



# Εισαγωγή στην πληροφορική

**Ενότητα 4:**  
Λογικές πράξεις – Ψηφιακά κυκλώματα

Βράνα Βασιλική  
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Λογική ψηφιακών κυκλωμάτων

Επειδή τα ψηφιακά κυκλώματα στα οποία βασίζονται οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές αναγνωρίζουν δύο μόνο καταστάσεις ‘ανοικτό’ – ‘κλειστό’ ή ‘υπάρχει τάση’ – ‘δεν υπάρχει τάση’ δημιουργήθηκε η ανάγκη προσαρμογής στην απλουστευμένη αυτή λογική η οποία ονομάζεται **ΔΥΑΔΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ**.

Οι βασικές αρχές της δυαδικής λογικής ισχύουν **για όλα** τα υπολογιστικά συστήματα όσο σύνθετα και αν είναι (δηλαδή και στην 64-μπιτ).

# Δυαδική λογική

Για να λειτουργήσει η **Δυαδική λογική απαιτεί:**

- μεταβλητές που εκφράζονται με δυαδικό τρόπο (Δυαδικές μεταβλητές )
- και λογικές πράξεις που εκφράζονται επίσης με δυαδικό τόπο.

**Δυαδικές μεταβλητές:** Αλήθεια/Ψέματα, Ναι/Όχι , 0/1

Μια **λογική πράξη** μεταξύ μεταβλητών είναι μία συνάρτηση που ορίζεται από έναν πίνακα αληθείας (truth table) μπορεί να πάρει δύο τιμές: Αληθής: 1 Ψευδής:0.

# Βασικές λογικές πράξεις

Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο λογικές προτάσεις τότε:

**Λογική άρνηση** ή συμπλήρωση της πρότασης  $A$  (Not  $A$ ): είναι αληθής όταν η  $A$  είναι ψευδής και αντίστροφα.

**Λογικός πολλαπλασιασμός** ( $A$  and  $B$ ): των λογικών προτάσεων  $A$  και  $B$ . Είναι αληθής όταν οι  $A$  και  $B$  είναι αληθείς.

**Λογική πρόσθεση** ( $A$  or  $B$ ): των λογικών προτάσεων  $A$  και  $B$ . Είναι αληθής όταν μία από τις  $A$  και  $B$  ή και οι δύο είναι αληθείς.

# Άλγεβρα Boole

Για την κατανόηση της δυαδικής λογικής είναι απαραίτητη η κατανόηση της Άλγεβρας Boole η οποία ήδη από το 1854 αντιμετώπισε συστηματικά τις λογικές πράξεις και λέγεται και 'Άλγεβρα διακοπών'.

Στην Άλγεβρα Boole οι όροι 'λογική πρόσθεση', 'λογικός πολλαπλασιασμός' κλπ έχουν διαφορετικές έννοιες από ότι στην κλασσική άλγεβρα. Προσομοιάζουν περισσότερο με τρόπους διάταξης διακοπών σε ηλεκτρικά κυκλώματα παρά σε 'κλασσικές' αριθμητικές πράξεις.

# Πύλες (1)

ο **C. Shannon**: η Άλγεβρα Boole μπορούσε να εφαρμοστεί στην απλοποίηση και στη σχεδίαση των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.

Χρησιμοποιήθηκε στα τηλεφωνικά κυκλώματα και για τη σχεδίαση των κυκλωμάτων των υπολογιστών.

Μία λογική πράξη μεταξύ μεταβλητών είναι μία συνάρτηση που ορίζεται από έναν πίνακα αληθείας (truth table). Τα **ηλεκτρονικά κυκλώματα** που εκτελούν τις βασικές πράξεις της Άλγεβρας Boole καλούνται **λογικές πύλες**



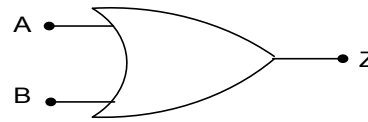
# Πύλες (2)

Κάθε τέτοια πύλη δέχεται στην είσοδό της σήματα με τη μορφή υψηλής ή χαμηλής ηλεκτρικής τάσης και δίνει στην έξοδό της ένα μοναδικό αποτέλεσμα με τη μορφή υψηλής ή χαμηλής ηλεκτρικής τάσης.

Συνδυάζοντας κατάλληλα λογικές πύλες δημιουργούνται πιο σύνθετα κυκλώματα που μπορούν να εκτελούν λογικές πράξεις.

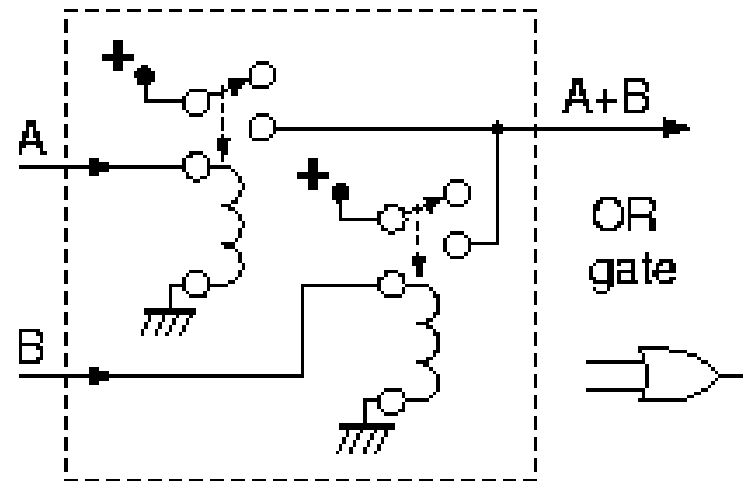
# Πύλη OR

- Η έξοδος είναι αληθής (true) (1), εάν μια από τις εισόδους ή και οι δυο είναι αληθείς (1)



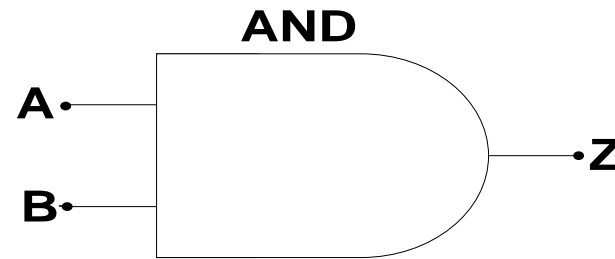
$$Z=A+B$$

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



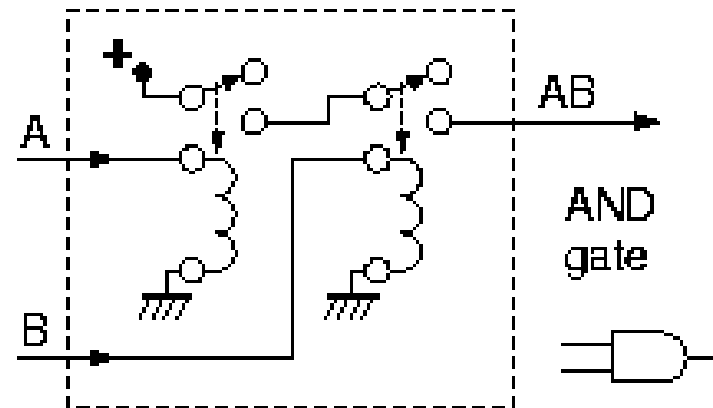
# Πύλη AND.

- Η έξοδος είναι αληθής (1), όταν και οι δυο είσοδοι είναι αληθείς (1)



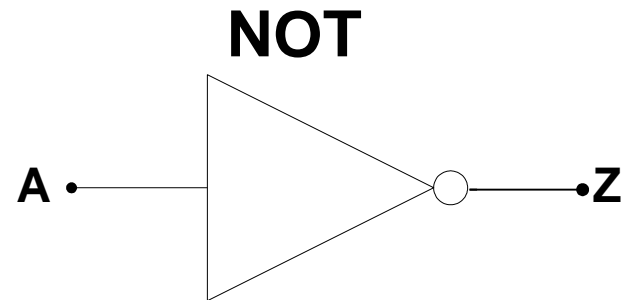
$$Z = A \cdot B$$

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



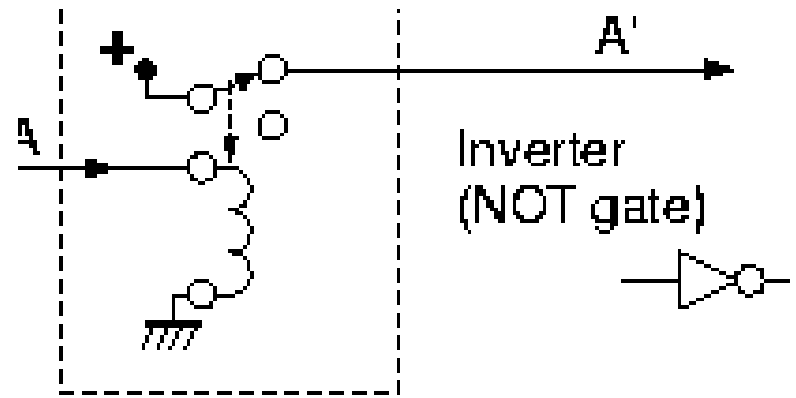
# Πύλη NOT

- Δημιουργεί αντιστροφή του σήματος εισόδου



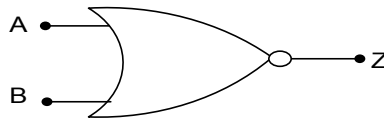
$$Z = \overline{A}$$

A	$\overline{A}$
0	1
1	0



# Πύλη NOR

- Από τις τρεις βασικές πύλες δημιουργούνται και άλλες. Π.χ. ο συνδυασμός μιας πύλης NOT και μιας πύλης OR δίνει την πύλη NOR.
- Η έξοδος είναι αληθής (1), όταν και οι δύο είσοδοι είναι ψευδείς (0)



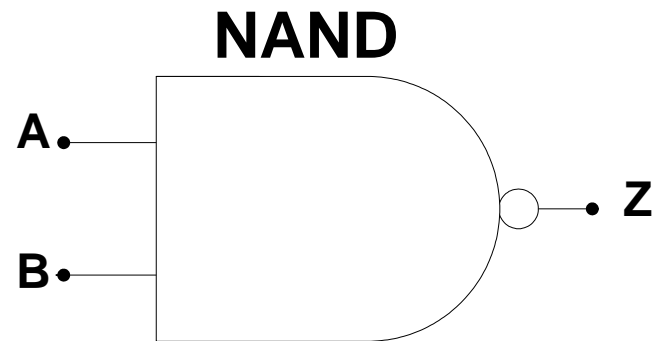
A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$Z = \overline{A + B}$$

# Πύλη NAND

- Ο συνδυασμός μιας πύλης NOT και μιας πύλης AND δίνει την πύλη NAND.
- Η έξοδος είναι ψευδής (0) μόνο όταν A και B είναι αληθείς (1)

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$Z = \overline{A \cdot B}$$

# Πίνακες Αλήθειας

- Μία συνάρτηση boole είναι μια ακολουθία από ψηφιακές μεταβλητές, σύμβολα ψηφιακών πράξεων, τις τιμές 0 ή 1 και ένα σύμβολο '=' (ίσον).
- Για κάθε συνδυασμό τιμών των λογικών μεταβλητών, η συνάρτηση έχει μία τιμή, η οποία είναι επίσης ψηφιακή (0 ή 1).

# Προτεραιότητα λογικών πράξεων

- Πρώτα γίνονται οι αντιστροφές
- Ακολουθούν οι πράξεις AND
- Ακολουθούν οι πράξεις OR
- Εάν υπάρχουν πράξεις ίδιας προτεραιότητας, ο υπολογισμός τους γίνεται από αριστερά προς τα δεξιά.



# Παράδειγμα πίνακα αλήθειας

- Έστω η συνάρτηση:  $F = A' + BC$

*Είσοδοι*

*Ενδιάμεσα αποτελέσματα*

*Έξοδος*

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A' (not A)</b>	<b>BC (B and C)</b>	<b>F = A'+BC</b>
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

# Λογικά κυκλώματα

- για κάθε συνάρτηση που είναι σε αλγεβρική μορφή να δημιουργήσουμε ένα **λογικό κύκλωμα** (*logic circuit*) το οποίο να αποτελείται από λογικές πύλες και συνδέσεις μεταξύ τους.

# Βασικές Ταυτότητες της άλγεβρας Boole

1  $X+0=X$

2  $X \cdot 1=X$

3  $X+1=1$

4  $X \cdot 0=0$

5  $X+X=X$

6  $X \cdot X=X$

7  $X+X'=1$

8  $X \cdot X'=0$

9  $(X')'=X$

(δεν υπάρχει δυϊκή)

10  $X+Y=Y+X$

11  $X \cdot Y=Y \cdot X$

*Μεταθετική*

12  $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$

13  $X \cdot (Y \cdot Z)=(X \cdot Y) \cdot Z$

*Προσεταιριστική*

14  $X \cdot (Y+Z)=X \cdot Y+X \cdot Z$

15  $X+Y \cdot Z=(X+Y) \cdot (X+Z)$

*Επιμεριστική*

16  $(X+Y)'=X' \cdot Y'$

17  $(X \cdot Y)'=X'+Y'$

*De Morgan*

# Αλγεβρικοί Μετασχηματισμοί (1)

- Μπορούμε να απλοποιήσουμε λογικές συναρτήσεις με τη βοήθεια των ταυτοτήτων της άλγεβρας boole
- $F=(AB+AC)' \cdot (A'C+AB)$
- αντικαθιστώντας το AB με X το AC με Y και το A'C με Z, η συνάρτηση γίνεται:

# Αλγεβρικοί Μετασχηματισμοί (2)

$$F = (X+Y)'(Z+X)$$

$$= (X+Y)'(X+Z) \text{ (μεταθετική)}$$

$$= X'Y'(X+Z) \text{ (de morgan)}$$

$$= X'XY' + X'Y'Z \text{ (επιμεριστική και μεταθετική)}$$

$$= 0Y' + X'Y'Z \text{ (ταυτότητα 8)}$$

$$= 0 + X'Y'Z \text{ (ταυτότητα 4)}$$

$$= X'Y'Z \text{ (ταυτότητα 1)}$$

$$= (AB)'(AC)'(A'C) \text{ (αντικατάσταση)}$$

$$= (A'+B')(A'+C')(A'C) \text{ (de morgan)}$$

$$= (A'+B')(A'A'C+C'A'C) \text{ (επιμεριστική)}$$

$$= (A'+B')(A'C+0A') \text{ (ταυτότητες 6 και 8)}$$

$$= (A'+B')(A'C) \text{ (ταυτότητες 4 και 1)}$$

$$= A'A'C+B'A'C \text{ (επιμεριστική)}$$

$$= A'C+A'B'C \text{ (ταυτότητα 6 και μεταθετική)}$$

$$= A'C(1+C) \text{ (επιμεριστική)}$$

$$= A'C \text{ (ταυτότητα 3 και μετά ταυτότητα 2)}$$

# Διακόπτες και πύλες (1)

- Ο **Διακόπτης** είναι το ηλεκτρονικό ή ηλεκτρομηχανικό στοιχείο που ρυθμίζει τη διέλευση του ρεύματος μέσα από ένα κύκλωμα.
- Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός τότε δεν διαρρέει ρεύμα στο κύκλωμα και η τάση στα άκρα του διακόπτη είναι αυτή της πηγής του κυκλώματος.

# Διακόπτες και πύλες (2)

## Το transistor ως διακόπτης

- Είναι ηλεκτρονικό στοιχείο με τρεις ακροδέκτες το οποίο χρησιμοποιείται ως ενισχυτής και ως διακόπτης. Η λειτουργία του ως διακόπτη ρυθμίζεται από την τάση του ακροδέκτη ελέγχου. Είναι κατασκευασμένα από ημιαγωγά υλικά όπως πυρίτιο και γερμάνιο.
- Με τον κατάλληλο συνδυασμό πυλών είμαστε σε θέση να δημιουργήσουμε λειτουργικές μονάδες, οι οποίες αποτελούν τα βασικά στοιχεία ενός υπολογιστικού συστήματος.

---

# Τέλος Ενότητας