Τεχνολογικο Εκπαιδευτικο Ιδρυμα Κεντρικης Μακεδονιας - Σερρες
Τμημα Μηχανικων Πληροφορικης

Γραμμικός Προγραμματισμός & Βελτιστοποίηση

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Καθηγητής Εφαρμογών

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

1. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

- Η ανάλυση ευαισθησίας είναι μία μέθοδος η οποία εφαρμόζεται για να προσδιορίσει την ευαισθησία της λύσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού στις μεταβολές των παραμέτρων του.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Συγκεκριμένα η γραφική λύση μας δίνει πληροφορίες που αφορούν

1. την άριστη λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού
2. το διαχωρισμό των περιορισμών σε δεσμευτικούς ή χαλαρούς
3. τις δυϊκές τιμές των δεσμευτικών περιορισμών.
4. το εύρος αριστότητας των αντικειμενικών συντελεστών, δηλαδή, την αλλαγή που μπορούμε να κάνουμε σε ένα αντικειμενικό συντελεστή χωρίς να αλλάξει η άριστη λύση
5. το εύρος εφικτότητας των δεξιών μελών των περιορισμών, δηλαδή, την αλλαγή που μπορούμε να κάνουμε σε ένα δεξιό μέλος περιορισμού χωρίς να αλλάξει η εφικτή περιοχή ή χωρίς να αλλάξει η δυϊκή τιμή του περιορισμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μια εταιρία παρασκευάζει 2 διαφορετικού τύπου καύσιμα.
Για την παρασκευή του 1^{ου} τύπου χρειάζονται 3 ώρες στο παρασκευαστήριο και 5 lit πετρέλαιο, ενώ για την παρασκευή του 2^{ου} τύπου χρειάζονται 5 ώρες στο παρασκευαστήριο και 2 lit πετρέλαιο.
Η εταιρία για το παρασκευαστήριο διαθέτει 15 ώρες και προμηθεύεται 10 lit πετρέλαιο.
Να υποδειχθεί ένα π.γ.π. για την μεγιστοποίηση των κερδών της εταιρίας, αν γνωρίζουμε ότι το κέρδος για τον 1^{ο} τύπο είναι 5 € και για τον 2^{ο} τύπο είναι 3€.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ
με αντικειμενική συνάρτηση

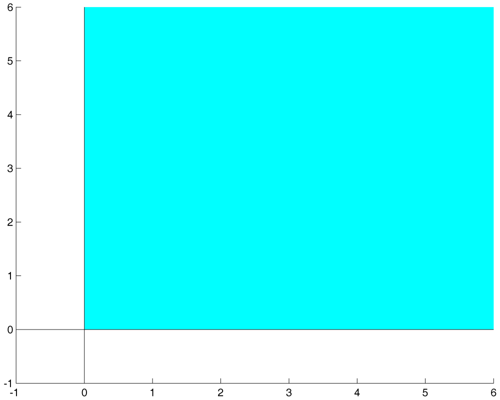
$$max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

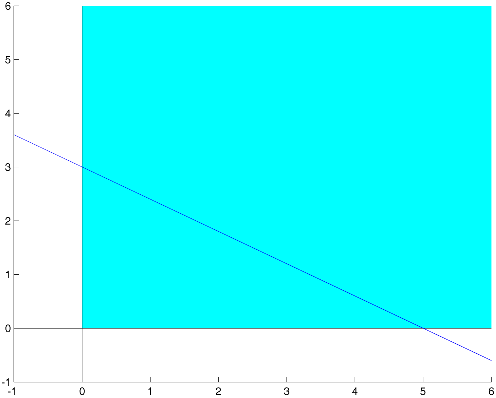
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



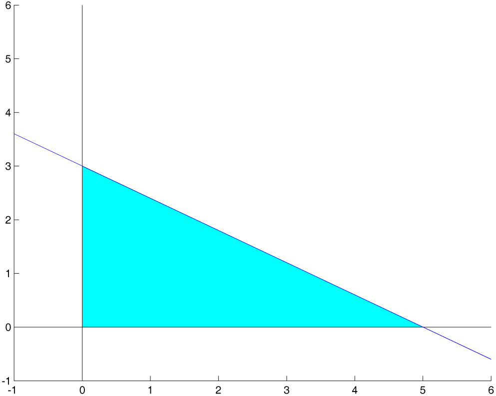
Αρχικά περιοριζόμαστε στο πρώτο τεταρτημόριο από τους περιορισμούς $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



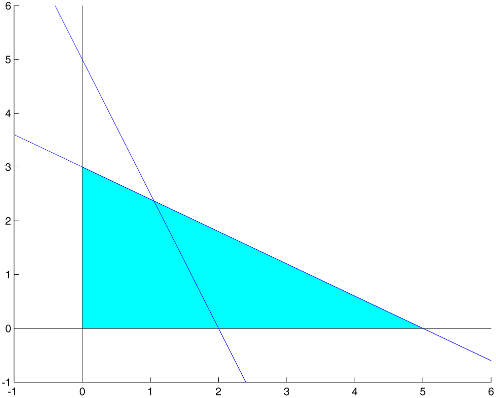
Έπειτα, σχεδιάζουμε τον περιορισμό (ευθεία) $3x_1 + 5x_2 = 15$.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



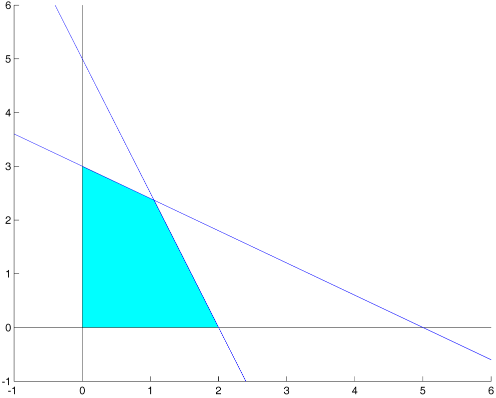
Επιλέγουμε την προσωρινή εφικτή περιοχή που ορίζεται από τους περιορισμούς $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ και $3x_1 + 5x_2 \leq 15$.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



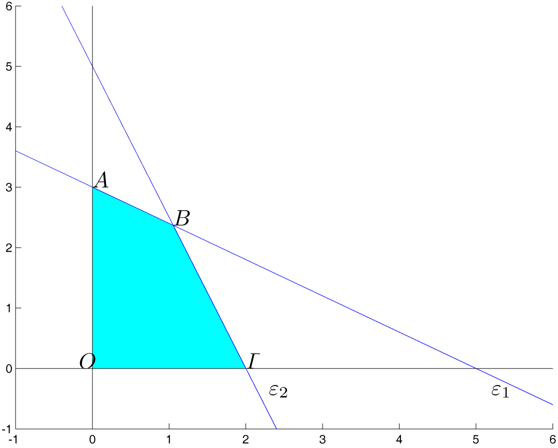
Έπειτα, σχεδιάζουμε τον περιορισμό (ευθεία) $5x_1 + 2x_2 = 10$.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



Επιλέγουμε την τελική εφικτή περιοχή που ορίζεται από τους περιορισμούς $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ και $5x_1 + 2x_2 \leq 10$.

Καταλήγουμε λοιπόν στην παρακάτω γραφική παράσταση του προβλήματος.



ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η λύση του προβλήματος είναι το σημείο

$$B\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$$

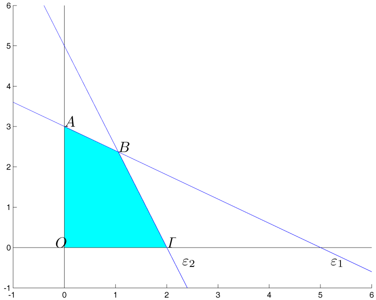
με μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

$$z = 5x_1 + 3x_2 = 5 \cdot \frac{20}{19} + 3 \cdot \frac{45}{19} = \frac{235}{19}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. Η εταιρία αποφάσισε την αύξηση του κέρδους του $2^{ου}$ τύπου καυσίμου στα 5€. Θα αλλάξει η λύση;
2. Η εταιρία αποφάσισε την μείωση του κέρδους του $1^{ου}$ τύπου καυσίμου στα 2€. Θα αλλάξει η λύση;
3. Η εταιρία θα προσλάβει έναν υπάλληλο και θα αυξήσει τις ώρες στο παρασκευαστήριο κατά 8. Θα αλλάξει η λύση;
4. Η εταιρία θα μειώσει την προμήθεια πετρελαίου κατά 5 lit . Θα αλλάξει η λύση;
5. Αν το κόστος του υπαλλήλου είναι 1 € την ώρα μπορεί να προσλάβει τον υπάλληλο;
6. Αν το κόστος για την επιπλέον προμήθεια 10 lit πετρελαίου είναι 6 € συμφέρει την εταιρία να αγοράσει το επιπλέον πετρέλαιο;

Διαχωρισμός των περιορισμών σε Δεσμευτικούς ή σε Χαλαρούς (γραφικά)



- Δεσμευτικός, όταν συμμετέχει στη λύση
- Χαλαρός, όταν δεν συμμετέχει στη λύση

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Διαχωρισμός των περιορισμών σε Δεσμευτικούς ή σε Χαλαρούς (στην μαθηματική μορφή)

- Δεσμευτικός, όταν η λύση του προβλήματος επαληθεύεται ως ισότητα
- Χαλαρός, όταν η λύση του προβλήματος επαληθεύεται ως ανισότητα

Επαληθεύουμε την λύση $(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ στον πρώτο περιορισμό $(3x_1 + 5x_2 \leq 15)$.
Έχουμε

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15 \Rightarrow 3 \cdot \frac{20}{19} + 5 \cdot \frac{45}{19} \leq 15 \Rightarrow 15 \leq 15$$

Επομένως, ο πρώτος περιορισμός είναι δεσμευτικός.

Επαληθεύουμε την λύση $(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ στον δεύτερο περιορισμό $(5x_1 + 2x_2 \leq 10)$.
Έχουμε

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \Rightarrow 5 \cdot \frac{20}{19} + 2 \cdot \frac{45}{19} \leq 10 \Rightarrow 10 \leq 10$$

Επομένως, ο δεύτερος περιορισμός είναι δεσμευτικός.

Οι περιορισμοί $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$ είναι χαλαροί.

Επαληθεύουμε την λύση $(x_1, x_2) = \left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ στους περιορισμούς.

Έχουμε

$$x_1 \geq 0 \Rightarrow \frac{20}{19} \geq 0$$

και

$$x_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{45}{19} \geq 0$$

ΕΥΡΟΣ ΑΡΙΣΤΟΤΗΤΑΣ

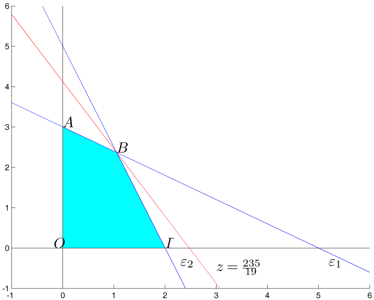
Πόσο μπορούμε να μεταβάλλουμε τους αντικειμενικούς συντελεστές c_i χωρίς να αλλάξει η άριστη (βέλτιστη) λύση.

- Έυρος Αριστότητας ορίζεται το διάστημα των αντικειμενικών συντελεστών στο οποίο η άριστη λύση παραμένει ίδια
- Η αντικειμενική ευθεία $z = c_1x_1 + c_2x_2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\dfrac{c_1}{c_2}$ και μπορεί να περιστραφεί γύρω από το σημείο (λύση) μέχρι να ταυτιστεί με τις ευθείες που αποτελούν δεσμευτικοί περιορισμοί.

ΕΥΡΟΣ ΑΡΙΣΤΟΤΗΤΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{cccc} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$



Οι συντελεστές διεύθυνσης των περιορισμών είναι $\lambda_1 = -\frac{3}{5}$ και $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$ αντίστοιχα.
Άρα, για τον συντελεστή διεύθυνσης της αντικειμενικής ευθείας $\lambda = -\frac{c_1}{c_2}$ θα ισχύει

$$-\frac{5}{2} \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{3}{5}$$

ΕΥΡΟΣ ΑΡΙΣΤΟΤΗΤΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Επομένως, για σταθερό $c_2 = 3$ έχουμε

$$-\frac{5}{2} \le -\frac{c_1}{3} \le -\frac{3}{5} \Rightarrow -\frac{15}{2} \le -c_1 \le -\frac{9}{5} \Rightarrow$$
$$\frac{9}{5} \le c_1 \le \frac{15}{2}$$

και για σταθερό $c_1 = 5$ έχουμε

$$-\frac{5}{2} \le -\frac{5}{c_2} \le -\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{5} \le \frac{5}{c_2} \le \frac{5}{2} \Rightarrow$$
$$\frac{2}{5} \le \frac{c_2}{5} \le \frac{5}{3} \Rightarrow 2 \le c_2 \le \frac{25}{3}$$

ΕΥΡΟΣ ΑΡΙΣΤΟΤΗΤΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Η εταιρία αποφάσισε την αύξηση του κέρδους του $2^{ου}$ τύπου καυσίμου στα 5€. Θα αλλάξει η λύση;

Υπολογίσαμε ότι $c_2 \in \left[2, \frac{25}{3}\right]$.

Παρατηρούμε ότι $5 < \frac{25}{3}$, επομένως είναι επιτρεπτή η παραπάνω αύξηση.

- Πόσο θα είναι το ημερήσιο κέρδος της εταιρίας μετά από την συγκεκριμένη αλλαγή;

Το κέρδος θα είναι

$$z = 5x_1 + 5x_2 = 5 \cdot \frac{20}{19} + 5 \cdot \frac{45}{19} = \frac{325}{19}$$

ΕΥΡΟΣ ΑΡΙΣΤΟΤΗΤΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Η εταιρία αποφάσισε την μείωση του κέρδους του $1^{ου}$ τύπου καυσίμου στα 2€. Θα αλλάξει η λύση;

Υπολογίσαμε ότι $c_1 \in \left[\frac{9}{5}, \frac{15}{2}\right]$.

Παρατηρούμε ότι $2 > \frac{9}{5}$, επομένως είναι επιτρεπτή η παραπάνω μείωση.

- Πόσο θα είναι το ημερήσιο κέρδος της εταιρίας μετά από την συγκεκριμένη αλλαγή;

Το κέρδος θα είναι

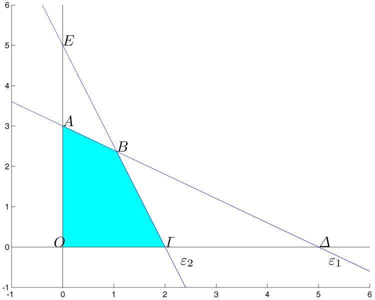
$$z = 2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot \frac{20}{19} + 3 \cdot \frac{45}{19} = \frac{175}{19}$$

ΕΥΡΟΣ ΕΦΙΚΤΟΤΗΤΑΣ

Η αλλαγή που μπορούμε να κάνουμε σε ένα δεξιό μέλος περιορισμού b_i χωρίς να αλλάξει η εφικτή περιοχή ή χωρίς να αλλάξει η δυϊκή τιμή του περιορισμού.

- Έυρος Εφικτότητας ορίζεται το διάστημα των δεξιών μελών των περιορισμών στο οποίο η εφικτή περιοχή παραμένει η ίδια
- Μετακινούμε (μετατοπίζουμε παράλληλα) την ευθεία που αντιστοιχεί σε ένα περιορισμό μέχρι να συναντήσει σημείο που αλλάζει την εφικτή περιοχή.

ΕΥΡΟΣ ΕΦΙΚΤΟΤΗΤΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$$\max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

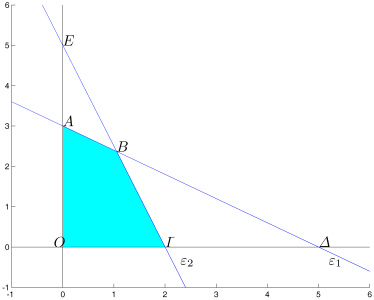
$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

Ο πρώτος περιορισμός (ευθεία) μπορεί να μετατοπισθεί παράλληλα μέχρι το σημείο B ταυτιστεί με το σημείο $\Gamma(2,0)$ και το σημείο $E(0,5)$.
Επαληθεύοντας τα σημεία στον περιορισμό έχουμε

$$3x_1 + 5x_2 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 6 \quad \text{και} \quad 3x_1 + 5x_2 = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 25$$

Άρα $b_1 \in [6, 25]$

ΕΥΡΟΣ ΕΦΙΚΤΟΤΗΤΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$$\max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

Ο δεύτερος περιορισμός (ευθεία) μπορεί να μετατοπισθεί παράλληλα μέχρι το σημείο B να ταυτιστεί με το σημείο $\Delta(5,0)$ και το σημείο $A(0,3)$.
Επαληθεύοντας τα σημεία στον περιορισμό έχουμε

$$5x_1 + 2x_2 = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 25 \quad \text{και} \quad 5x_1 + 2x_2 = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6$$

Άρα $b \in [6, 25]$

ΕΥΡΟΣ ΕΦΙΚΤΟΤΗΤΑΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Η εταιρία θα προσλάβει έναν υπάλληλο και θα αυξήσει τις ώρες στο παρασκευαστήριο κατά 8. Θα αλλάξει η λύση;

Υπολογίσαμε ότι $b_1 \in [6, 25]$.
Παρατηρούμε ότι το $b_1 = 15 + 8 = 23 < 25$, επομένως είναι επιτρεπτή η παραπάνω αύξηση.

- Η εταιρία θα μειώσει την προμήθεια πετρελαίου κατά 5 lit . Θα αλλάξει η λύση;

Υπολογίσαμε ότι $b_2 \in [6, 25]$.
Παρατηρούμε ότι το $b_2 = 10 - 5 = 5 < 6$, επομένως θα αλλάξει η εφικτή περιοχή και το πρόβλημα πρέπει να λυθεί ξανά.

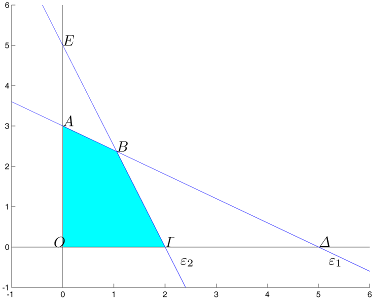
ΔΥΪΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης προς την τιμή του αντίστοιχου δεξιού μέλους.

- Η Δϋική τιμή ενός δεσμευτικού περιορισμού είναι διάφορη του μηδενός και ορίζεται το πηλίκο

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_i}$$

ΔΥΪΚΕΣ ΤΙΜΕΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$$\begin{array}{ll} max & z = 5x_1 + 3x_2 \end{array}$$

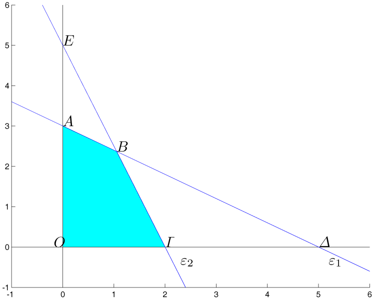
$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

Η δϋική τιμή του πρώτου περιορισμού είναι

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_1} = \frac{z(B) - z(\Gamma)}{b_1(B) - b_1(\Gamma)} = \frac{z(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}) - z(2,0)}{b_1(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}) - b_1(2,0)} =$$

$$\frac{\frac{235}{19} - 10}{15 - 6} = \frac{5}{19}$$

ΔΥΪΚΕΣ ΤΙΜΕΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$$\max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

Η δϋική τιμή του δεύτερου περιορισμού είναι

$$\frac{\Delta z}{\Delta b_2} = \frac{z(B) - z(A)}{b_2(B) - b_2(A)} = \frac{z(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}) - z(0,3)}{b_2(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}) - b_2(0,3)} =$$

$$\frac{\frac{235}{19} - 9}{10 - 6} = \frac{16}{19}$$

ΔΥΪΚΕΣ ΤΙΜΕΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Αν το κόστος του υπαλλήλου είναι 1 € την ώρα μπορεί να προσλάβει τον υπάλληλο;

Υπολογίσαμε ότι $\dfrac{\Delta z}{\Delta b_1} = \dfrac{5}{19}$. Δηλαδή, για κάθε ώρα στο παρασκευαστήριο κερδίζουμε $\dfrac{5}{19}$ €.
Επομένως, δεν προτείνεται στην εταιρία να προσλάβει τον υπάλληλο.

ΔΥΪΚΕΣ ΤΙΜΕΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Αν το κόστος για την επιπλέον προμήθεια 10 lit πετρελαίου είναι 6 € συμφέρει την εταιρία να αγοράσει το επιπλέον πετρέλαιο;

Υπολογίσαμε ότι $\frac{\Delta z}{\Delta b_2} = \frac{16}{19}$. Δηλαδή, για κάθε lit κερδίζουμε $\dfrac{16}{19}$ €. Επομένως, για 10 lit πετρελαίου η εταιρία κερδίζει $10 \cdot \dfrac{16}{19} = \dfrac{160}{19} \simeq 8.42$. Άρα, συμφέρει την εταιρία να αγοράσει το επιπλέον πετρέλαιο, με κέρδος $8.42 - 6 = 2.42$.