



Αλγόριθμοι και Δομές Δεδομένων(Θ)

Ενότητα 14: Γράφοι

Ευάγγελος Γ. Ούτσιος

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



ΓΡΑΦΟΙ

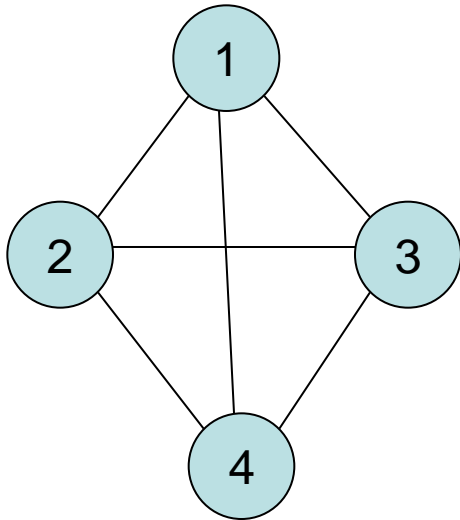
Ορισμοί

Ένας γράφος G χαρακτηρίζεται από δύο σύνολα V και E . Το σύνολο V είναι ένα πεπερασμένο διάφορο του κενού σύνολο που περιέχει ως στοιχεία τις **κορυφές** (*vertices*) του γράφου. Το σύνολο E έχει ως στοιχεία τα ζευγάρια κορυφών του γράφου που ορίζουν τις **ακμές** (*edges*).

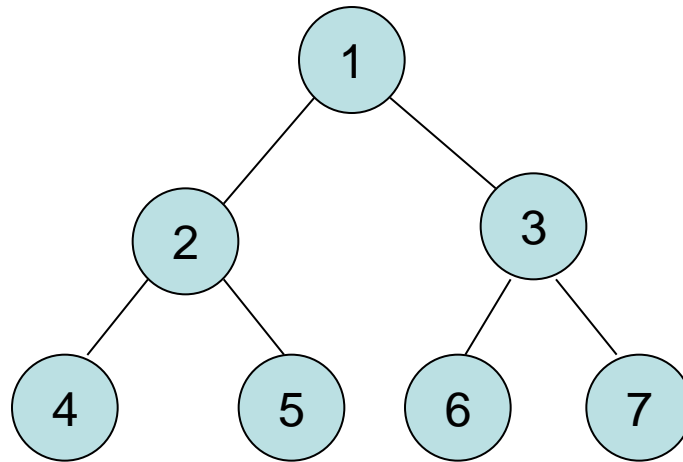
Τα σύμβολα $V(G)$, $E(G)$ και $G(V,E)$ χρησιμοποιούνται αντίστοιχα για την αναπαράσταση των συνόλων V , E και του γράφου G .

ΓΡΑΦΟΙ

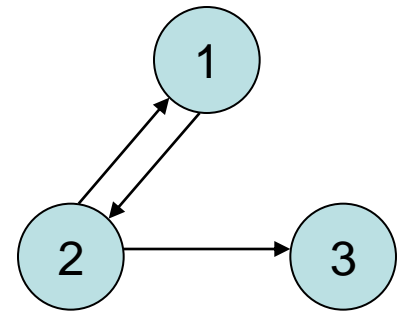
Π.χ.



G1



G2



G3

ΓΡΑΦΟΙ

- Ένας γράφος ονομάζεται **μη-κατευθυνόμενος** (*undirected*) όταν τα ζευγάρια των κορυφών που ορίζουν τις ακμές δεν είναι διατεταγμένα. Δηλαδή, τα ζευγάρια (v_1, v_2) και (v_2, v_1) ορίζουν την ίδια ακμή. Οι γράφοι G_1 , G_2 του προηγούμενου σχήματος είναι μη-κατευθυνόμενοι.
- Ένας γράφος ονομάζεται **κατευθυνόμενος** (*directed graph*) όταν κάθε ακμή του ορίζεται από ένα διατεταγμένο ζευγάρι κορυφών. Συμβολίζουμε το ζευγάρι αυτό $\langle v_1, v_2 \rangle$ και θεωρούμε την κατεύθυνση από την κορυφή v_1 , που ονομάζεται ουρά (tail), προς την v_2 , που ονομάζεται κεφαλή (head). Ο γράφος G_3 του σχήματος είναι κατευθυνόμενος.

ΓΡΑΦΟΙ

- Τα σύνολα V των γράφων $G1, G2, G3$ είναι:

$$V(G1) = (1,2,3,4)$$

$$V(G2) = (1,2,3,4,5,6,7)$$

$$V(G3) = (1,2,3)$$

Τα σύνολα E ορίζονται ως εξής:

$$E(G1) = ((1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4))$$

$$E(G2) = ((1,2), (1,3), (2,4), (2,5), (3,6), (3,7))$$

$$E(G3) = (\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle)$$

- Ένας μη-κατευθυνόμενος γράφος με n κορυφές λέγεται **πλήρης** (*complete*) αν έχει ακριβώς ακμές.

π.χ.

ο γράφος $G1$ του σχήματος είναι πλήρης.

ΓΡΑΦΟΙ

- Αν (v_1, v_2) είναι μία ακμή του συνόλου $E(G)$, τότε οι κορυφές v_1 και v_2 λέγονται **διπλανές** (*adjacent*). Η ακμή (v_1, v_2) ονομάζεται **στιγμιότυπο** (*incident*) των κορυφών v_1 και v_2 και αν δύο κορυφές v_1 και v_2 δεν συνδέονται μεταξύ τους ονομάζονται **ανεξάρτητες** (*independent*).
- **Μονοπάτι** (*path*) από μία κορυφή v_m προς μία άλλη κορυφή v_n ορίζεται η λίστα των διαδοχικών κορυφών $[v_m, \dots, v_n]$ που συνδέονται με ακμές που ανήκουν στο $E(G)$.
- Για παράδειγμα, το $[1, 2, 3, 4]$ είναι ένα μονοπάτι από την κορυφή 1 στην κορυφή 4 στο γράφο G_1 του σχήματος.
- **Μήκος** (*length*) μονοπατιού είναι ο αριθμός των ακμών που υπάρχουν στο μονοπάτι. Στο προηγούμενο παράδειγμα το μήκος του μονοπατιού είναι 3.
- Ένα μονοπάτι ονομάζεται **απλό** (*simple*) όταν καμία κορυφή δεν εμφανίζεται παραπάνω από μία φορά σ' αυτό.

ΓΡΑΦΟΙ

Π.χ.

Το $[1,2,3,4]$ είναι απλό μονοπάτι, ενώ το $[1,2,4,2]$ δεν είναι. Το $[1,2,3,2]$ δεν είναι μονοπάτι του $G3$ γιατί η ακμή $\langle 3,2 \rangle$ δεν ανήκει στο $E(G3)$.

- **Κύκλος** (*cycle*) είναι ένα απλό μονοπάτι όπου ταυτίζεται η πρώτη και η τελευταία κορυφή.

Π.χ.

το μονοπάτι $[1,2,3,1]$ του $G1$ είναι κύκλος.

Απ' αυτό συμπεραίνουμε ότι ένα δένδρο είναι ένας γράφος που δεν έχει καθόλου κύκλους.

- **Βαθμός** (*degree*) κορυφής λέγεται ο αριθμός των ακμών που είναι στιγμιότυπα της κορυφής.

ΓΡΑΦΟΙ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΓΡΑΦΩΝ

- **Πίνακες διπλανών κορυφών (*adjacency matrices*)**
- **Λίστες διπλανών κορυφών (*adjacency lists*)**

ΓΡΑΦΟΙ

Αναπαράσταση γράφου με Πίνακα Διπλανών Κορυφών

Ένας γράφος G με n κορυφές μπορεί να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια ενός δισδιάστατου πίνακα $N \times N$. Το στοιχείο (i, j) του πίνακα παίρνει την τιμή 1 αν η ακμή (v_i, v_j) ανήκει στο $E(G)$, αλλιώς παίρνει την τιμή 0.

Για παράδειγμα, οι πίνακες διπλανών κορυφών για τους γράφους G_1 , G_3 του προαναφερθέντος σχήματος είναι:

0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

G_1

0	1	0
1	0	1
0	0	0

G_3

Υλοποίηση στην C:

```
int graph[N][N];
```

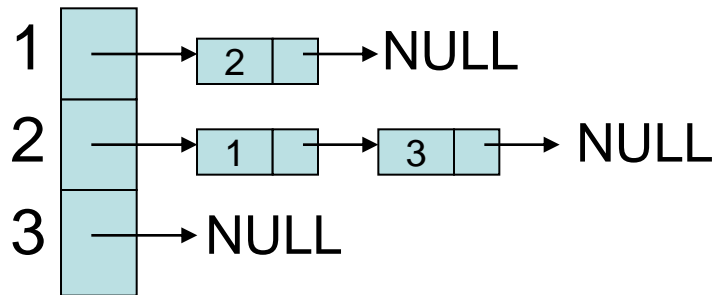
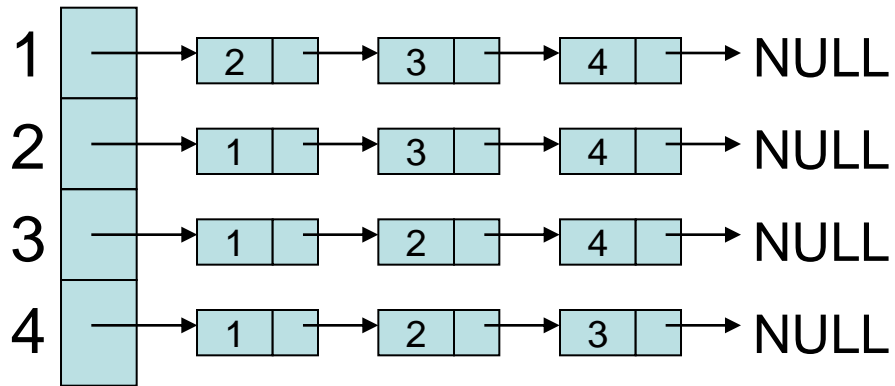
ΓΡΑΦΟΙ

Αναπαράσταση γράφου με Λίστες Διπλανών Κορυφών

Σ' αυτή την αναπαράσταση του γράφου που αποτελείται από n κορυφές, ορίζεται ένας πίνακας n θέσεων τα στοιχεία του οποίου είναι συνδεδεμένες λίστες. Κάθε κόμβος της λίστας στη θέση i του πίνακα αναπαριστά κορυφή του γράφου, η οποία συνδέεται με την κορυφή i .

ΓΡΑΦΟΙ

Π.χ.



ΓΡΑΦΟΙ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΑΣΧΙΣΗΣ ΓΡΑΦΩΝ

Τα προβλήματα που συνήθως αντιμετωπίζουμε στους γράφους, καταλήγουν σε αλγορίθμους που σχετίζονται με την εύρεση ενός μονοπατιού, το οποίο να συνδέει μία αρχική κορυφή (κόμβος εκκίνησης) με μία τελική κορυφή (κόμβος άφιξης).

Από τους βασικότερους αλγόριθμους γράφων είναι αυτοί που μας διασφαλίζουν τρόπους επίσκεψης όλων των κορυφών ενός γράφου.

- Αναζήτηση με προτεραιότητα βάθους (*depth first search*)
- Αναζήτηση με προτεραιότητα πλάτους (*breadth first search*)

ΓΡΑΦΟΙ

Αναζήτηση με Προτεραιότητα Βάθους

Υλοποιείται με τη χρήση στοίβας.

- α) Επισκεπτόμαστε την κορυφή.
- β) Τοποθετούμε (push) την κορυφή σε μία στοίβα για να τη θυμόμαστε.
- γ) Τη μαρκάρουμε, ώστε να μη την επισκεφθούμε ξανά.

Κανόνας 1

Αν είναι δυνατόν, επισκεπτόμαστε μία διπλανή κορυφή που δεν την έχουμε ξανα-επισκεφθεί, τη μαρκάρουμε και την τοποθετούμε στη στοίβα.

Κανόνας 2

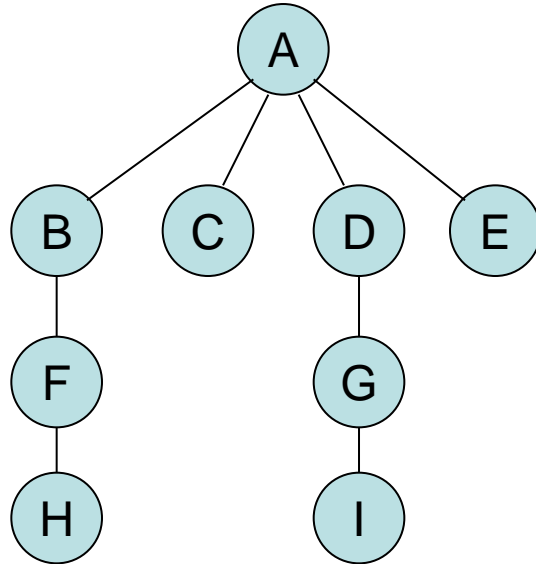
Αν δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε τον Κανόνα 1, τότε, αν είναι δυνατόν, εξάγουμε (pop) μία κορυφή από τη στοίβα.

Κανόνας 3

Αν δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε τον Κανόνα 1 ή τον Κανόνα 2, τότε έχουμε τελειώσει.

ΓΡΑΦΟΙ

Π.χ.



Η σειρά είναι A,B,F,H,C,D,G,I, E.

ΓΡΑΦΟΙ

Αναζήτηση με Προτεραιότητα Πλάτους

Υλοποιείται με τη χρήση μίας ουράς.

Επισκεπτόμαστε την κορυφή και την κάνουμε **τρέχουσα** κορυφή.

Ύστερα, ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

Κανόνας 1

Επίσκεψη της επόμενης (αν υπάρχει) κορυφής, που είναι διπλανή στην τρέχουσα κορυφή και δεν την έχουμε ακόμα επισκεφθεί, τη μαρκάρουμε και την εισάγουμε στην ουρά (enqueue).

Κανόνας 2

Αν δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Κανόνα 1, επειδή δεν υπάρχουν άλλες κορυφές που δεν έχουμε ακόμα επισκεφθεί, εξάγουμε (dequeue) μία κορυφή από την ουρά (αν αυτό είναι εφικτό) και την κάνουμε τρέχουσα κορυφή.

Κανόνας 3

Αν δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Κανόνα 2, επειδή η ουρά είναι άδεια, τότε έχουμε τελειώσει.

Άρα, η σειρά επίσκεψης είναι **A, B, C, D, E, F, G, H, I**.