ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΠΕΡΣΕΦΟΝΗ ΠΟΛΥΧΡΟΝΙΔΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ανάλυση ευαισθησίας σε προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

Δρ. Περσεφόνη Πολυχρονίδου
ppolychr@gmail.com

Σε προβλήματα βελτιστοποίησης

- Η ανάλυση ευαισθησίας αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα όλων των αναλυτικών και ποσοτικών μεθοδολογιών στη λήψη αποφάσεων που ακολουθεί η διαδικασία βελτιστοποίησης.
- Μέσω αυτής εξετάζουμε το πόσο εύκολα μεταβάλλεται ή πόσο ευαίσθητη είναι η βέλτιστη λύση σε μεταβολές στις διάφορες τιμές των διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος.

Σε προβλήματα βελτιστοποίησης

- Οι παράμετροι και τα δεδομένα κάθε προβλήματος προκύπτουν από συγκεκριμένες εκτιμήσεις και μετρήσεις.
- Εμπεριέχεται πιθανότητα λάθους και πιθανότητα να μεταβληθούν τα δεδομένα του προβλήματος από εξωγενείς παράγοντες.
- Όσο λιγότερο ευαίσθητη είναι η βέλτιστη λύση σε μεταβολές παραμέτρων, τόσο πιο «σίγουροι» είμαστε για την υλοποίηση της συγκεκριμένης επιλογής.

Σε προβλήματα βελτιστοποίησης

- Αν με ελάχιστη μεταβολή στην τιμή μίας παραμέτρου προκύπτει μία διαφορετική κάθε φορά «βέλτιστη λύση», τότε η απόφαση στην οποία καταλήξαμε παρουσιάζει εξαιρετική ευαισθησία και θα πρέπει να επανεξετάσουμε τις παραμέτρους και τις παραδοχές στις οποίες στηρίζεται.

Πρόβλημα ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

- Ο υπεύθυνος παραγωγής θα μπορούσε να αναρωτηθεί τι θα συμβεί στη βέλτιστη λύση αν οι τιμές κάποιων παραμέτρων του προβλήματος μεταβληθούν.
- Π.χ. αν ο συντελεστής κέρδους για κάθε καρέκλα μειωθεί από 100 σε 80 ευρώ, θα υπάρξουν επιπτώσεις στον αριθμό τραπεζιών και των καρεκλών που πρέπει να κατασκευαστούν ώστε να διασφαλιστεί η επίτευξη του μέγιστου δυνατού κέρδους;

Ανάλυση ευαισθησίας στον Γ.Π.

Η ανάλυση ευαισθησίας στα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού αφορά τις εξής ομάδες παραμέτρων του προβλήματος:

- Τους συντελεστές κέρδους ή κόστους της αντικειμενικής συνάρτησης
- Τις διαθέσιμες ποσότητες των περιορισμών
- Τους τεχνολογικούς συντελεστές (συντελεστές των μεταβλητών σε κάθε περιορισμό)

Όρια συντελεστών κέρδους

Συντ. Κέρδους C_j		140	100	0	0	0	Ποσότητα
	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	−4	80
140	X_1	1	0	0	3/4	−1/2	90
100	X_2	0	1	0	−1	1	20
	Z_j	140	100	0	5	30	14600
	C_j−Z_j	0	0	0	−5	−30	

Μεταβολή στο συντελεστή κέρδους της X_1

- Τι θα συμβεί στη βέλτιστη λύση, αν μεταβληθεί ο συντελεστής κέρδους της μεταβλητής X_1;
- Έστω ότι από 140 γίνει 140+Δ.
- Επειδή η μεταβλητή είναι βασική στον τελικό πίνακα, μία αλλαγή θα επηρεάσει όλες τις τιμές της σειράς Z_j και επομένως και της C_j-Z_j.

Μεταβολή στο συντελεστή κέδρους της X_1

Συντ. Κέρδους C_j		140	100	0	0	0	Ποσότητα
	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140 +Δ	X_1	1	0	0	¾	-1/2	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	0*0+1*(140+Δ)+0*100=140+Δ	0*0+0*(140+Δ)+1*100=100	1*0+0*(140+Δ)+0*100=0	-2*0+3/4*(140+Δ)-1*100=5+3/4Δ	-4*0-1/2*(140+Δ)+1*100=30+1/2 Δ	14600 + 90 Δ
	C_j-Z_j	0	0	0	-5- ¾Δ	-30+1/2Δ	

Μεταβολή στο συντελεστή κέδρους της X_1

- Ο Πίνακας παραμένει τελικός πίνακας Simplex, αφού τηρείται το κριτήριο βέλτιστης λύσης. Δηλαδή, όλες οι τιμές στη σειρά C_j-Z_j είναι μη θετικές.
- Η λύση $X_1 = 90$ και $X_2 = 20$ παραμένει βέλτιστη, αν $-5-¾Δ$ και $-30+1/2Δ$ είναι ποσότητες μη θετικές.

Μεταβολή στο συντελεστή κέρδους της X_1

$$-5-3/4\ \Delta \leq 0 \ \Rightarrow \ 3/4\ \Delta \geq 5 \ \Rightarrow \ \Delta \geq -6,67$$

$$-30+1/2\ \Delta \leq 0 \ \Rightarrow \ 1/2\ \Delta \leq 30 \ \Rightarrow \ \Delta \leq 60$$

Τελικά το διάστημα μεταβολής τιμών του Δ είναι

$$-6,67 \leq \Delta \leq 60$$

και ο συντελεστής κέρδους των τραπεζιών μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ των:

Κατώτερο όριο X_1 : 140 - 6,67 = 133,33

Ανώτερο όριο X_1 : 140 + 60 = 200

Μεταβολή στο συντελεστή κέδρους της X_1

- Για οποιαδήποτε τιμή του συντελεστή κέρδους μεταξύ των δύο αυτών ορίων, η βέλτιστη λύση δεν θα μεταβληθεί.
- Το μέγιστο κέρδος θα προκύπτει δηλαδή για 90 τραπέζια και 20 καρέκλες.
- Η αντικειμενική συνάρτηση, το κέρδος, μεταβάλλεται.

Μεταβολή στο συντελεστή κέδρους της X_2

Συντ. Κέρδους C_j		140	100	0	0	0	Ποσότητα
	Βασικές μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	−4	80
140	X_1	1	0	0	¾	−1/2	90
100 +Δ	X_2	0	1	0	−1	1	20
	Z_j	0*0+1*140+0*(100+Δ)=140	0*0+0*140+1*(100+Δ)=100+Δ	1*0+0*140+0*(100+Δ)=0	−2*0+3/4*140−1*(100+Δ)=5−Δ	−4*0−1/2*1401*(100+Δ)=30+Δ	14600 + 20 Δ
	C_j−Z_j	0	0	0	−5+Δ	−30−Δ	

Μεταβολή στο συντελεστή κέδρους της X_2

- Ο Πίνακας παραμένει τελικός πίνακας Simplex, αφού τηρείται το κριτήριο βέλτιστης λύσης. Δηλαδή, όλες οι τιμές στη σειρά C_j–Z_j είναι μη θετικές.
- Η λύση $X_1 = 90$ και $X_2 = 20$ παραμένει βέλτιστη, αν $-5+\Delta$ και $-30-\Delta$ είναι ποσότητες μη θετικές.

Μεταβολή στο συντελεστή κέδρους της X_1

$-5 + \Delta \le 0 \Rightarrow \Delta \le 5$

$-30 - \Delta \le 0 \Rightarrow \Delta \ge -30$

Τελικά το διάστημα μεταβολής τιμών του Δ είναι

$-30 \le \Delta \le 5$

και ο συντελεστής κέρδους των καρεκλών μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ των:

Κατώτερο όριο X_2 : 100 - 30 = 70

Ανώτερο όριο X_2 : 100 + 5 = 105

Μεταβολές στις ποσότητες των περιορισμών

- Μεταβολές στην ώρες εργασίας σε κάθε τμήμα, επηρεάζουν τη βέλτιστη λύση.
- Έχουμε προσδιορίσει τις οριακές αλλαγές που θα προκύψουν στις βασικές μεταβλητές αν οι ποσότητες των πόρων των δεσμευτικών περιορισμών αυξηθούν ή ελαττωθούν κατά μία μονάδα.
- Έστω πως οι διαθέσιμες ώρες στο βαφείο μεταβάλλονται κατά θ μονάδες:

Μεταβολές στις ώρες βαφείου

	Αύξηση ωρών εργασίας στο βαφείο κατά 1 ώρα			Αύξηση ωρών εργασίας στο βαφείο κατά θ ώρες		
	Από	Σε	Μεταβολή	Από	Σε	Μεταβολή
Ώρες εργασίας – Βαφείο	400	401	+1	400	400+θ	+θ
Αχρησιμοποιητες ώρες – Ξυλουργείο	80	82	+2	80	80+2θ	+2θ
Παραγωγή τραπεζιών	90	90+3/4	+3/4	90	90+3/4 θ	+3/4 θ
Παραγωγή καρεκλών	20	19	–1	20	20–θ	–θ
Κέρδος	14600	14605	+5	14600	14600+5θ	+5θ

Μεταβολές στις ώρες βαφείου

- Η αυξομείωση των βασικών μεταβλητών είναι επιτρεπτή ως το σημείο που αυτές μηδενίζονται. Αρκεί να μην είναι αρνητικές.
- Πρέπει δηλαδή να ικανοποιούνται ταυτόχρονα τα εξής:

Ώρες εργασίας Βαφείο:	$400+\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \geq -400$
Αχρησιμοποίητες ώρες - Ξ	$80+2\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \geq -40$
Παραγωγή τραπεζιών	$90+3/4\ \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \geq -360$
Παραγωγή καρεκλών	$20-\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 20$

Μεταβολές στις ώρες βαφείου

- Τελικά:

$-40 \leq \theta \leq 20$

και συνεπώς, οι διαθέσιμες ώρες στο βαφείο μπορεί να κυμαίνονται μεταξύ των ορίων:

Κατώτερο όριο ωρών εργασίας στο βαφείο : $400 - 40 = 360$

Ανώτερο όριο ωρών εργασίας στο βαφείο : $400 + 20 = 420$

- Μεταξύ αυτών των ορίων μπορούμε να υπολογίσουμε ποια θα είναι η βέλτιστη λύση για οποιοδήποτε αριθμό διαθέσιμων ωρών στο βαφείο

Π.χ. διαθέτουμε 38 ώρες στο βαφείο – Βέλτιστη λύση

Μείωση στις ώρες βαφείου (400-380):	20
Αχρησιμοποίητες ώρες - Ξ	80-20*2=40
Αριθμός τραπεζιών	90-20*3/4 =75
Παραγωγή καρεκλών	20+20*1=40
Βέλτιστο κέρδος	14600-20*5=14500

14500 είναι το βέλτιστο κέρδος με την υπάρχουσα λύση

20 είναι η μείωση ωρών στο βαφείο

5 είναι η σκιώδης τιμή του περιορισμού των ωρών βαφείου

ή 75*140+40*100=14500.