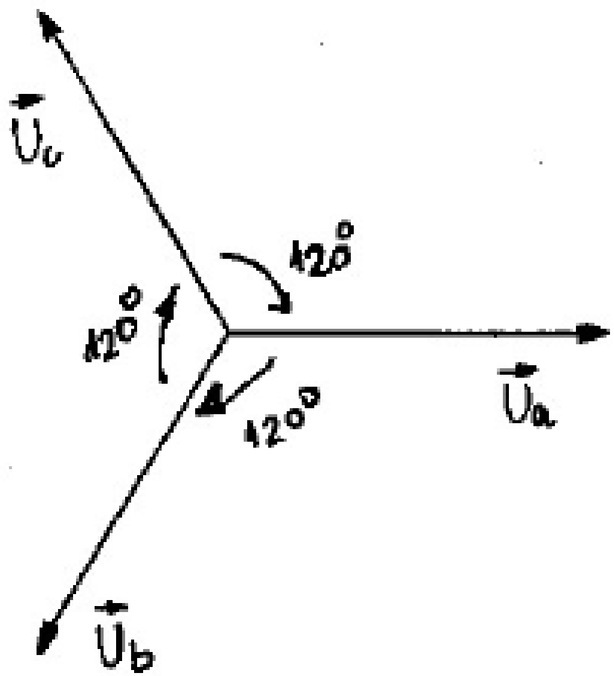
$$u_a(t) = u_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$u_b(t) = u_{\max}\cos(\omega t + \varphi - 2\pi/3)$$

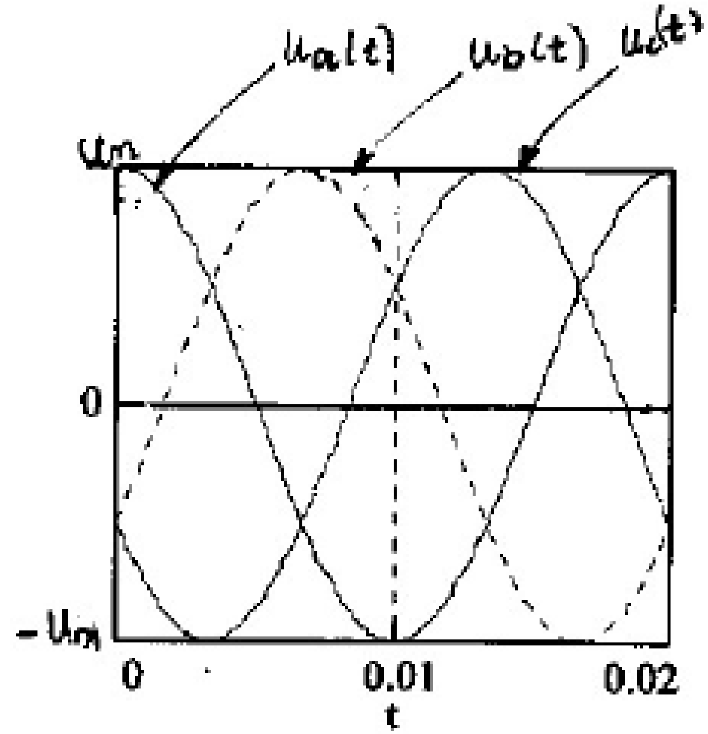
$$u_c(t) = u_{\max}\cos(\omega t + \varphi + 2\pi/3)$$

$$\vec{U}_a = U\lfloor 0^0, \quad \vec{U}_b = U_a\lfloor -120^0 = \vec{a}^{\,2}\,\vec{U}_a$$

$$\vec{U}_c = U_a\lfloor +120^0 = \vec{a}\,\vec{U}_a \;\; \acute{o}\pi o\upsilon \;\; \vec{a} = e^{j2\pi/3}$$



$\vec{U}_c$
120°
120°
120°
$\vec{U}_a$
$\vec{U}_b$

$u_a(t)$
$u_b(t)$
$u_c(t)$
$U_m$
0
$-U_m$
0
0.01
0.02
t

# Τριφασική ισχύς

$$p(t) = u_a(t)i_a(t) + u_b(t)i_b(t) + u_c(t)i_c(t)$$

$$i_a(t) = i_{\max}\cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$i_b(t) = i_{\max}\cos(\omega t + \varphi_i - 2\pi/3)$$

$$i_c(t) = i_{\max}\cos(\omega t + \varphi_i + 2\pi/3)$$

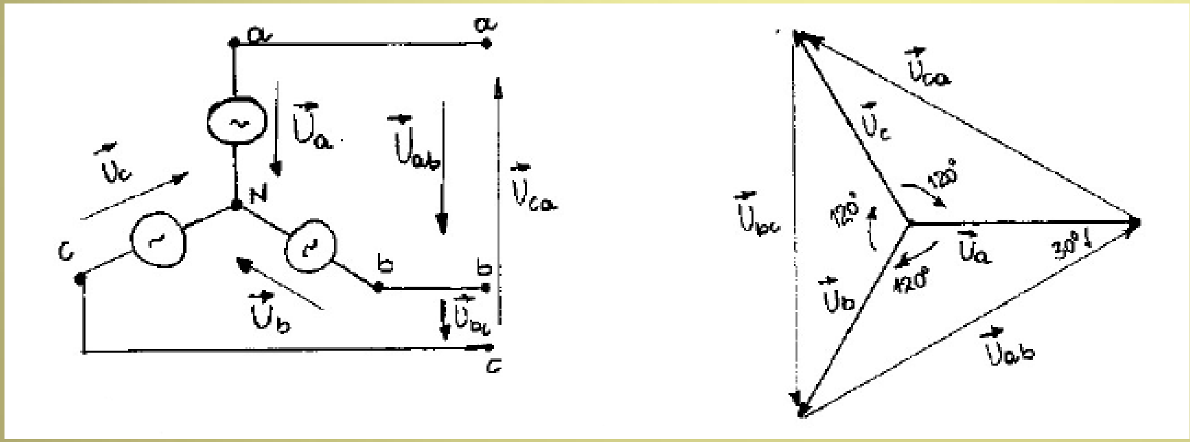
$$p(t) = P_{3\varphi} = 3UI\cos(\varphi)$$

$$Q_{3\varphi} = 3UI\sin(\varphi)$$

$$p(t) = P_{3\varphi} = 3P_{1\varphi}$$

# Τάσεις και εντάσεις τριφασικού συστήματος

Σ’ ένα συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων, άσχετα με το αν το φορτίο είναι συμμετρικό ή ασύμμετρο, οι τάσεις του συστήματος είναι συμμετρικές. Κατά την τροφοδότηση τριφασικών φορτίων απαιτούνται συνήθως οι τρεις αγωγοί των φάσεων. Στα δίκτυα χαμηλής τάσης χρησιμοποιούνται οι τρεις αγωγοί των φάσεων και ο ουδέτερος αγωγός επειδή εκεί συνήθως τα φορτία είναι μονοφασικά και κατανέμονται ως τριφασικά στις τρεις φάσεις από τη ΔΕΗ. Οι τάσεις μεταξύ των φάσεων ονομάζονται πολικές τάσεις, ενώ μεταξύ φάσεων και ουδετέρου ονομάζονται φασικές τάσεις.




το μέτρο της πολικής τάσης είναι κατά $\sqrt{3}$ μεγαλύτερο του μέτρου της φασικής τάσης

$$\vec{U}_{ab} = \vec{U}_a - \vec{U}_b = \vec{U}_a(1 - (\vec{a})^2) = \sqrt{3} \cdot \vec{U}_a \cdot e^{j30^0}$$

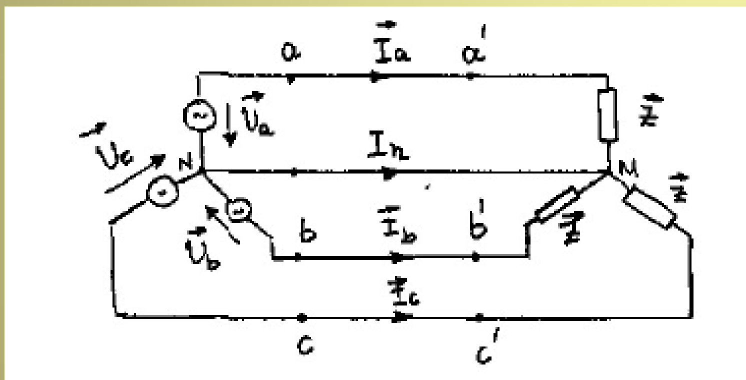
$$\vec{U}_{bc} = \vec{U}_b - \vec{U}_c = \vec{U}_b((\vec{a})^2 - (\vec{a})\ ) = \sqrt{3} \cdot \vec{U}_a \cdot e^{-j90^0}$$

$$\vec{U}_{ca} = \vec{U}_c - \vec{U}_a = \vec{U}_a((\vec{a}) - 1) = \sqrt{3} \cdot \vec{U}_a \cdot e^{j150^0}$$

# Συμμετρικό τριφασικό σύστημα

Το συμμετρικό τριφασικό σύστημα είναι ένα σύστημα στο οποίο οι πηγές είναι τριφασικές συμμετρικές πηγές και τα φορτία τριφασικά συμμετρικά φορτία. Επειδή υπάρχουν δυο είδη συνδεσμολογιών (αστέρας και τρίγωνο) τόσο για τις πηγές όσο και για τα φορτία, στην πράξη μπορεί να υπάρξουν διάφορες διατάξεις και συνδυασμοί των παραπάνω. Παρακάτω εξετάζονται δύο περιπτώσεις (πηγή αστέρας -φορτίο αστέρας) και (πηγή τρίγωνο, φορτίο τρίγωνο), ενώ για τις άλλες τα συμπεράσματα είναι παρόμοια.

***Συνδεσμολογία αστέρα - αστέρα***

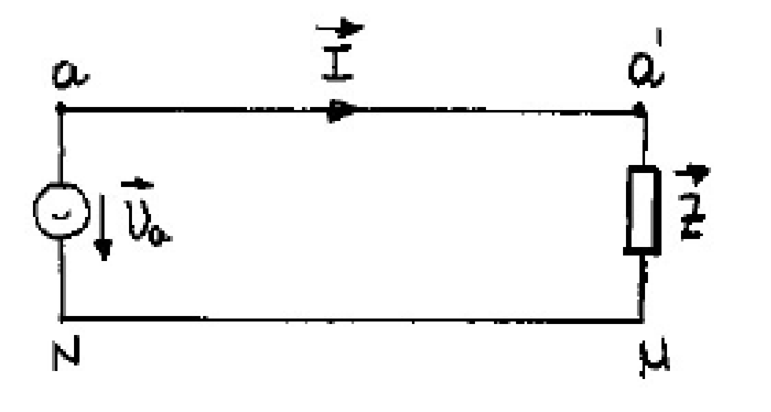



$$\vec{I}_a = \frac{\vec{U}_a}{\vec{Z}} = \left(\frac{U_a}{Z}\right) e^{-j\varphi}, \quad \vec{I}_b = \frac{\vec{U}_b}{\vec{Z}} = \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{I}_\alpha$$

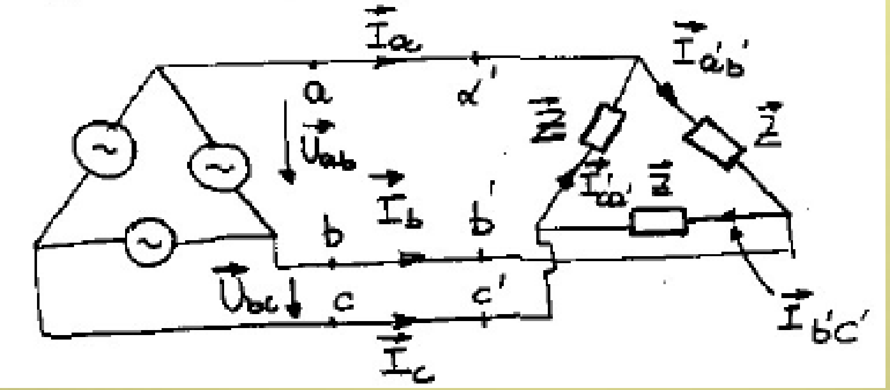
$$\vec{I}_c = \frac{\vec{U}_c}{\vec{Z}} = \vec{a} \cdot \vec{I}_a, \quad -\vec{I}_n = \vec{I}_a + \vec{I}_b + \vec{I}_c = 0$$

Στο συμμετρικό τριφασικό σύστημα *Y-Y* τα τρία ρεύματα στις φάσεις είναι ίσα κατά μέτρο και αποτελούν συμμετρικό σύστημα ανυσμάτων. Επίσης, το ρεύμα που διαρρέει τον ουδέτερο αγωγό είναι μηδέν. Συνεπώς για λόγους οικονομίας ο ουδέτερος αγωγός μπορεί να παραληφθεί, οπότε καταλήγουμε σε τριφασικό σύστημα Y-Y τριών αγωγών.

Επίσης γίνεται φανερό ότι η ανάλυση ενός τριφασικού συμμετρικού συστήματος *Y-Y* μπορεί να αναχθεί στην ανάλυση ενός από τα τρία μονοφασικά κυκλώματα που το αποτελούν. Το ισοδύναμο μονοφασικό κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα:



## *Συνδεσμολογία τριγώνου - τριγώνου*



$$\vec{I}_{a'b'} = \frac{\vec{U}_{a'b'}}{\vec{Z}} = \left(\frac{U_{\pi o\lambda\iota\kappa\acute{\eta}}}{Z}\right) e^{-j\varphi}, \quad \vec{I}_{b'c'} = \frac{\vec{U}_{b'c''}}{\vec{Z}} = \left(\frac{U_{\pi o\lambda\iota\kappa\acute{\eta}}}{Z}\right) e^{-j(120+\varphi)}$$

$$\vec{I}_{c'a'} = \frac{\vec{U}_{c''a'}}{\vec{Z}} = \left(\frac{U_{\pi o\lambda\iota\kappa\acute{\eta}}}{Z}\right) e^{-j(120-\varphi)}$$

$$\vec{I}_a = \vec{I}_{a'c'} - \vec{I}_{c'a'}, \quad \vec{I}_b = \vec{I}_{b'c''} - \vec{I}_{a'b'}, \quad \vec{I}_c = \vec{I}_{c'a'} - \vec{I}_{b'c'}$$

Στο συμμετρικό τριφασικό σύστημα *Δ-Δ* τα τρία ρεύματα της γραμμής είναι μεγαλύτερα κατά √3 από τα ρεύματα του φορτίου. Επίσης, επειδή δεν υπάρχει αγωγός επιστροφής, το άθροισμα των ρευμάτων της γραμμής είναι ίσο με το μηδέν. Επίσης, γίνεται φανερό ότι η ανάλυση ενός τριφασικού συμμετρικού συστήματος *Δ-Δ* μπορεί να αναχθεί στην ανάλυση ενός μονοφασικού κυκλώματος με πηγή τάσης τη φασική τάση και αντίσταση φορτίου την αντίσταση του ισοδύναμου αστέρα ή *Z/3*.

Το ισοδύναμο μονοφασικό κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα: