ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Ενότητα # (**2**): Συστήματα αρίθμησης

Κύδρος Δημήτρης
Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συστήματα αρίθμησης

Αναπαράσταση αριθμών

Περιεχόμενα ενότητας

1. Συστήματα αρίθμησης
2. Συστήματα αρίθμησης στους υπολογιστές
3. Μετατροπές στα συστήματα αρίθμησης
4. Πράξεις στα συστήματα αρίθμησης

5. Αρνητικοί αριθμοί και μέθοδος του συμπληρώματος

Σκοποί ενότητας

- Να γνωρίσετε τα διαφορετικά συστήματα αρίθμησης
- Να αποκτήσετε ευχέρεια στις μετατροπές ανάμεσα στα συστήματα
- Να αποκτήσετε ευχέρεια στις πράξεις στα αριθμητικά συστήματα
- Να γνωρίσετε την αναπαράσταση των αρνητικών αριθμών.

Αριθμητικά Συστήματα

Ο γενικός κανόνας παράστασης σε ένα αριθμητικό σύστημα έχει ως εξής: Ο αριθμός:

$$\mathbf{\alpha_{n-1}r^{n-1} + \alpha_{n-2}r^{n-2} + \ldots + \alpha_1 r^1 + \alpha_0 r^0 + \alpha_{-1}r^{-1} + \ldots + \alpha_{-m}r^{-m}}$$

συμβολίζεται ως: $\alpha_{n-1}\ \alpha_{n-2} \ldots \alpha_1\ \alpha_0\ \alpha_{-1} \ldots \alpha_{-m}$

Ως **βάση ή ρίζα ενός αριθμητικού συστήματος ορίζεται το πλήθος των διαφορετικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται για την παράσταση των αριθμών**

- **Δεκαδικό**: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- **Δυαδικό**: 0 1
- **Οκταδικό** : 0 1 2 3 4 5 6 7
- **Δεκαεξαδικό** : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

Συστήματα

Ένας δεκαδικός αριθμός αποτελείται από μία ακολουθία δεκαδικών ψηφίων και ίσως από μία υποδιαστολή. Οποιοσδήποτε αριθμός (ποσότητα) εκφράζεται ως :

$$(x)_b = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i b^i$$

όπου: b είναι η βάση του συστήματος (b≥2) και
a_i τα ψηφία του αριθμού αυτού με τιμές 0 έως b-1

- Π.χ. 3347.4 = $3x10^3 + 3x10^2 + 4x10^1 + 7x10^0 + 4x10^{-1}$

Συστήματα

Δεκαδικό σύστημα αρίθμησης
Βάση 10, ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Δυαδικό σύστημα αρίθμησης
Βάση 2, ψηφία 0, 1

Οκταδικό σύστημα αρίθμησης
Βάση 8, ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης
Βάση 16, ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Μετατροπές (από οποιοδήποτε σύστημα στο δεκαδικό σύστημα)

Πολλαπλασιάζω κάθε ψηφίο του αριθμού που δίνεται (σε κάποιο σύστημα) με τη βάση του ίδιου του συστήματος υψωμένη σε δύναμη που προσδιορίζεται από τη θέση του ψηφίου στον αριθμό.

Στο **ακέραιο μέρος** ξεκινώ από το τελευταίο ψηφίο του (μονάδες) το οποίο βρίσκεται στη θέση 0 και συνεχίζω προς την αρχή του (κινούμαι αριστερά) αυξάνοντας συνεχώς τον αριθμό της θέσης κατά ένα.

Στο **κλασματικό μέρος** κινούμαι δεξιά θεωρώντας ότι το πρώτο κλασματικό ψηφίο βρίσκεται στη θέση -1 και σε κάθε βήμα μειώνω κατά ένα τον αριθμό της θέσης (-2, -3 κ.ο.κ.).

$A^0=1, A^1=A,$
$A^{-1}=1/A, A^{-2}=1/A^2$

Παραδείγματα

$(1673{,}42)_{10} = 1x10^3 + 6x10^2 + 7x10^1 + 3x10^0 + 4x10^{-1} + 2x10^{-2}$

$(100110)_2 = 1x2^5 + 0x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = (38)_{10}$

$(372)_8 = 3x8^2 + 7x8^1 + 2x8^0 = (250)_{10}$

$(A34F{,}4)_{16} = Ax16^3+3x16^2+4x16^1+Fx16^0+4x16^{-1} = (41807{,}25)_{10}$

Μετατροπές (του δεκαδικού συστήματος σε οποιοδήποτε σύστημα)

Έστω αριθμός με **ακέραιο και κλασματικό μέρος (γγγγ,xxx)**.

Χωρίζω το ακέραιο από το κλασματικό μέρος γγγγ και 0,xxx

Το **ακέραιο μέρος** του αριθμού διαιρείται με τη βάση του συστήματος

Στη συνέχεια το **κλασματικό μέρος** πολλαπλασιάζεται συνεχώς με τη βάση του συστήματος

Μετατροπές (ακέραιο μέρος)

Από δεκαδικό σε δυαδικό του 765 **(Διαδοχικές διαιρέσεις με το 2):**

765	1
382	0
191	1
95	1
47	1
23	1
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

$$\boxed{1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,1 = 765}$$

Μετατροπές (δεκαδικό μέρος)

Από δεκαδικό σε δυαδικό του 0,41

(Διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί με το 2):

0,41	2	0,82	0
0,82	2	1,64	1
0,64	2	1,28	1
0,28	2	0,56	0
0,56	2	1,12	1

= 0, 0 1 1 0 1

Μετατροπές (δεκαδικό μέρος)

Από δεκαδικό σε δεκαεξαδικό του 0,23

(Διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί με το 16):

0,23	16	3,68	3
0,68	16	10,88	A
0,88	16	14,08	E
0,08	16	1,28	1
0,28	16	4,48	4

= 0, 3 A E 1 4

Μετατροπές (ακέραιο μέρος)

Από δεκαδικό σε οκταδικό του 7653 **(Διαδοχικές διαιρέσεις με το 8):**

7 6 5 3	5
9 5 6	4
1 1 9	7
1 4	6
1	1

$(1\,6\,7\,4\,5)_8$

Μετατροπές - Παράγωγα συστήματα

Συστήματα που η βάση του ενός είναι η ύψωση σε δύναμη της βάσης ενός άλλου ονομάζονται **παράγωγα συστήματα αρίθμησης**.

Παράδειγμα το εννεαδικό σύστημα αρίθμησης είναι παράγωγο του τριαδικού γιατί $3^2=9$.

Παράδειγμα το δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης είναι παράγωγο του δυαδικού γιατί $2^4=16$.

Κάθε ψηφίο του **δεκαεξαδικού αριθμού** μετατρέπεται αυτόνομα στο **δυαδικό σύστημα** (χρησιμοποιώντας 4 δυαδικά ψηφία) και έτσι προκύπτει ο δυαδικός αριθμός και αντίστροφα.

Αντίστοιχα, κάθε ψηφίο του **οκταδικού αριθμού** μετατρέπεται αυτόνομα στο **δυαδικό σύστημα** (χρησιμοποιώντας 3 δυαδικά) και έτσι προκύπτει ο δυαδικός αριθμός και αντίστροφα.

Μετατροπές - Παράγωγα συστήματα

Δυαδικό		Οκταδικό	Δυαδικό		Οκταδικό
0 0 0	$\longleftrightarrow$	0	1 0 0	$\longleftrightarrow$	4
0 0 1	$\longleftrightarrow$	1	1 0 1	$\longleftrightarrow$	5
0 1 0	$\longleftrightarrow$	2	1 1 0	$\longleftrightarrow$	6
0 1 1	$\longleftrightarrow$	3	1 1 1	$\longleftrightarrow$	7

$$(633)_8 = (\underbrace{1\ 1\ 0}_{\boxed{\mathbf{6}}}\ \underbrace{0\ 1\ 1}_{\boxed{\mathbf{3}}}\ \underbrace{0\ 1\ 1}_{\boxed{\mathbf{3}}})_2$$

Μετατροπές-Παράγωγα συστήματα

Δυαδικό	Δεκαεξαδικό	Δυαδικό	Δεκαεξαδικό
0 0 0 0	0	1 0 0 0	8
0 0 0 1	1	1 0 0 1	9
0 0 1 0	2	1 0 1 0	A
0 0 1 1	3	1 0 1 1	B
0 1 0 0	4	1 1 0 0	C
0 1 0 1	5	1 1 0 1	D
0 1 1 0	6	1 1 1 0	E
0 1 1 1	7	1 1 1 1	F

$$(1AF)_{16} = (\underbrace{0\ 0\ 0\ 1}_{\boxed{\mathbf{1}}}\ \underbrace{1\ 0\ 1\ 0}_{\boxed{\mathbf{10\text{-}A}}}\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 1}_{\boxed{\mathbf{15\text{-}F}}})_2$$

Μετατροπές - Παράγωγα συστήματα

Από δυαδικό σε οκταδικό

$$(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1{,}0\ 1\ 1\ 0\ 1)_2$$

Χωρίζουμε σε τριάδες από υποδιαστολή προς τα αριστερά (ακέραιο μέρος) και από υποδιαστολή προς τα δεξιά (δεκαδικό μέρος)

(κατά περίπτωση προσθέτουμε μηδενικά)

$$(\underbrace{1}_{\boxed{1}}\ \underbrace{0\ 1\ 0}_{\boxed{2}}\ \underbrace{1\ 1\ 1}_{\boxed{7}}{,}\underbrace{0\ 1\ 1}_{\boxed{3}}\ \underbrace{0\ 1}_{\boxed{2}})_2$$

Μετατροπές - Παράγωγα συστήματα

Από δυαδικό σε δεκαεξαδικό

$$(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1{,}0\ 1\ 1\ 0\ 1)_2$$

Χωρίζουμε σε τετράδες από υποδιαστολή προς τα αριστερά (ακέραιο μέρος) και από υποδιαστολή προς τα δεξιά (δεκαδικό μέρος)

(κατά περίπτωση προσθέτουμε μηδενικά)

$$(\underbrace{1\ 0\ 1}_{\boxed{5}}\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 1}_{\boxed{15\text{-}F}}{,}\underbrace{0\ 1\ 1\ 0}_{\boxed{6}}\ \underbrace{1}_{\boxed{8}})_2$$

Πρόσθεση στο δυαδικό σύστημα

Πρόσθεση δυαδικών:

A +	B	Αποτέλεσμα	Κρατούμενο
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Παράδειγμα:

1ος Προσθετέος	0	0	1	1	1	$(7)_{10}$
2ος Προσθετέος :	0	1	0	1	0	$(10)_{10}$
Άθροισμα :	1	0	0	0	1	$(17)_{10}$
Κρατούμενο :	0	1	1	1	0	

Αφαίρεση (μέθοδος συμπληρώματος)

Η μέθοδος του συμπληρώματος χρησιμοποιείται για να εκφράσουμε **αρνητικούς αριθμούς** οπότε μπορούμε να μετατρέψουμε τις αφαιρέσεις που πρέπει να κάνει ο υπολογιστής σε προσθέσεις (πρόσθεση του αντιστρόφου - συμπληρώματος).

Εδώ πρέπει να θυμάστε ότι ο αριθμός των ψηφίων με τα οποία θα αναπαραστήσουμε τους αριθμούς είναι σημαντικός και παίζει ρόλο στη μέθοδο.

Α. Το συμπλήρωμα ενός **αριθμού ως προς τη (*βάση - 1*) ενός συστήματος** υπολογίζεται αν τον αφαιρέσουμε από τον μεγαλύτερο αριθμό του συστήματος με το ίδιο πλήθος ψηφίων.

Β. Το συμπλήρωμα ενός **αριθμού ως προς τη (βάση) ενός συστήματος** υπολογίζεται αν στο συμπλήρωμα του αριθμού ως προς τη (*βάση - 1*) προσθέσουμε τη μονάδα (+1).

Παράσταση συμπληρώματος ως προς ένα

Το **συμπλήρωμα ως προς ένα** μιας δυαδικής ακολουθίας λαμβάνεται αλλάζοντας όλα τα bit από μηδέν σε ένα και αντιστρόφως

1 0 0 1 0 0 1 1

0 1 1 0 1 1 0 0

Το πιο σημαντικό bit (MSB) χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του προσήμου.

Στη γενική περίπτωση αναπαριστώνται οι [-(2^{n-1}-1), +(2^{n-1}-1)] ([-32767, 32767])

Θετικοί + 0		**Αρνητικοί**	
0000	0	1000	-7
0001	+1	1001	-6
0010	+2	1010	-5
0011	+3	1011	-4
0100	+4	1100	-3
0101	+5	1101	-2
0110	+6	1110	-1
0111	+7	1111	-0

Αριθμητική Συμπληρώματος του δύο

Το πιο σημαντικό bit (MSB) χρησιμοποιείται επίσης για τον προσδιορισμό του προσήμου

Όταν **MSB = 0**, τότε ο αριθμός είναι **θετικός ή μηδέν** και το μέτρο δίνεται από τα υπόλοιπα (n-1) ψηφία του αριθμού

Όταν **MSB = 1**, ο αριθμός είναι **αρνητικός** και το μέτρο του αριθμού δίνεται από το συμπλήρωμα ως προς 2 του συνόλου των ψηφίων του αριθμού

Το συμπλήρωμα ως προς 2 βρίσκεται αλλάζοντας όλα τα bit (0 σε 1 και 1 σε 0) και προσθέτοντας 1 στο αποτέλεσμα.

Αρνητικοί Αριθμοί

για n=6 bits, $X_{10} = -17 \Rightarrow$

$$X_2 = \boxed{1}\boxed{01111}$$

Εύρεση συμπληρώματος ως προς 2 του αριθμού 17 :

X = 17 -> 010001

101110 (Αντιστροφή όλων των bit)

101111 (Πρόσθεση του 1)

Αριθμητική Συμπληρώματος του 2

Το αλγεβρικό άθροισμα δύο αριθμών στην παράσταση συμπληρώματος του 2 προκύπτει ως το δυαδικό άθροισμα των δύο αριθμών, αγνοώντας το τυχόν κρατούμενο:

+12	001100	+12	001100
+17	010001	- 17	101111
-----	---------	-----	---------
29	011101	- 5	111011

- 12	110100	- 12	110100
+17	010001	- 17	101111
-----	---------	-----	---------
+5	000101	- 29	100011

Αγνοείται το κρατούμενο 1

Αγνοείται το κρατούμενο 1