ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ - ΣΕΡΡΕΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Γραμμικός Προγραμματισμός & Βελτιστοποίηση

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Καθηγητής Εφαρμογών

Μάρτιος 2014

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Διδακτικά εγχειρίδια - Εύδοξος

Έντυπα εγχειρίδια (Εύδοξος)

1. Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα
   Βασιλείου Παναγιώτης - Χρήστος, Τσάντας Νίκος
2. Γραμμικός προγραμματισμός
   Κουνιάς Στρατής, Φακίνος Δημήτρης

Ηλεκτρονικά εγχειρίδια

- Προσωπική Ιστοσελίδα
- Συμπληρωματικά φυλλάδια
- E-book

- Μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα.
- Ιδιαίτερα δημοφιλής τεχνική. Μοντέλο ευρείας χρήσης για καθημερινά ζητήματα των περισσότερων μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικών και βιομηχανικών μονάδων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα.
- Ιδιαίτερα δημοφιλής τεχνική. Μοντέλο ευρείας χρήσης για καθημερινά ζητήματα των περισσότερων μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικών και βιομηχανικών μονάδων.
- Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των πεπερασμένων πόρων ενός συστήματος σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα.
- Ιδιαίτερα δημοφιλής τεχνική. Μοντέλο ευρείας χρήσης για καθημερινά ζητήματα των περισσότερων μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικών και βιομηχανικών μονάδων.
- Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των πεπερασμένων πόρων ενός συστήματος σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.
- Αναζητά μεταξύ όλων των εναλλακτικών σχεδιασμών, εκείνον (‘πρόγραμμα’) ο οποίος θα οδηγήσει στο άριστο αποτέλεσμα.

- Μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα.
- Ιδιαίτερα δημοφιλής τεχνική. Μοντέλο ευρείας χρήσης για καθημερινά ζητήματα των περισσότερων μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικών και βιομηχανικών μονάδων.
- Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των πεπερασμένων πόρων ενός συστήματος σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.
- Αναζητά μεταξύ όλων των εναλλακτικών σχεδιασμών, εκείνον (‘πρόγραμμα’) ο οποίος θα οδηγήσει στο άριστο αποτέλεσμα.
- Από μαθηματικής σκοπιάς, ο γραμμικός προγραμματισμός περιγράφει ένα μοντέλο, το οποίο αφορά τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης κάτω από κάποιους γραμμικούς περιορισμούς.

- Αν και παρόμοιες εφαρμογές είχαν μελετηθεί πριν την καθιέρωση του όρου, η συστηματική μελέτη καθώς επίσης και μια μαθηματική διαδικασία λύσης τέτοιας μορφής προβλημάτων, η μέθοδος Simplex, οφείλεται στον G.B. Dantig στα 1947, περίοδος στην οποία ήταν επικεφαλής του Air Force Statistical Control's Combat Analysis Branch στο Πεντάγωνο των Η.Π.Α.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Αν και παρόμοιες εφαρμογές είχαν μελετηθεί πριν την καθιέρωση του όρου, η συστηματική μελέτη καθώς επίσης και μια μαθηματική διαδικασία λύσης τέτοιας μορφής προβλημάτων, η μέθοδος Simplex, οφείλεται στον G.B. Dantig στα 1947, περίοδος στην οποία ήταν επικεφαλής του Air Force Statistical Control's Combat Analysis Branch στο Πεντάγωνο των Η.Π.Α.
- Το έργο στο οποίο απασχολούνταν με την ομάδα του, είχε την ονομασία SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs) και στόχευε στην εγκαθίδρυση βέλτιστων μηχανισμών εκπαίδευσης, ανάπτυξης και συντήρησης του όλου μηχανισμού. Τα σχέδια τα οποία εκπονούσαν τα αποκαλούσαν 'προγράμματα', και μπορούσαν να εκφραστούν μαθηματικά με τη βοήθεια συστημάτων γραμμικών ανισοτήτων. Εξ' ου και ο όρος 'Γραμμικός Προγραμματισμός'.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Πρόβλημα μεταφοράς (Transportation Problem) Hitchcok 1941, Koopmans 1949.
  Αναζήτηση του οικονομικότερου τρόπου διακίνησης προϊόντων από διαφορετικές πηγές-προελεύσεις (παραγωγικές μονάδες, αποθήκες, κέντρα διανομής, κτλ.) σε ορισμένους σταθμούς προορισμού (σημεία πώλησης, αποθήκες, κτλ.)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Πρόβλημα μεταφοράς (Transportation Problem) Hitchcok 1941, Koopmans 1949.
  Αναζήτηση του οικονομικότερου τρόπου διακίνησης προϊόντων από διαφορετικές πηγές-προελεύσεις (παραγωγικές μονάδες, αποθήκες, κέντρα διανομής, κτλ.) σε ορισμένους σταθμούς προορισμού (σημεία πώλησης, αποθήκες, κτλ.)
- Πρόβλημα δίαιτας (Diet Problem) Stigler 1945.
  Αναζητείται η βέλτιστη κατανομή τροφίμων ώστε να παράγεται ένα διαιτολόγιο το οποίο να πληροί συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές με το ελάχιστο κόστος.

- Επιλογή συνδυασμού παραγωγής προϊόντων (Product Mix Problem).
  Μια επιχείρηση εκμεταλλεύεται τους παραγωγικούς πόρους που έχει στη διάθεσή της για να παράγει διάφορα προϊόντα. Οι πόροι δεν είναι ανεξάντλητοι και η άριστη απόφαση εντοπίζει το πλήθος των τεμαχίων που πρέπει να κατασκευαστούν από το κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος.

- Επιλογή συνδυασμού παραγωγής προϊόντων (Product Mix Problem).
  Μια επιχείρηση εκμεταλλεύεται τους παραγωγικούς πόρους που έχει στη διάθεσή της για να παράγει διάφορα προϊόντα. Οι πόροι δεν είναι ανεξάντλητοι και η άριστη απόφαση εντοπίζει το πλήθος των τεμαχίων που πρέπει να κατασκευαστούν από το κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος.
- Το πρόβλημα μίξης υλικών (Blending Problem).
  Έχει τις ρίζες του στη βιομηχανία διύλισης όπου είναι επιθυμητό να εντοπιστεί ένα άριστο σχέδιο μίξης διαφορετικών πρώτων υλών για την παραγωγή καυσίμων με συγκεκριμένες προδιαγραφές. Το ερώτημα αφορά την εύρεση της 'συνταγής' η οποία θα δώσει το ζητούμενο μείγμα με το ελάχιστο κόστος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Επιλογή χαρτοφυλακίου (Portfolio Selection).
  Αφορά την κατάρτιση ενός βέλτιστου σχεδίου επενδύσεων σε μετοχές, ομόλογα, αμοιβαία κεφάλαια, κτλ. Το σχέδιο πρέπει να οδηγεί σε μεγάλα κέρδη ικανοποιώντας περιορισμούς που στοχεύουν στην ελαχιστοποίηση του κινδύνου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Επιλογή χαρτοφυλακίου (Portfolio Selection).
  Αφορά την κατάρτιση ενός βέλτιστου σχεδίου επενδύσεων σε μετοχές, ομόλογα, αμοιβαία κεφάλαια, κτλ. Το σχέδιο πρέπει να οδηγεί σε μεγάλα κέρδη ικανοποιώντας περιορισμούς που στοχεύουν στην ελαχιστοποίηση του κινδύνου.
- Πολυσταδιακά προβλήματα παραγωγής και διατήρησης αποθεμάτων (Production and Inventory Planning).
  Κατάρτιση ενός βέλτιστου σχεδίου παραγωγής και διατήρησης αποθεμάτων σε σχέση με τις προβλέψεις της ζήτησης, την παραγωγική δυναμικότητα, τους αποθηκευτικούς χώρους, κτλ. Η επιχείρηση θα πρέπει να είναι σε θέση να καλύψει τη ζήτηση για τα προϊόντα της για τις επόμενες περιόδους με το ελάχιστο κόστος παραγωγής, διατήρησης αποθεμάτων κτλ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Κατάρτιση διαφημιστικών σχεδίων (Media Selection).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Κατάρτιση διαφημιστικών σχεδίων (Media Selection).
- Καταμερισμός εργασίας (Assignment Problem).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Κατάρτιση διαφημιστικών σχεδίων (Media Selection).
- Καταμερισμός εργασίας (Assignment Problem).
- The Make-or-Buy Problem .

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Κατάρτιση διαφημιστικών σχεδίων (Media Selection).
- Καταμερισμός εργασίας (Assignment Problem).
- The Make-or-Buy Problem .
- Σχεδίαση Παραγωγικών Μονάδων.

- Κατάρτιση διαφημιστικών σχεδίων (Media Selection).
- Καταμερισμός εργασίας (Assignment Problem).
- The Make-or-Buy Problem .
- Σχεδίαση Παραγωγικών Μονάδων.
- Επιλογή Τοποθεσίας Εγκατάστασης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Κατάρτιση διαφημιστικών σχεδίων (Media Selection).
- Καταμερισμός εργασίας (Assignment Problem).
- The Make-or-Buy Problem .
- Σχεδίαση Παραγωγικών Μονάδων.
- Επιλογή Τοποθεσίας Εγκατάστασης.
- Δρομολόγηση μεταφορικών μέσων (λεωφορεία, αεροπλάνα).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- Κατάρτιση διαφημιστικών σχεδίων (Media Selection).
- Καταμερισμός εργασίας (Assignment Problem).
- The Make-or-Buy Problem .
- Σχεδίαση Παραγωγικών Μονάδων.
- Επιλογή Τοποθεσίας Εγκατάστασης.
- Δρομολόγηση μεταφορικών μέσων (λεωφορεία, αεροπλάνα).
- Προβλήματα ροής σε δίκτυα.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) όταν

- Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) όταν
  - Αφορά την μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης των αγνώστων (μεταβλητών). Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) όταν
  - Αφορά την μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης των αγνώστων (μεταβλητών). Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση.
  - Οι τιμές των αγνώστων (μεταβλητών) ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών. Κάθε περιορισμός πρέπει να είναι μια γραμμική εξίσωση ή ανίσωση.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

- Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) όταν
  - Αφορά την μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης των αγνώστων (μεταβλητών). Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση.
  - Οι τιμές των αγνώστων (μεταβλητών) ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών. Κάθε περιορισμός πρέπει να είναι μια γραμμική εξίσωση ή ανίσωση.
  - Κάθε μεταβλητή είναι μη αρνητική ή δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο.

Η αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad \text{ή} \quad \min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\{\leq, =, \geq\}b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\{\leq, =, \geq\}b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\{\leq, =, \geq\}b_m \end{gathered}$$

με

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

Μια πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto f(x)$$

είναι γραμμική αν και μόνον αν για κάποιο σύνολο πραγματικών σταθερών αριθμών

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

ισχύει:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΛΥΣΕΙΣ

- Κάθε συνδυασμός τιμών $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ των μεταβλητών απόφασης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ονομάζεται λύση του προβλήματος.

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΛΥΣΕΙΣ

- Κάθε συνδυασμός τιμών $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ των μεταβλητών απόφασης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ονομάζεται λύση του προβλήματος.
- Το υποσύνολο $\mathbb{F}$ του $\mathbb{R}^n$ που σχηματίζεται από τα σημεία – λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ονομάζεται εφικτή περιοχή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, τα δε σημεία $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ εφικτές λύσεις.

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΛΥΣΕΙΣ

- Κάθε συνδυασμός τιμών $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ των μεταβλητών απόφασης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ονομάζεται λύση του προβλήματος.
- Το υποσύνολο $\mathbb{F}$ του $\mathbb{R}^n$ που σχηματίζεται από τα σημεία – λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ονομάζεται εφικτή περιοχή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, τα δε σημεία $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ εφικτές λύσεις.
- Μια λύση, που παραβιάζει τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς, ονομάζεται μη-εφικτή λύση και δεν είναι σημείο της εφικτής περιοχής του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ

- Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης άριστη ή βέλτιστη λύση ονομάζεται κάθε εφικτή λύση, η οποία μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση

$$x^* \in \mathbb{F} : f\left(x^*\right) \geq f\left(x\right) \ \forall x \in \mathbb{F}$$

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ

- Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης άριστη ή βέλτιστη λύση ονομάζεται κάθε εφικτή λύση, η οποία μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση

$$x^* \in \mathbb{F} : f(x^*) \geq f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{F}$$

- Όμοια σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης θα είχαμε:

$$x^* \in \mathbb{F} : f(x^*) \leq f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{F}$$

- Λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα ονομάζεται κάθε σύνολο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ το οποίο ικανοποιεί τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς του προβλήματος.

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΣΥΝΟΨΗ

- Λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα ονομάζεται κάθε σύνολο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ το οποίο ικανοποιεί τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς του προβλήματος.
- Εφικτή ή δυνατή λύση είναι κάθε λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΣΥΝΟΨΗ

- Λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα ονομάζεται κάθε σύνολο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ το οποίο ικανοποιεί τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς του προβλήματος.
- Εφικτή ή δυνατή λύση είναι κάθε λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.
- Βέλτιστη λύση είναι κάθε εφικτή λύση η οποία βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΣΥΝΟΨΗ

- Λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα ονομάζεται κάθε σύνολο $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ το οποίο ικανοποιεί τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς του προβλήματος.
- Εφικτή ή δυνατή λύση είναι κάθε λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.
- Βέλτιστη λύση είναι κάθε εφικτή λύση η οποία βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.
- Συνήθως σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού υπάρχουν άπειρες λύσεις και επιδιώκουμε την εύρεση της βέλτιστης δυνατής λύσης.

- Έχοντας εξετάσει κάποιες περιπτώσεις όπου είναι δυνατό να εφαρμοστεί ο γραμμικός προγραμματισμός και τη γενική διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις απαιτούμενες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του σε ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποιήσεως. Αυτές είναι που περιορίζουν γενικά το φάσμα των δυνατοτήτων εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι οι εξής:

ΑΡΧΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

- Έχοντας εξετάσει κάποιες περιπτώσεις όπου είναι δυνατό να εφαρμοστεί ο γραμμικός προγραμματισμός και τη γενική διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις απαιτούμενες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του σε ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποιήσεως. Αυτές είναι που περιορίζουν γενικά το φάσμα των δυνατοτήτων εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι οι εξής:
    - Γραμμικότητα (Αναλογικότητα και Προσθετικότητα).

- Έχοντας εξετάσει κάποιες περιπτώσεις όπου είναι δυνατό να εφαρμοστεί ο γραμμικός προγραμματισμός και τη γενική διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις απαιτούμενες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του σε ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποιήσεως. Αυτές είναι που περιορίζουν γενικά το φάσμα των δυνατοτήτων εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι οι εξής:
  - Γραμμικότητα (Αναλογικότητα και Προσθετικότητα).
  - Διαιρετότητα.

- Έχοντας εξετάσει κάποιες περιπτώσεις όπου είναι δυνατό να εφαρμοστεί ο γραμμικός προγραμματισμός και τη γενική διατύπωση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι σημαντικό να εξετάσουμε τις απαιτούμενες προϋποθέσεις για την εφαρμογή του σε ένα οποιοδήποτε πρόβλημα βελτιστοποιήσεως. Αυτές είναι που περιορίζουν γενικά το φάσμα των δυνατοτήτων εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι οι εξής:
    - Γραμμικότητα (Αναλογικότητα και Προσθετικότητα).
    - Διαιρετότητα.
    - Βεβαιότητα (Προσδιοριστικότητα).

Γραμμικότητα (Αναλογικότητα και Προσθετικότητα)

- Όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος, αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας.

Γραμμικότητα (Αναλογικότητα και Προσθετικότητα)

- Όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος, αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί πρέπει να είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες της αναλογικότητας και της προσθετικότητας.
- Σε πολλές περιπτώσεις στις οποίες δεν ισχύει απόλυτα η προϋπόθεση της γραμμικότητας μπορεί να γίνει μια αρκετά καλή προσέγγιση με γραμμικές συναρτήσεις.

Διαιρετότητα

- Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού υποθέτει ότι κάθε δραστηριότητα (δηλ μεταβλητή) είναι συνεχής και επομένως άπειρα διαιρετή. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές. Όταν η υπόθεση της διαιρετότητας δεν ισχύει υπάρχουν δύο ενδεχόμενα :

Διαιρετότητα

- Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού υποθέτει ότι κάθε δραστηριότητα (δηλ μεταβλητή) είναι συνεχής και επομένως άπειρα διαιρετή. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές. Όταν η υπόθεση της διαιρετότητας δεν ισχύει υπάρχουν δύο ενδεχόμενα :
  - Να αγνοηθεί η υπόθεση αυτή, να λυθεί το πρόβλημα με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού, και οι τιμές των μεταβλητών να στρογγυλευθούν στην κοντινότερη ακέραια μονάδα. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μεγάλες.

Διαιρετότητα

- Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού υποθέτει ότι κάθε δραστηριότητα (δηλ μεταβλητή) είναι συνεχής και επομένως άπειρα διαιρετή. Αυτό συνεπάγεται ότι όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές. Όταν η υπόθεση της διαιρετότητας δεν ισχύει υπάρχουν δύο ενδεχόμενα :
  - Να αγνοηθεί η υπόθεση αυτή, να λυθεί το πρόβλημα με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού, και οι τιμές των μεταβλητών να στρογγυλευθούν στην κοντινότερη ακέραια μονάδα. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μεγάλες.
  - Όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι μικρές (π.χ. 0 ή 1) όπως σε πολλά προβλήματα επενδύσεων τότε πρέπει να χρησιμοποιηθούν τεχνικές του ακέραιου προγραμματισμού.

Βεβαιότητα (Προσδιοριστικότητα)

- Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού. προϋποθέτει ότι όλοι οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα.

Βεβαιότητα (Προσδιοριστικότητα)

- Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού. προϋποθέτει ότι όλοι οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα.
- Στην περίπτωση που μερικοί ή όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ή των περιορισμών είναι τυχαίες μεταβλητές το πρόβλημα γίνεται πρόβλημα στοχαστικού προγραμματισμού.

- Για να διαμορφώσουμε το μαθηματικό πρότυπο (μοντέλο) ενός προβλήματος θα πρέπει να ορίσουμε:

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

- Για να διαμορφώσουμε το μαθηματικό πρότυπο (μοντέλο) ενός προβλήματος θα πρέπει να ορίσουμε:
    - τις μεταβλητές (αγνώστους) του προβλήματος

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

- Για να διαμορφώσουμε το μαθηματικό πρότυπο (μοντέλο) ενός προβλήματος θα πρέπει να ορίσουμε:
    - τις μεταβλητές (αγνώστους) του προβλήματος
    - έναν αντικειμενικό στόχο που θα πρέπει να επιτευχθεί

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

- Για να διαμορφώσουμε το μαθηματικό πρότυπο (μοντέλο) ενός προβλήματος θα πρέπει να ορίσουμε:
  - τις μεταβλητές (αγνώστους) του προβλήματος
  - έναν αντικειμενικό στόχο που θα πρέπει να επιτευχθεί
  - τους περιορισμούς που θα πρέπει να ενσωματώσουμε στις μεταβλητές ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του προβλήματος.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μια από τις εταιρείες γάλακτος στην προσπάθειά της να διεισδύσει στην αγορά του παγωτού πολυτελείας επενδύει σε μια μικρή πιλοτική γραμμή παραγωγής δύο προϊόντων της κατηγορίας αυτής. Πρόκειται για οικογενειακές συσκευασίες παγωτού κρέμας με άρωμα πραγματικής βανίλιας (προϊόν Α) και παγωτού με πραγματική σοκολάτα (προϊόν Β). Αν και είναι φανερό ότι η παραγωγική διαδικασία είναι αρκετά πολύπλοκη, θα θεωρήσουμε εδώ ότι για την παραγωγή αυτών των προϊόντων η εταιρεία δεσμεύει ανά εβδομάδα ένα μικρό μέρος των παραγωγικών της συντελεστών: γάλα (βασική πρώτη ύλη), εργασία (παραλαβή πρώτων υλών, ποιοτικός έλεγχος, συσκευασία, διανομή, κτλ.), καθώς επίσης και διαθεσιμότητα στη μονάδας παστερίωσης και ψύξης.

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τα δεδομένα του προβλήματος που έχουν προσδιοριστεί και αφορούν την παραγωγή ενός τεμαχίου του κάθε προϊόντος:

	Προϊόν A	Προϊόν B	Διαθεσιμότητα
Γάλα (*lit*)	1	1	550
Εργασία (*min*)	1	3	1000
Επεξεργασία (*min*)	2	5	2000
Μέγιστη ζήτηση	400	απεριόριστη	
Κέρδος/τεμάχιο	150 χ.μ.	200 χ.μ.	

Αναζητάμε το εβδομαδιαίο πρόγραμμα παραγωγής που θα μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- **Μεταβλητές απόφασης**

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- **Μεταβλητές απόφασης**
  - x_1 τα τεμάχια του προϊόντος Α που παράγονται εβδομαδιαία

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- **Μεταβλητές απόφασης**
  - x_1 τα τεμάχια του προϊόντος Α που παράγονται εβδομαδιαία
  - x_2 τα τεμάχια του προϊόντος Β που παράγονται εβδομαδιαία

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- **Μεταβλητές απόφασης**
  - x_1 τα τεμάχια του προϊόντος Α που παράγονται εβδομαδιαία
  - x_2 τα τεμάχια του προϊόντος Β που παράγονται εβδομαδιαία
- **Η αντικειμενική συνάρτηση**

- **Μεταβλητές απόφασης**
  - x_1 τα τεμάχια του προϊόντος Α που παράγονται εβδομαδιαία
  - x_2 τα τεμάχια του προϊόντος Β που παράγονται εβδομαδιαία
- **Η αντικειμενική συνάρτηση**
  - Η μεγιστοποίηση του συνολικού εβδομαδιαίου κέρδους από την πώληση των δύο προϊόντων παγωτού, προκύπτει ως το άθροισμα των επί μέρους κερδών:
    Εβδομαδιαίο Συνολικό Κέρδος $=$ Εβδ. Κέρδος Α $+$ Εβδ. Κέρδος Β $=$ (κέρδος/τεμάχιο Α) $*$ (τεμάχια Α) $+$ (κέρδος/τεμάχιο Β) $*$ (τεμάχια Β) $= 150x_1 + 200x_2$(χ.μ.)

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- **Οι περιορισμοί του προβλήματος**

- **Οι περιορισμοί του προβλήματος**
  - (εβδ_καταν_γάλακτος) $\leq$ (διαθ_ποσότ_γάλακτος_εβδ) $\Rightarrow$

    (εβδ_καταν_γάλακτος για παγ_βανίλιας) + (εβδ_καταν_γάλακτος για παγ_σοκολ) $\leq$ (διαθ_ποσότ_γάλακτος_εβδ) $\Rightarrow$

    (γάλα/τεμάχιο παγ_βανίλιας) * (τεμάχια παγ_βανίλιας) + (γάλα/τεμάχιο παγ_σοκολ) * (τεμάχια παγ_σοκολ) $\leq$ (διαθ_ποσότ_γάλακτος_εβδ) $\Rightarrow$

    $1x_1 + 1x_2 \leq 550$ (lit)

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- **Οι περιορισμοί του προβλήματος**

- **Οι περιορισμοί του προβλήματος**
  - (εβδ_ανάγκη_εργασίας) $\leq$ (διαθ_εργασία_εβδ) $\Rightarrow$

    $1x_1 + 3x_2 \leq 1000$ (min)

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- **Οι περιορισμοί του προβλήματος**
  - (εβδ_ανάγκη_εργασίας) $\leq$ (διαθ_εργασία_εβδ) $\Rightarrow$

    $1x_1 + 3x_2 \leq 1000 \ (min)$
  - (εβδ_ανάγκη_δυναμικ) $\leq$ (διαθ_δυναμ_εβδ) $\Rightarrow$

    $2x_1 + 5x_2 \leq 2000 \ (min)$

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- **Οι περιορισμοί του προβλήματος**
  - (εβδ_ανάγκη_εργασίας) $\leq$ (διαθ_εργασία_εβδ) $\Rightarrow$

    $1x_1 + 3x_2 \leq 1000$ (min)
  - (εβδ_ανάγκη_δυναμικ) $\leq$ (διαθ_δυναμ_εβδ) $\Rightarrow$

    $2x_1 + 5x_2 \leq 2000$ (min)
  - (εβδ_παραγωγή_παγωτ_βανίλιας) $\leq$ (εβδ_απορροφητ) $\Rightarrow$

    $x_1 \leq 400$

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- **Οι περιορισμοί του προβλήματος**
  - (εβδ_ανάγκη_εργασίας) $\leq$ (διαθ_εργασία_εβδ) $\Rightarrow$

    $1x_1 + 3x_2 \leq 1000$ (min)
  - (εβδ_ανάγκη_δυναμικ) $\leq$ (διαθ_δυναμ_εβδ) $\Rightarrow$

    $2x_1 + 5x_2 \leq 2000$ (min)
  - (εβδ_παραγωγή_παγωτ_βανίλιας) $\leq$ (εβδ_απορροφητ) $\Rightarrow$

    $x_1 \leq 400$
  - Επιπλέον, (Λογικοί) Περιορισμοί Μη Αρνητικότητας $x_1, x_2 \geq 0$

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ανακεφαλαιώνοντας το μαθηματικό πρότυπο για το πρόβλημα της εταιρείας είναι το εξής:

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$

με περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcrc}
x_1 & + & x_2 & \leq & 550 & \text{(διαθέσιμο γάλα } lit\text{)} \\
x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1000 & \text{(χρόνος εργασίας } min\text{)} \\
2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 2000 & \text{(διαθεσιμότητα μονάδων } min\text{)} \\
x_1 & & & \leq & 400 & \text{(ζήτηση αγοράς)}
\end{array}$$

με $x_1, x_2 \geq 0$.

- **Είναι π.γ.π. διότι**

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ανακεφαλαιώνοντας το μαθηματικό πρότυπο για το πρόβλημα της εταιρείας είναι το εξής:

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$

με περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcrc}
x_1 & + & x_2 & \leq & 550 & (\text{διαθέσιμο γάλα } lit) \\
x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1000 & (\text{χρόνος εργασίας } min) \\
2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 2000 & (\text{διαθεσιμότητα μονάδων } min) \\
x_1 & & & \leq & 400 & (\text{ζήτηση αγοράς})
\end{array}$$

με $x_1, x_2 \geq 0$.

- **Είναι π.γ.π. διότι**
  - ο αντικειμενικός στόχος είναι μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ανακεφαλαιώνοντας το μαθηματικό πρότυπο για το πρόβλημα της εταιρείας είναι το εξής:

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$

με περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcrl}
x_1 & + & x_2 & \leq & 550 & \text{(διαθέσιμο γάλα } lit\text{)} \\
x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1000 & \text{(χρόνος εργασίας } min\text{)} \\
2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 2000 & \text{(διαθεσιμότητα μονάδων } min\text{)} \\
x_1 & & & \leq & 400 & \text{(ζήτηση αγοράς)}
\end{array}$$

με $x_1, x_2 \geq 0$.

- **Είναι π.γ.π. διότι**
  - ο αντικειμενικός στόχος είναι μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών απόφασης.
  - οι περιορισμοί είναι ένα σύστημα γραμμικών ανισοτήτων των μεταβλητών απόφασης.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΑΣΚΗΣΗ

Η μικρή εταιρεία ξύλινων παιχνιδιών «ΞΥΛΑΞ» παράγει αποκλειστικά στρατιωτάκια και τρενάκια. Ένα στρατιωτάκι για να κατασκευαστεί χρειάζεται μία ώρα ξυλουργική εργασία και δύο ώρες βάψιμο, με κόστος 1000 δρχ. σε πρώτες ύλες και 1400 δρχ. σε εργατικά. Αντίστοιχα, για ένα τρενάκι χρειάζονται μία ώρα ξυλουργική εργασία και μία ώρα βάψιμο, ενώ το κόστος ανέρχεται σε 900 δρχ. για πρώτες ύλες και 1000 δρχ. για εργατικά.
Μια πρόχειρη οικονομοτεχνική μελέτη που έγινε στην «ΞΥΛΑΞ», έδειξε ότι εβδομαδιαία υπάρχουν διαθέσιμες 80 ώρες ξυλουργικής εργασίας και 100 ώρες για βάψιμο, ενώ η αγορά μπορεί να απορροφήσει όσα τρενάκια κι αν παρασκευαστούν αλλά μόνο 45 στρατιωτάκια.
Αν τα έσοδα από κάθε στρατιωτάκι ανέρχονται στις 2700 δρχ. κι από κάθε τρενάκι στις 2100 δρχ. προσδιορίστε την εβδομαδιαία παραγωγή η οποία μεγιστοποιεί το κέρδος της «ΞΥΛΑΞ».

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΑΣΚΗΣΗ - ΛΥΣΗ

Το μαθηματικό πρότυπο για το πρόβλημα της εταιρείας είναι το εξής:

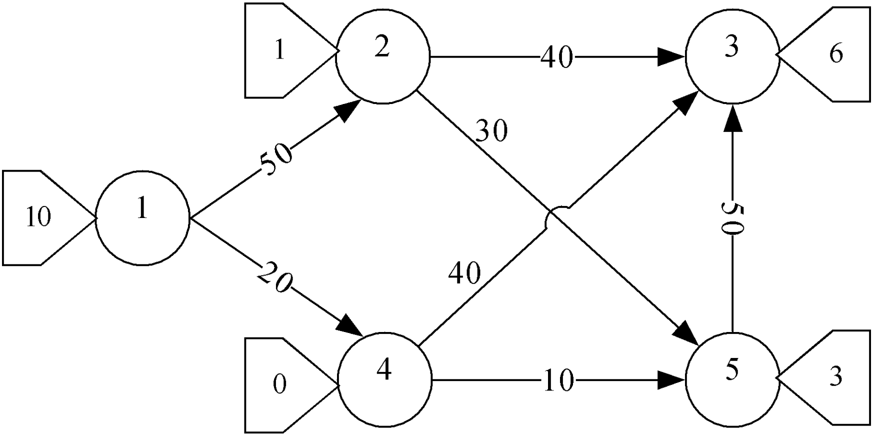
$$\max \quad z = 300x_1 + 200x_2$$

με περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcrc} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 100 & \text{(διαθέσιμες ώρες βαφίματος)} \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 80 & \text{(διαθέσιμες ώρες ξυλουργικής εργασίας)} \\ x_1 & & & \leq & 45 & \text{(απορρόφηση αγοράς σε στρατιωτάκια)} \end{array}$$

με $x_1, x_2 \geq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ Transportation Problem



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ Assignment Problem

Ένας προπονητής κολύμβησης πρέπει να επιλέξει τους 4 αθλητές που θα αγωνιστούν στη σκυταλοδρομία 4×100 μικτή. Οι χρόνοι των αθλητών δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αθλητές	Ελεύθερο	Ύπτιο	Πρόσθιο	Πεταλούδα
Α	61	63	57	58
Β	58	65	59	60
Γ	53	61	56	56
Δ	54	57	61	55

Υποδείξτε ένα ΠΓΠ για την εύρεση της ομάδας που ελαχιστοποιεί τον χρόνο.

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΑΣΚΗΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Cutting stock problem – Bin packing problem
Να μοιραστούν οι παρακάτω ποσότητες

$$4, 1, 2, 5, 3, 2, 3, 6, 3$$

σε «κουβάδες» (*Bins*) με χωρητικότητα 6 έτσι ώστε να έχουμε την λιγότερη δυνατή φύρα.