

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΕΡΡΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

## **ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ**

Δρ. Χαράλαμπος Π. Στρουθόπουλος  
Καθηγητής

ΣΕΡΡΕΣ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2008

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή
2. Κεφάλαιο 2 - Διακριτά σήματα και συστήματα
  - 2.1. Διακριτά σήματα.
    - 2.1.1. Θεμελιώδη διακριτά σήμα.
    - 2.1.2. Διάρκεια διακριτού σήματος
    - 2.1.3. Περιοδικότητα διακριτού σήματος
    - 2.1.4. Συμμετρικά σήματα
    - 2.1.5. Αντιστροφή, ολίσθηση και κλιμάκωση σήματος
    - 2.1.6. Πράξεις διακριτών σημάτων
    - 2.1.7. Ανάλυση διακριτού σήματος σε διακριτές κρουστικές ώσεις
  - 2.2. Διακριτά συστήματα
    - 2.2.1. Διασύνδεση συστημάτων
    - 2.2.2. Μνήμη διακριτού συστήματος
    - 2.2.3. Αμεταβλητότητα κατά τη μετατόπιση
    - 2.2.4. Γραμμικότητα
    - 2.2.5. Αιτιότητα
    - 2.2.6. Ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου
    - 2.2.7. Αντιστρέψιμα συστήματα
    - 2.2.8. Απόκριση συστήματος σε κρουστική διέγερση, το συνελκτικό άθροισμα
    - 2.2.9. Ιδιότητες της συνέλιξης διακριτών σημάτων
    - 2.2.10. Τρόποι υπολογισμού της συνέλιξης διακριτών σημάτων
3. Κεφάλαιο 3 –Περί μετασχηματισμών σημάτων διακριτού χρόνου.
  - 3.1 Εισαγωγή
  - 3.2 Ερμηνεία μετασχηματισμών με διανυσματική ανάλυση
  - 3.3 Ερμηνεία μετασχηματισμών με γραμμική άλγεβρα
  - 3.4 Ο διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου (DCT: Discrete Cosine Transform)
    - 3.4.1 Ο δισδιάστατος (2Δ) διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου (2D-DCT: Discrete Cosine Transform)
  - 3.5 Ερμηνεία και υπολογισμοί μετασχηματισμών μιγαδικών σημάτων διακριτού χρόνου.

4. Κεφάλαιο 4 – Ο μετασχηματισμός Fourier
  - 4.1 Εισαγωγή
  - 4.2 Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier N-σημείων
  - 4.3 Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου.
    - 4.3.1 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου
  - 4.4 Σχέση της συνέλιξης με το μετασχηματισμό και τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier.
5. Κεφάλαιο 5 - Ανάλυση σημάτων και συστημάτων με τον μετασχηματισμό Fourier
  - 5.1 Εισαγωγή.
  - 5.2 Απόκριση συχνότητας.
    - 5.2.1 Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων
  - 5.3 Ανάλυση της δειγματοληψίας.
6. Κεφάλαιο 6 – Ο μετασχηματισμός Z
  - 6.1 Εισαγωγή
  - 6.2 Ορισμός του μετασχηματισμού Z
    - 6.2.1 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Z
    - 6.2.2 Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z, ανάλυση σε μερικά κλάσματα
  - 6.3 Ο Μονόπλευρος μετασχηματισμό Z
7. Κεφάλαιο 7 - Ανάλυση συστημάτων με τον μετασχηματισμό Z
  - 7.1 Εισαγωγή.
  - 7.2 Συνάρτηση μεταφοράς.
  - 7.3 Έλεγχος ευστάθειας και αιτιότητας LTI συστήματος
  - 7.4 Υπολογισμός της εξόδου συστήματος LTI.
8. Κεφάλαιο 8 – Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου
  - 8.1 Εισαγωγή.
  - 8.2 Ψηφιακά δικτυώματα
  - 8.3 Περιγραφή συστημάτων FIR
  - 8.4 Περιγραφή συστημάτων IIR

## Εισαγωγή

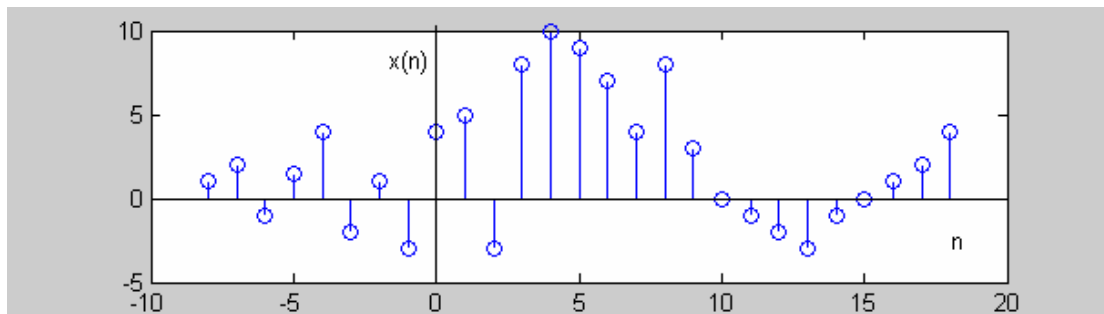
Η επεξεργασία ψηφιακού σήματος είναι ένας τομέας της επιστήμης και της εφαρμοσμένης μηχανικής που έχει αναπτυχθεί γρήγορα κατά τη διάρκεια των προηγούμενων 30 ετών. Αυτή η γρήγορη ανάπτυξη είναι αποτέλεσμα των σημαντικών πλεονεκτημάτων της τεχνολογίας των ψηφιακών υπολογιστών και της βιομηχανίας των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Οι ψηφιακοί υπολογιστές και τα ψηφιακά κυκλώματα πριν τρεις δεκαετίες ήταν σχετικά ογκώδη και ακριβά και κατά συνέπεια η χρήση τους περιορίστηκε σε επιστημονικούς υπολογισμούς και εφαρμογές γενικής χρήσης, χωρίς απαιτήσεις εκτέλεσης σε πραγματικό χρόνο. Η γρήγορη ανάπτυξη στην τεχνολογία ολοκληρωμένων κυκλωμάτων που άρχισε από την μέση κλίμακα ολοκλήρωσης (Medium Scale Integration) και εξελίχθηκε στην μεγάλη (Large Scale Integration), και τώρα την πολύ μεγάλη κλίμακα ολοκλήρωσης (Very Large Scale Integration) των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη πιο ισχυρών, μικρότερων, γρηγορότερων και φτηνότερων ψηφιακών υπολογιστών και ειδικευμένου ψηφιακού εξοπλισμού. Αυτά τα φθηνά και σχετικά γρήγορα ψηφιακά κυκλώματα κατέστησαν δυνατόν να κατασκευαστούν ιδιαίτερα περίπλοκα ψηφιακά συστήματα ικανά να εκτελέσουν σύνθετες λειτουργίες επεξεργασίας ψηφιακού σήματος που είναι συνήθως δύσκολο ή/και πάρα πολύ ακριβό να εκτελεστούν για αναλογικά σήματα με συστήματα αναλογικών κυκλωμάτων. Ως εκ τούτου πολλοί από τους στόχους επεξεργασίας σήματος που εκτελέστηκαν συμβατικά με τα αναλογικά μέσα πραγματοποιούνται σήμερα από λιγότερο ακριβό και συχνά πιο αξιόπιστο ψηφιακό υλικό. Αυτό δεν σημαίνει ότι η επεξεργασία ψηφιακού σήματος είναι η κατάλληλη λύση για όλα τα προβλήματα επεξεργασίας σήματος. Για σήματα με εξαιρετικά μεγάλο εύρος ζώνης όπου απαιτείται η επεξεργασία σε πραγματικό χρόνο, η αναλογική επεξεργασία ή η επεξεργασία οπτικού σήματος είναι η ίσως η μόνη

πιθανή λύση. Εντούτοις, όπου τα ψηφιακά κυκλώματα είναι διαθέσιμα και προσφέρουν ικανοποιητική ταχύτητα προτιμώνται διότι είναι φτηνότερα και τα συστήματα πιο αξιόπιστα και παραμετροποιήσιμα. Ειδικότερα, το υλικό ψηφιακής επεξεργασίας επιτρέπει την ενσωμάτωση λογισμικού που μπορεί να τροποποιήσει ευκολότερα τις λειτουργίες επεξεργασίας σήματος που εκτελούνται. Κατά συνέπεια το ψηφιακό υλικό και το σχετικό λογισμικό παρέχουν έναν μεγαλύτερο βαθμό ευελιξίας στο σχεδιασμό των συστημάτων. Επίσης επιτυγχάνεται συχνά ακρίβεια μεγαλύτερης τάξης με το ψηφιακό υλικό και το λογισμικό έναντι των αναλογικών κυκλωμάτων και των συστημάτων επεξεργασίας αναλογικού σήματος. Για όλους αυτούς τους λόγους, υπήρξε μια εκρηκτική αύξηση της θεωρίας επεξεργασίας ψηφιακού σήματος και των εφαρμογών της κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών.

## Διακριτά σήματα και συστήματα

### 2.1 Διακριτά σήματα

Διακριτό σήμα ή σήμα διακριτού χρόνου ονομάζουμε μία ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών τιμών  $x(n)$ ,  $n \in Z$  και  $x(n) \in C$ . Το διακριτό σήμα είναι δηλαδή μία συνάρτηση της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ακέραιος αριθμός. Στην ΨΕΣ η ανεξάρτητη μεταβλητή  $n$  ονομάζεται και «χρόνος» αν και μπορεί να παριστάνει συντεταγμένες χώρου, αύξοντες αριθμούς κ.α. Ένα διακριτό σήμα δεν ορίζεται για τιμές του  $n$  που δεν είναι ακέραιες. Η γραφική παράσταση ενός διακριτού σήματος έχει την μορφή που δείχνεται στο Σχ.2.1.1



Σχήμα 2.1.1

Τα διακριτά σήματα προέρχονται από α) μεγέθη που από τη φύση τους είναι αριθμήσιμα, π.χ. έσοδα ανά ημέρα, κίνηση ανά ώρα, β) μεγέθη που μεταβάλλονται σε σχέση με μία συνεχή μεταβλητή (συνεχή σήματα) ύστερα από μία διαδικασία δειγματοληψίας. Ο πιο συνήθης τρόπος μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε διακριτό είναι η *περιοδική* ή ομοιόμορφη δειγματοληψία. Λαμβάνονται δείγματα του σήματος σε διαδοχικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Αν η απόσταση δύο

διαδοχικών τιμών είναι σταθερή ίση με  $T_s$  και  $x_a(t)$  η συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής  $t$ , το διακριτό σήμα  $x(n)$  προκύπτει από τη σχέση

$$x(n) = x_a(n \cdot T_s) \quad (2.1.1)$$

Η ποσότητα  $f_s = \frac{1}{T_s}$  λέγεται *ρυθμός δειγματοληψίας*. Η επιλογή κατάλληλης τιμής του ρυθμού δειγματοληψίας θα εξετασθεί αργότερα στο σχετικό κεφάλαιο.

Αν ένα συνεχές ή διακριτό σήμα παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένου πλήθους σύνολο τιμών, τότε λέγεται *σήμα διακριτών τιμών*. Μ' άλλα λόγια το πεδίο τιμών του σήματος είναι ένα σύνολο πεπερασμένου πλήθους στοιχείων. Ένα διακριτό σήμα διακριτών τιμών λέγεται ψηφιακό. Ένα ψηφιακό σήμα πεπερασμένου μήκους μπορεί να αποθηκευτεί στη μνήμη ενός ψηφιακού υπολογιστή με ακρίβεια όση η μικρότερη απόσταση που υπάρχει μεταξύ των τιμών του. Η ψηφιοποίηση μη ψηφιακών σημάτων απαιτεί την δειγματοληψία του πεδίου ορισμού τους και τον κβαντισμό του πεδίου τιμών τους όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

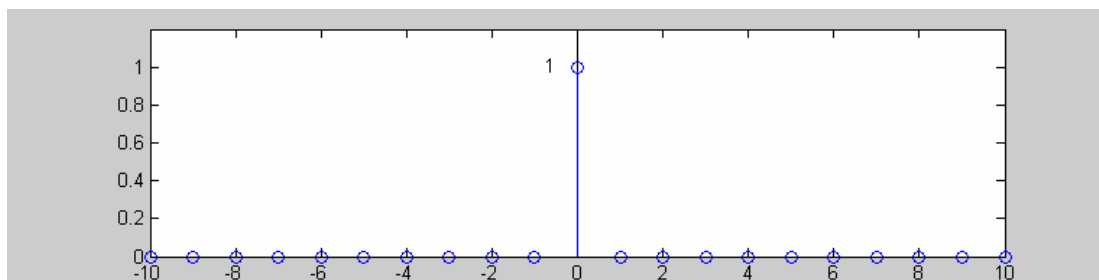
### 2.1.1. Θεμελιώδη διακριτά σήματα

Ακολούθως θα αναφέρουμε μερικά διακριτά σήματα που χρησιμοποιούνται ευρέως στην ψηφιακή επεξεργασία σημάτων. Τέτοια είναι η *διακριτή κρουστική ώση*, η *βηματική ακολουθία*, η *εκθετική ακολουθία*, η *μιγαδική ακολουθία*, η *μοναδιαία γραμμική ακολουθία*.

Η *διακριτή συνάρτηση δέλτα* ή *διακριτή κρουστική ώση* συμβολίζεται  $\delta(n)$  και ορίζεται από τη σχέση

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{για } n = 0 \\ 0 & \text{για } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.1.1.1)$$

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχ.2.1.1.1.

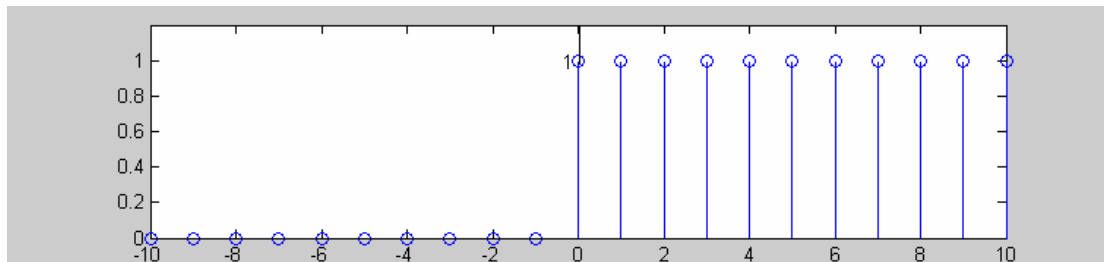


Σχήμα 2.1.1.1. Η διακριτή κρουστική ώση  $\delta(n)$ .

Η βηματική ακολουθία συμβολίζεται  $u(n)$  και ορίζεται από τη σχέση

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{για } n \geq 0 \\ 0 & \text{για } n < 0 \end{cases} \quad (2.1.1.2)$$

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχ.2.1.1.2.

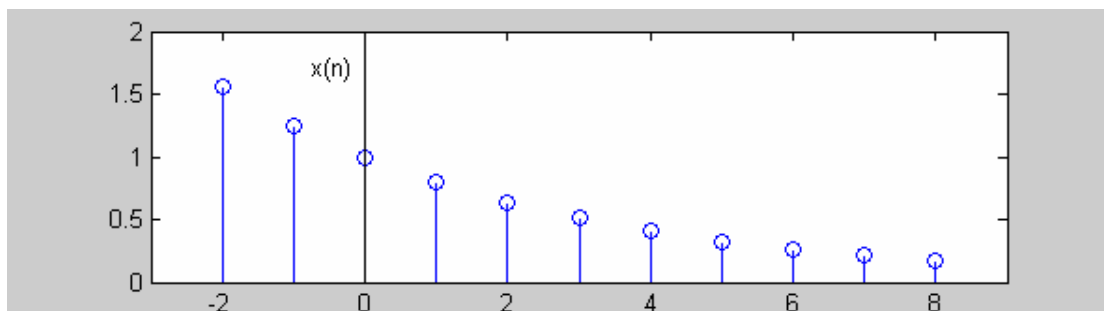


Σχήμα 2.1.1.2. Η βηματική ακολουθία  $u(n)$ .

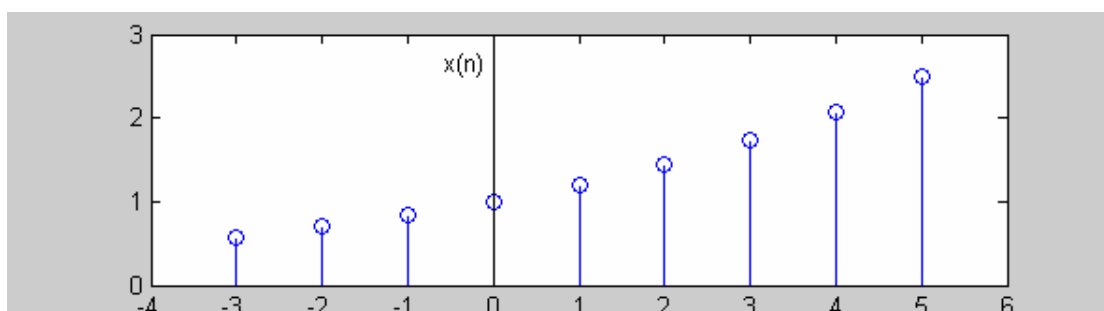
Η εκθετική ακολουθία ορίζεται από τη σχέση

$$x(n) = a^n, \quad a \in C \quad (2.1.1.3)$$

Η γραφική της παράσταση για διαφορετικές τιμές του  $a$ , φαίνεται στο Σχ.2.1.1.3.

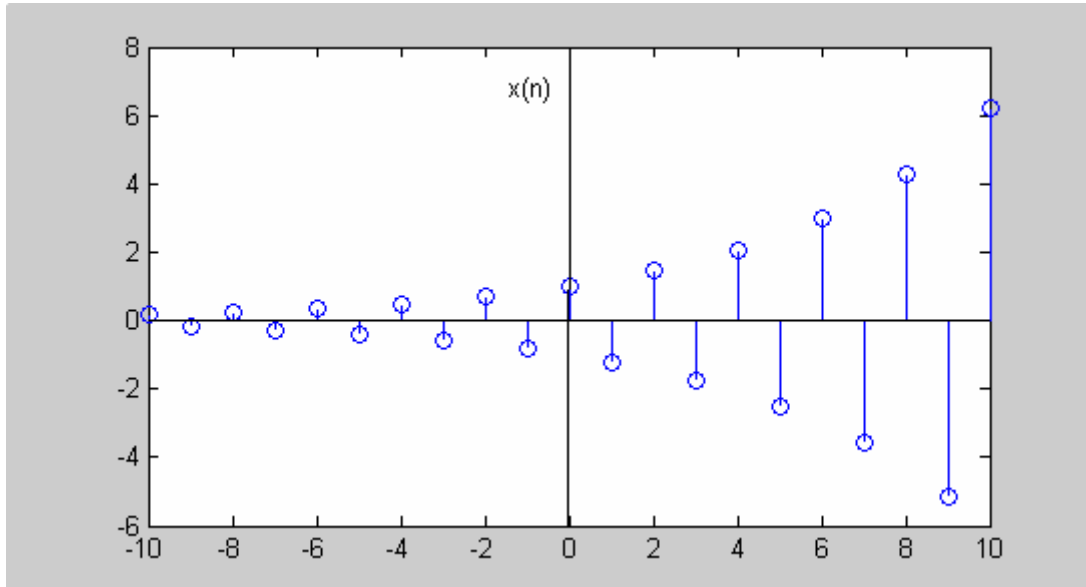


(α) Η εκθετική ακολουθία για  $a=0.8$ .



(β) Η εκθετική ακολουθία για  $a=1.2$ .





(β) Η εκθετική ακολουθία για  $a=-1.2$ .

Σχήμα 2.1.1.3

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εκθετική ακολουθία όταν  $a = e^{j\omega}$ ,  $\omega \in R$ . Τότε ονομάζεται μιγαδική εκθετική ακολουθία και βάσει της ταυτότητας του Euler ισχύει η σχέση

$$x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega \cdot n) + j \cdot \sin(\omega \cdot n) \quad (2.1.1.4)$$

Η μιγαδικές εκθετικές ακολουθίες είναι η βάση της *ανάλυσης Fourier* που θα παρουσιάσουμε σε ακόλουθο κεφάλαιο.

## 2.1.2. Διάρκεια διακριτού σήματος.

Ένα διακριτό σήμα λέγεται *πεπερασμένου μήκους* αν οι τιμές του μηδενίζονται για κάθε τιμή του  $n$  που δεν ανήκει σε ένα πεπερασμένο διάστημα  $[L,R]$ , αν δηλαδή ικανοποιείται η σχέση

$$x(n) = 0, \forall n \notin [L, R], \quad L, R \in Z \quad (2.1.2.1)$$

Στις πλείστες των περιπτώσεων  $x(L)$ ,  $x(R)$  έχουν μη μηδενικές τιμές. Η έκταση  $N$  του διαστήματος  $[L,R]$  λέγεται *μήκος του σήματος* και είναι

$$N=R-L+1 \quad (2.1.2.2)$$

Σήματα που δεν είναι πεπερασμένου μήκους ονομάζονται *απείρου μήκους*. Ένα διακριτό σήμα απείρου μήκους λέγεται *σήμα δεξιάς πλευράς* αν ικανοποιεί τη σχέση

$$x(n) = 0, \forall n < L \quad (2.1.2.3)$$

και αριστερής πλευράς αν

$$x(n) = 0, \forall n > R \quad (2.1.2.4)$$

Τέλος, αν ένα διακριτό σήμα απείρου μήκους δεν είναι δεξιάς ή αριστερής πλευράς λέγεται *αμφίπλευρο*.

Τα πεπερασμένα μήκους σήματα και τα σήματα δεξιάς ή αριστερής πλευράς μπορούν να περιγραφούν αλγεβρικά με κατάλληλη χρήση διακριτών βηματικών ακολουθιών. Αν  $x(n)$  σήμα απείρου μήκους τότε μπορεί να ορισθεί το πεπερασμένου μήκους σήμα  $y(n)$  στο διάστημα  $[L,R]$  ως εξής

$$y(n) = x(n) \cdot [u(n-L) - u(n-R-1)] \quad (2.1.2.5)$$

ή

$$y(n) = x(n) \cdot [u(n-L) \cdot u(R-n)] \quad (2.1.2.6)$$

Το σήμα

$$y(n) = x(n) \cdot u(n) \quad (2.1.2.7)$$

είναι δεξιάς πλευράς με  $y(n) = 0, \forall n < 0$

### 2.1.3. Περιοδικότητα διακριτού σήματος

Ένα σήμα λέγεται *περιοδικό* αν υπάρχει θετικός ακέραιος  $N$  ώστε

$$x(n) = x(n+N) \quad (2.1.3.1)$$

Ο ακέραιος  $N$  λέγεται περίοδος του σήματος. Είναι προφανές ότι αν  $N$  η περίοδος του σήματος, τότε οι τιμές  $2N$ ,  $3N$  και κάθε θετικό ακέραιο πολλαπλάσιο του  $N$  είναι περίοδοι του σήματος. Η μικρότερη τιμή της περιόδου ονομάζεται *πρωτεύουσα περίοδος*. Αν δεν υπάρχει θετικός ακέραιος  $N$  ώστε να ισχύει η σχέση (2.1.3.1), το σήμα λέγεται *μη περιοδικό*. Παράδειγμα περιοδικού διακριτού σήματος είναι το σήμα

$$x(n) = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{5} n\right) \text{ με περίοδο } N=5 \quad (2.1.3.2.)$$

Παράδειγμα μη περιοδικού σήματος είναι το

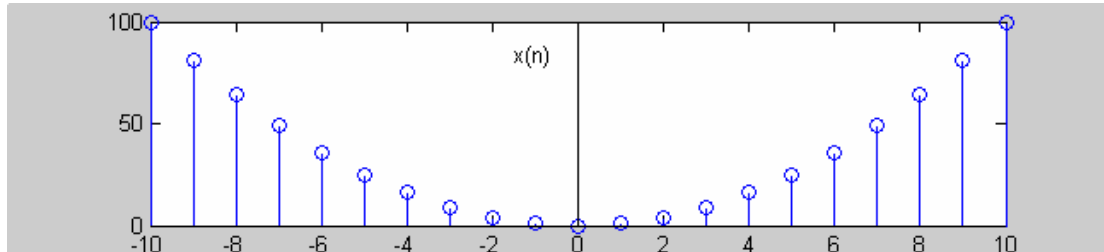
$$x(n) = a^n \cdot u(n) \quad (2.1.3.3)$$

### 2.1.4. Συμμετρικά σήματα

Ένα πραγματικό διακριτό σήμα  $x(n)$  λέγεται *άρτιο* αν ισχύει η σχέση

$$x(-n) = x(n), \forall n \in Z \quad (2.1.4.1)$$

Η γραφική παράσταση ενός άρτιου σήματος παρουσιάζει αξονική συμμετρία ως προς τον κάθετο άξονα. Για παράδειγμα το σήμα  $x(n)=n^2$  είναι άρτιο με γραφική παράσταση όπως φαίνεται στο Σχ. 2.1.4.1.

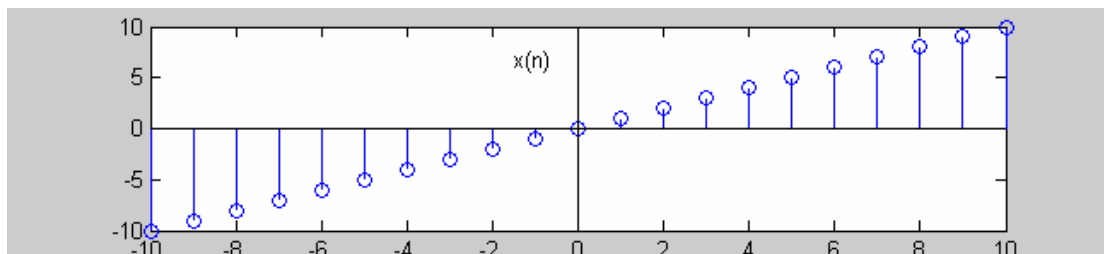


Σχήμα 2.1.4.1.

Ένα πραγματικό διακριτό σήμα  $x(n)$  λέγεται *περιττό* αν ισχύει η σχέση

$$x(-n) = -x(n), \forall n \in Z \quad (2.1.4.2)$$

Η γραφική παράσταση ενός περιττού σήματος παρουσιάζει κεντρική συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων. Για παράδειγμα το σήμα  $x(n)=n$  είναι περιττό με γραφική παράσταση όπως φαίνεται στο Σχ. 2.1.4.2.



Σχήμα 2.1.4.2.

Κάθε πραγματικό σήμα μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος. Πράγματι αν  $x_a(n)$  άρτιο και  $x_\pi(n)$  περιττό σήμα θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

$$x(n) = x_a(n) + x_\pi(n) \quad (2.1.4.3)$$

$$x(-n) = x_a(-n) + x_\pi(-n) \Rightarrow \quad (2.1.4.4)$$

$$x(-n) = x_a(n) - x_\pi(-n)$$

Από την πρόσθεση των (2.1.4.3) και (2.1.4.4) προκύπτει ότι

$$x_{\alpha}(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2} \quad (2.1.4.6)$$

Από την αφαίρεση των (2.1.4.3) και (2.1.4.4) προκύπτει ότι

$$x_{\pi}(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2} \quad (2.1.4.7)$$

Ένα μιγαδικό διακριτό σήμα  $x(n)$  λέγεται *συζυγές συμμετρικό* αν ισχύει η σχέση

$$x(-n) = x^*(n), \forall n \in Z \quad (2.1.4.8)$$

Ένα μιγαδικό διακριτό σήμα  $x(n)$  λέγεται *συζυγές αντισυμμετρικό* αν ισχύει η σχέση

$$x(-n) = -x^*(n), \forall n \in Z \quad (2.1.4.9)$$

Κάθε μιγαδικό σήμα μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ενός συζυγούς συμμετρικού και ενός συζυγούς αντισυμμετρικού σήματος. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

### 2.1.5. Αντιστροφή, ολίσθηση και κλιμάκωση σήματος

Εάν σε ένα σήμα  $x(n)$  εφαρμοσθεί ένας μετασχηματισμός στην ανεξάρτητη μεταβλητή  $n$ ,  $f(n) : Z \rightarrow Z$ , προκύπτει το σήμα  $x(f(n))$ . Αν  $f(n) = -n$  τότε λέμε ότι το σήμα έχει υποστεί *αντιστροφή* και μετασχηματίζεται στο σήμα

$$y(n) = x(-n). \quad (2.1.5.1)$$

Η γραφική παράσταση του  $x(-n)$  είναι συμμετρική ως προς τον κάθετο άξονα με αυτήν του  $x(n)$  (Σχ.2.1.5.1).

Αν  $f(n) = n - n_0$ , τότε λέμε ότι το σήμα έχει υποστεί *μετατόπιση ή ολίσθηση κατά  $n_0$*  και μετασχηματίζεται στο σήμα

$$y(n) = x(n - n_0). \quad (2.1.5.2)$$

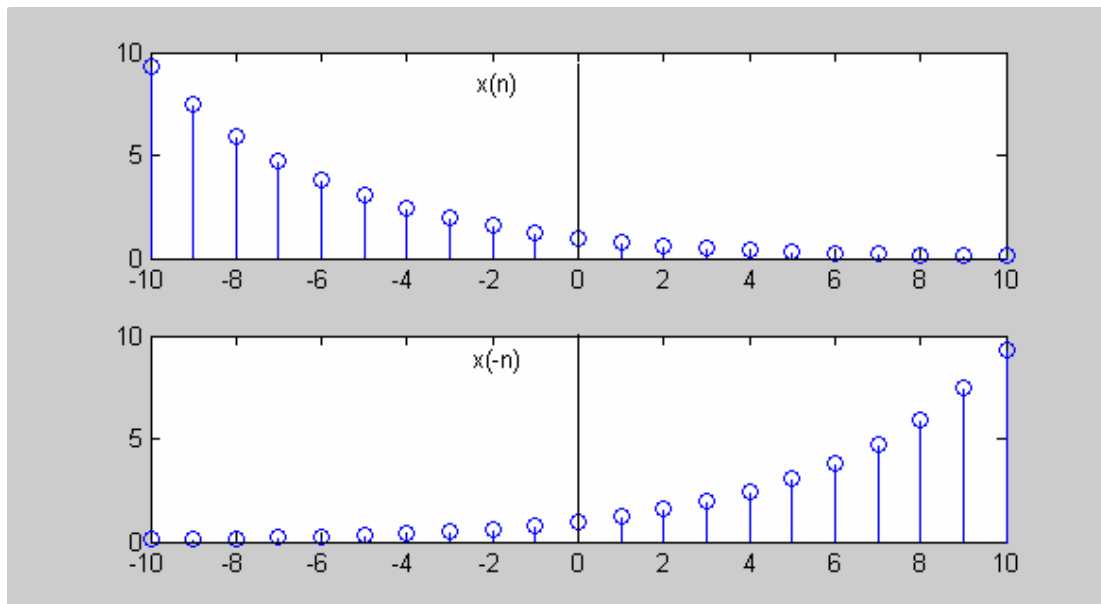
Η γραφική παράσταση του  $x(n - n_0)$  επροκύπτει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης του  $x(n)$  κατά  $n_0$ , στον οριζόντιο άξονα (Σχ.2.1.5.2).

Γενικά, αν εφαρμοσθεί ολίσθηση ενός σήματος και ακολούθως αντιστροφή του, προκύπτει διαφορετικό αποτέλεσμα από ότι θα προέκυπτε από την εφαρμογή πρώτα αντιστροφής του και ακολούθως ολίσθησης. Αυτό φαίνεται από ακόλουθες σχέσεις

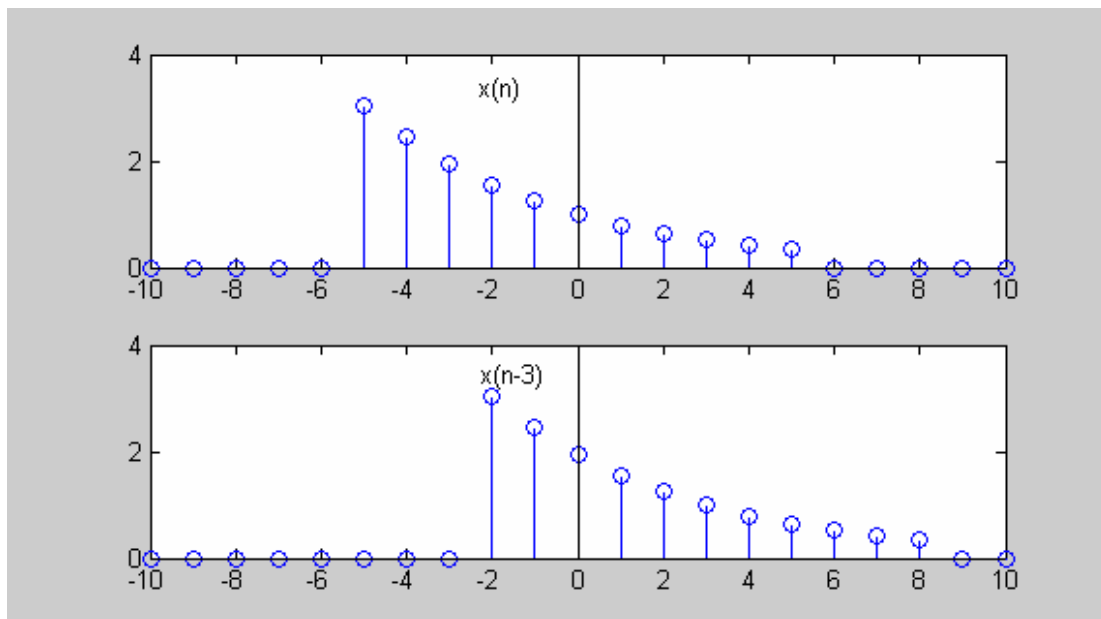
$$y(n) = x(n - n_0) \wedge z(n) = y(-n) \Rightarrow z(n) = x(-n - n_0) \quad (2.1.5.3)$$

$$y(n) = x(-n) \wedge z(n) = y(n - n_0) \Rightarrow z(n) = x(-n + n_0) \quad (2.1.5.4)$$

Το αποτέλεσμα θα ήταν ίδιο αν η ολίσθηση σε μία από τις δύο διαδικασίες γίνει κατά  $-n_0$ .



Σχήμα 2.1.5.1



Σχήμα 2.1.5.2.

Τελικά με τις πράξεις της ολίσθησης και της αντιστροφής από το αρχικό σήμα  $x(n)$  προκύπτουν τα σήματα  $x(n-n_0)$ ,  $x(n+n_0)$ ,  $x(-n+n_0)$ ,  $x(-n-n_0)$ . Στο Σχ.(2.1.5.3) δείχνεται ένα παράδειγμα των γραφικών παραστάσεων των σημάτων αυτών σε σχέση με την γραφική παράσταση του  $x(n)$ .

Κλιμάκωση υφίσταται ένα σήμα αν  $f(n)=Mn$  ή  $f(n)=n/M$ , όπου  $M$  ακέραιος. Στην πρώτη περίπτωση το διακριτό σήμα λέμε ότι υπέστη *υποδειματοληψία* και στη δεύτερη *υπερδειματοληψία*. Κατά την υποδειματοληψία προκύπτει το σήμα

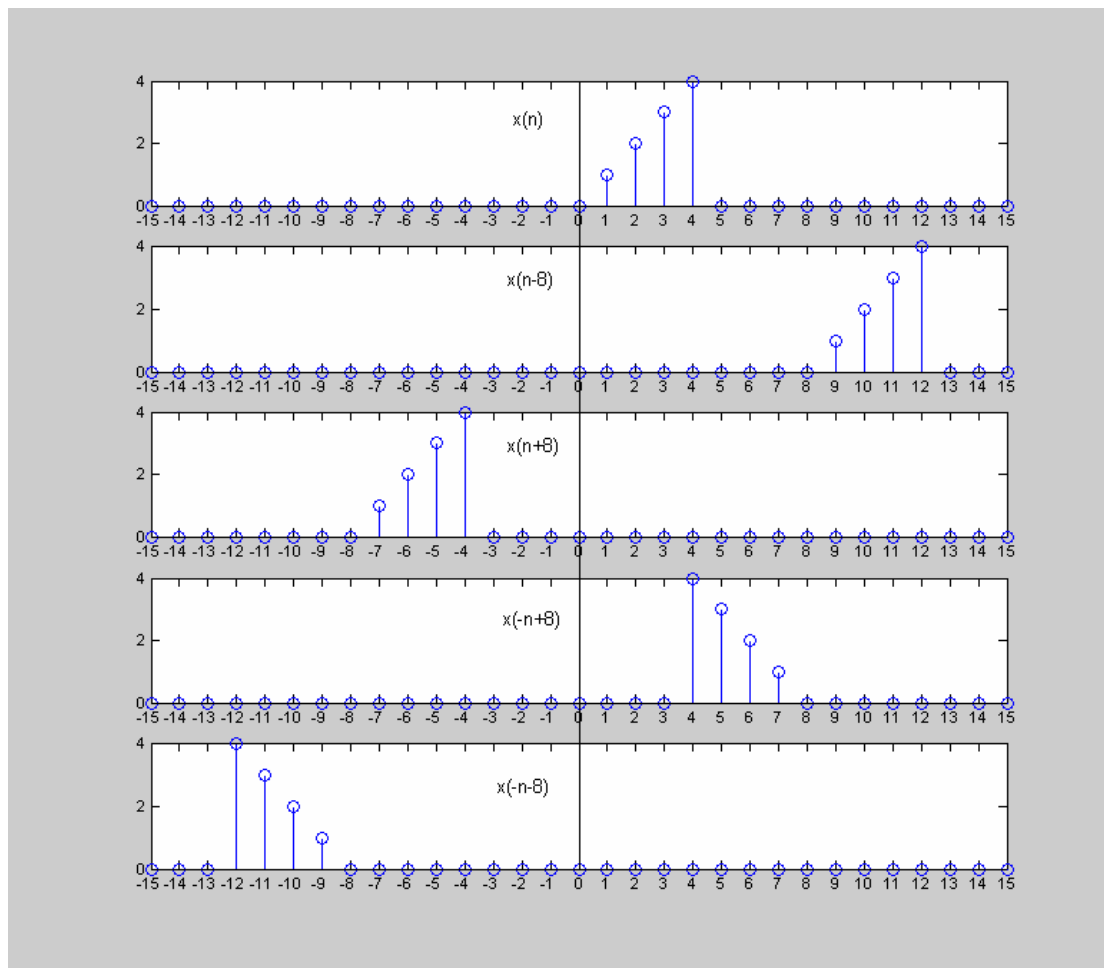
$$y(n)=x(Mn) \quad (2.1.5.5)$$

και κατά την υπερδειματοληψία το σήμα

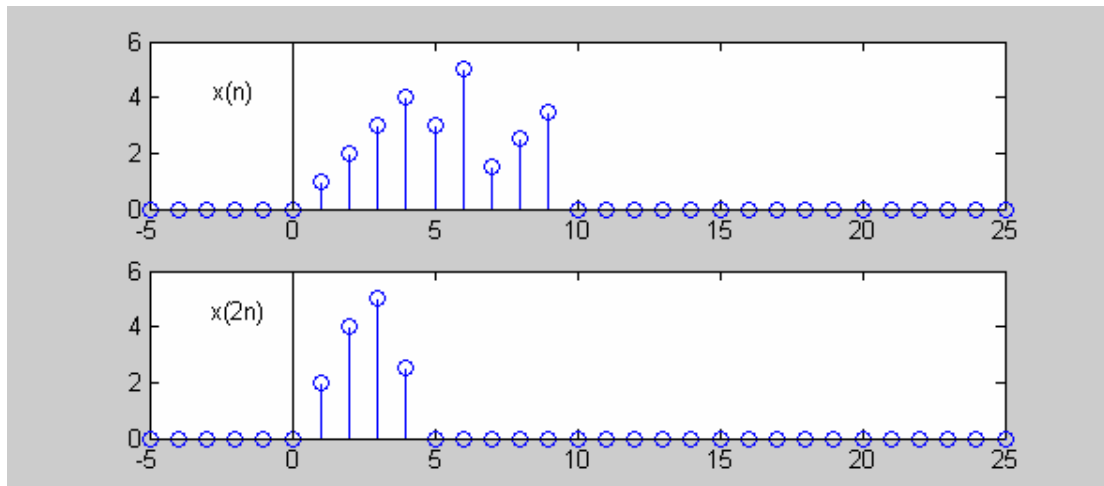
$$y(n)=x(n/M) \text{ αν } n/M \in Z \quad (2.1.5.6)$$

Για τις μη ακέραιες τιμές του πηλίκου  $n/M$  το σήμα  $x(n/M)$  δεν ορίζεται.

Στο Σχ.2.1.5.4. δείχνεται η γραφική παράσταση υποδειματοληψίας ενός σήματος.



Σχήμα 2.1.5.3



Σχήμα 2.1.5.4

### 2.1.6. Πράξεις διακριτών σημάτων.

Μεταξύ των ακολουθιών δύο διακριτών σημάτων μπορούν να εκτελεστούν οι βασικές πράξεις μεταξύ των τιμών τους που αντιστοιχούν στην ίδια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής και να προκύψει μία νέα ακολουθία που λέμε ότι είναι το αποτέλεσμα της πράξης μεταξύ των δύο αρχικών ακολουθιών. Έτσι ορίζονται οι πράξεις που φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα

Πρόσθεση	$x(n) + y(n)$
Αφαίρεση	$x(n) - y(n)$
Πολλαπλασιασμός	$x(n) * y(n)$
Διαίρεση	$x(n) / y(n)$ $y(n) \neq 0, \forall n \in C$

Πίνακας 2.1.6.1.

### 2.1.7. Ανάλυση διακριτού σήματος σε διακριτές κρουστικές ώσεις

Η διακριτή ώση  $\delta(n)$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή ενός διακριτού σήματος σύμφωνα με τη σχέση

$$\begin{aligned}
x(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k) = \\
&\dots x(-2) \cdot \delta(n+2) + x(-1) \cdot \delta(n+1) \\
&+ x(0) \cdot \delta(n) + x(-1) \cdot \delta(n-1) + x(-2) \cdot \delta(n-2) + \dots
\end{aligned} \tag{2.1.7.1}$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να περάσουμε σε διανυσματική ερμηνεία των διακριτών σημάτων και της κρουστικής ώσης. Ας θεωρήσουμε το πεπερασμένου μήκους σήμα  $x(n)$  με μήκος  $N=3$ ,  $n=0,1,2$  ( $L_x=0$ ,  $R_x=2$ ) και την διανυσματική περιγραφή του με τον πίνακα στήλης

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), x(2)]^T. \tag{2.1.7.2}$$

Σύμφωνα με την σχέση (2.1.7.1)

$$x(n) = \sum_{k=0}^2 x(k) \cdot \delta(n-k) = x(0) \cdot \delta(n) + x(1) \cdot \delta(n-1) + x(2) \cdot \delta(n-2) \tag{2.1.7.3}$$

Για  $n=0,1,2$  οι  $\delta(n)$ ,  $\delta(n-1)$ ,  $\delta(n-2)$  περιγράφονται διανυσματικά από τους πίνακες στήλης ως εξής:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n=1, \\ 0 & n=2 \end{cases}, \text{ ήτοι διανυσματικά } \boldsymbol{\delta}_0 = [1, 0, 0]^T,$$

$$\delta(n-1) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & n=1, \\ 0 & n=2 \end{cases}, \text{ ήτοι διανυσματικά } \boldsymbol{\delta}_1 = [0, 1, 0]^T, \tag{2.1.7.4}$$

$$\delta(n-2) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 0 & n=1, \\ 1 & n=2 \end{cases}, \text{ ήτοι διανυσματικά } \boldsymbol{\delta}_2 = [0, 0, 1]^T$$

Από τις (2.1.7.2) και (2.1.7.4) οδηγούμαστε στην γραφή των ακόλουθων σχέσεων

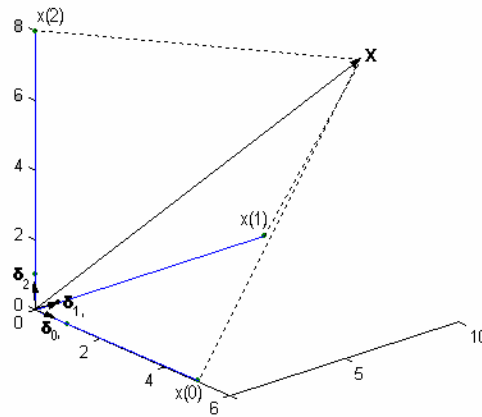
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x(1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(2) = \boldsymbol{\delta}_0 \cdot x(0) + \boldsymbol{\delta}_1 \cdot x(1) + \boldsymbol{\delta}_2 \cdot x(2) \Rightarrow \tag{2.1.7.5}$$

$$\mathbf{x} = [\boldsymbol{\delta}_0 \quad \boldsymbol{\delta}_1 \quad \boldsymbol{\delta}_2] \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} \tag{2.1.7.6}$$

Διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ομοιότητα των σχέσεων (2.1.7.3) και (2.1.7.5). Θεωρώντας τα  $\boldsymbol{\delta}_0$ ,  $\boldsymbol{\delta}_1$ ,  $\boldsymbol{\delta}_2$  ως τα μοναδιαία διανύσματα στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο



χώρο ( $E^3$ ), το πεπερασμένο διακριτό σήμα  $x(n)$  με μήκος  $N=3$  αναπαρίσταται από το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  όπως φαίνεται στο Σχ.2.1.7.1.



Σχήμα 2.1.7.1.

Οι συντεταγμένες του διανύσματος είναι οι προβολές του στα μοναδιαία διανύσματα  $\delta_0, \delta_1, \delta_2$  και δίνονται από τις σχέσεις του εσωτερικού του γινομένου με αυτά ως ακολούθως

$$x(0) = \delta_0^T \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = 1 \cdot x(0) + 0 \cdot x(1) + 0 \cdot x(2) = \sum_{k=0}^2 \delta(k) \cdot x(k) \quad (2.1.7.7)$$

$$x(1) = \delta_1^T \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = 0 \cdot x(0) + 1 \cdot x(1) + 0 \cdot x(2) = \sum_{k=0}^2 \delta(1-k) \cdot x(k) \quad (2.1.7.8)$$

$$x(2) = \delta_2^T \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = 0 \cdot x(0) + 0 \cdot x(1) + 1 \cdot x(2) = \sum_{k=0}^2 \delta(2-k) \cdot x(k) \quad (2.1.7.9)$$

και γενικά για  $n=0,1,2$

$$x(n) = \delta_n^T \cdot \mathbf{x} = \sum_{k=0}^2 \delta(n-k) \cdot x(k) = \delta(n) \cdot x(0) + \delta(n-1) \cdot x(1) + \delta(n-2) \cdot x(2) \quad (2.1.7.10)$$

Προέκυψε δηλαδή η σχέση (2.1.7.10) που είναι η ίδια με την (2.1.7.3)

Στο παράδειγμα αυτό το μήκος του διακριτού σήματος είναι  $N=3$  και με αριστερό δείκτη  $L_x=0$  και δεξιό  $R_x=2$ . Αν ο  $L_x$  πάρει οσοδήποτε μικρή τιμή και  $R_x$  οσοδήποτε μεγάλη μπορούμε πούμε ότι κάθε διακριτό σήμα είναι διάνυσμα σε ένα χώρο με

οσοδήποτε μεγάλο πλήθος διαστάσεων (άπειρο πλήθος διαστάσεων) και συντεταγμένες (προβολές) στα μοναδιαία διανύσματα  $\delta(n-k)$  τις τιμές  $x(n)$  όπως φαίνεται και από την (2.1.7.1). Ας σημειωθεί ακόμη ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m-k) \cdot \delta(n-k) = \mathbf{\delta}_m^T \cdot \mathbf{\delta}_n = \begin{cases} 1 & \text{αν } m = n \\ 0 & \text{αν } m \neq n \end{cases} \quad (2.7.1.11)$$

δηλαδή οι κρουστικές διακριτές ώσεις ως διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους με μέτρο μονάδα. Αποτελούν δηλαδή μία ορθοκανονική βάση. Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναφέρουμε και άλλες ορθοκανονικές και ορθομοναδιαίες βάσεις και θα δούμε την ανάλυση των διακριτών σημάτων σε αυτές. Η ανάλυση αυτή αφορά διάφορους μετασχηματισμούς όπως ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier, ο μετασχηματισμός του συνημιτόνου κ.α.

## 2.2. Διακριτά συστήματα

Σε πολλές εφαρμογές από ένα διακριτό σήμα  $x(n)$  προκύπτει ένα διακριτό σήμα  $y(n)$  σύμφωνα με κάποιο αλγόριθμο (σαφές και πεπερασμένο σύνολο πράξεων ή εντολών). Στη περίπτωση αυτή ο αλγόριθμος ονομάζεται *διακριτό σύστημα*. Το σήμα  $x(n)$  λέγεται σήμα εισόδου (input signal) ή σήμα διέγερσης (excitation signal) του συστήματος και το σύστημα  $y(n)$  σήμα εξόδου (output signal) ή σήμα απόκρισης (response signal) του συστήματος. Λέμε ακόμη ότι το σήμα  $x(n)$  μετασχηματίζεται στο σήμα  $y(n)$  και ονομάζουμε το σύστημα *μετασχηματισμό (transformation)* του  $x(n)$  στο  $y(n)$ . Η γενική μαθηματική έκφραση για ένα σύστημα είναι

$$y(n) = T[x(n)] \quad (2.2.1)$$

όπου το σύμβολο  $T$  συμβολίζει το μετασχηματισμό και συχνά ονομάζεται *τελεστής (operator)*. Το σύστημα λειτουργεί ως μία απεικόνιση των τιμών του σήματος εισόδου στις τιμές του σήματος εξόδου. Η περιγραφή της απεικόνισης μπορεί να γίνει ανάλογα με τη φύση της, με χρήση αλγεβρικών παραστάσεων, πινάκων αντιστοίχισης (look up tables) ή εντολών. Ακολουθώς αναφέρονται χαρακτηριστικά για τον τρόπο ορισμού τους, παραδείγματα συστημάτων.

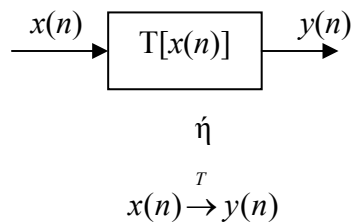
A) αλγεβρικά:  $y(n) = x[n] \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{32}n\right)$

B) Με πίνακα αντιστοίχισης

x(n)	y(n)
4	1
2	-1
-1	2.4
Αλλιώς	0

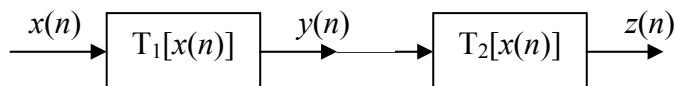
Γ) Για  $x$  με μήκος  $N$ , το  $y$  αποτελείται από τις τιμές του  $x$  ταξινομημένες σε φθίνουσα σειρά. (αλγόριθμος φθίνουσας ταξινόμησης).

Ένα σύστημα διαγραμματικά παριστάνεται ως ακολούθως



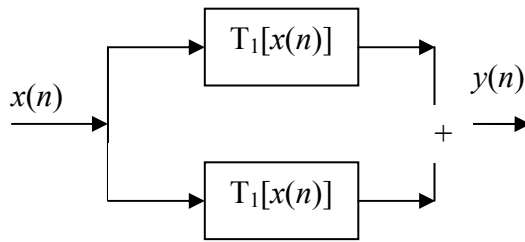
### 2.2.1. Διασύνδεση συστημάτων

Όταν η έξοδος ενός συστήματος αποτελεί είσοδο ενός άλλου το λέμε ότι τα δύο συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά. (Σχ.2.2.1.1)



Σχήμα 2.2.1.1

Όταν οι έξοδοι δύο συστημάτων αθροιστούν τότε λέμε ότι έχουν συνδεθεί παράλληλα (Σχ.2.2.1.2)



Σχήμα 2.2.1.2

### 2.2.2. Μνήμη διακριτού συστήματος

Σύστημα χωρίς μνήμη λέγεται το σύστημα που για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $n$ , η έξοδος του  $y(n)$  εξαρτάται μόνο από την αντίστοιχη τιμή της εισόδου  $x(n)$  και όχι από προηγούμενες ή επόμενες τιμές της  $n$ . Σε διαφορετική περίπτωση το σύστημα λέγεται *σύστημα με μνήμη*. Για παράδειγμα το σύστημα που δίνεται από τη σχέση

$$y(n) = 2 \cdot x(n) + 1 \quad (2.2.2.1)$$

είναι σύστημα χωρίς μνήμη. Αντίθετα τα συστήματα που δίνονται από τις σχέσεις

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2} \quad (2.2.2.2)$$

και

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(n-k) \quad (2.2.2.3)$$

είναι συστήματα με μνήμη. Το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση (2.2.2.2) λέμε ότι απαιτεί *πεπερασμένη μνήμη*. Αντίθετα το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση (2.2.2.3) λέμε ότι απαιτεί *απεριόριστη μνήμη*.

### 2.2.3. Αμεταβλητότητα κατά τη μετατόπιση

*Αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση σύστημα (AKM, SI: Shift invariant)* λέγεται ένα σύστημα του οποίου η έξοδος εξαρτάται μόνο από το σήμα εισόδου και όχι από την χρονική στιγμή που αυτό εισήλθε στο σύστημα. Δηλαδή, αν η είσοδος  $x(n)$  καθυστερήσει κατά  $n_0$ , τότε η έξοδος θα είναι η  $y(n)$  καθυστερημένη κατά  $n_0$ . Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως ακολούθως. Έστω ότι το σύστημα δίνεται από τη σχέση

$$y(n) = T[x(n)] \quad (2.2.3.1)$$

η ολισθημένη είσοδος είναι

$$x_{n_0}(n) = x(n - n_0) \quad (2.2.3.2)$$

και η αντίστοιχη έξοδος

$$y_{n_0}(n) = T[x_{n_0}(n)] = T[x(n - n_0)] \quad (2.2.3.3)$$

Το σύστημα  $T[\cdot]$  είναι χρονικά αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση αν

$$y_{n_0}(n) = y(n - n_0) \quad (2.2.3.4)$$

Δηλαδή το σύστημα  $T[\cdot]$  είναι χρονικά αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση αν ισχύει η σχέση:

$$y(n - n_0) = T[x(n - n_0)] \quad (2.2.3.5)$$

Η προηγούμενη σχέση (2.2.3.5) ίσως δημιουργεί στο αναγνώστη την αίσθηση ότι πρέπει να αληθεύει πάντοτε αφού προκύπτει από την (2.2.3.3), αν θέσει όπου  $n$  την ποσότητα  $n - n_0$ . Αυτό θα ήταν αληθές αν ο τελεστής  $T$  περιέγραφε μία συνάρτηση με μοναδική ανεξάρτητη μεταβλητή την  $x(n)$ . Αυτό όμως δεν συμβαίνει στη γενική περίπτωση. Ας δούμε παραδείγματα χρονικά αμετάβλητων ή μεταβαλλόμενων κατά τη μετατόπιση συστημάτων.

#### Παράδειγμα (Π.2.2.3.1)

Έστω το σύστημα που δίνεται από τη σχέση

$$y(n) = K \cdot x(n) \quad (2.2.3.6)$$

και περιγράφει ένα ενισχυτή πλάτους με κέρδος  $K$  που μένει σταθερό κατά τη διάρκεια λειτουργίας του.

Για την μετατοπισμένη είσοδο

$$x_{n_0}(n) = x(n - n_0) \quad (2.2.3.7)$$

η αντίστοιχη έξοδος είναι

$$y_{n_0}(n) = K \cdot x_{n_0}(n) = K \cdot x(n - n_0) \quad (2.2.3.8)$$

Η  $y[n]$  μετατοπισμένη κατά  $n_0$  δίνεται από τη σχέση

$$y(n - n_0) = K \cdot x(n - n_0) \quad (2.2.3.9)$$

Από τις (2.2.3.8) και (2.2.3.9) προκύπτει ότι  $y(n - n_0) = T[x(n - n_0)]$  άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

#### Παράδειγμα (Π.2.2.3.2)

Έστω ότι στον ενισχυτή του προηγούμενου παραδείγματος το κέρδος  $K$  μεταβάλλεται λόγω δυσλειτουργίας (υπερθέρμανση) σύμφωνα με τη σχέση  $K(n) = 0.9^{-n}$ . Το σύστημα θα δίνεται από τη σχέση

$$y(n) = 0.9^{-n} \cdot x(n) \quad (2.2.3.10)$$

Για την μετατοπισμένη είσοδο

$$x_{n_0}(n) = x(n - n_0) \quad (2.2.3.11)$$

η αντίστοιχη έξοδος είναι

$$y_{n_0}(n) = 0.9^{-n} \cdot x_{n_0}(n) = 0.9^{-n} \cdot x(n - n_0) \quad (2.2.3.12)$$

Η  $y[n]$  μετατοπισμένη κατά  $n_0$  δίνεται από τη σχέση

$$y(n - n_0) = 0.9^{-(n - n_0)} \cdot x(n - n_0) \quad (2.2.3.13)$$

Από τις (2.2.3.12) και (2.2.3.13) προκύπτει ότι  $y(n - n_0) \neq T[x(n - n_0)]$  άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

### Παράδειγμα (Π.2.2.3.3)

Έστω το σύστημα που δίνεται από τη σχέση

$$y(n) = x(-n) \quad (2.2.3.14)$$

Για την μετατοπισμένη είσοδο

$$x_{n_0}(n) = x(n - n_0) \quad (2.2.3.15)$$

η αντίστοιχη έξοδος είναι

$$y_{n_0}(n) = x_{n_0}(-n) = x(-n - n_0) \quad (2.2.3.16)$$

Η  $y[n]$  μετατοπισμένη κατά  $n_0$  δίνεται από τη σχέση

$$y(n - n_0) = x(-(n - n_0)) = x(-n + n_0) \quad (2.2.3.17)$$

Από τις (2.2.3.16) και (2.2.3.17) προκύπτει ότι  $y(n - n_0) \neq T[x(n - n_0)]$  άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

## **2.2.4. Γραμμικότητα**

Ένα σύστημα λέγεται γραμμικό αν για αυτό ισχύουν οι ιδιότητες της *ομογένειας* και της *επαλληλίας*. Η αρχή της ομογένειας ισχύει για ένα διακριτό σύστημα όταν ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$T[c \cdot x(n)] = c \cdot T[x(n)] \quad (2.2.4.1)$$

όπου  $c$  είναι γενικά μιγαδική σταθερά

Η αρχή της επαλληλίας ισχύει για ένα σύστημα όταν ισχύει η σχέση

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] \quad (2.2.4.2)$$

Η γραμμικότητα ενός συστήματος μπορεί να περιγραφεί με μία μαθηματική σχέση ως ακολούθως

$$T[c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)] = c_1 \cdot T[x_1(n)] + c_2 \cdot T[x_2(n)] \quad (2.2.4.3)$$

#### Παράδειγμα (Π.2.2.4.1)

Έστω το σύστημα που δίνεται από τη σχέση

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)] \quad (2.2.4.4)$$

$$T[c \cdot x(n)] = \frac{1}{2}[c \cdot x(n) + c \cdot x(n-1)] \quad (2.2.4.5)$$

$$c \cdot T[x(n)] = c \cdot \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)] = \frac{1}{2}[c \cdot x(n) + c \cdot x(n-1)] \quad (2.2.4.6)$$

Από τις (2.2.4.5) και (2.2.4.6) έπεται ότι το σύστημα έχει την ιδιότητα της ομογένειας.

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n) + x_1(n-1) + x_2(n-1)] \quad (2.2.4.7)$$

$$\begin{aligned} T[x_1(n)] + T[x_2(n)] &= \frac{1}{2}[x_1(n) + x_1(n-1)] + \frac{1}{2}[x_2(n) + x_2(n-1)] = \\ &= \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n) + x_1(n-1) + x_2(n-1)] \end{aligned} \quad (2.2.4.8)$$

Από τις (2.2.4.7) και (2.2.4.8) έπεται ότι το σύστημα έχει την ιδιότητα της επαλληλίας.

Δεδομένου ότι ισχύουν η ομογένεια και η επαλληλία το σύστημα είναι γραμμικό.

#### Παράδειγμα (Π.2.2.4.2)

Έστω το σύστημα που δίνεται από τη σχέση

$$y(n) = x(n) + 1 \quad (2.2.4.9)$$

$$T[c \cdot x(n)] = c \cdot x(n) + 1 \quad (2.2.4.10)$$

$$c \cdot T[x(n)] = c \cdot [x(n) + 1] = c \cdot x(n) + c \quad (2.2.4.11)$$

Από τις (2.2.4.10) και (2.2.4.11) έπεται ότι το σύστημα δεν έχει την ιδιότητα της ομογένειας.

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = x_1(n) + x_2(n) + 1 \quad (2.2.4.12)$$

$$T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = x_1(n) + 1 + x_2(n) + 1 = x_1(n) + x_2(n) + 2 \quad (2.2.4.13)$$

Από τις (2.2.4.12) και (2.2.4.13) έπεται ότι το σύστημα δεν έχει την ιδιότητα της επαλληλίας. Δεδομένου ότι δεν ισχύουν η ομογένεια και η επαλληλία το σύστημα είναι δεν γραμμικό.

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι ένα σύστημα της μορφής

$$y(n) = \sum_{k=0}^K a_k \cdot x(n-k) \quad (2.2.4.13)$$

όπου  $a_k$  σταθερός όρος είναι γραμμικό και αμετάβλητο κατά την μετατόπιση. Για παράδειγμα το σύστημα  $y(n) = 2 \cdot x(n) - 3 \cdot x(n-2)$  είναι LTI. Γραμμικό και αμετάβλητο κατά την μετατόπιση είναι επίσης ένα σύστημα που περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών της μορφής

$$\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \beta_{\lambda} \cdot y(n-\lambda) = \sum_{k=0}^K a_k \cdot x(n-k) \quad (2.2.4.14)$$

Για παράδειγμα το σύστημα που ικανοποιεί την σχέση  $y(n) - 2y(n-1) = x(n) - 3.5 \cdot x(n-2)$  είναι LTI. Εάν στο αριστερό μέρος της 2.2.4.14 κρατήσουμε μόνο τον όρο  $y(n)$  η ακόλουθη σχέση περιγράφει ένα σύστημα LTI

$$y(n) = \sum_{k=0}^K a_k \cdot x(n-k) - \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \beta'_{\lambda} \cdot y(n-\lambda), \beta'_{\lambda} = \frac{\beta_{\lambda}}{\beta_0} \quad (2.2.4.15)$$

Το σύστημα  $y(n) = x(n) - 3.5 \cdot x(n-2) + 2 \cdot y(n-1)$  είναι LTI.

Οι σχέσεις 2.2.4.14 και 2.2.4.15 αποτελούν ένα αναδρομικό τρόπο περιγραφής των συστημάτων.

## 2.2.5 Αιτιότητα

Ένα σύστημα λέγεται *αιτιατό* αν η τιμή της εξόδου  $y(n)$  εξαρτάται από την τιμή  $x(n)$  του σήματος εισόδου και ενδεχομένως προηγούμενές της τιμές  $x(n-k)$ ,  $k$  φυσικός αριθμός. Διαφορετικά το σύστημα λέγεται *μη αιτιατό* ή *αντιατιατό*. Για παράδειγμα το σύστημα  $y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)]$  είναι αιτιατό. Αντίθετα το σύστημα

$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n+1)]$  είναι μη αιτιατό. Τα αιτιατά συστήματα καλούνται *μη προβλέψιμα*. Όταν η μεταβλητή  $n$  αφορά τον πραγματικό χρόνο (real time) το



σύστημα είναι μόνο αιτιατό αφού οι τιμές της εισόδου μετά τη τρέχουσα χρονική στιγμή είναι άγνωστες. Εάν όμως η μεταβλητή  $n$  αφορά τον χώρο ( θέσεις μνήμης, αύξοντες αριθμούς κ.λ.π.) είναι δυνατό το σύστημα να είναι αιτιατό ή αντιατιατό. Ένα σύστημα επεξεργασίας ηχοσήματος σε πραγματικό χρόνο είναι μόνο αιτιατό. Ένα σύστημα που αποθηκεύει τις τιμές ενός ηχοσήματος και ακολούθως τις επεξεργάζεται μπορεί να είναι αιτιατό ή μη.

### 2.2.6. Ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου

Ένα σύστημα λέγεται ότι είναι *ευσταθές υπό την έννοια της φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου*, αν για οποιαδήποτε απολύτως φραγμένο σήμα εισόδου το σήμα εξόδου είναι και αυτό απολύτως φραγμένο. Δηλαδή για οποιοδήποτε  $x(n)$

$$\exists A \in \mathbb{R} : |x(n)| \leq A, \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists B \in \mathbb{R} : |T[x(n)]| \leq B, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.2.6.1)$$

το σύστημα  $T[\cdot]$  είναι ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου.

### 2.2.7. Αντιστρέψιμα συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται αντιστρέψιμο αν μπορεί να προσδιοριστεί μοναδικά το σήμα εισόδου από το σήμα εξόδου. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$y_1(n) \neq y_2(n) \Rightarrow x_1(n) \neq x_2(n) \quad (2.2.7.1)$$

### 2.2.8. Απόκριση συστήματος σε κρουστική διέγερση, το συνελκτικό άθροισμα

Την έξοδο ενός συστήματος όταν είσοδος του είναι η διακριτή κρουστική ώση αποκαλούμε *απόκριση σε κρουστική διέγερση* και την συμβολίζουμε ως  $h(n)$

$$h(n) = T[(\delta(n))] \quad (2.2.8.1)$$

Έστω το γραμμικό ανεξάρτητο κατά την μετατόπιση (Linear Shift Invariant: LSI ή αλλιώς Linear Time Invariant: LTI) σύστημα  $T$ . Σύμφωνα με τη σχέση (2.1.7.1) η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)\right] \quad (2.2.8.2)$$

Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό ισχύει η αρχή της επαλληλίας και της ομογένειας και ως εκ τούτου

$$y(n) = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k) \cdot \delta(n-k)] \Rightarrow \quad (2.2.8.3)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot T[\delta(n-k)] \Rightarrow \quad (2.2.8.4)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h_k(n) \quad (2.2.8.5)$$

Αν το σύστημα είναι ανεξάρτητο κατά την μετατόπιση τότε

$$h_k(n) = h(n-k) \quad (2.2.8.6)$$

Από τις σχέσεις 2.2.8.5 και 2.2.8.6 συνεπάγεται ότι η έξοδος ενός γραμμικού ανεξάρτητο κατά τη μετατόπιση συστήματος σε οποιαδήποτε είσοδο  $x(n)$ , δίνεται από τη σχέση

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k) \quad (2.2.8.7)$$

Η σχέση 2.2.8.7 λέγεται και συνελκτικό άθροισμα των ακολουθιών  $x(n)$ , και  $h(n)$

Γενικά, για δύο ακολουθίες  $x(n)$ , και  $y(n)$  το συνελκτικό άθροισμα τους συμβολίζεται  $x(n) * y(n)$  ή  $\{x * y\}(n)$  και δίνεται από τη σχέση

$$x(n) * y(n) = \{x * y\}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot y(n-k) \quad (2.2.8.8)$$

Συχνά χρησιμοποιείται η ονομασία συνέλιξη των διακριτών σημάτων εννοώντας το συνελκτικό άθροισμα. Από τη σχέση 2.2.8.7 συμπεραίνουμε ότι αν γνωρίζουμε την απόκριση σε κρουστική διέγερση ενός συστήματος LTI, μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδό του σε οποιαδήποτε είσοδο από τη σχέση

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (2.8.8.9)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η απόκριση σε κρουστική διέγερση ενός συστήματος LTI το προσδιορίζει πλήρως. Από την απόκριση σε κρουστική διέγερση ενός LTI συστήματος ελέγχεται η αιτιότητα και η ευστάθειά του. Συγκεκριμένα αφού σε ένα αιτιατό σύστημα η έξοδος δεν εξαρτάται από τιμές τις εισόδου που ακολουθούν την τιμή  $x(n)$  τότε η απόκρισή του σε κρουστική διέγερση είναι ένα σήμα δεξιάς πλευράς διότι δεν εξαρτάται από τιμές  $\delta(n+n_0)$ ,  $n_0 > 0$ . Ένα σύστημα LTI με απόκριση σε κρουστική διέγερση  $h(n)$  είναι ευσταθές BIBO αν ισχύει η συνθήκη

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \in R \quad (2.8.8.10)$$

Απόδειξη

Για κάθε φραγμένο σήμα εισόδου  $x(n)$  ισχύει ότι  $\exists A \in R : |x(n)| \leq A, \forall n \in Z$ . Αν  $h(n)$  η απόκριση σε κρουστική διέγερση ενός LTI συστήματος για την έξοδό του  $y(n)$  θα ισχύει ότι

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k) \cdot x(n-k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot |x(n-k)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot A = A \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \quad (2.8.8.11)$$

Άρα για να είναι BIBO ευσταθές το σύστημα πρέπει και αρκεί να ισχύει η (2.8.8.10).

### 2.2.9. Ιδιότητες της συνέλιξης διακριτών σημάτων

Η συνέλιξη δύο ακολουθιών είναι μια πράξη (τελεστής) μεταξύ δυο ακολουθιών. Είναι γραμμικός τελεστής και έχει την αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική ως την πρόσθεση ιδιότητα.

Η αντιμεταθετική ιδιότητα

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n) \quad (2.2.9.1)$$

Απόδειξη

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot y(n-k), \text{ θέτοντας } m=n-k \quad (2.2.9.2)$$

$$x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) \cdot y(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m) \cdot x(n-m) = y(n) * x(n) \quad (2.2.9.3)$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα

$$[x(n) * y(n)] * z(n) = x(n) * [y(n) * z(n)] \quad (2.2.9.4)$$

Η απόδειξη γίνεται με κατάλληλη αντικατάσταση των δεικτών και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. Αν δύο συστήματα LTI με αποκρίσεις κρουστικής διέγερσης  $h_1(n)$  και  $h_2(n)$  είναι συνδεδεμένα σε σειρά, η προσεταιριστική ιδιότητα έχει σαν αποτέλεσμα τα δύο συστήματα να ισοδυναμούν με ένα σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$

Η επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση

$$x(n) * [y(n)] + z(n) = x(n) * y(n) + x(n) * z(n) \quad (2.2.9.5)$$

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. Αν δύο συστήματα LTI με αποκρίσεις κρουστικής διέγερσης  $h_1(n)$  και  $h_2(n)$  είναι συνδεδεμένα παράλληλα, η επιμεριστική ιδιότητα έχει σαν αποτέλεσμα τα δύο συστήματα να ισοδυναμούν με ένα σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$

## 2.2.10. Τρόποι υπολογισμού της συνέλιξης διακριτών σημάτων

Ο υπολογισμός της συνέλιξης δύο ακολουθιών που ορίζονται αλγεβρικά μπορεί να γίνει με χρήση ταυτοτήτων που αφορούν αθροίσματα όρων και όρια σύγκλισης ακολουθιών όπως στα ακόλουθα παραδείγματα

Να υπολογισθεί η συνέλιξη  $u(n) * u(n-n_0)$

$$u(n) * u(n-n_0) = u(n-n_0) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k-n_0) \cdot u(n-k) \Rightarrow \quad (2.2.10.1)$$

$$u(n) * u(n-n_0) = \sum_{k=n_0}^n 1 = n - n_0 + 1$$

Να υπολογισθεί η συνέλιξη  $[a^n u(n)] * u(n)$ ,  $a \neq 1$

$$[a^n u(n)] * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k) \cdot u(n-k) = \sum_{k=0}^n a^k = \quad (2.2.10.2)$$

$$a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Αν  $x(n)$  και  $y(n)$  σήματα με πεπερασμένα μήκη  $N_x$  και  $N_y$ , στα διαστήματα  $[L_x, R_x]$  και  $[L_y, R_y]$  αντίστοιχα η συνέλιξη τους θα είναι

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot y(n-k) \text{ με}$$

$$L_x \leq k \leq R_x \quad (2.2.10.3)$$

και

$$L_y \leq n-k \leq R_y \Rightarrow \quad (2.2.10.4)$$

$$R_y + n \leq k \leq L_y + n \quad (2.2.10.5)$$

Από τις σχέσεις (2.2.10.3) και (2.2.10.4) προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη ότι

$$L_x + L_y \leq n \leq R_x + R_y \quad (2.2.10.6)$$

και

$$\max(L_x, n - R_y) \leq k \leq \min(R_x, n - L_y) \quad (2.2.10.7)$$

Συνεπώς το αποτέλεσμα της συνέλιξης των δύο σημάτων θα είναι ένα σήμα με πεπερασμένο μήκος  $N=N_x+N_y-1$  στο διάστημα  $[L_x+L_y, R_x+R_y]$  και τιμές

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=\max(L_x, n-R_y)}^{\min(R_x, n-L_y)} x(k) \cdot y(n-k) \quad (2.2.10.8)$$

Για την εκτέλεση της συνέλιξης σημάτων πεπερασμένου μήκους που περιγράφονται από τις αριθμητικές τιμές τους, οργανώνουμε τους υπολογισμούς, γράφοντας αρχικά τα σήματα όπως απαιτεί ο ορισμός του συνελκτικού αθροίσματος για κάθε τιμή του  $n$  στο διάστημα  $[L_x+L_y, R_x+R_y]$  και ακολούθως εκτελούμε τις πράξεις. Για παράδειγμα αν  $x=[2 \ 1 \ 3 \ 4]$  με  $L_x=0$  και  $y=[1 \ 2 \ -1]$  με  $L_y=0$  οι τιμές των μεταβλητών  $n, k$  και των σημάτων  $x(n)$  και  $y(n-k)$  φαίνονται στον Πιν.2.2.10.1, του οποίου οι γραμμοσκιασμένες περιοχές περιέχουν τις τιμές εκτέλεσης πράξεων για τον υπολογισμό της συνέλιξης. Η σκιασμένη περιοχή περιέχει τα γινόμενα με παράγοντες όλους τους συνδυασμούς ανά δύο, των τιμών των δύο σημάτων. Από αυτές τις τιμές η διαδικασία της ολίσθησης καθορίζει ποια γινόμενα θα χρησιμοποιηθούν στο υπολογισμό του συνελκτικού αθροίσματος για κάθε τιμή της ακέραιας μεταβλητής  $n$ . Η διαδικασία μπορεί να συμπυκνωθεί όπως φαίνεται στον Πιν.2.2.10.2.

$k$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5			
$x(k)$	0	0	0	0	2	1	3	4	0	0			
$N$	$y(n-k)$										$\{x*y\}(n)$		
-1	$y(-1-k)$	0	-1	2	1	0	0	0	0	0	0·0	0	
0	$y(-k)$	0	0	-1	2	1	0	0	0	0	2·1	2	
1	$y(1-k)$	0	0	0	-1	2	1	0	0	0	2·2+1·1	5	
2	$y(2-k)$	0	0	0	0	-1	2	1	0	0	2·(-1)+2·1+3·1	3	
3	$y(3-k)$	0	0	0	0	0	-1	2	1	0	1·(-1)+3·2+4·1	9	
4	$y(4-k)$	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	3·(-1)+4·2	5	
5	$y(5-k)$	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	4·(-1)	-4	
6	$y(6-k)$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	0·0	0

$$\left| \begin{array}{ccccccccccccccc} 7 & y(7-k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Πίνακας 2.2.10.1

$y \backslash x$	2	1	3	4
1	2	1	3	4
2	4	2	6	8
-1	-2	-1	-3	-4

Πίνακας 2.2.10.2

# Περί μετασχηματισμών σημάτων διακριτού χρόνου.

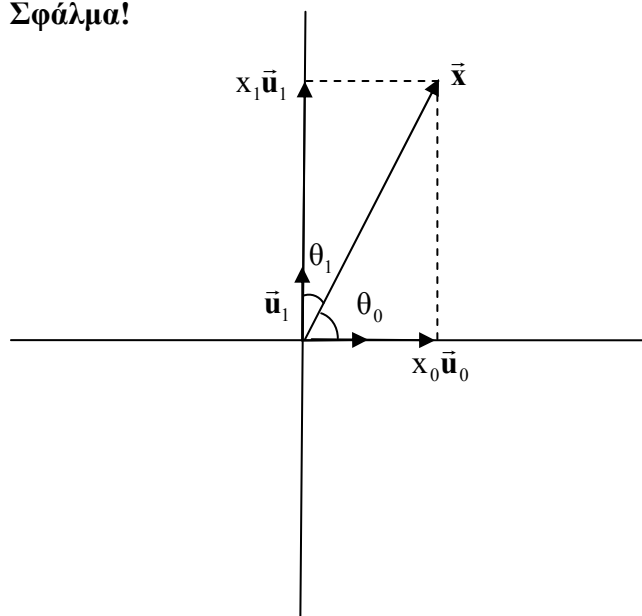
### 3.1 Εισαγωγή

Υπάρχει ένα πλήθος μετασχηματισμών που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των σημάτων και των συστημάτων. Οι πιο βασικοί είναι, ο μετασχηματισμός *Fourier* και ο μετασχηματισμός *Z*. Άλλοι μετασχηματισμοί είναι αυτοί του συνημιτόνου του ημιτόνου, ο *Sort Time Fourier Transform* και τα κυμματίδια (wavelets). Οι μετασχηματισμοί *Fourier*, ημιτόνου και συνημιτόνου, είναι μετασχηματισμοί των διακριτών σημάτων σε ορθοκανονικές και ορθομοναδιαίες βάσεις. Υπάρχει πλούσια βιβλιογραφία για τον ορισμό των μετασχηματισμών αυτών και την αυστηρή μαθηματική τους διερεύνηση. Εδώ θα εστιάσουμε στην ερμηνεία τους ώστε να βοηθηθεί ο αναγνώστης να αντιληφθεί γεωμετρικά και παραστατικά την βασική ιδέα από τις συνήθεις μαθηματικές εκφράσεις τους. Αυτό θα βοηθήσει σημαντικά στην δυνατότητά του να κατανοήσει την χρήση των μετασχηματισμών αυτών σε διάφορα πεδία (σχεδιασμός φίλτρων, συμπίεση) καθώς και να προχωρήσει στην κατανόηση της φύσης πιο σύνθετων μετασχηματισμών όπως τα κυμματίδια.

### 3.2 Ερμηνεία μετασχηματισμών με διανυσματική ανάλυση.

Ας υποθέσουμε λοιπόν για λόγους απλότητας και για να έχουμε τη δυνατότητα γεωμετρικής αναπαράστασης, το σήμα με πεπερασμένο μήκος  $N=2$  (Σχ.3.2.1) και πραγματικές τιμές  $x[0]$ ,  $x[1]$ .

**Σφάλμα!**



Σχήμα 3.2.1

Το άνυσμα  $\vec{x}$  με συντεταγμένες  $(x_0, x_1)$  με  $x_0=x[0]$ ,  $x_1=x[1]$ , γράφεται με την άλγεβρα των ανυσμάτων σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου ως

$$(3.2.1) \vec{x} = x_0 \vec{u}_0 + x_1 \vec{u}_1$$

όπου  $\vec{u}_0$  και  $\vec{u}_1$  ανύσματα κάθετα μεταξύ τους με μήκος τη μονάδα και συντεταγμένες  $(1,0)$  και  $(0,1)$  αντίστοιχα στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων που ορίζουν. **Επειδή τα  $\vec{u}_0$  και  $\vec{u}_1$  είναι κάθετα μεταξύ τους ο κανόνας του παραλληλογράμμου έχει ως αποτέλεσμα οι τιμές  $x_0$  και  $x_1$  να είναι οι προβολές του  $\vec{x}$  σ' αυτά. Ακόμη, επειδή τα  $\vec{u}_0$  και  $\vec{u}_1$  έχουν μέτρο τη μονάδα, οι συντεταγμένες  $x_0, x_1$  δίνονται από τις σχέσεις:**

$$(3.2.2) x_0 = |\vec{x}| \cos(\theta_0) \text{ και } x_1 = |\vec{x}| \cos(\theta_1)$$

Υπενθυμίζεται ότι για το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων  $\vec{x}(x_0, x_1)$  και  $\vec{y}(y_0, y_1)$  ισχύει

$$(3.2.3) \vec{x} \cdot \vec{y} = |x| \cdot |y| \cos(\theta) = x_0 y_0 + x_1 y_1.$$

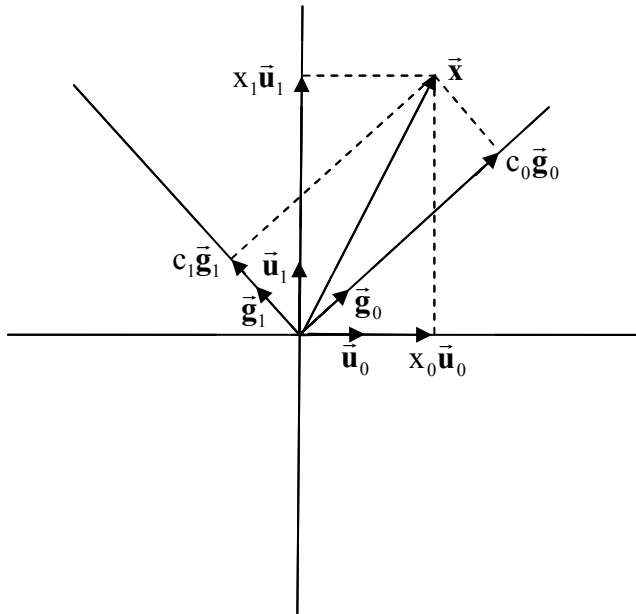
Επειδή τα  $\vec{u}_0$  και  $\vec{u}_1$  έχουν μέτρο τη μονάδα (μοναδιαία ανύσματα) ισχύει:

$$(3.2.4) x_0 = \vec{x} \cdot \vec{u}_0 \text{ και } x_1 = \vec{x} \cdot \vec{u}_1$$

Ζεύγη κάθετων διανυσμάτων με μήκος μονάδα υπάρχουν απείρου πλήθους, για παράδειγμα τα:



$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  και  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  και  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $(0,-1)$  με  $(1,0)$ .



Σχήμα 3.2.2.

Έστω  $\vec{g}_0$  ( $g_{00}, g_{01}$ ) και  $\vec{g}_1$  ( $g_{10}, g_{11}$ ) διανύσματα κάθετα μεταξύ τους με μήκος μονάδα έκαστο όπως δείχνει το Σχ.3.3.2. Το άνυσμα  $\vec{x}$  γράφεται σαν άθροισμα

$$(3.2.5) \vec{x} = c_0 \vec{g}_0 + c_1 \vec{g}_1$$

όπου  $c_0$  και  $c_1$  οι προβολές του  $\vec{x}$  στα  $\vec{g}_0$  και  $\vec{g}_1$ . **Επειδή τα  $\vec{g}_0$  και  $\vec{g}_1$  είναι κάθετα μεταξύ τους ο κανόνας του παραλληλογράμμου έχει ως αποτέλεσμα οι τιμές  $c_0, c_1$  να είναι οι προβολές του  $\vec{x}$  σ' αυτά. Ακόμη, επειδή τα  $\vec{g}_0$  και  $\vec{g}_1$  έχουν μέτρο τη μονάδα, οι συντεταγμένες  $c_0, c_1$  δίνονται από τις σχέσεις:**

$$(3.2.6) c_0 = \vec{x} \cdot \vec{g}_0 \text{ και } c_1 = \vec{x} \cdot \vec{g}_1$$

Αντικαθιστώντας το  $\vec{x} = x_0 \vec{u}_0 + x_1 \vec{u}_1$  από την (1.1) στις (1.6)

$$(3.2.7) c_0 = (x_0 \vec{u}_0 + x_1 \vec{u}_1) \cdot \vec{g}_0 = x_0 \vec{u}_0 \cdot \vec{g}_0 + x_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{g}_0 = x_0 g_{00} + x_1 g_{01}$$

και αν χρησιμοποιήσουμε την γραφή  $x_0 = x[0]$  και  $g_{00} = g_0[0]$ ,  $g_{01} = g_0[1]$  που χρησιμοποιείται στα σήματα διακριτού χρόνου.

$$(3.2.8) c_0 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] g_0[n]$$

Όμοια έχουμε

$$(3.2.9) c_1 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] g_1[n]$$

Για να υπολογίσουμε τα  $x[0]$ ,  $x[1]$  από τα  $c_0$ ,  $c_1$  αντικαθιστούμε από την σχέση (3.2.5) το  $\bar{\mathbf{x}} = c_0 \bar{\mathbf{g}}_0 + c_1 \bar{\mathbf{g}}_1$  στις (1.4)  $x_0 = \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{u}}_0$  και  $x_1 = \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{u}}_1$  οπότε

$$(3.2.10) x_0 = (c_0 \bar{\mathbf{g}}_0 + c_1 \bar{\mathbf{g}}_1) \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 = c_0 \bar{\mathbf{g}}_0 \bar{\mathbf{u}}_0 + c_1 \bar{\mathbf{g}}_1 \bar{\mathbf{u}}_0 = c_0 g_{00} + c_1 g_{10}$$

και αν χρησιμοποιήσουμε την γραφή  $x_0=x[0]$  και  $g_{00}=g_0[0]$ ,  $g_{10}=g_1[0]$  που χρησιμοποιείται στα σήματα διακριτού χρόνου

$$(3.2.11) x[0] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g_k[0]$$

Όμοια έχουμε

$$(3.2.12) x[1] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g_k[1]$$

### 3.3 Ερμηνεία μετασχηματισμών με γραμμική άλγεβρα

Η περιγραφή του σήματος με διανυσματική αναπαράσταση, γραφή και υπολογισμούς, μπορεί να γίνει με την χρήση της γραμμικής άλγεβρας που αποτελεί εξαιρετικό εργαλείο για τα σήματα διακριτού χρόνου, χωρίς των περιορισμό του φυσικού χώρου των ανυσμάτων

$$(3.3.1) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \end{bmatrix}, \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_1$  είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους (ορθοκανονικά) και αποτελούν μία ορθοκανονική βάση. Ισχύουν προφανώς οι σχέσεις:

$$(3.3.2) \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{u}_1 = 1 \text{ και } \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{u}_0 = 0$$

$$(3.3.3) x[0] = \mathbf{u}_0^T \mathbf{x} \text{ και } x[1] = \mathbf{u}_1^T \mathbf{x}$$

Παρατηρήστε τον συσχετισμό των σχέσεων (1.4), (2.3).

$$(3.3.4) \mathbf{x} = \mathbf{u}_0 \cdot x[0] + \mathbf{u}_1 \cdot x[1] = \mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{u}_0^T \mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_1^T \mathbf{x})$$

Παρατηρήστε τον συσχετισμό των σχέσεων (3.2.1), (3.3.4).

Τα  $\mathbf{u}_0$  και  $\mathbf{u}_1$  έχουν τιμές των  $\delta[n]$  και  $\delta[n-1]$  αντίστοιχα και ως γνωστόν ισχύει η σχέση

$$(3.3.5) x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot \delta[n-k] = \delta[n]x[0] + \delta[n-1]x[1]$$

παρατηρούμε την ομοιότητα των σχέσεων (3.3.5), (3.3.4) και (3.2.1).

Αν  $\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} g_0[0] \\ g_0[1] \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} g_1[0] \\ g_1[1] \end{bmatrix}$  ζεύγος ορθοκανονικών διανυσμάτων και

$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_0 \ \mathbf{g}_1]$ , θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$(3.3.6) \ \mathbf{g}_0^T \cdot \mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_1^T \cdot \mathbf{g}_1 = 1 \text{ και } \mathbf{g}_0^T \cdot \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1^T \cdot \mathbf{g}_0 = 0$$

οι προβολές του  $\mathbf{x}$  σ' αυτά θα δίνονται ως εσωτερικά γινόμενα από τις σχέσεις:

$$(3.3.7) \ c_0 = \mathbf{g}_0^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} g_0[0] & g_0[1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \end{bmatrix} = g_0[0] \cdot x[0] + g_0[1] \cdot x[1] = \sum_{n=0}^{N-1} g_0[n] \cdot x[n]$$

$$(3.3.8) \ c_1 = \mathbf{g}_1^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} g_1[0] & g_1[1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \end{bmatrix} = g_1[0] \cdot x[0] + g_1[1] \cdot x[1] = \sum_{n=0}^{N-1} g_1[n] \cdot x[n]$$

**Παρατηρείστε την ομοιότητα των σχέσεων (3.3.7) και (3.3.8) με τις (3.2.6) και ότι καταλήγουν στις (3.2.8) και (3.2.9).** Γενικά αν  $k=0..N-1$  και  $n=0..N-1$ , θα ισχύει ότι

$$(3.3.9) \ c_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_k[n] \cdot x[n]$$

Με βάση τα παραπάνω αν  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$ , ισχύει ότι

$$(3.3.10) \ \mathbf{C} = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{x}$$

Το ζητούμενο τώρα είναι να υπολογισθεί ο  $\mathbf{x}$  αν είναι γνωστοί οι πίνακες  $\mathbf{G}$  και  $\mathbf{C}$ .

Αν υπάρχει ο πίνακας  $\mathbf{G}^{-1}$  (αντίστροφος του  $\mathbf{G}$ ) τότε

$$(3.3.11) \ \mathbf{x} = (\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{C}$$

**Επειδή η βάση είναι ορθοκανονική ισχύουν οι (3.3.2) αρα**

$$(3.3.12) \ \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0^T \\ \mathbf{g}_1^T \end{bmatrix} [\mathbf{g}_0 \ \mathbf{g}_1] = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0^T \mathbf{g}_0 & \mathbf{g}_0^T \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_0 & \mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \Rightarrow$$

$$(3.3.13) \ \mathbf{G} = (\mathbf{G}^T)^{-1} \Rightarrow$$

$$(3.3.14) \ \mathbf{x} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{C} \Rightarrow$$

$$(3.3.15) \ \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \end{bmatrix} = [\mathbf{g}_0 \ \mathbf{g}_1] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = c_0 \mathbf{g}_0 + c_1 \mathbf{g}_1 = c_0 \begin{bmatrix} g_0[0] \\ g_0[1] \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} g_1[0] \\ g_1[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 g_0[0] + c_1 g_1[0] \\ c_0 g_0[1] + c_1 g_1[1] \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(3.3.16) \ x[0] = c_0 g_0[0] + c_1 g_1[0] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g_k[0] \text{ και}$$

$$(3.3.17) \ x[1] = c_0 g_0[1] + c_1 g_1[1] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g_k[1]$$

Οι σχέσεις (3.3.16) και (3.3.17) είναι ίδιες με τις (3.2.11) και (3.2.12). Στις πρώτες οδηγηθήκαμε από την (3.3.13) ενώ στις δεύτερες από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, και στις δύο περιπτώσεις όμως βασισθήκαμε στην ορθοκανονικότητα των διανυσμάτων της βάσης.

Γενικά αν  $n=0..N-1$  και  $k = 0..N-1$ , θα ισχύει

$$(3.3.18) \quad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g_k[n] \text{ δηλαδή } \underline{\text{ένα ανάπτυγμα του } x[n] \text{ σε σειρά των } g_k[n]}$$

Τα παραπάνω ισχύουν για οποιεσδήποτε τιμές του  $N$  και η σχέση (3.3.9)

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_k[n] \cdot x[n]$$

υπολογίζει τις προβολές (συντελεστές ανάπτυγματος σειράς) του διακριτού σήματος (ακολουθίας) στο σύστημα συντεταγμένων που ορίζει ο πίνακας  $\mathbf{G}$ , ενώ η σχέση (3.3.18)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g_k[n]$$

δίνει τις τιμές  $x[n]$  του σήματος.

Για παράδειγμα για  $N=3$  τα ανύσματα

$$\mathbf{g}_0 = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \quad \mathbf{g}_1 = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right], \quad \mathbf{g}_2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \right]$$

αποτελούν μία ορθοκανονική βάση και το σήμα  $\mathbf{x}=[1, 3, 2]$  προβάλλεται σ'αυτά με προβολές που δίνουν οι συντελεστές  $c_0 = 2\sqrt{3}$ ,  $c_1 = -\sqrt{2}/2$ ,  $c_2 = -\sqrt{6}/2$ . Για  $n=0,1,2$

$$x[n] = 2\sqrt{3}g_0[n] - \sqrt{2}/2g_1[n] - \sqrt{6}/2g_2[n]$$

Τα προηγούμενα ορθοκανονικά διανύσματα προήλθαν θέτοντας  $N=3$  στις σχέσεις

$$(3.3.19) \quad g_0(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad g_k(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{\pi}{2N} k(2n+1)\right) \text{ για } k=1..N-1 \text{ και } n=0,..,N-1$$

οπότε προέκυψαν οι τιμές των  $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  από τις σχέσεις

$$(3.3.20) \mathbf{g}_0(n) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \mathbf{g}_1(n) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6}(2n+1)\right), \quad \mathbf{g}_2(n) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3}(2n+1)\right)$$

### 3.4 Ο διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου (DCT: Discrete Cosine Transform)

Η σχέση (3.3.19)  $\mathbf{g}_0(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}$ ,  $\mathbf{g}_k(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{\pi}{2N} k(2n+1)\right)$  για  $k=1..N-1$  και  $n=0,..,N-1$  είναι ένας πυρήνας (kernel) δημιουργίας ορθοκανονικών διανυσμάτων για κάθε τιμή του  $N$ . Γενικά αν τα  $\mathbf{g}_k$  δίνονται από την (2.19) οι συντελεστές  $c_k$  για ένα διακριτό σήμα  $x[n]$  (δηλαδή οι προβολές του  $\mathbf{x}$  στα  $\mathbf{g}_k$ ) προκύπτουν με αντικατάσταση των  $\mathbf{g}_k$  από την (3.3.19) στη (3.3.9) από τη σχέση:

$$(3.4.1) c_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n], \quad c_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi}{2N} k \cdot (2n+1)\right) \cdot x[n] \quad \text{για } k=1..N-1$$

Η σχέση (3.4.1) αποτελεί τον μονοδιάστατο διακριτό μετασχηματισμό συνημιτόνου (1D-DCT: Discrete Cosine Transform). Οι τιμές  $x[n]$  (δηλαδή το  $\mathbf{x}$ ) προκύπτουν με αντικατάσταση των  $\mathbf{g}_k$  από τις (3.3.19) στη (3.3.18) σύμφωνα με τη σχέση

$$(3.4.2) x[n] = \frac{c_0}{\sqrt{N}} + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2N} k(2n+1)\right)$$

Η σχέση (3.4.2) αποτελεί τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό του συνημιτόνου.

Στο Σχ.3.4.1 δείχνονται τα ανύσματα βάσης του DCT για  $N=8$ .

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Για παράδειγμα για  $N=3$  τα ανύσματα

$$\mathbf{g}_0 = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \quad \mathbf{g}_1 = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right], \quad \mathbf{g}_2 = \left[ \frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \right]$$

προήλθαν από τις σχέσεις

$$\mathbf{g}_0(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \mathbf{g}_k(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{\pi}{2N} k(2n+1)\right) \quad \text{για } k=1..N-1 \quad \text{και } n=0,..,N-1$$

αποτελούν μία ορθοκανονική βάση και το σήμα  $\mathbf{x}=[1, 3, 2]^T$  προβάλλεται σ' αυτά με προβολές που δίνουν οι συντελεστές  $c_0 = 2\sqrt{3}$ ,  $c_1 = -\sqrt{2}/2$ ,  $c_2 = -\sqrt{6}/2$ . Για  $n=0,1,2$

$$x[n] = 2\sqrt{3}g_0[n] - \sqrt{2}/2g_1[n] - \sqrt{6}/2g_2[n]$$

2) Για  $\mathbf{x}=[1, 3, 2, -1]^T$  η τιμή  $N=4$  και για  $n=0,1,2,3$  τα ανύσματα βάσης είναι:

$$g_0[n] = \frac{1}{2} \quad \text{H} \quad \mathbf{g}_0 = [0.50, 0.50, 0.50, 0.50]^T$$

$$g_1[n] = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2n+1)\right) \quad \text{H} \quad \mathbf{g}_1 = [0.65, 0.27, -0.27, -0.65]^T$$

$$g_2[n] = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2N}2 \cdot (2n+1)\right) \quad \text{H} \quad \mathbf{g}_2 = [0.50, -0.50, 0.50, -0.50]^T$$

$$g_3[n] = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2N}3 \cdot (2n+1)\right) \quad \text{H} \quad \mathbf{g}_3 = [0.27, -0.65, 0.65, -0.27]^T$$

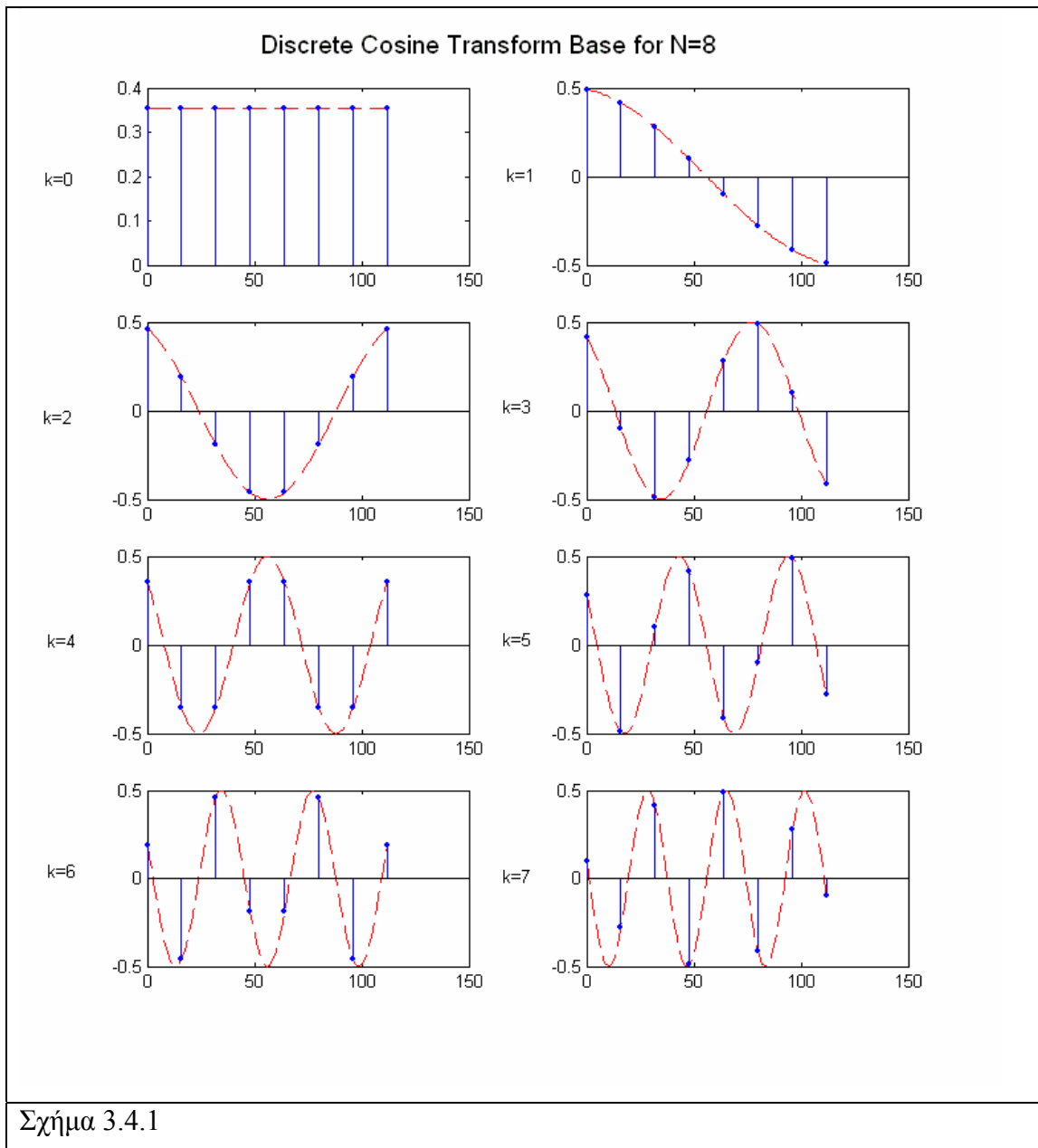
Οι συντελεστές  $c_k$  είναι τα στοιχεία του πίνακα

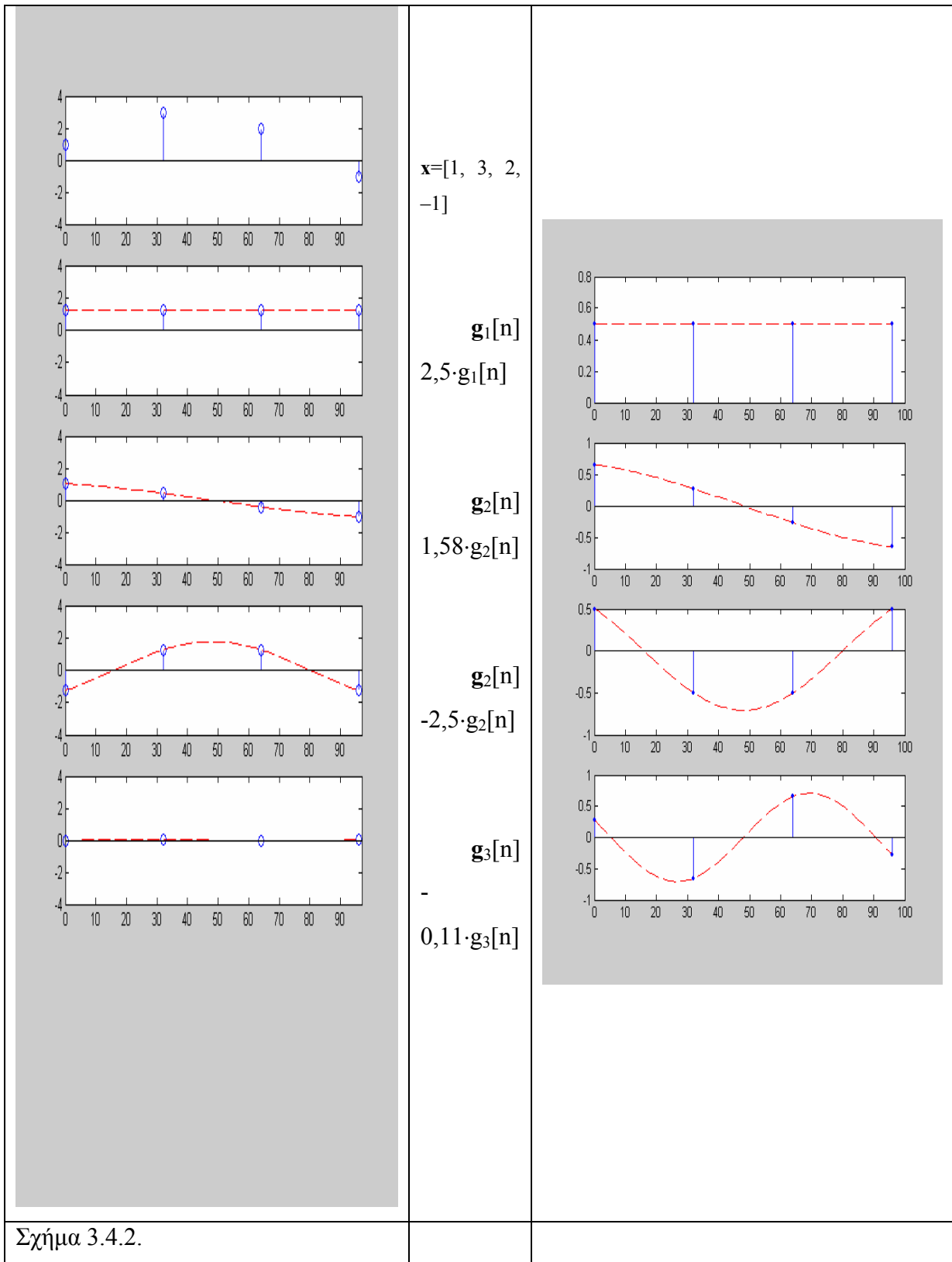
$$\mathbf{C} = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 0.65 & 0.27 & -0.27 & -0.65 \\ 0.50 & -0.50 & 0.50 & -0.50 \\ 0.27 & -0.65 & 0.65 & -0.27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.58 \\ -2.5 \\ -0.11 \end{bmatrix}$$

οι συντελεστές  $c_k$  προκύπτουν όμοια και από τις (3.1.1) Το σήμα ανακτάται από τις σχέσεις (3.1.2) ή από τον πίνακα

$$\mathbf{x} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.65 & 0.50 & 0.27 \\ 0.50 & 0.27 & -0.50 & -0.65 \\ 0.50 & -0.27 & 0.50 & 0.65 \\ 0.50 & -0.65 & -0.50 & -0.27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.58 \\ -2.5 \\ -0.11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Στο Σχ.3.4.2 δείχνονται τα ανύσματα βάσης του DCT για  $N=4$ , οι συντελεστές  $c_k$  του DCT του σήματος  $\mathbf{x}=[1, 3, 2, -1]$  και η ανάλυση του στις τέσσερις συνιστώσες  $c_k \mathbf{g}_k$ . Κάθε τιμή του  $x[n]$  είναι  $x[n]=2,5g_0[n]+ 1,58g_1[n]-2,5g_2[n]-0,11g_3[n]$ .







### 3.4.1 Ο δισδιάστατος (2Δ) διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου (2D-DCT: Discrete Cosine Transform)

Για διακριτά σήματα δύο διαστάσεων με μήκη  $N_1, N_2$  τα ανύσματα βάσης για  $n_1=0,\dots,N_1-1, n_2=0,\dots,N_2-1, k_1=0,\dots,N_1-1, k_2=0,\dots,N_2-1$  είναι:

$$(3.4.1.1) \quad g_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = g_{k_1}(n_1) \cdot g_{k_2}(n_2)$$

$$(3.2.1) \quad g_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = g_{k_1}(n_1) \cdot g_{k_2}(n_2)$$

π.χ.

$$g_{00}(n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}},$$

$$g_{0k_2}(n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{N_1}} \sqrt{\frac{2}{N_2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi k_2 (2n_2 + 1)}{2N_2}\right),$$

$$g_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = \sqrt{\frac{2}{N_1}} \cdot \cos\left(\frac{\pi k_1 (2n_1 + 1)}{2N_1}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{N_2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi k_2 (2n_2 + 1)}{2N_2}\right)$$

Για ένα δισδιάστατο διακριτό σήμα  $x[n_1, n_2]$  με μήκη  $N_1, N_2$ , οι προβολές του στα παραπάνω ορθοκανονικά ανύσματα βάσης είναι:

$$(3.4.1.2) \quad c_{00} = \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2]$$

$$c_{0k_2} = \sqrt{\frac{2}{N_1 N_2}} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2] \cdot \cos\left(\frac{\pi k_2 (2n_2 + 1)}{2N_2}\right)$$

$$c_{k_1 0} = \sqrt{\frac{2}{N_1 N_2}} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2] \cdot \cos\left(\frac{\pi k_1 (2n_1 + 1)}{2N_1}\right)$$

$$c_{k_1 k_2} = \frac{2}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2] \cdot \cos\left(\frac{\pi k_1 (2n_1 + 1)}{2N_1}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi k_2 (2n_2 + 1)}{2N_2}\right)$$

για  $k_1, k_2 \neq 0$ .

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν τον δισδιάστατο (2Δ) διακριτό μετασχηματισμό συνημιτόνου (2D-DCT: Discrete Cosine Transform). Το σήμα  $x[n_1, n_2]$  ανακτάται σύμφωνα με τη σχέση:

$$(3.4.1.3) \quad x[n_1, n_2] = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} c_{k_1 k_2} \cdot g_{k_1 k_2}[n_1, n_2]$$

που είναι ο αντίστροφος δισδιάστατος (2Δ) διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου.

Μετασχηματισμοί των οποίων η βάση ικανοποιεί την (3.4.1.1) λέγονται διαχωρίσιμοι και οι υπολογισμοί τους μπορούν να αναχθούν σε υπολογισμούς των μονοδιάστατων εκφράσεών τους.

### 3.5 Ερμηνεία και υπολογισμοί μετασχηματισμών μιγαδικών σημάτων διακριτού χρόνου.

Ας εξετάσουμε τώρα αν τα παραπάνω μπορούν να εφαρμοσθούν και σε μιγαδικά διακριτά σήματα πεπερασμένου μήκους. Η διανυσματική περιγραφή τέτοιων σημάτων γίνεται με πίνακες στήλης που τα στοιχεία τους είναι μιγαδικοί αριθμοί. Οι σχέσεις που καταλήξαμε στην περίπτωση των πραγματικών σημάτων πεπερασμένου μήκους  $N$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ) είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι αναλύσαμε το σήμα σε μία βάση ορθοκανονικών διανυσμάτων, διανυσμάτων δηλαδή που έχουν μέτρο ίσο με την μονάδα και είναι μεταξύ τους κάθετα. Προς τούτο χρησιμοποιήσαμε (σχέσεις (2.2)) την πράξη  $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$  για  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ . Αν όμως εκφράσουμε τον μιγάδα  $1+j$  που έχει μέτρο  $\sqrt{2}$  σε διανυσματική μορφή  $\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$ , η πράξη  $\begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = 0$  και όχι 2 όπως θα έπρεπε.

Επειδή για το μέτρο ενός μιγάδα  $z=a+bj$  ισχύει ότι  $|z|^2 = a^2 + b^2 = \bar{z} \cdot z$ , η πράξη

$\bar{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{x} = a^2 + b^2$ , με  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ bj \end{bmatrix}$  δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Το ίδιο ισχύει και με τον

υπολογισμό της προβολής του διανύσματος ενός μιγάδα στο διάνυσμα ενός άλλου. Εάν τελικά για ένα μιγαδικό διάνυσμα  $\mathbf{x}$  με  $N$  μιγαδικές τιμές ( $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ ) ορίσουμε ως τετράγωνο του μέτρου την ποσότητα  $\bar{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{x}$  εξασφαλίζουμε ότι αυτή είναι πραγματικός αριθμός. Δύο μιγαδικά διανύσματα (πίνακες στήλης)  $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1$  λέγονται ορθομοναδιαία αν

$$(3.5.1) \quad \bar{\mathbf{g}}_0^T \cdot \mathbf{g}_0 = \bar{\mathbf{g}}_1^T \cdot \mathbf{g}_1 = 1 \quad \text{και} \quad \bar{\mathbf{g}}_0^T \cdot \mathbf{g}_1 = \bar{\mathbf{g}}_1^T \cdot \mathbf{g}_0 = 0$$

Στη γραμμική άλγεβρα ο συζυγής ενός μιγαδικού πίνακα  $\mathbf{A}$ , γράφεται  $\bar{\mathbf{A}}$  και αποτελείται από τα συζυγή στοιχεία του  $\mathbf{A}$ . Ο αντίστροφος του συζυγούς του  $\mathbf{A}$ , δηλαδή ο  $\bar{\mathbf{A}}^T$ , λέγεται αναστροφοςυζυγής του  $\mathbf{A}$  ή  $\mathbf{A}$  Ερμιτιανός και γράφεται  $\mathbf{A}^H$ . Συνεπώς η (4.1) γράφεται

$$(3.5.2) \quad \mathbf{g}_0^H \cdot \mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_1^H \cdot \mathbf{g}_1 = 1 \quad \text{και} \quad \mathbf{g}_0^H \cdot \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1^H \cdot \mathbf{g}_0 = 0$$

Αν

(3.5.3)  $\mathbf{G}=[\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{N-1}]$  πίνακας ορθομοναδιαίων διανυσμάτων τότε ο

$$(3.5.4) \mathbf{G}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0^H \\ \mathbf{g}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{N-1}^H \end{bmatrix} \text{ και ισχύει ότι}$$

$$(3.5.5) \mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I} \text{ άρα}$$

$$(3.5.6) \mathbf{G}^H = \mathbf{G}^{-1}$$

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση των ορθοκανονικών βάσεων ένα μιγαδικό διάνυσμα  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^N$  μπορεί να προβληθεί σε ορθομοναδιαία μιγαδικά διανύσματα  $\mathbf{g}_k \in \mathbf{C}^N$ ,  $k=0, \dots, N-1$  με μιγαδικές εν γένει προβολές  $c_k$  ( $c_k \in \mathbf{C}^N$ ). Με βάση τους παραπάνω ορισμούς και πράξεις όπως αυτές που ακολουθήσαμε στην περίπτωση των πραγματικών διανυσμάτων ισχύουν οι σχέσεις:

$$(3.5.7) c_k = \mathbf{g}_k^H \mathbf{x}$$

$$(3.5.8) \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{x} \text{ και } \mathbf{x} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{C} \text{ (λόγω της (3.5.6) )}$$

$$(3.5.9) c_k = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{g}_k[n] \cdot x[n]$$

$$(3.5.10) x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g_k[n], \text{ δηλαδή } \underline{\text{ένα ανάπτυγμα του } x[n] \text{ σε σειρά των } g_k[n]}$$

Ο ερμιτιανός ενός πίνακα πραγματικών αριθμών είναι ο ανάστροφος του, συνεπώς οι σχέσεις που καταλήξαμε για τα πραγματικά διανύσματα είναι ειδικές περιπτώσεις των σχέσεων που ισχύουν για τα μιγαδικά.

## Ο μετασχηματισμός Fourier

### 4.1 Εισαγωγή

. Όπως προαναφέρθηκε ο μετασχηματισμός Fourier είναι θεμελιώδους σημασίας στην ανάλυση των σημάτων και των συστημάτων συνεχούς ή διακριτής ανεξάρτητης μεταβλητής. Μέσω αυτού περιοδικές συναρτήσεις και ακολουθίες αναλύονται σε αθροίσματα όρων που καθένας τους εκφράζει μία αρμονική ταλάντωση. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform, DFT), την διακριτή σειρά Fourier (Discrete Fourier Series, DFS), τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (Discrete Time Fourier Transform, DTFT) και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Οι ορισμοί, οι ιδιότητες, οι μεταξύ τους σχέσεις και σχέσεις του με τα συνελκτικά αθροίσματα αποτελούν προϋπόθεση για την κατανόηση της χρήσης του στην ανάλυση των σημάτων και των συστημάτων.

### 4.2 Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier-N σημείων.

Ένας πυρήνας παραγωγής ορθομοναδιαίων διανυσμάτων είναι ο τύπος

$$(4.2.1) \mathbf{g}_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{kn} \text{ όπου } W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

Η βάση είναι ορθομοναδιαία διότι ισχύουν οι σχέσεις (3.5.1) όπως δείχνεται ακολούθως

$$(4.2.2) \mathbf{g}_k^H \cdot \mathbf{g}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^0 = \frac{N}{N} = 1$$

$$(4.2.3) \mathbf{g}_m^H \cdot \mathbf{g}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}N(k-m)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}} = 0 \text{ για}$$

$k \neq m$

Από τις (3.5.9) και (3.5.10) προκύπτουν οι συντελεστές και το ανάπτυγμα σε σειρά ενός πεπερασμένου μήκους  $N$  σήματος  $x$

$$(4.2.4) \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot x[n]$$

$$(4.2.5) \quad x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Η σχέση (4.2.4) αποτελεί τον μοναδιαίο (unitary) διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Time Fourier Transform ή DFT)  $N$ -σημείων και η (4.2.5) την αντίστοιχη σειρά.

Αν θέσουμε  $C_k = c_k \sqrt{N}$  στις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις

$$(4.2.6) \quad C_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot x[n] \quad \text{ή} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot x[n]$$

$$(4.2.7) \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{ή} \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Όπου αντί των του συμβολισμού  $C_k$  χρησιμοποιείται ο  $X(k)$ . Η σχέση (4.2.6) αποτελεί τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform ή DFT)  $N$ -σημείων και η (4.2.7) την διακριτή σειρά Fourier (Discrete Fourier Series) ενός διακριτού σήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

Για το σήμα  $x=[1,3,2]$  ,  $N=3$ ,  $n=0,1,2$ ,  $k=0,1,2$ , τα ορθομοναδιαία διανύσματα βάσης είναι:

$$\mathbf{w}_3^0 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{3} \cdot 0 \cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{3} \cdot 0 \cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{3} \cdot 0 \cdot 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3^1 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{3} \cdot 1 \cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{3} \cdot 1 \cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{3} \cdot 1 \cdot 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3^2 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{3} \cdot 2 \cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{3} \cdot 2 \cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{3} \cdot 2 \cdot 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = [\mathbf{w}_3^0 \quad \mathbf{w}_3^1 \quad \mathbf{w}_3^2] = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3^H = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Οι τιμές  $c_k$  του DFT είναι τα στοιχεία του πίνακα

$$\mathbf{C} = \mathbf{W}_3^H \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Οι τιμές του σήματος ανακτούνται από τις τιμές  $c_k$  του DFT στο πίνακα

$$\mathbf{x} = \frac{1}{3} \mathbf{W}_3 \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1, & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Επειδή  $e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$  και  $e^{j\frac{2\pi}{N}km} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$  αν  $m=N-n$ , οι πίνακες  $\mathbf{W}$  και  $\mathbf{W}^H$  είναι συμμετρικοί ως προς την διαγώνιο και το  $n+1$  στοιχείο μιας γραμμής ισούται με το συζυγές του  $N-n+1$  στοιχείου της ίδιας γραμμής όταν αυτό υπάρχει και ως εκ τούτου οι υπολογισμοί επιταχύνονται.

### 4.3 Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Η ποσότητα  $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ ,  $k=0..N-1$ , ονομάζεται κυκλική συχνότητα και παίρνει  $N$  διακριτές τιμές από 0 έως  $(2\pi(N-1)/N)$ . Για σήματα μη πεπερασμένου μήκους το  $N \rightarrow \infty$  και η μεταβλητή  $\omega_k$  αντικαθίσταται από την μεταβλητή  $\omega \in [0, 2\pi]$ . Ο Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (Discrete Time Fourier Transform ή DTFT) ορίζεται από τη σχέση:

$$(4.3.1) \quad \tilde{x}(\omega) = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} \cdot x[n]$$

Για να υπολογιστούν οι τιμές  $x[n]$  από την (4.3.1) ενεργούμε ως ακολούθως:  
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (45) με  $e^{j\omega m}$

$$(4.3.2) \quad e^{j\omega m} X(e^{j\omega}) = e^{j\omega m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} \cdot x[n] \Rightarrow$$

$$(4.3.3) \quad e^{j\omega m} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega m} e^{-j\omega n} \cdot x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega(m-n)} \cdot x[n]$$

ολοκληρώνουμε ως προς  $\omega$  από  $-\pi$  έως  $\pi$  τα μέλη της ισότητας (4.3.3)

$$(4.3.4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} X(e^{j\omega}) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega(m-n)} \cdot x[n] d\omega = x[n] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega$$

αν  $m=n$

$$(4.3.5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^0 d\omega \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 2\pi$$

αν  $m \neq n$

$$(4.3.6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \left. \frac{e^{j\omega(m-n)}}{j(m-n)} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{j\pi(m-n)} - e^{-j\pi(m-n)}}{j(m-n)} = \frac{\cos((m-n)\pi) + j\sin((m-n)\pi) - \cos(-(m-n)\pi) - j\sin(-(m-n)\pi)}{j(m-n)} = \frac{-1 + 0 + 1 - 0}{j(m-n)} = 0$$

άρα η (4.3.4) γίνεται

$$(4.3.7) \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} X(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi \cdot x[n] \Rightarrow$$

$$(4.3.8) x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega n} X(e^{j\omega}) d\omega$$

Η σχέση αυτή αποτελεί τον Αντίστροφο Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου.

Για να ορίζεται ο DTFT ενός σήματος είναι προφανές ότι πρέπει το  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|$  να

συγκλίνει. Αυτό δεν συμβαίνει για σήματα μη πεπερασμένου μήκους που είναι περιοδικά και ως εκ τούτου δεν υπάρχει για αυτά DTFT. Αν  $\tilde{x}[n]$  περιοδικό διακριτό σήμα με πρωτεύουσα περίοδο  $N$  ισχύει ότι

$$(4.3.9) \tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + \lambda N]$$

Αν  $x[n]$  πεπερασμένου μήκους σήμα  $N$ ,

$$(4.3.10) x[n] = \tilde{x}[n](u[n] - u[n - N]) \text{ τότε}$$

$$(4.3.11) \tilde{x}[n] = x[n \bmod N]$$

όπου  $(n \bmod N)$  το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $n$  με το  $N$ . Ισχύει προφανώς ότι

$$(4.3.12) n = N\lambda + (n \bmod N) \text{ και } 0 \leq (n \bmod N) \leq N-1 \text{ όπου } \lambda \text{ το πηλίκο της}$$

διαίρεσης του  $n$  με το  $N$ .

Για το  $x[n]$  που είναι πεπερασμένου μήκους υπάρχει ο DFT και η DFS που δίνονται από τις σχέσεις (4.2.6) και (4.2.7)

Επειδή  $x[n] = \tilde{x}[n]$  για  $n=0, \dots, N-1$  η (4.2.6) γράφεται

$$(4.3.13) C_k = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot \tilde{x}[n]$$

και αποτελεί την διακριτή σειρά Fourier (DFS) του  $\tilde{x}[n]$ . Από τις (4.3.11) και (4.2.7) προκύπτει ότι



$$\tilde{x}[n] = x[n \bmod N] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}k(n \bmod N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-\lambda N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}\lambda N} \Rightarrow$$

$$(4.3.14) \quad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{ή} \quad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

που αποτελεί τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) του  $\tilde{x}[n]$ .

Άρα για τα περιοδικά διακριτά σήματα χρησιμοποιούμε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) και την διακριτή σειρά Fourier DFS.

Σύμφωνα με τα παραπάνω για ένα διακριτό σήμα  $x(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N$  ορίζεται και υπάρχει ο FT και ο DFT-N δειγμάτων σύμφωνα με τις σχέσεις

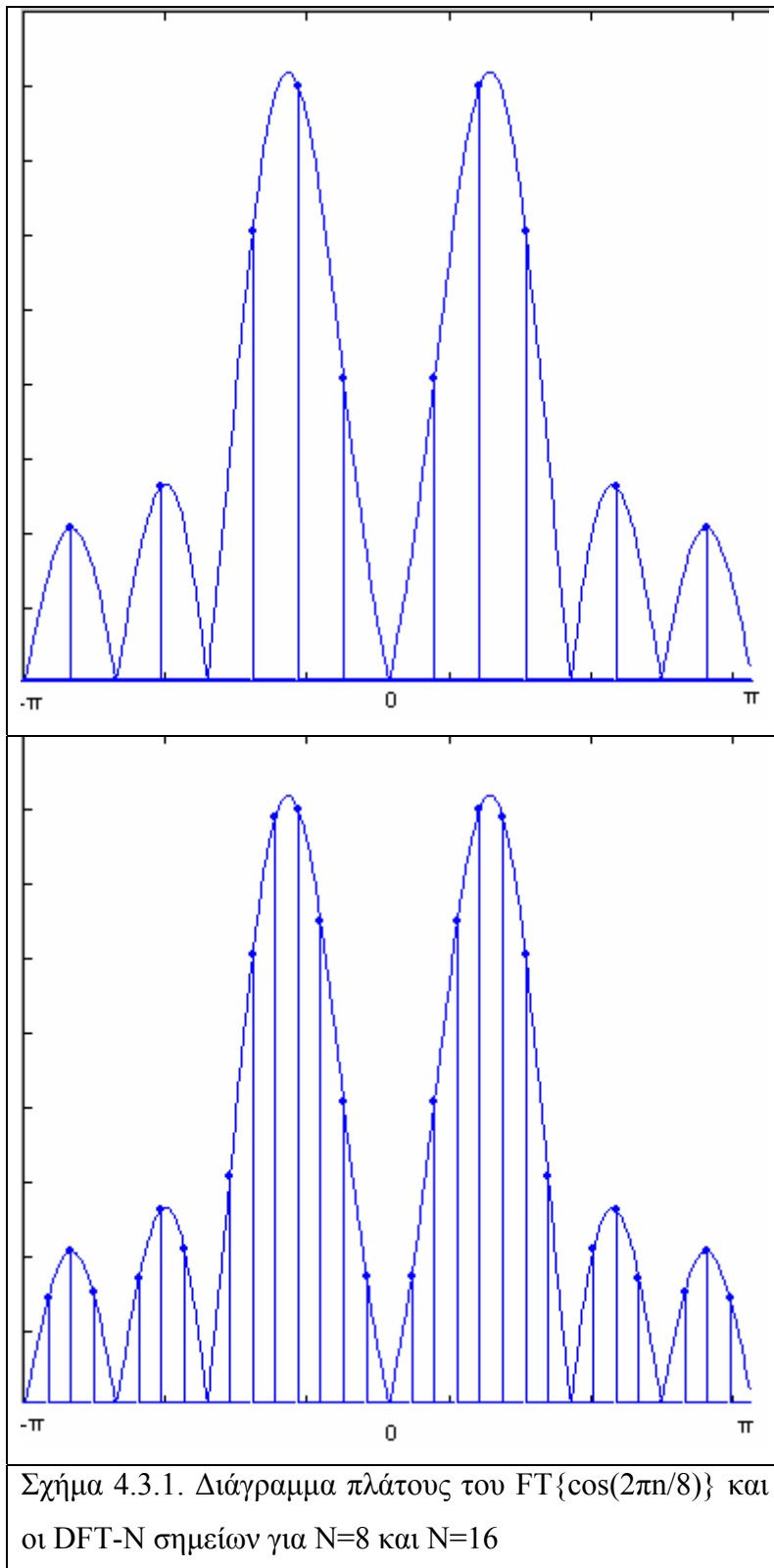
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\omega n}, \quad \omega \in (-\pi, \pi]$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Από τις οποίες προκύπτει ότι

$$(4.3.15) \quad X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k=0, \dots, N-1$$

Δηλαδή ο DFT-N σημείων του  $x(n)$ , προκύπτει από την δειγματοληψία της κυκλικής συχνότητας  $\omega$  του FT του  $x(n)$  με δείγματα που απέχουν διαδοχικά μεταξύ τους απόσταση  $2\pi/N$ . Αν αυξήσουμε το μήκος  $N$  προσθέτοντας μηδενικές τιμές στο τέλος του  $x(n)$ , ο FT δεν θα αλλάξει θα αυξηθεί όμως το πλήθος των δειγμάτων του DFT-N σημείων (Σχ.4.3.1).



#### 4.3.1 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Από μαθηματικής απόψεως υπάρχουν ιδιότητες του FT που βοηθούν στον υπολογισμό αυτού και του αντιστρόφου του καθώς και στην περεταίρω διαδικασία ανάλυσης των σημάτων και των συστημάτων.

##### Περιοδικότητα

Ο DTFT είναι περιοδικός ως προς  $\omega$  με περίοδο  $2\pi$ . Ισχύει δηλαδή η σχέση

$$(4.3.1) \quad X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$$

##### Συμμετρία

Ο DTFT παρουσιάζει κάποια είδη συμμετρίας ανάλογα με το διακριτό σήμα. Τα είδη αυτά συμμετρίας αναγράφονται στο ακόλουθο πίνακα 4.3.1.1.

$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
Πραγματική και άρτια	Πραγματική και άρτια
Πραγματική και περιττή	Φανταστική και περιττή
Φανταστική και άρτια	Φανταστική και άρτια
Φανταστική και περιττή	Πραγματική και άρτια

Πίνακας 4.3.1.1

##### Γραμμικότητα

$$(4.3.1.2) \quad a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n) \stackrel{DTFT}{\Leftrightarrow} a \cdot X_1(e^{j\omega}) + b \cdot X_2(e^{j\omega})$$

##### Ιδιότητα της Μετατόπισης

$$(4.3.1.3) \quad x(n - n_0) \stackrel{DTFT}{\Leftrightarrow} e^{-j \cdot n_0 \omega} \cdot X(e^{j\omega})$$

##### Αντιστροφή στο χρόνο

$$(4.3.1.4) \quad x(-n) \stackrel{DTFT}{\Leftrightarrow} X(e^{-j\omega})$$

### Διαμόρφωση

$$(4.3.1.5) \quad e^{j \cdot n \cdot \omega_0} \cdot x(n) \stackrel{DTFT}{\Leftrightarrow} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

$$(4.3.1.6) \quad x(n) \cos n \cdot \omega_0 \stackrel{DTFT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} \cdot X(e^{j(\omega - \omega_0)}) + \frac{1}{2} \cdot X(e^{j(\omega + \omega_0)})$$

### Το Θεώρημα της Συνέλιξης

$$(4.3.1.7) \quad h(n) * x(n) \stackrel{DTFT}{\Leftrightarrow} H(e^{j \cdot \omega}) \cdot X(e^{j \cdot \omega})$$

### Το Θεώρημα του Πολλαπλασιασμού

$$(4.3.1.8) \quad x(n) \cdot y(n) \stackrel{DTFT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j \cdot \theta}) \cdot Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$$

### Το Θεώρημα του Parseval

$$(4.3.1.9) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j \cdot \omega})|^2 d\omega$$

Οι παραπάνω ιδιότητες αναγράφονται συνοπτικά στον πίνακα 4.3.1.2

Ιδιότητα	Ακολουθία	Μετασχηματισμός FOURIER διακριτού χρόνου
Γραμμικότητα	$a \cdot x(n) + b \cdot y(n)$	$a \cdot X(e^{j \cdot \omega}) + b \cdot Y(e^{j \cdot \omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(n - n_0)$	$e^{-j \cdot n_0 \cdot \omega} \cdot X(e^{j \cdot \omega})$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-n)$	$X(e^{-j \cdot \omega})$
Διαμόρφωση	$e^{j \cdot n \cdot \omega_0} \cdot x(n)$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(n) * y(n)$	$X(e^{j \cdot \omega}) \cdot Y(e^{j \cdot \omega})$
Μιγαδική συζυγία	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j \cdot \omega})$

Παραγώγιση	$n \cdot x(n)$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) \cdot Y(e^{j(\omega-\vartheta)}) \cdot d\vartheta$

Πίνακας 4.3.1.2

**Παράδειγμα 4.3.1** Ο DTFT της ακολουθίας

$$x_1(n) = a^n \cdot u(n) \quad |a| < 1$$

είναι

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot e^{-j\omega})^n$$

Με χρήση γεωμετρικών προόδων, το άθροισμα αυτό είναι

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$$

Με την προϋπόθεση ότι  $|a| < 1$ . Παρόμοια, για την ακολουθία

$$x_2(n) = -a^n \cdot u(-n-1) \quad |a| > 1$$

ο DTFT είναι

$$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot e^{-jn\omega}$$

Αλλάζοντας τα όρια του αθροίσματος, έχουμε

$$X_2(e^{j\omega}) = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \cdot e^{jn\omega} = -\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} \cdot e^{j\omega})^n + 1$$

Αν είναι  $|a| > 1$ , το άθροισμα είναι

$$X_2(e^{j\omega}) = -\frac{1}{1 - a^{-1} \cdot e^{j\omega}} + 1 = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$$

Επομένως, οι ακολουθίες  $x_1(n) = a^n u(n)$  και  $x_2(n) = -a^n \cdot u(-n-1)$ , έχουν τον ίδιο DTFT

Στο πίνακα 4.3.1.3 παρουσιάζεται ο DTFT μερικών βασικών ακολουθιών

Ακολουθία	Μετασχηματισμός FOURIER διακριτού χρόνου
$\delta(n)$	1

$\delta(n - n_0)$	$e^{-j \cdot n_0 \omega}$
1	$2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$
$e^{j \cdot n \cdot \omega_0}$	$2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
$a^n \cdot u(n),  a  < 1$	$\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j \cdot \omega}}$
$-a^n \cdot u(-n - 1),  a  > 1$	$\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j \cdot \omega}}$
$(n + 1) \cdot a^n \cdot u(n),  a  < 1$	$\frac{1}{(1 - a \cdot e^{-j \cdot \omega})^2}$
$\cos n \omega_0$	$\pi \cdot \delta(\omega + \omega_0) + \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$

Πίνακας 4.3.1.3

#### 4.4 Σχέση της συνέλιξης με το μετασχηματισμό και τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier

Αν  $\tilde{x}(n)$  και  $\tilde{y}(n)$  περιοδικές ακολουθίες με ίδια πρωτεύουσα περίοδο  $N$ , η περιοδική συνέλιξη τους γράφεται και ορίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$(4.4.1) \{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(n) \text{ ή } \tilde{x}(n) \otimes \tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \cdot \tilde{y}(n-k)$$

Μπορούμε να γράψουμε ακόμη ότι

$$(4.4.2) \tilde{x}(n) = x(n \bmod 4), \tilde{y}(n) = y(n \bmod 4),$$

με

$$(4.4.3) x(n) = \tilde{x}(n)[u(n) - u(n-N)], \tilde{y}(n) = \tilde{y}(n)[u(n) - u(n-N)],$$

σήματα πεπερασμένου μήκους  $N$ .

Από τις (4.4.1) και (4.4.2) προκύπτει ότι

$$(4.4.4) \tilde{x}(n) \otimes \tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \cdot \tilde{y}(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot y((n-k) \bmod N)$$

Δεξιό μέρος της (4.4.4) ονομάζεται κυκλική συνέλιξη δύο σημάτων πεπερασμένου μήκους  $N$  και γράφεται

$$(4.4.5) x(n) \circledast y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot y((n-k) \bmod N) = \{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(n)$$

Αριθμητικά η περιοδική συνέλιξη υπολογίζεται όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα

Έστω

$N$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\tilde{y}(n)$	...	3	0	4	2	3	0	4	2	...
$\tilde{x}(n)$	...	4	2	1	3	4	2	1	3	...

με πρωτεύουσα περίοδο  $N=4$

	$K$	...	-	-	-	-	0	1	2	3	...
			4	3	2	1					
	$\tilde{y}(k)$	...	3	0	4	2	3	0	4	2	...
	$\tilde{x}(k)$	...	4	2	1	3	4	2	1	3	...
$N=$	$\tilde{y}(-k)$	...	3	2	4	0	3	2	4	0	...
0											

$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(n)$
$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(0) = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0$ $= 20$

$N=$ 1	$\tilde{y}(1-k)$	...	0	3	2	4	0	3	2	4	...	$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(1)=$ $4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20$
$N=$ 2	$\tilde{y}(2-k)$	...	4	0	3	2	4	0	3	2	...	$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(2)=$ $4 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 25$
$N=$ 3	$\tilde{y}(3-k)$	...	2	4	0	3	2	4	0	3	...	$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(3)=$ $4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 25$

Στη γραμμοσκιασμένη περιοχή του πίνακα φαίνονται οι τιμές που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της κυκλικής συνέλιξης  $x(n) \circledast y(n)$  και της περιοδικής συνέλιξης  $\tilde{x}(n) \otimes \tilde{y}(n)$ .

Η γραμμική συνέλιξη και ο DTFT δύο σημάτων συνδέονται με την σχέση:

$$(4.4.6) \quad x(n) * y(n) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$$

όπου  $X(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega})$  οι μετασχηματισμοί Fourier των  $x(n)$  και  $y(n)$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) * y(n) \cdot e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot y(n-k) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot y(n-k) \cdot e^{-j\omega n} = \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) \cdot e^{-j\omega(n-k)} \cdot e^{-j\omega k} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot e^{-j\omega k} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) \cdot e^{-j\omega(n-k)} \stackrel{m=n-k}{=} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Η περιοδική συνέλιξη και ο DFT δύο περιοδικών σημάτων συνδέονται με την σχέση:

$$(4.4.7) \quad \tilde{x}(n) \otimes \tilde{y}(n) \stackrel{DFT}{\leftrightarrow} \tilde{X}(k) \cdot \tilde{Y}(k)$$

όπου  $\tilde{X}(k), \tilde{Y}(k)$  οι διακριτοί μετασχηματισμοί (DFT) των  $\tilde{x}(n)$  και  $\tilde{y}(n)$



Απόδειξη

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(n) \otimes \tilde{y}(n) &\stackrel{DFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \cdot y(n-m) \right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y(n-m) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = \\
 &\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y(n-m) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}km} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y(n-m) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} \stackrel{l=n-m}{=} \\
 &\tilde{X}(k) \cdot \sum_{l=-m}^{N-1-m} y(l) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} = \tilde{X}(k) \cdot \left( \sum_{l=0}^{N-1-m} y(l) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} + \sum_{l=-m}^{-1} y(l) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} \right) = \\
 &\tilde{X}(k) \cdot \left( \sum_{l=0}^{N-1} y(l) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} + \sum_{l=N-m}^{N-1} y(l+N) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k(l+N)} \right) = \\
 &\tilde{X}(k) \cdot \left( \sum_{l=0}^{N-1-m} y(l) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} + \sum_{l=N-m}^{N-1} y(l) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} \right) = \tilde{X}(k) \cdot \left( \sum_{l=0}^{N-1} y(l) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} \right) = \tilde{X}(k) \cdot \tilde{Y}(k)
 \end{aligned}$$

Η κυκλική συνέλιξη και ο DFT δύο σημάτων πεπερασμένου μήκους  $N$  συνδέονται με την σχέση:

$$(4.4.8) \quad x(n) \circledast y(n) \stackrel{DFT-N}{\leftrightarrow} X(k) \cdot Y(k)$$

όπου  $X(k), Y(k)$  οι διακριτοί μετασχηματισμοί (DFT-N δειγμάτων) των  $x(n)$  και  $y(n)$ .

Η σχέση αυτή προκύπτει από τις (4.4.2) και (4.4.5)

Έστω  $x(n)$  σήμα πεπερασμένου μήκους  $N_1$  με DFT  $X(k)$  και  $y(n)$  σήμα πεπερασμένου μήκους  $N_2$ . Προσθέτοντας στο τέλος του  $x(n)$  πλήθος  $N_2-1$  μηδενικών τιμών και στο  $y(n)$  πλήθος  $N_1-1$  μηδενικών τιμών προκύπτουν δύο νέα σήματα  $x_p(n)$  και  $y_p(n)$  πεπερασμένου μήκους  $N_1 + N_2 - 1$ . Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *zero padding*. Εύκολα μπορούμε να δούμε με κάποιο τυχαίο παράδειγμα αλλά και να αποδείξουμε ότι γενικά:

$$(4.4.9) \quad x(n) * y(n) = x_p(n) \circledast y_p(n)$$

Για παράδειγμα αν  $\mathbf{x}=[2 \ 4 \ 1 \ -1]$   $\mathbf{y}=[1 \ 3 \ 2]$ , τότε  $\mathbf{x}_p=[2 \ 4 \ 1 \ -1 \ 0]$ ,  $\mathbf{y}_p=[1 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0]$ .

2	4	1	-1	$\mathbf{x} * \mathbf{y}$	2	4	1	-1	0	0	$\mathbf{x}_p \circledast \mathbf{y}_p$
1				2	1	0	0	0	2	3	2
3	1			10	3	1	0	0	0	2	10
2	3	1		17	2	3	1	0	0	0	17

	2	3	1	10	0	2	3	1	0	0	10
		2	3	-1	0	0	2	3	1	0	-1
			2	-2	0	0	0	2	3	1	-2

Με βάση τα παραπάνω, αν  $X_p(k)$  και  $Y_p(k)$  οι DFT των  $x_p(n)$  και  $y_p(n)$  αντίστοιχα θα ισχύει ότι:

$$(4.4.10) \quad x(n) * y(n) = x_p(n) \circledast y_p(n) \stackrel{DFT-N}{\leftrightarrow} X_p(k) \cdot Y_p(k) \Rightarrow$$

$$(4.4.11) \quad x(n) * y(n) \stackrel{DFT-N}{\leftrightarrow} X_p(k) \cdot Y_p(k)$$

## Ανάλυση σημάτων και συστημάτων με τον μετασχηματισμό Fourier

### 5.1 Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Fourier (DTFT και DFT) είναι σημαντικότερος για την ανάλυση των σημάτων και των συστημάτων. Οι συχνότητες των αρμονικών ταλαντώσεων ( συχνοτικό περιεχόμενο) που ενυπάρχουν σε ένα σήμα ευρίσκονται μέσω του FT. Η επίδραση ενός συστήματος στο συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος εισόδου, αναλύεται επίσης μέσω του FT και προσδιορίζεται το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος εξόδου. Ο σχεδιασμός συστημάτων (φίλτρα) με επιθυμητή επίδραση βασίζεται στον FT.

### 5.2 Απόκριση συχνότητας

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα γραμμικό ανεξάρτητο από τη μετατόπιση με απόκριση κρουστικής διέγερσης  $h(n)$ . Η έξοδος του για οποιοδήποτε είσοδο  $x(n)$  θα είναι

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της συνέλιξης ισχύει ότι

$$h(n)*x(n)\overset{DTFT}{\Leftrightarrow}H(e^{j\omega})\cdot X(e^{j\omega})$$

όπου  $H(e^{j\omega})=DTFT\{h(n)\}$ . Η  $H(e^{j\omega})$  ονομάζεται *απόκριση συχνότητας* του συστήματος και καθορίζει την επίδραση του συστήματος στο DTFT του σήματος εισόδου. Με άλλα λόγια η απόκριση συχνότητας καθορίζει την επίδραση του συστήματος στο συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος εισόδου. Η  $H(e^{j\omega})$  παίρνει

μυγαδικές τιμές και ως εκ τούτου μπορεί να γραφεί με το πλάτος  $|H(e^{j\omega})|$  και τη φάση της  $\varphi(\omega)$  σύμφωνα με τη σχέση

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Η μελέτη της απόκρισης συχνότητας αφορά τον υπολογισμό και τη γραφική παράσταση του πλάτους και της φάσης της. Συχνά μελετάται και *καθυστέρηση ομάδας* (*group delay*)  $\tau(\omega)$  που ορίζεται ως

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

Όταν η φάση  $\varphi(\omega)$  είναι μια γραμμική συνάρτηση του  $\omega$ , το σύστημα λέγεται σύστημα γραμμικής φάσης.

### Παράδειγμα 5.2.1

Έστω το σύστημα  $y(n) = 0.5 \cdot x(n-1) + x(n) + 0.5 \cdot x(n+1)$ , να υπολογισθούν το πλάτος και φάση της απόκρισης συχνότητας και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις.

$$y[n] = +\frac{1}{2} \cdot x[n-1] + x[n] + \frac{1}{2} \cdot x[n+1] \Rightarrow$$

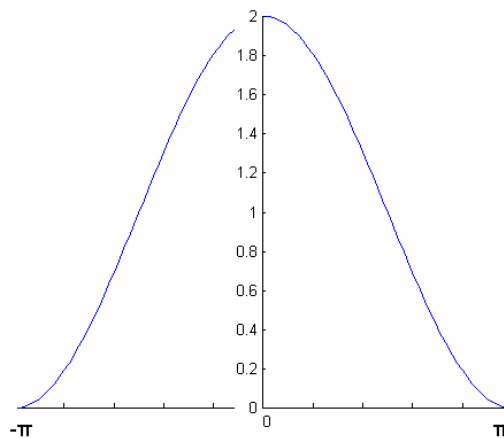
$$h[n] = +\frac{1}{2} \cdot \delta[n-1] + \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n+1] \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega} + 1 + \frac{1}{2} \cdot e^{j\omega} = 1 + \frac{1}{2} \cdot (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} (\cos \omega + j \cdot \sin \omega + \cos \omega - j \cdot \sin \omega) =$$

$$= 1 + \cos \omega$$

$$|H(e^{j\omega})| = 1 + \cos \omega$$



Η γραφική παράσταση του πλάτους  $|H(e^{j\omega})|$  της απόκρισης συχνότητας

Το σύστημα είναι ένα κατωδιαβατό ή χαμηλοπερατό φίλτρο.

### Παράδειγμα 5.2.2

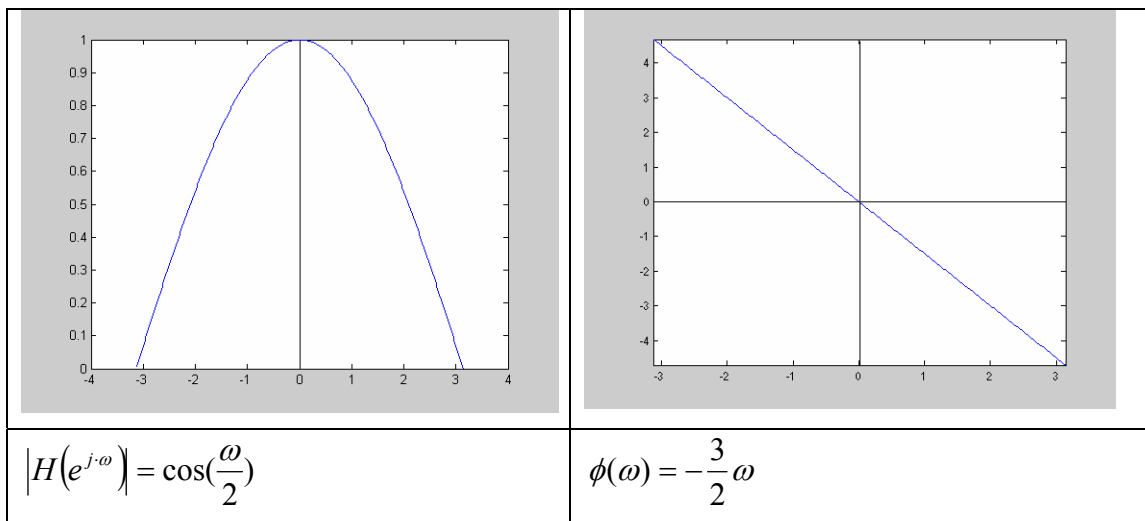
Έστω το σύστημα  $y(n]= 0.5 \cdot x(n-1)) + 0.5 \cdot x(n-2)$ , να υπολογισθούν το πλάτος και φάση της απόκρισης συχνότητας και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις.

$$h[n] = +\frac{1}{2} \cdot \delta[n-1] + \frac{1}{2} \delta[n-2] \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2j\omega} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{3}{2}j\omega} \cdot (e^{\frac{1}{2}j\omega} + e^{-\frac{1}{2}j\omega}) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-\frac{3}{2}j\omega} \Rightarrow$$

$$|H(e^{j\omega})| = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \phi(\omega) = -\frac{3}{2}\omega, \quad \tau(\omega) = -\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{3}{2}$$

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα πλάτους και φάσης της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.



Το σύστημα είναι γραμμικής φάσης. Η παράγωγος του είναι σταθερός αριθμός συνεπώς η καθυστέρηση ομάδας που δείχνει την καθυστέρηση (σε πλήθος δειγμάτων) που υφίσταται το σήμα εισόδου από το σύστημα είναι η ίδια για κάθε τιμή του  $\omega$ .

### Παράδειγμα 5.2.3 Θεωρούμε το LTI σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(n) = a^n \cdot u(n)$$

όπου  $a$ , ένας πραγματικός αριθμός με  $|a| < 1$ . Η απόκριση συχνότητας είναι

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}
 \end{aligned}$$

Το τετράγωνο του πλάτους της απόκρισης συχνότητας είναι

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 - a \cdot e^{j\omega}} = \frac{1}{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos \omega}$$

και η φάση είναι

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \cdot \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \tan^{-1} \cdot \frac{-a \cdot \sin \omega}{1 - a \cdot \cos \omega}$$

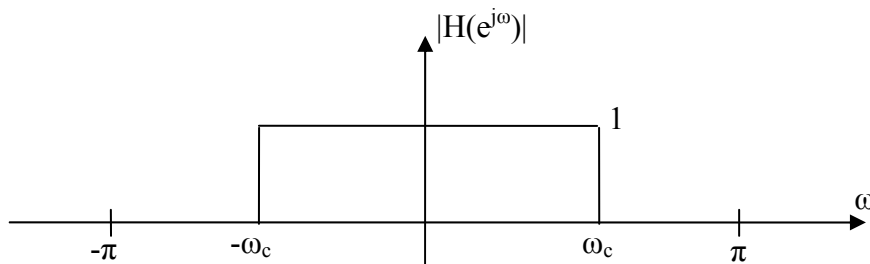
Τέλος, η καθυστέρηση ομάδας υπολογίζεται παραγωγίζοντας την συνάρτηση της φάσης. Το αποτέλεσμα είναι

$$\tau(\omega) = -\frac{a^2 - a \cdot \cos \omega}{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos \omega}$$

### 5.2.1 Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

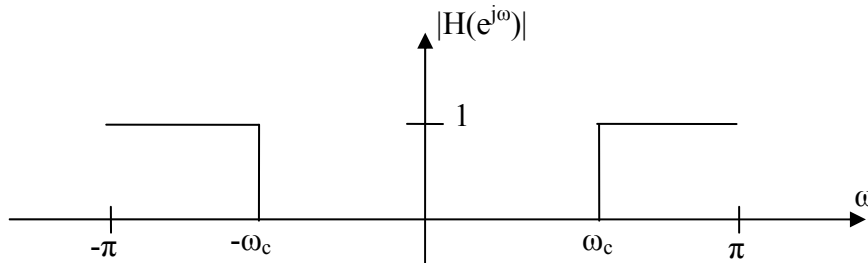
Ανάλογα με την μεταβολή του πλάτους της απόκρισης συχνότητας σε σχέση με την συχνότητα τα συστήματα διακρίνονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

*Χαμηλοπερατά (Low pass):* Το πλάτος έχει μεγάλες τιμές για χαμηλές τιμές της συχνότητας και μικρές τιμές για υψηλές τιμές της συχνότητας. Στην ιδανική περίπτωση το πλάτος της απόκρισης συχνότητας μεταβάλλεται όπως στο Σχ.5.2.1



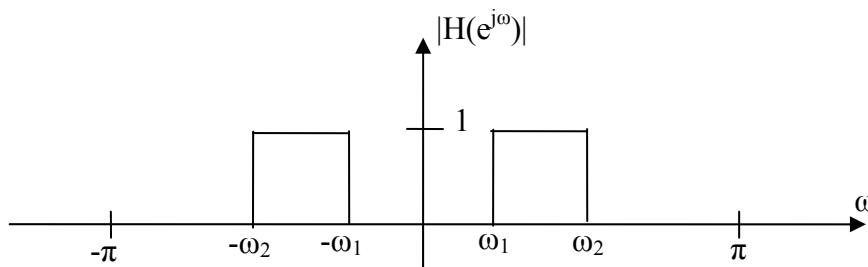
Σχήμα 5.2.1: Ιδανικό Χαμηλοπερατό Φίλτρο (Low-Pass)

*Υψηπερατά (High pass):* Το πλάτος έχει μεγάλες τιμές για υψηλές τιμές της συχνότητας και μικρές τιμές για χαμηλές τιμές της συχνότητας. Στην ιδανική περίπτωση το πλάτος της απόκρισης συχνότητας μεταβάλλεται όπως στο Σχ.5.2.2.



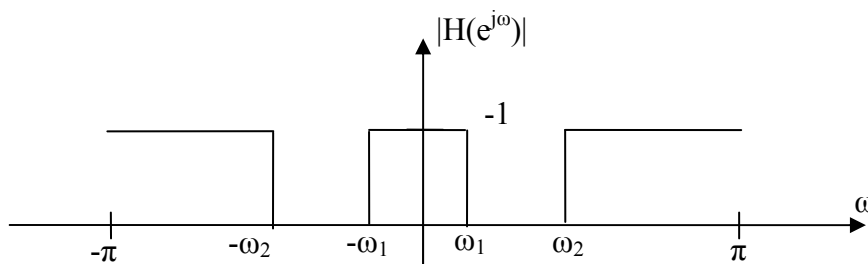
Σχήμα 5.2.2: Ιδανικό Υψηπερατό Φίλτρο (High-Pass)

*Ζωνοπερατά (Band pass):* Το πλάτος έχει μεγάλες τιμές σε μία ζώνη τιμών της συχνότητας και μικρές τιμές εκτός της ζώνης αυτής. Στην ιδανική περίπτωση το πλάτος της απόκρισης συχνότητας μεταβάλλεται όπως στο Σχ.5.2.3.



Σχήμα 5.2.3: Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (Band-Pass)

*Ζωνοφρακτικά (Band stop):* Το πλάτος έχει μικρές τιμές σε μία ζώνη τιμών της συχνότητας και μεγάλες τιμές εκτός της ζώνης αυτής. Στην ιδανική περίπτωση το πλάτος της απόκρισης συχνότητας μεταβάλλεται όπως στο Σχ.5.2.4.



### 5.3 Ανάλυση της δειγματοληψίας

Ο μετασχηματισμός Fourier και η περιοδικότητα των ημιτονοειδών διακριτών σημάτων οδηγούν σε σημαντικά συμπεράσματα για την δειγματοληψία των αναλογικών σημάτων. Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση της ανάλυσης της δειγματοληψίας με παρουσίαση των χαρακτηριστικών των ημιτονοειδών διακριτών σημάτων. Ένα διακριτό ημιτονοειδές σήμα είναι της μορφής

$$x(n) = A \cdot \cos(\omega \cdot n + \theta) \quad (5.3.1)$$

όπου  $A$  το πλάτος,  $\theta$  η φάση και  $\omega$  η κυκλική συχνότητά του. Επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ένα ακέραιος αριθμός που απαριθμεί τις διαδοχικές τιμές των δειγμάτων η κυκλική συχνότητα μετριέται σε ακτίνια ανά δείγμα (radians per sample). Η κυκλική συχνότητα στα ημιτονοειδή σήματα συνεχούς μεταβλητής μετριέται σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο επειδή αρχικά τα σήματα αυτά αφορούσαν αρμονικές ταλαντώσεις όπου η συνεχής μεταβλητή είναι ο χρόνος. Αντίστοιχα η ποσότητα  $f$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\omega = 2\pi f, \quad (5.3.2)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.3.3)$$

αποτελεί την συχνότητα του διακριτού ημιτονοειδούς σήματος και μετριέται σε κύκλους ανά δείγμα (circles per sample). Από τις σχέσεις (5.3.1) και (5.3.2) προκύπτει ότι

$$x(n) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot n + \theta) \quad (5.3.4)$$

Τα ημιτονοειδή σήματα  $x_a(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta)$  συνεχούς χρόνου με κυκλική συχνότητα  $\Omega$  (rad/sec) είναι περιοδικά με περίοδο  $T = 2\pi/\Omega$  (sec), συχνότητα  $F = 1/T$  ( $\text{sec}^{-1}$  ή Hz). Το ερώτημα είναι αν και πότε τα διακριτά ημιτονοειδή σήματα είναι περιοδικά.. Προς τούτο αν  $N$  η πρωτεύουσα περίοδος πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθος σχέσεις:

$$x(n) = x(n+N) \quad (5.3.5)$$

$$x(n) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot n + \theta + 2k\pi), \quad k \text{ ακέραιος} \quad (5.3.6)$$

$$x(n+N) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot (n+N) + \theta) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot n + \theta + 2\pi \cdot f \cdot N) \quad (5.3.7)$$

Άρα η περιοδικότητα εξασφαλίζεται αν



$$2\pi \cdot f \cdot N = 2k \cdot \pi \Leftrightarrow f = \frac{k}{N} \quad (5.3.8)$$

δηλαδή  $f$  να είναι ρητός αριθμός.

Η πρωτεύουσα περίοδος  $N$  είναι θετικός ακέραιος πρώτος προς τον  $k$ , (δηλαδή δεν έχουν κοινούς διαιρέτες). Για παράδειγμα αν  $A=1$ ,  $\theta=0$  ακτίνια,  $f=1/8$  κύκλοι ανά δείγμα η κυκλική συχνότητα είναι  $\omega=\pi/4$  ακτίνια ανά δείγμα και η περίοδος  $N=8$

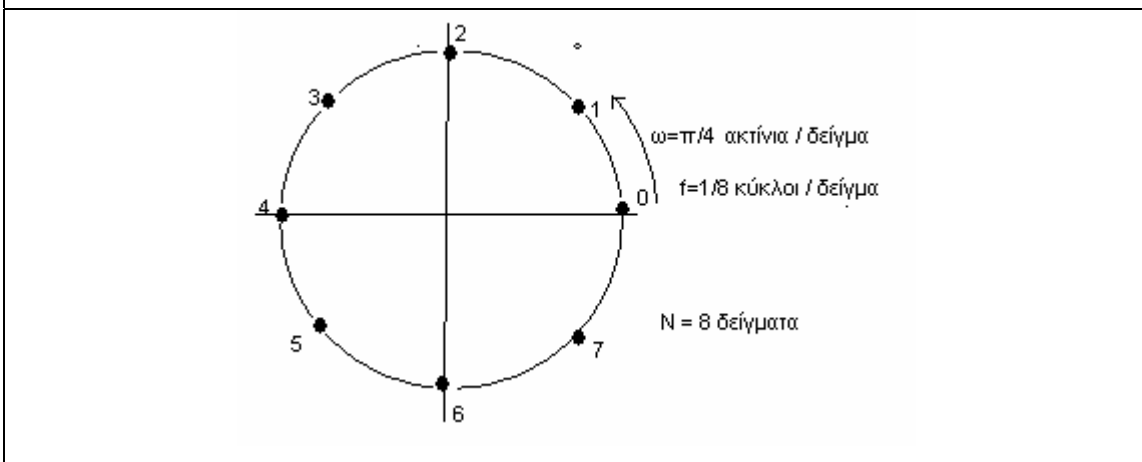
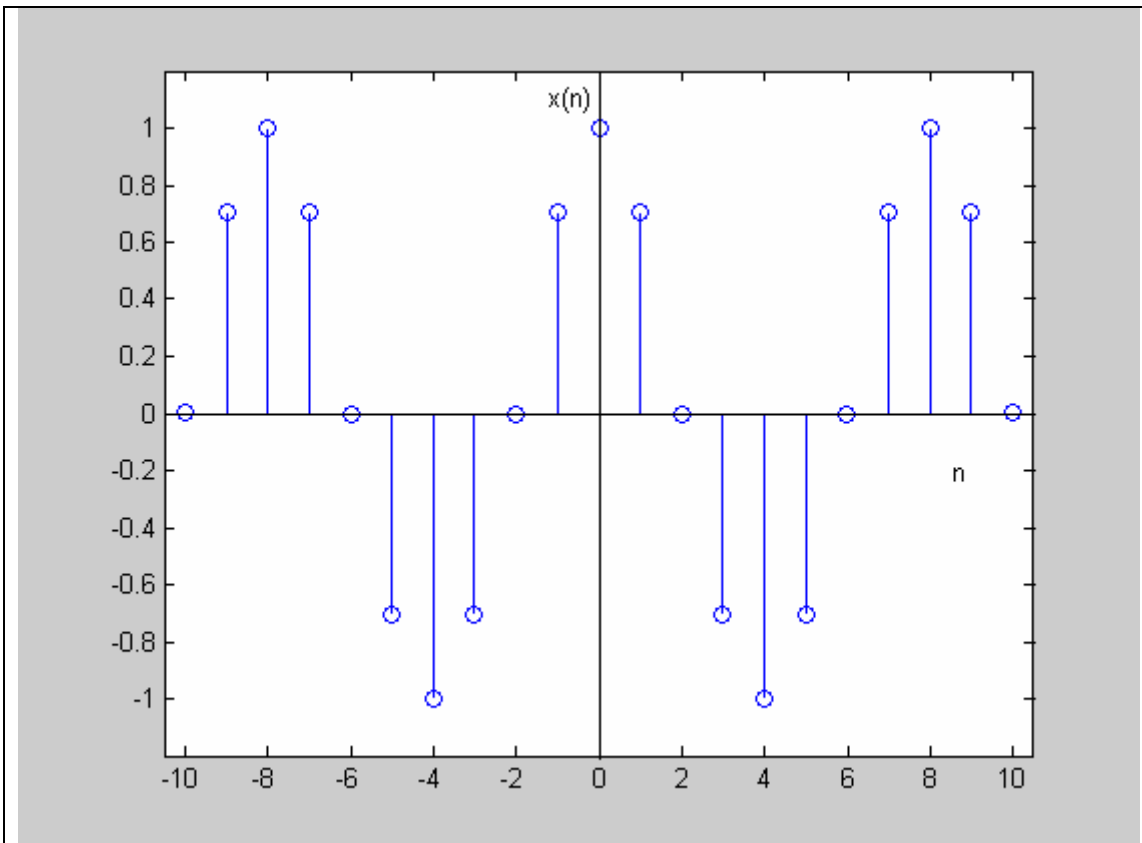
$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)$$

Στο Σχ.5.3.1 φαίνονται οι τιμές των  $n$ ,  $f$  και  $\omega$  στον τριγωνομετρικό κύκλο και το σήμα  $x(n)$ . Αν  $A=1$  και  $\theta=0$  ακτίνια,  $f=9/8$  κύκλοι ανά δείγμα η κυκλική συχνότητα είναι  $\omega=9\pi/4$  ακτίνια ανά δείγμα και η πρωτεύουσα περίοδος  $N=8$ ,

$$x''(n) = \cos\left(\frac{9\pi}{4} \cdot n\right) = \cos\left(\frac{8\pi + \pi}{4} \cdot n\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4} \cdot n\right) = x(n)$$

Παρατηρούμε ότι αν και οι τιμές της συχνότητας είναι διαφορετικές τα σήματα είναι ίσα. Γενικά αν  $x(n)=\cos(\omega_0 \cdot n)$  με κυκλική συχνότητα  $\omega_0$

$$-\pi < \omega_0 \leq \pi \quad (5.3.9)$$



Σχήμα 5.3.1

κάθε διακριτό σήμα  $x'(n) = \cos(\omega \cdot n)$  με κυκλική συχνότητα

$$\omega = \omega_0 + 2k\pi \tag{5.3.10}$$

όπου  $k$  ακέραιος, είναι ίσο με το  $x(n)$ . Για τις συχνότητες  $f_0$  και  $f$  θα ισχύουν οι σχέσεις

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{5.3.11}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0 + 2k\pi}{2\pi} = f_0 + k \quad (5.3.12)$$

$$-\frac{1}{2} \leq f_0 \leq \frac{1}{2} \quad (5.3.13)$$

Συνεπώς όλα τα διακριτά ημιτονοειδή σήματα μπορούν να περιγραφούν με τιμές της συχνότητας  $f_0$  στο διάστημα  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  (αντίστοιχα της κυκλικής συχνότητας  $\omega_0$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ ). Κάθε ημιτονοειδής ακολουθία  $x'(n)$  με συχνότητα  $f$  εκτός του διαστήματος αυτού ( $|f| > \frac{1}{2}$ ,  $|\omega| > \pi$ ) είναι ίδια με κάποια ακολουθία  $x(n)$  που έχει συχνότητα εντός του διαστήματος  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Η ακολουθία  $x'(n)$  θα ονομάζεται *ψευδώνυμη* (*alias*) της  $x(n)$  και το φαινόμενο αυτό *ψευδωνυμία* (*aliasing*). Τα διαστήματα  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $[-\pi, \pi]$  λέγονται *θεμελιώδη* διαστήματα της συχνότητας και της κυκλικής συχνότητας των διακριτών ημιτονοειδών σημάτων αντίστοιχα. Η συχνότητα  $f$  της ψευδώνυμης διαφέρει από την συχνότητα  $f_0$  κατά ακέραιο αριθμό (σχέση 5.3.12), Η συχνότητα  $\omega$  της ψευδώνυμης διαφέρει από την συχνότητα  $\omega_0$  κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$  (σχέση 5.3.10).

Ο πιο συνήθης τρόπος μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε διακριτό είναι η *περιοδική* ή *ομοιόμορφη* δειγματοληψία. Λαμβάνονται δείγματα του σήματος σε διαδοχικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η απόσταση δύο διαδοχικών τιμών είναι σταθερή και ονομάζεται διάστημα δειγματοληψίας. Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$ , το διάστημα δειγματοληψίας  $T_s$  μετριέται σε δευτερόλεπτα (sec). Το πλήθος των δειγμάτων σε ένα δευτερόλεπτο λέγεται ρυθμός ή συχνότητα δειγματοληψίας

$$F_s = \frac{1}{T_s}, T_s = \frac{1}{F_s} \quad (5.3.14)$$

και μετριέται σε δείγματα ανά δευτερόλεπτο (samples per second). Αν το συνεχές σήμα είναι ημιτονοειδές με κυκλική συχνότητα  $\Omega$  rad/sec, περίοδο  $T$  sec, συχνότητα  $F$  sec<sup>-1</sup> (Hz) και δίνεται από την σχέση

$$x_a(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right) = A \cdot \cos(2\pi \cdot F \cdot t + \theta) \quad (5.3.15)$$

από την περιοδική δειγματοληψία του προκύπτει η ακολουθία  $x(n)$  σύμφωνα με την σχέση

$$x(n) = x_a(T_s \cdot n) = A \cdot \cos(\Omega \cdot T_s \cdot n + \theta) = A \cdot \cos\left(2\pi \frac{F}{F_s} n + \theta\right) \quad (5.3.16)$$

Η συχνότητα του  $x(n)$  είναι

$$f = \frac{F}{F_s} \quad (5.3.17)$$

Άρα η συχνότητα του συνεχούς που ανακτάται είναι

$$F = f \cdot F_s \quad (5.3.18)$$

Επειδή η  $f$  ανήκει στο διάστημα  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  πρέπει

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{F}{F_s} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{F}{F_s} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot |F| \leq |F_s| \quad (5.3.19)$$

Αν το συνεχές σήμα ήταν το

$$y_a(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot (F + k \cdot F_s) \cdot t + \theta) \quad (5.3.20)$$

με συχνότητα

$$F' = F + kF_s \quad (5.3.21)$$

από την δειγματοληψία του με ρυθμό  $F_s$  θα προκύψει το διακριτό σήμα

$$\begin{aligned} y(n) &= y_a(T_s \cdot n) = A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{F'}{F_s} \cdot n + \theta\right) = A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{(F + k \cdot F_s)}{F_s} \cdot n + \theta\right) = \\ &A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{F}{F_s} \cdot n + 2\pi \cdot k + \theta\right) = A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{F}{F_s} \cdot n + \theta\right) = x(n) \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

Άρα τα συνεχή σήματα  $x_a(t)$  και  $y_a(t)$  μετά από την παραπάνω δειγματοληψία παριστάνονται από την ίδια ακολουθία  $x(n)$ . Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η συχνότητα του διακριτού σήματος  $y(n)$  είναι ψευδώνυμη της συχνότητας του διακριτού σήματος  $x(n)$ . Πράγματι η συχνότητα  $f'$  του σήματος  $y(n)$  ισούται με

$$f' = \frac{F + k \cdot F_s}{F_s} = \frac{F}{F_s} + k = f + k \quad (5.3.23)$$

Για να μη είναι δυνατή η ψευδωνυμία και να μπορεί να ανακτηθεί με μοναδικό τρόπο το αρχικό συνεχές σήμα πρέπει να ισχύει η σχέση (5.3.19) Που για θετικές τιμές των συχνοτήτων γράφεται

$$F_s \geq 2 \cdot F \quad (5.3.24)$$

### Άσκηση

Έστω το συνεχές σήμα  $x_a(t) = \cos(100\pi \cdot t)$

A) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας ώστε να αποφευχθεί η ψευδωνυμία.

B) Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 200 Hz, ποιο το διακριτό σήμα που θα προκύψει;

Γ) Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 75 Hz, ποιο το διακριτό σήμα που θα προκύψει;

Δ) Ποια η τιμή της συχνότητας ενός συνεχούς σήματος συνημιτόνου που μετά από σωστή δειγματοληψία δίνει διακριτό σήμα ίδιο με αυτό που προκύπτει στο ερώτημα Γ.

Απαντήσεις

A)  $F=100\pi/2\pi = 50$  Hz, άρα η ελάχιστη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας είναι  $F_s=100$  Hz (δείγματα / δευτερόλεπτο).

$$B) x(n) = \cos(2\pi \frac{50}{200} n) = \cos(\frac{\pi}{2} n)$$

$$Γ) x(n) = \cos(2\pi \frac{50}{75} n) = \cos(\frac{2\pi}{3} n)$$

Δ) Η συχνότητα του διακριτού σήματος  $x(n)$  του ερωτήματος Γ είναι  $f=2/3=-1/3+1$  και ως εκ τούτου είναι ψευδώνυμη της  $f_0 = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ . Άρα η συχνότητα  $F$  του ζητούμενου αναλογικού σήματος ικανοποιεί τη σχέση  $F/75=1/3$  άρα  $F=25$ Hz.

----

Ένα σήμα συνεχούς μεταβλητής ορισμένο σε ένα διάστημα  $[α,β]$  είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί «καλά» με την ανάλυση Fourier ως άθροισμα αρμονικών ταλαντώσεων σύμφωνα με τη σχέση

$$x_a(t) = \sum_{k=0}^K A_k \cdot \cos(2\pi \cdot F_k \cdot t + \theta_k) \quad (5.3.25)$$

Η ωφέλιμη πληροφορία του σήματος είναι δυνατόν να φέρεται στα πλάτη  $A_k$ , τις συχνότητες  $F_k$  ή τις φάσεις  $\theta_k$ . Εν τούτοις, αν  $F_{\max} = \max(F_k)$  για να αποφύγουμε το φαινόμενο της ψευδωνυμίας κατά την δειγματοληψία του  $x_a(t)$ , πρέπει ο ρυθμός δειγματοληψίας να είναι τουλάχιστον  $2 \cdot F_{\max}$ . Η ποσότητα αυτή ονομάζεται ρυθμός Nyquist συμβολίζεται  $F_N$  και ισχύσει

$$F_N = 2 \cdot F_{\max}. \quad (5.3.26)$$

**Το θεώρημα της δειγματοληψίας.** Αν η μεγαλύτερη απολύτως συχνότητα που περιέχεται σε ένα αναλογικό σήμα  $x_a(t)$  είναι  $F_{\max}=B$  και το σήμα δειγματοληπτείται με ρυθμό  $F_s > 2 \cdot F_{\max} = 2 \cdot B$ , τότε το  $x_a(t)$  μπορεί να ανακατασκευασθεί επακριβώς από τα δείγματα του με χρήση της συνάρτησης παρεμβολής

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi \cdot B \cdot t)}{2\pi \cdot B \cdot t} \quad (5.3.27)$$

Σύμφωνα με τη σχέση

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{F_s}\right) \cdot g\left(t - \frac{n}{F_s}\right) \quad (5.3.28)$$

### Άσκηση

Έστω το αναλογικό σήμα  $x_a(t) = 2 \cdot \cos(50\pi \cdot t) + \sin(200\pi \cdot t) - 5 \cdot \cos(70\pi \cdot t)$ , ποιος ο ρυθμός Nyquist  $F_N$ ;

$$F_1 = 25 \text{ Hz}, F_2 = 100 \text{ Hz}, F_3 = 35 \text{ Hz}$$

$$F_{\max} = 100 \text{ Hz} \text{ άρα } F_N = 200 \text{ Hz}$$

**Παρατήρηση:** Αν το σήμα  $\sin(200\pi \cdot t)$  δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας  $F_s = F_N$ , το διακριτό σήμα είναι  $\sin(\pi \cdot n) = 0$  και ως εκ τούτου δεν μπορεί να ανακτηθεί το αρχικό συνεχές σήμα. Ένας τρόπος να υπερβούμε το πρόβλημα αυτό είναι ο ρυθμός δειγματοληψίας να είναι  $F_s > F_N$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## Ο Μετασχηματισμός Z

### 6.1 Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Z (Z-Transform: ZT) αποτελεί ένα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο για την ανάλυση των διακριτών σημάτων και συστημάτων και αποτελεί για αυτά ότι ο μετασχηματισμός Laplace για τα σήματα και σύστημα συνεχούς μεταβλητής. Η χρήση του στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές βοηθά στην ανάλυση συστημάτων που περιγράφονται αναδρομικά. Ο υπολογισμός της απόκρισης και ο έλεγχος της ευστάθειας των γραμμικών ανεξάρτητων από τη μετατόπιση συστημάτων είναι δυνατόν επιτευχθεί με την χρήση του ZT.

### 6.2 Ορισμός του μετασχηματισμού Z

Ο μετασχηματισμός Z μιας ακολουθίας  $x(n)$  ορίζεται και γράφεται ως ακολούθως:

$$x(n) \stackrel{ZT}{\leftrightarrow} X(z), \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}, \quad z \in C \quad (6.2.1)$$

Οι τιμές του της μιγαδικής μεταβλητής  $z$  για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα του μετασχηματισμού ονομάζεται περιοχή σύγκλισης ή ΠΣ (Region Of Convergence ή ROC).

Αν θέσουμε  $z = r e^{j\omega}$ ,  $r = |z|$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot (r \cdot e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n} = DTFT\{x(n) \cdot r^{-n}\} \quad (6.2.2)$$

και αν θέσουμε  $z = e^{j\omega}$

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot (e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = DTFT\{x(n)\} = X(e^{j\omega}) \quad (6.2.3)$$

## 6.2.1 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Z

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες του ZT που βοηθούν στον υπολογισμό αυτού και του αντιστρόφου του καθώς και στην περαιτέρω διαδικασία ανάλυσης των σημάτων και των συστημάτων.

### Ιδιότητα της μετατόπισης

$$x(n - n_0) \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} \cdot X(z) \quad (6.2.1.1)$$

### Αντιστροφή στο χρόνο

$$x(-n) \xleftrightarrow{z} X(z^{-1}) \quad (6.2.1.2)$$

### Πολλαπλασιασμός με εκθετικό ορό

$$a^n \cdot x(n) \xleftrightarrow{z} X(a^{-1} \cdot z) \quad (6.2.1.3)$$

$$e^{jn\omega_0} \cdot x(n) \xleftrightarrow{z} X(e^{-jn\omega_0} \cdot z) \quad (6.2.1.4)$$

### Το θεώρημα της συνέλιξης

$$y(n) = x(n) * h(n) \xleftrightarrow{z} X(e^{-j\omega_0} \cdot z) \quad (6.2.1.5)$$

### Μιγαδική συζυγία

$$x^*(n) \xleftrightarrow{z} X^*(z^*) \quad (6.2.1.6)$$

$$X(z) = X^*(z^*) \quad (6.2.1.7)$$

### Παράγωγος

$$n \cdot x(n) \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad (6.2.1.8)$$

### Θεώρημα αρχικής τιμής

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (6.2.1.9)$$



$$X(z) = x(0) + x(1) \cdot z^{-1} + x(2) \cdot z^{-2} + \dots \quad (6.2.1.10)$$

Οι παραπάνω ιδιότητες αναγράφονται συνοπτικά στον Πίν. 6.2.1

### Ιδιότητες του Μετασχηματισμού z

Ιδιότητα	Ακολουθία	Μετασχηματισμός z	Περιοχή σύγκλισης
Γραμμικότητα	$a \cdot x(n) + b \cdot y(n)$	$a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$	Περιέχει $R_x \cap R_y$
Μετατόπιση	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} \cdot X(z)$	$R_x$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_x}$
Πολλαπλασιασμός με εκθετική ακολουθία	$a \cdot x(n)$	$X(a^{-1} \cdot z)$	$ a  \cdot R_x$
Συνέλιξη	$x(n) * y(n)$	$X(z) \cdot Y(z)$	Περιέχει $R_x \cap R_y$
Μιγαδική συζυγία	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_x$
Παράγωγος	$n \cdot x(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_y$

Πίνακας 6.2.1

Στο Πιν. 6.2.2. παρουσιάζεται ο ΖΤ μερικών βασικών ακολουθιών

Ακολουθία	Μετασχηματισμός	Περιοχή σύγκλισης
$\delta(n)$	1	Όλες οι τιμές του Z
$a^n \cdot u(n)$	$\frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$	$ z  >  a $
$-a^n \cdot u(-n-1)$	$\frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$	$ z  <  a $
$n \cdot a^n \cdot u(n)$	$\frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-n \cdot a^n \cdot u(-n-1)$	$\frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$\cos(n \cdot \omega_0) \cdot u(n)$	$\frac{1 - (\cos \omega_0) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot (\cos \omega_0) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\sin(n \cdot \omega_0) \cdot u(n)$	$\frac{(\sin \omega_0) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot (\cos \omega_0) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$

Πίνακας 6.2.2

## Ανάλυση συστημάτων με τον μετασχηματισμό Z

### 7.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο η έξοδος ενός LTI συστήματος σε οποιαδήποτε είσοδο  $x(n)$  μπορεί να υπολογισθεί από την συνέλιξη (συνελικτικό άθροισμα) της εισόδου με την κρουστική απόκριση  $h(n)$  του συστήματος. Με χρήση του θεωρήματος της συνέλιξης όπως ισχύει για τον μετασχηματισμό Z ισχύει η σχέση

$$y(n) = h(n) * x(n) \xleftrightarrow{Z} Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (7.1.1)$$

Η συνάρτηση  $H(z)$  που είναι ο μετασχηματισμός Z της  $h(n)$ , ονομάζεται *συνάρτηση μεταφοράς (system function)* του συστήματος. Από την μελέτη της συνάρτησης μεταφοράς ενός LTI είναι δυνατόν να χαρακτηριστεί αυτό ως προς την αιτιότητα, την ευστάθεια και άλλα χαρακτηριστικά του και να μελετηθούν διάφοροι ειδικοί τύποι LTI όπως συστήματα γραμμικής και ελάχιστης φάσης, φίλτρα και κυκλώματα ανάδρασης. Ακόμη, με τον μετασχηματισμό Z διευκολύνεται και βελτιστοποιείται ο σχεδιασμός ενός συστήματος.

### 7.2 Συνάρτηση μεταφοράς

Σύμφωνα με τα προηγούμενα αν  $h(n)$  η κρουστική απόκριση ενός LTI η συνάρτηση μεταφοράς του δίνεται από τη σχέση

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n} \quad (7.2.1)$$

Από την σχέση 7.1.1 προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να υπολογισθεί από την σχέση

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (7.2.2)$$

Για παράδειγμα η συνάρτηση μεταφοράς του ακόλουθου LTI συστήματος  $y(n) - 2y(n-1) = x(n) - 3.5 \cdot x(n-2)$ , μπορεί να βρεθεί με χρήση της ιδιότητας μετατόπισης του ZT. Παίρνοντας τους ZT της εξίσωσης του συστήματος έχουμε ότι

$$Y(z) - 2 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) = X(z) - 3.5 \cdot z^{-2} \cdot X(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3.5 \cdot z^{-2}}{1 - 2 \cdot z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{1 - 3.5 \cdot z^{-2}}{1 - 2 \cdot z^{-1}}$$

Γενικά για ένα LTI σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση

$$\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \beta_{\lambda} \cdot y(n-\lambda) = \sum_{k=0}^K a_k \cdot x(n-k) \quad (7.2.3)$$

η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^K a_k \cdot z^{-k}}{\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \beta_{\lambda} \cdot z^{-\lambda}} \quad (7.2.4)$$

Με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων των πολωνύμων αριθμητή και παρονομαστή η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^K (1 - \rho_k \cdot z^{-1})}{\prod_{\lambda=1}^{\Lambda} (1 - \rho_{\lambda} \cdot z^{-1})} \quad (7.2.5)$$

όπου  $\rho_k$  και  $\rho_{\lambda}$  οι ρίζες των πολωνύμων λαμβανομένης υπ' όψη της πολλαπλότητας τους. Σε μία ρητή συνάρτηση μεταφοράς, δηλαδή ένα πηλίκο πολωνύμων της μιγαδικής μεταβλητής  $z$ , οι ρίζες του αριθμητή λέγονται μηδενικά και του παρονομαστή πόλοι. Στο μιγαδικό επίπεδο τα μηδενικά σημειώνονται με το σύμβολο «ο» και οι πόλοι με το σύμβολο «x». Η εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός LTI συστήματος από την συνάρτηση μεταφοράς απαιτεί απλά την εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Z αυτής.

### 7.3 Έλεγχος της αιτιότητας και της ευστάθειας LTI συστήματος

Όπως αναφέρθηκε η κρουστική απόκριση  $h(n)$  ενός αιτιατού συστήματος είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, δηλαδή  $h(n)=0$  για  $n < 0$ . Ως εκ τούτου η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  θα δίνεται από τη σχέση

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n}$$

αν  $z_1 \in ROC$  τότε  $H(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot z_1^{-n}$  συγκλίνει και  $|h(n) \cdot z_1^{-n}| < 1$  για  $n > n_0$ . Αν  $z_2$

μιγαδικός με  $|z_2| > |z_1|$  τότε  $|h(n) \cdot z_2^{-n}| < 1$  και  $H(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot z_2^{-n}$  συγκλίνει. Άρα στη

περιοχή σύγκλισης ανήκει το μέρος του μιγαδικού επιπέδου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο που ορίζει την περιοχή σύγκλισης. Συμπέρασμα η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς ενός αιτιατού LTI συστήματος είναι όλη η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου έξω από τον κύκλο των εσωτερικών ορίων της.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την BIBO ευστάθεια ενός συστήματος είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \in R. \text{ Αν } |z|=1 \text{ τότε } |H(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \in R.$$

Αν λοιπόν ένα σύστημα είναι BIBO ευσταθές τότε πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στη περιοχή σύγκλισης. Αντίστροφα, αν ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στη περιοχή σύγκλισης ενός LTI συστήματος τότε αυτό είναι BIBO ευσταθές. Συμπέρασμα, ένα LTI σύστημα είναι BIBO ευσταθές αν και μόνο αν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα σύστημα αιτιατό και ευσταθές είναι όλοι οι πόλοι του να βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Ένα σύστημα που είναι αιτιατό και ευσταθές λέγεται πραγματοποιήσιμο σύστημα.

Αν ο παρονομαστής της ρητής συνάρτησης μεταφοράς είναι δευτέρου βαθμού είναι δυνατόν να ελέγξουμε αν οι ρίζες του (πόλοι) είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου χωρίς να τις υπολογίσουμε, σκεπτόμενοι ως ακολούθως. Γραφουμε την συνάρτηση μεταφοράς έτσι ώστε το πολυώνυμο του παρονομαστή να είναι

$$D(z) = 1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}$$

Ρίζες είναι οι τιμές του  $z$  για τις οποίες  $D(z)=0$ , ήτοι

$$D(z) = 1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} = 0 \Leftrightarrow z^2 + a_1 \cdot z + a_2 = 0$$

Για τις ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  του τριωνύμου ισχύει ότι  $\rho_1 \cdot \rho_2 = a_2$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου  $f(z) = z^2 + a_1 \cdot z + a_2 = 0$  είναι

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2$$

Αν  $\Delta < 0$ , τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  συζυγείς μιγαδικές και ισχύει ότι

$$|\rho_1| = |\rho_2^*| = |\rho_2|.$$

$$\text{Για } |\rho_1| < 1 \Leftrightarrow |\rho_1|^2 < 1 \Leftrightarrow |\rho_1 \cdot \rho_2| < 1 \Leftrightarrow |a_2| < 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 < a_2 < 1$$

Αν  $\Delta \geq 0$ , τότε οι δύο ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  είναι πραγματικές.

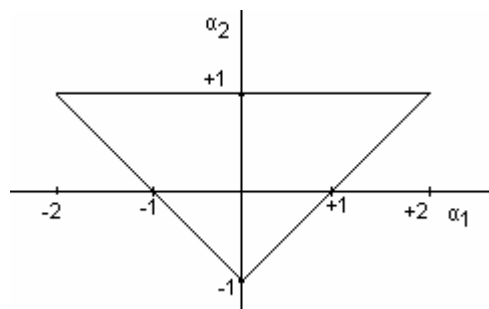
$$\text{Για } -1 < \rho_1, \rho_2 < 1 \Leftrightarrow f(1) > 0 \wedge f(-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + a_1 + a_2 > 0 \text{ και } 1 - a_1 + a_2 > 0$$

Άρα για να βρίσκονται οι ρίζες του τριωνύμου εντός του μοναδιαίου κύκλου πρέπει να ικανοποιούνται οι τρεις σχέσεις

$$-1 < a_2 < 1, 1 + a_1 + a_2 > 0 \text{ και } 1 - a_1 + a_2 > 0$$

Στο καρτεσιανό επίπεδο με οριζόντιο άξονα τις τιμές του  $a_1$  και κάθετο άξονα τις τιμές του  $a_2$ , το σύστημα είναι πραγματοποιήσιμο όταν το σημείο  $(a_1, a_2)$  βρίσκεται στο εσωτερικό του *τριγώνου ευστάθειας* όπως αυτό δείχνεται στο Σχ.7.3.1



Σχημα 7.3.1

# Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

## 8.1 Εισαγωγή

Ένα LTI σύστημα μπορεί να περιγραφεί με περισσότερους από ένα τρόπο. Για παράδειγμα το σύστημα

$$y(n) = a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

μπορεί να περιγραφεί από τις σχέσεις

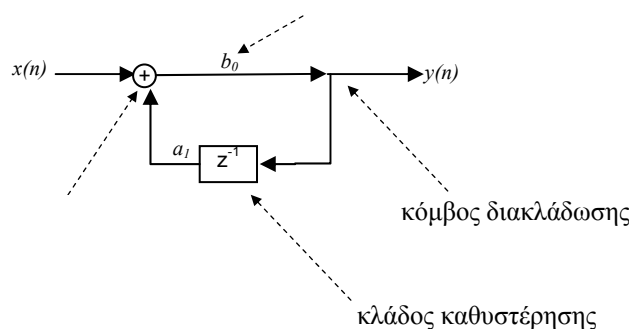
$$w(n) = a_1 w(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1)$$

Στην δεύτερη περίπτωση περιγραφής του συστήματος απαιτείται μία μόνο θέση μνήμης για την αποθήκευση της τιμής  $w(n-1)$  ενώ στην πρώτη απαιτούνται δύο θέσεις για την αποθήκευση των τιμών  $x(n-1)$  και  $y(n-1)$ . Η τρόπος περιγραφής ενός συστήματος επηρεάζει συχνά τον απαιτούμενο χώρο μνήμης, την ταχύτητα, το σφάλμα κβαντισμού ενός ψηφιακού συστήματος και ως εκ τούτου είναι αντικείμενο μελέτης. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιασθεί επίσης ο διαγραμματικός τρόπος περιγραφής ενός συστήματος (*ψηφιακά δικτυώματα*) που υποβοηθά την κυκλωματική υλοποίηση και συχνά την ανάλυση του.

## 8.2 Ψηφιακά δικτυώματα

Το ψηφιακό δικτύωμα είναι ένα γράφημα με δομικά στοιχεία κλάδους και κόμβους. Οι κλάδοι είναι βέλη με μία είσοδο και μία έξοδο και λειτουργούν ως τελεστές πολλαπλασιασμού ή καθυστέρησης. Οι κλάδοι μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους με κόμβους που είναι αθροιστές ή διακλαδωτές. Στους κόμβους άθροισης υπάρχουν δύο κλάδοι άφιξης και ένα αναχώρησης, στους κόμβους διακλάδωσης υπάρχει ένας κλάδος άφιξης και δύο αναχώρησης. Στο Σχ. 8.2.1 φαίνονται τα δομικά στοιχεία ενός ψηφιακού δικτυώματος που περιγράφει το σύστημα  $y(n)=a_1 \cdot y(n-1)+b_0 \cdot x(n)$



Σχήμα 8.2.1

## 8.3 Περιγραφή συστημάτων FIR

Για ένα FIR σύστημα με έξοδο  $y(n)$  και κρουστική απόκριση  $h(n)$  ισχύουν οι σχέσεις

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x(n-k) \quad (8.3.1)$$

$$h(n) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot \delta(n-k) = a_n \quad (8.3.2)$$

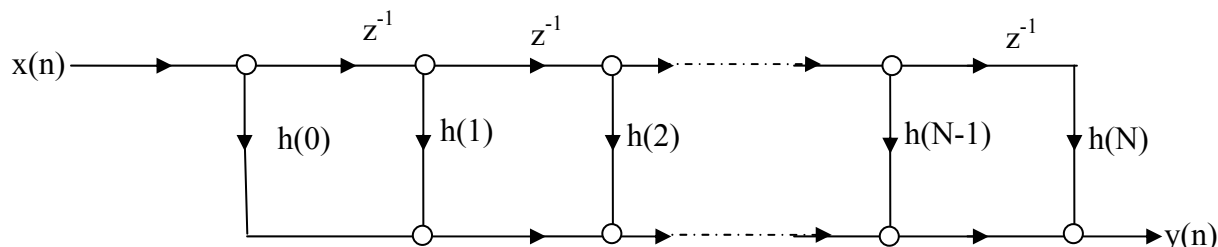
Από τις 8.3.1 και 8.3.2 προκύπτει ότι

$$y(n) = \sum_{k=0}^N h(k) \cdot x(n-k) \quad (8.3.3)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  θα δίνεται από τη σχέση

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n) \cdot z^{-n} \quad (8.3.4)$$

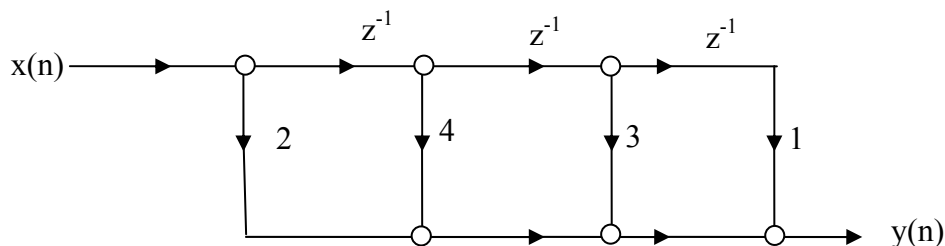
Το ψηφιακό δικτύωμα ενός τέτοιου συστήματος φαίνεται στο Σχ.8.3.1.



Σχήμα 8.3.1.

Ο τρόπος αυτός αλγεβρικής και διαγραμματικής περιγραφής του συστήματος λέγεται *ευθεία μορφή*.

Για παράδειγμα το σύστημα  $y(n)=2 \cdot x(n)+4 \cdot x(n-1)+3 \cdot x(n-2)+x(n-3)$  με κρουστική απόκριση  $h(n)=2 \cdot \delta(n)+4 \cdot \delta(n-1)+3 \cdot \delta(n-2)+\delta(n-3)$  και συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)=2+4 \cdot z^{-1}+3 \cdot z^{-2}+z^{-3}$  υλοποιείται διαγραμματικά όπως φαίνεται στο Σχ. 8.3.2.



Σχήμα 8.3.2

Εκτός από την ευθεία μορφή ένα FIR σύστημα μπορεί να περιγραφεί με σύνδεση σε σειρά απλούστερων (μικρότερης τάξης) FIR συστημάτων. Προς τούτο παραγοντοποιούμε την συνάρτηση μεταφοράς και εκμεταλλευόμαστε την συνελκτική και προσεταιριστική ιδιότητα του μετασχηματισμού Z. Ο τρόπος αυτός περιγραφής του συστήματος λέγεται *μορφή καταρράκτη*. Για παράδειγμα το σύστημα  $y(n)=2 \cdot x(n)+4 \cdot x(n-1)+3 \cdot x(n-2)+x(n-3)$  που περιγράφηκε πιο πάνω με ευθεία μορφή



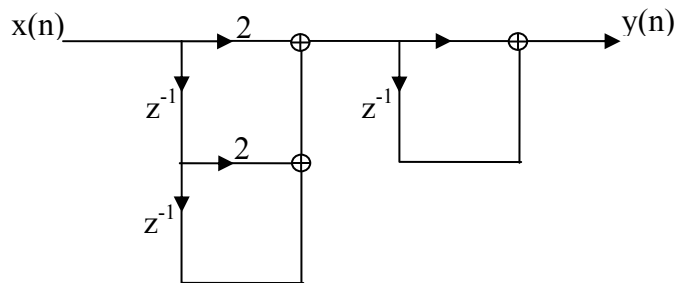
έχει συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)=2+4\cdot z^{-1}+3\cdot z^{-2}+z^{-3}$ . Αν παραγοντοποιήσουμε την  $H(z)$  ισχύει

$$H(z)=2+4\cdot z^{-1}+3\cdot z^{-2}+z^{-3}=(2+2\cdot z^{-1}+z^{-2})\cdot(1+z^{-1})$$

$$H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)$$

$$h(n)=h_1(n)*h_2(n)$$

Άρα το σύστημα αποτελείται από δύο συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά με συναρτήσεις μεταφοράς  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  και κρουστικές αποκρίσεις  $h_1(n)=2+2\cdot\delta(n-1)+\delta(n-2)$ ,  $h_2(n)=1+\delta(n-1)$  αντίστοιχα. Η διαγραμματική υλοποίηση του συστήματος φαίνεται στο Σχ.8.3.3.



Σχήμα 8.3.3.

## 8.4 Περιγραφή συστημάτων IIR

Ένα σύστημα IIR που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^K a_k \cdot x(n-k) - \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \beta_{\lambda} \cdot y(n-\lambda) \quad (8.4.1)$$

έχει συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  που δίνεται από την σχέση

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^K a_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \beta_{\lambda} \cdot z^{-\lambda}} \Rightarrow \quad (8.4.2)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{1}{B(z)} [A(z) \cdot X(z)] \quad (8.4.3)$$

ή

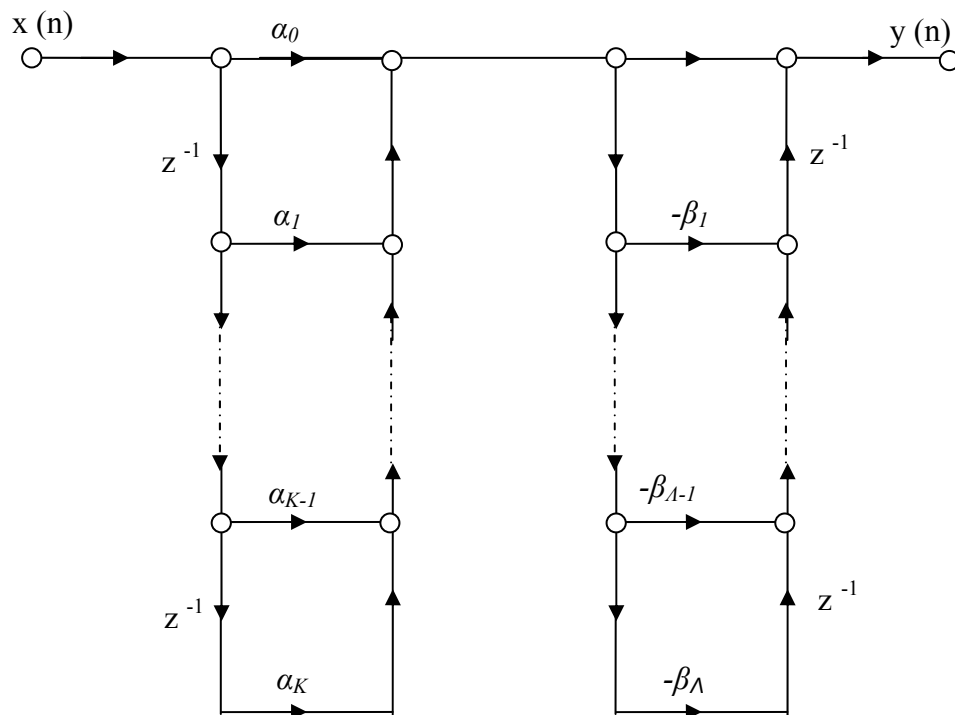
$$Y(z) = A(z) \left[ \frac{1}{B(z)} X(z) \right] \quad (8.4.4)$$

Στην σχέση (8.4.3) αν  $W(z) = B(z) \cdot X(z)$ , το σύστημα μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο του χρόνου από τις σχέσεις

$$w(n) = \sum_{k=0}^K a_k \cdot x(n-k) \quad (8.4.5)$$

$$y(n) = w(n) - \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \beta_{\lambda} \cdot y(n-\lambda) \quad (8.4.6)$$

Με διαγραμματική υλοποίηση όπως φαίνεται στο Σχ.8.4.1. Αυτός ο τρόπος περιγραφής ονομάζονται *ευθείας μορφής τύπου I*.



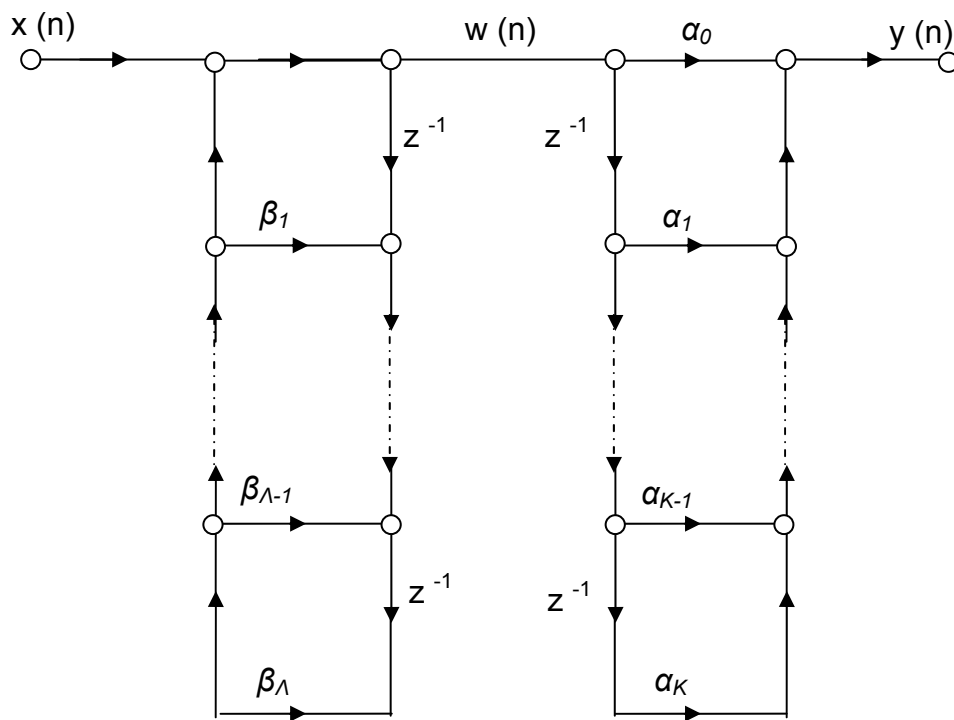
Σχήμα 8.4.1

Στην σχέση (8.4.4) αν  $W(z)=X(z)/A(z)$  , το σύστημα μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο του χρόνου από τις σχέσεις

$$w(n) = x(n) - \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \beta_{\lambda} \cdot w(n - \lambda) \quad (8.4.7)$$

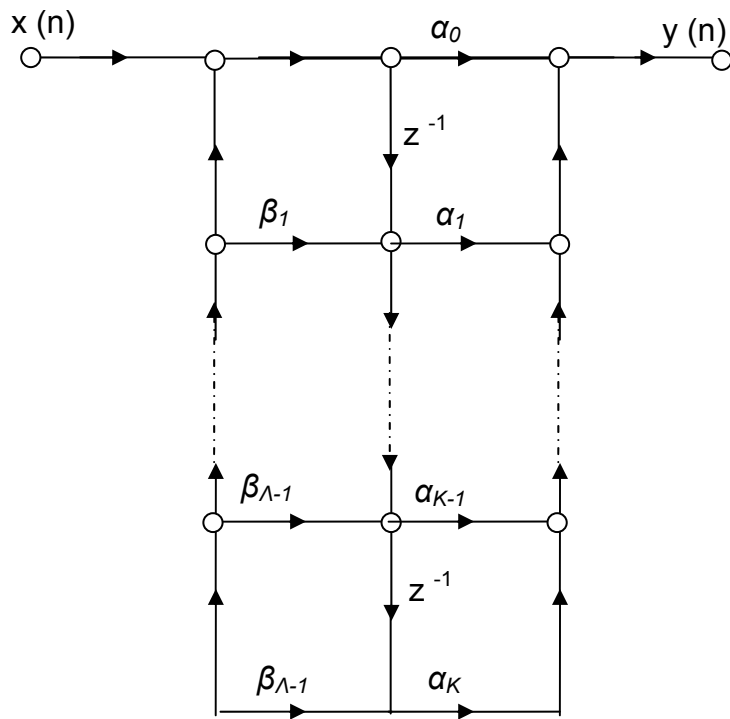
$$y(n) = \sum_{k=0}^K a_k \cdot x(n - k) \quad (8.4.8)$$

Με διαγραμματική υλοποίηση όπως φαίνεται στο Σχ.8.4.2. Αυτός ο τρόπος περιγραφής ονομάζονται *ευθείας μορφής τύπου II*.



Σχήμα 8.4.2.

Οι μονάδες καθυστέρησης της  $w(n]$  μπορούν να ελαττωθούν αν χρησιμοποιηθούν όπως φαίνεται στο Σχ.8.4.3.



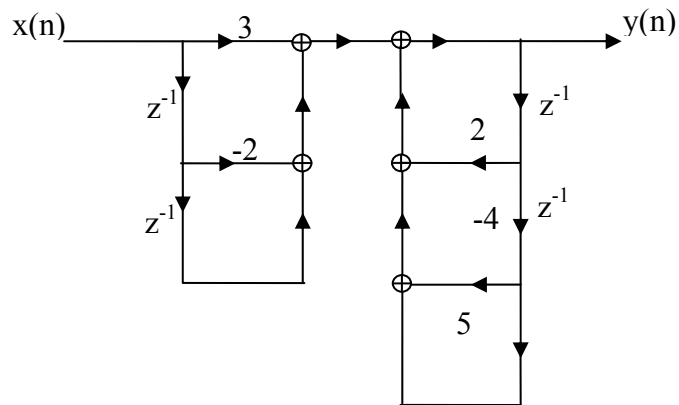
Σχήμα 8.4.3.

Για παράδειγμα το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

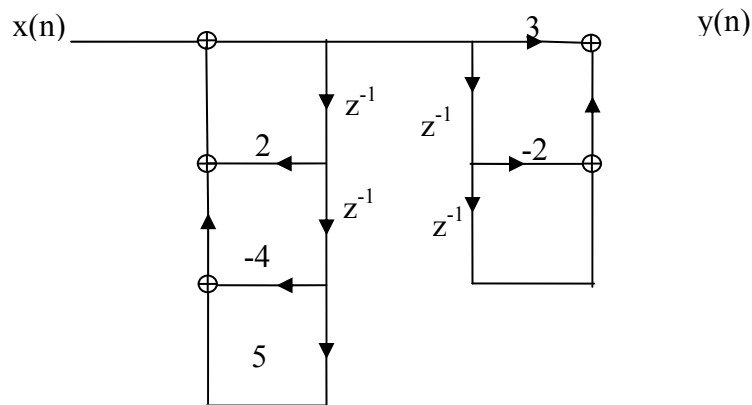
$$H(z) = \frac{3 - 2 \cdot z^{-1} + z^{-1}}{1 + 2 \cdot z^{-1} - 4 \cdot z^{-2} + 5 \cdot z^{-3}}$$

Περιγράφεται σύμφωνα με τα παραπάνω ως εξής:

Με ευθεία μορφή τύπου I.



Με ευθεία μορφή τύπου II.



ή

