Τεχνολογικο Εκπαιδευτικο Ιδρυμα Κεντρικης Μακεδονιας - Σερρες
Τμημα Μηχανικων Πληροφορικης

Γραμμικός Προγραμματισμός & Βελτιστοποίηση

Δρ. Δημήτρης Βαρσάμης
Καθηγητής Εφαρμογών

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ

- Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν 2 ή 3 μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν και γραφικά. Προβλήματα με δυο μεταβλητές υλοποιούνται στο επίπεδο (δυο διαστάσεις), ενώ προβλήματα με τρεις μεταβλητές υλοποιούνται στον χώρο (τρεις διαστάσεις).

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ

- Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν 2 ή 3 μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν και γραφικά. Προβλήματα με δυο μεταβλητές υλοποιούνται στο επίπεδο (δυο διαστάσεις), ενώ προβλήματα με τρεις μεταβλητές υλοποιούνται στον χώρο (τρεις διαστάσεις).
- Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ

- Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν 2 ή 3 μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν και γραφικά. Προβλήματα με δυο μεταβλητές υλοποιούνται στο επίπεδο (δυο διαστάσεις), ενώ προβλήματα με τρεις μεταβλητές υλοποιούνται στον χώρο (τρεις διαστάσεις).
- Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:
    1. σχεδιασμός όλων των περιορισμών γραφικά

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ

- Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν 2 ή 3 μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν και γραφικά. Προβλήματα με δυο μεταβλητές υλοποιούνται στο επίπεδο (δυο διαστάσεις), ενώ προβλήματα με τρεις μεταβλητές υλοποιούνται στον χώρο (τρεις διαστάσεις).
- Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:
  1. σχεδιασμός όλων των περιορισμών γραφικά
  2. εύρεση εφικτής περιοχής

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ

- Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που έχουν 2 ή 3 μεταβλητές απόφασης, μπορούν να λυθούν και γραφικά. Προβλήματα με δυο μεταβλητές υλοποιούνται στο επίπεδο (δυο διαστάσεις), ενώ προβλήματα με τρεις μεταβλητές υλοποιούνται στον χώρο (τρεις διαστάσεις).
- Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:
  1. σχεδιασμός όλων των περιορισμών γραφικά
  2. εύρεση εφικτής περιοχής
  3. εύρεση άριστης ή βέλτιστης λύσης

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ

- Το τελευταίο βήμα υλοποιείται με δυο τρόπους προσέγγισης της επίλυσης.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ

- Το τελευταίο βήμα υλοποιείται με δυο τρόπους προσέγγισης της επίλυσης.
  1. Ο πρώτος τρόπος είναι η προσέγγιση της απαρίθμησης και ελέγχου όλων των ακραίων σημείων (κορυφών) της εφικτής περιοχής. Εντοπίζουμε τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής και επιλέγουμε εκείνη που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ

- Το τελευταίο βήμα υλοποιείται με δυο τρόπους προσέγγισης της επίλυσης.
    1. Ο πρώτος τρόπος είναι η προσέγγιση της απαρίθμησης και ελέγχου όλων των ακραίων σημείων (κορυφών) της εφικτής περιοχής. Εντοπίζουμε τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής και επιλέγουμε εκείνη που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.
    2. Ο δεύτερος τρόπος είναι η προσέγγιση της χάραξης των καμπύλων ίσου κέρδους (ή κόστους) της αντικειμενικής συνάρτησης. Βρίσκουμε το σημείο όπου η ισοκερδής εφάπτεται της εφικτής περιοχής πριν την εγκαταλείψει.

- **Περιοριστική ευθεία** είναι η ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιο περιορισμό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Περιοριστική ευθεία** είναι η ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιο περιορισμό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
- **Κορυφή** ή **ακραίο σημείο** είναι το σημείο που τέμνονται δυο περιοριστικές ευθείες.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Περιοριστική ευθεία** είναι η ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιο περιορισμό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
- **Κορυφή** ή **ακραίο σημείο** είναι το σημείο που τέμνονται δυο περιοριστικές ευθείες.
- **Εφικτή περιοχή** είναι η κυρτή περιοχή των εφικτών λύσεων που σχηματίζεται από τις περιοριστικές ευθείες.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Περιοριστική ευθεία** είναι η ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιο περιορισμό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
- **Κορυφή** ή **ακραίο σημείο** είναι το σημείο που τέμνονται δυο περιοριστικές ευθείες.
- **Εφικτή περιοχή** είναι η κυρτή περιοχή των εφικτών λύσεων που σχηματίζεται από τις περιοριστικές ευθείες.
- **Εφικτή λύση** (ακραίου σημείου) είναι μια κορυφή της εφικτής περιοχής.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Περιοριστική ευθεία** είναι η ευθεία που αντιστοιχεί σε κάποιο περιορισμό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
- **Κορυφή** ή **ακραίο σημείο** είναι το σημείο που τέμνονται δυο περιοριστικές ευθείες.
- **Εφικτή περιοχή** είναι η κυρτή περιοχή των εφικτών λύσεων που σχηματίζεται από τις περιοριστικές ευθείες.
- **Εφικτή λύση** (ακραίου σημείου) είναι μια κορυφή της εφικτής περιοχής.
- **Γειτονικές εφικτές λύσεις** (ακραίου σημείου) είναι αυτές που συνδέονται με μια ακμή (σύνορο) της εφικτής περιοχής.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Βασική λύση** (λύση ακραίου σημείου) είναι μια λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Βασική λύση** (λύση ακραίου σημείου) είναι μια λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή.
- **Βασική εφικτή λύση** είναι μια βασική λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή της εφικτής περιοχής.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Βασική λύση** (λύση ακραίου σημείου) είναι μια λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή.
- **Βασική εφικτή λύση** είναι μια βασική λύση που αντιστοιχεί σε κορυφή της εφικτής περιοχής.
- **Άριστη (βέλτιστη) λύση** είναι η βασική εφικτή λύση ακραίου σημείου (κορυφή της εφικτής περιοχής) που μας δίνει τη βέλτιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Δύναται να είναι ακριβώς μια, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις με άπειρες άριστες λύσεις, καμία άριστη λύση, ή η αντικειμενική συνάρτηση να τείνει στο άπειρο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Δίνεται το Π.Γ.Π. με αντικειμενική συνάρτηση

$$\max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:
  1. σχεδιασμός όλων των περιορισμών γραφικά

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:
  1. σχεδιασμός όλων των περιορισμών γραφικά
  2. εύρεση εφικτής περιοχής

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- Για να φτάσουμε στην λύση του προβλήματος γραφικά, πρέπει να εκτελέσουμε τα παρακάτω βήματα:
  1. σχεδιασμός όλων των περιορισμών γραφικά
  2. εύρεση εφικτής περιοχής
  3. εύρεση άριστης ή βέλτιστης λύσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία που τέμνουν οι ευθείες τους άξονες

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία που τέμνουν οι ευθείες τους άξονες
- Ο πρώτος περιορισμός αντιστοιχεί στην ευθεία
  $\varepsilon_1 : 3x_1 + 5x_2 = 15$.
  Για $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$ και για $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$ (Σημεία τομής με τους άξονες).
  Επομένως η ε_1 διέρχεται από τα σημεία $(0, 3)$ και $(5, 0)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία που τέμνουν οι ευθείες τους άξονες
- Ο πρώτος περιορισμός αντιστοιχεί στην ευθεία $\varepsilon_1 : 3x_1 + 5x_2 = 15$.
  Για $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$ και για $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$ (Σημεία τομής με τους άξονες).
  Επομένως η ε_1 διέρχεται από τα σημεία $(0, 3)$ και $(5, 0)$.
- Ο δεύτερος περιορισμός αντιστοιχεί στην ευθεία $\varepsilon_2 : 5x_1 + 2x_2 = 10$.
  Για $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$ και για $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ (Σημεία τομής με τους άξονες).
  Επομένως η ε_2 διέρχεται από τα σημεία $(0, 5)$ και $(2, 0)$.

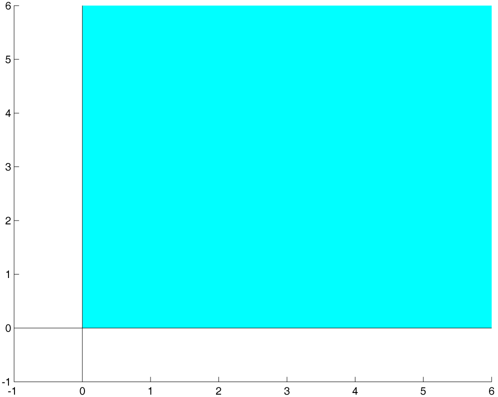
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- Έπειτα σχεδιάζουμε τους περιορισμούς σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

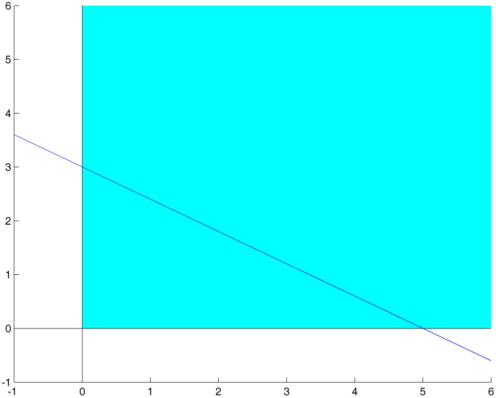
- Έπειτα σχεδιάζουμε τους περιορισμούς σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων
- Κάθε περιορισμός (ανισότητα) παριστάνει γεωμετρικά ένα ημιεπίπεδο. Τα σημεία του ημιεπιπέδου πρέπει να επαληθεύουν την ανισότητα.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ



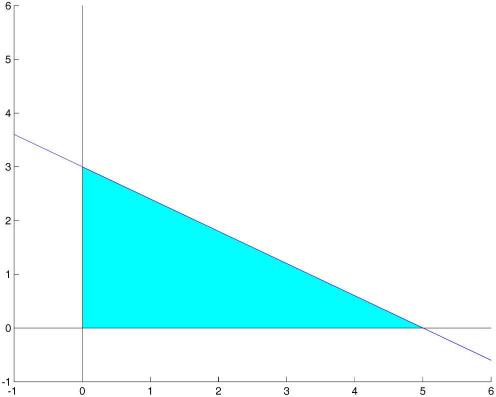
Αρχικά περιοριζόμαστε στο πρώτο τεταρτημόριο από τους περιορισμούς $x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ



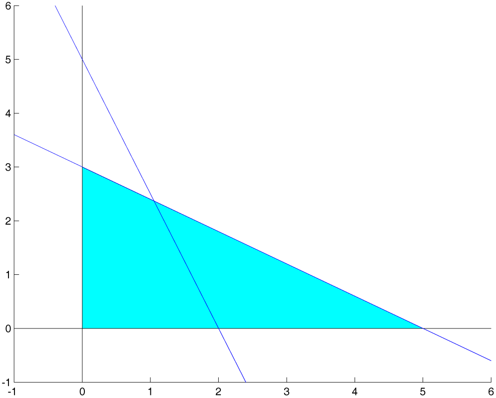
Έπειτα, σχεδιάζουμε τον περιορισμό (ευθεία) $\varepsilon_1 : 3x_1 + 5x_2 = 15$.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ



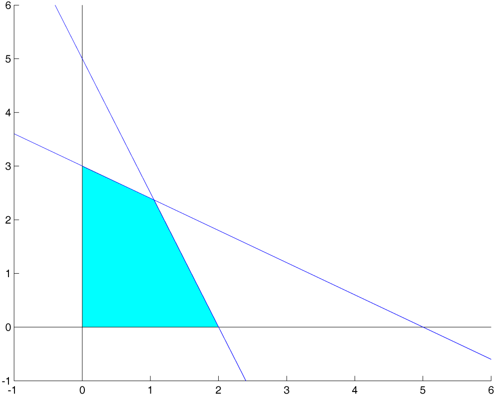
Επιλέγουμε την προσωρινή εφικτή περιοχή που ορίζεται από τους περιορισμούς $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ και $3x_1 + 5x_2 \leq 15$.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ



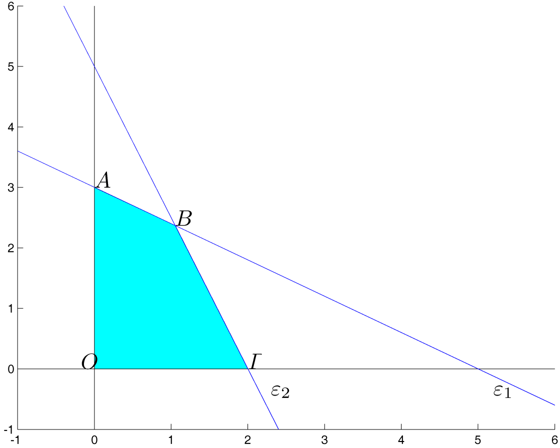
Έπειτα, σχεδιάζουμε τον περιορισμό (ευθεία) $\varepsilon_2 : 5x_1 + 2x_2 = 10$.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ



Επιλέγουμε την τελική εφικτή περιοχή που ορίζεται από τους περιορισμούς $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $3x_1 + 5x_2 \leq 15$ και $5x_1 + 2x_2 \leq 10$.

ΕΥΡΕΣΗ ΕΦΙΚΤΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ



ΕΥΡΕΣΗ ΕΦΙΚΤΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ

- Η εφικτή περιοχή είναι το κυρτό πολύγωνο ΟΑΒΓ με σημεία:

$$O(0,0),\ A(0,3),\ B\left(\frac{20}{19},\frac{45}{19}\right),\ \Gamma(2,0)$$

ΕΥΡΕΣΗ ΕΦΙΚΤΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ

- Η εφικτή περιοχή είναι το κυρτό πολύγωνο ΟΑΒΓ με σημεία:

$$O(0,0),\ A(0,3),\ B\left(\frac{20}{19},\frac{45}{19}\right),\ \Gamma(2,0)$$

- Τα σημεία O, A και Γ είναι γνωστά από τον σχεδιασμό των περιορισμών.

ΕΥΡΕΣΗ ΕΦΙΚΤΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ

- Η εφικτή περιοχή είναι το κυρτό πολύγωνο ΟΑΒΓ με σημεία:

$$O(0,0),\ A(0,3),\ B\left(\frac{20}{19},\frac{45}{19}\right),\ \Gamma(2,0)$$

- Τα σημεία O, A και Γ είναι γνωστά από τον σχεδιασμό των περιορισμών.
- Το σημείο B είναι σημείο τομής των δυο ευθειών ε_1 και ε_2.

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 1ος ΤΡΟΠΟΣ

- Για κάθε ακραίο σημείο της εφικτής περιοχής υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 5x_1 + 3x_2$.

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 1ος ΤΡΟΠΟΣ

- Για κάθε ακραίο σημείο της εφικτής περιοχής υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 5x_1 + 3x_2$.
  - $z(O) = z(0,0) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 1ος ΤΡΟΠΟΣ

- Για κάθε ακραίο σημείο της εφικτής περιοχής υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 5x_1 + 3x_2$.
  - $z(O) = z(0,0) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$
  - $z(A) = z(0,3) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 1ος ΤΡΟΠΟΣ

- Για κάθε ακραίο σημείο της εφικτής περιοχής υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 5x_1 + 3x_2$.
  - $z(O) = z(0,0) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$
  - $z(A) = z(0,3) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$
  - $z(B) = z\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right) = 5 \cdot \frac{20}{19} + 3 \cdot \frac{45}{19} = \frac{235}{19} = 12.36$

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 1ος ΤΡΟΠΟΣ

- Για κάθε ακραίο σημείο της εφικτής περιοχής υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 5x_1 + 3x_2$.
  - $z(O) = z(0,0) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$
  - $z(A) = z(0,3) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$
  - $z(B) = z\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right) = 5 \cdot \frac{20}{19} + 3 \cdot \frac{45}{19} = \frac{235}{19} = 12.36$
  - $z(\Gamma) = z(2,0) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 10$

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 1ος ΤΡΟΠΟΣ

- Για κάθε ακραίο σημείο της εφικτής περιοχής υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 5x_1 + 3x_2$.
  - $z(O) = z(0,0) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$
  - $z(A) = z(0,3) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$
  - $z(B) = z\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right) = 5 \cdot \frac{20}{19} + 3 \cdot \frac{45}{19} = \frac{235}{19} = 12.36$
  - $z(\Gamma) = z(2,0) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 10$
- Επομένως, η λύση του προβλήματος είναι το σημείο B, δηλαδή, $x_1 = \frac{20}{19}$ και $x_2 = \frac{45}{19}$ με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = \frac{235}{19}$

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 2ος ΤΡΟΠΟΣ

- Σχεδιάζουμε μια ευθεία ίσου κέρδους (ή κόστους) της αντικειμενικής συνάρτησης.

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 2ος ΤΡΟΠΟΣ

- Σχεδιάζουμε μια ευθεία ίσου κέρδους (ή κόστους) της αντικειμενικής συνάρτησης.
    - Θεωρούμε την αντικειμενική συνάρτηση ίση με μια αυθαίρετη τιμή, για παράδειγμα $z = 15$.

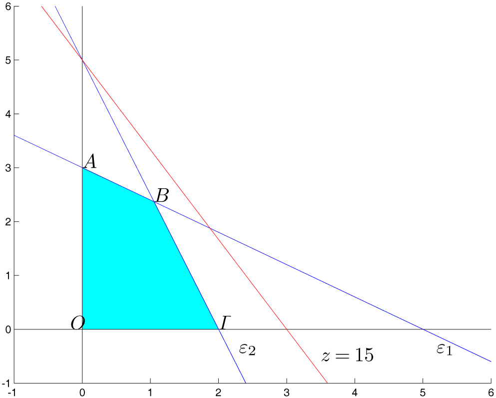
ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 2ος ΤΡΟΠΟΣ

- Σχεδιάζουμε μια ευθεία ίσου κέρδους (ή κόστους) της αντικειμενικής συνάρτησης.
  - Θεωρούμε την αντικειμενική συνάρτηση ίση με μια αυθαίρετη τιμή, για παράδειγμα $z = 15$.
  - Επομένως, έχουμε την ευθεία $5x_1 + 3x_2 = 15$ την οποία και σχεδιάζουμε.

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 2ος ΤΡΟΠΟΣ

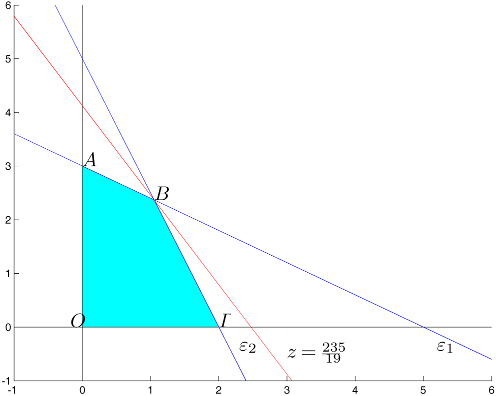
- Σχεδιάζουμε μια ευθεία ίσου κέρδους (ή κόστους) της αντικειμενικής συνάρτησης.
    - Θεωρούμε την αντικειμενική συνάρτηση ίση με μια αυθαίρετη τιμή, για παράδειγμα $z = 15$.
    - Επομένως, έχουμε την ευθεία $5x_1 + 3x_2 = 15$ την οποία και σχεδιάζουμε.
    - Βρίσκουμε το σημείο όπου η ευθεία ίσου κέρδους εφάπτεται της εφικτής περιοχής το οποίο είναι η λύση του προβλήματος.

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 2ος ΤΡΟΠΟΣ



Σχεδιασμός της ευθείας $5x_1 + 3x_2 = 15$, δηλαδή, $z = 15$.

ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ - 2ος ΤΡΟΠΟΣ



Παράλληλη μετατόπιση της ευθείας $5x_1 + 3x_2 = 15$, μέχρι να εφάπτεται της εφικτής περιοχής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Δίνεται το Π.Γ.Π. με αντικειμενική συνάρτηση

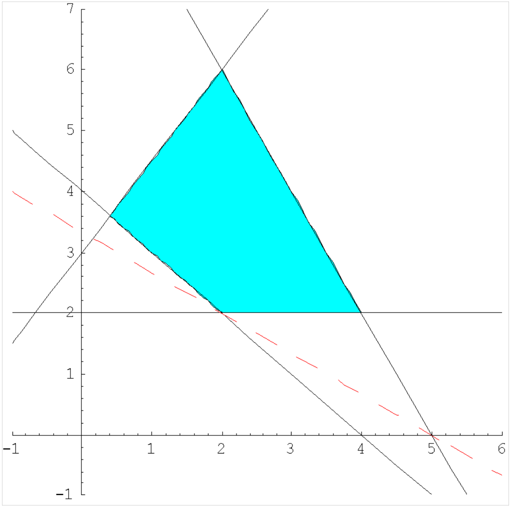
$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & & x_2 & \geq & 2 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ



Η λύση είναι $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ με $z = 10$

ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Δίνεται το Π.Γ.Π. με αντικειμενική συνάρτηση

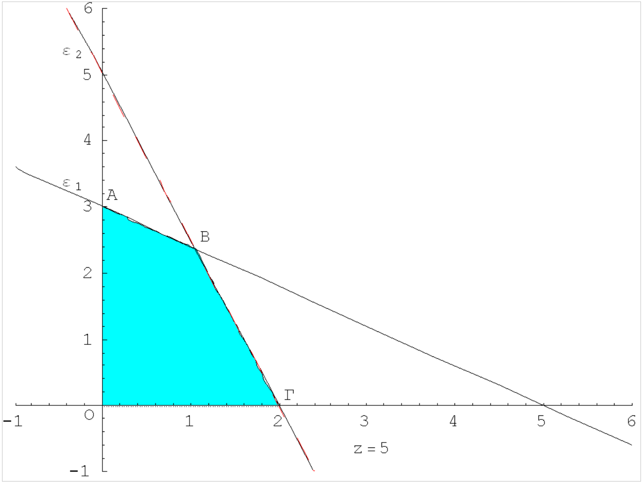
$$\max \quad z = 2.5x_1 + x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ



ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

- Οι άπειρες λύσεις του παραπάνω προβλήματος βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$.

ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

- Οι άπειρες λύσεις του παραπάνω προβλήματος βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$.
- Τα σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ δίνονται από τον τύπο

$$(B \cdot \lambda + \Gamma \cdot (1 - \lambda)) \quad \lambda \in [0, 1]$$

ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

- Οι άπειρες λύσεις του παραπάνω προβλήματος βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$.
- Τα σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ δίνονται από τον τύπο

$$(B \cdot \lambda + \Gamma \cdot (1 - \lambda)) \quad \lambda \in [0, 1]$$

- Για $\lambda = 0$ έχουμε το σημείο Γ

ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

- Οι άπειρες λύσεις του παραπάνω προβλήματος βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$.
- Τα σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ δίνονται από τον τύπο

$$(B \cdot \lambda + \Gamma \cdot (1 - \lambda)) \quad \lambda \in [0, 1]$$

- Για $\lambda = 0$ έχουμε το σημείο Γ
- Για $\lambda = 1$ έχουμε το σημείο B

ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Επομένως, τα άπειρα σημεία (λύσεις) του παραπάνω προβλήματος είναι

$$(B \cdot \lambda + \Gamma \cdot (1 - \lambda)) \Longrightarrow$$

$$\left(\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right) \cdot \lambda + (2, 0) \cdot (1 - \lambda)\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{20}{19} \cdot \lambda + 2 \cdot (1 - \lambda), \quad \frac{45}{19} \cdot \lambda + 0 \cdot (1 - \lambda)\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{20}{19} \cdot \lambda - 2 \cdot \lambda + 2, \quad \frac{45}{19} \cdot \lambda\right) \Longrightarrow$$

$$\left(-\frac{18}{19} \cdot \lambda + 2, \quad \frac{45}{19} \cdot \lambda\right)$$

ΑΔΥΝΑΤΟ

Δίνεται το Π.Γ.Π. με αντικειμενική συνάρτηση

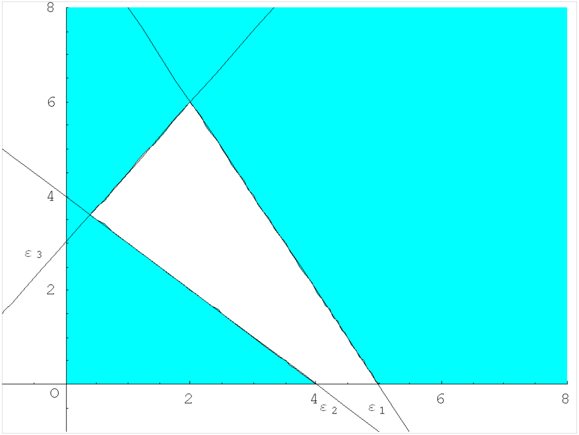
$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

και περιορισμούς

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ΑΔΥΝΑΤΟ



Δεν ορίζεται εφικτή περιοχή, άρα το Π.Γ.Π.είναι αδύνατο.