ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

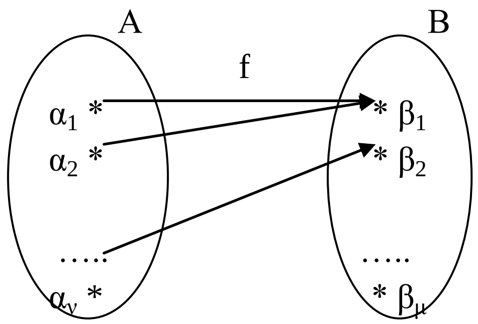
1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1.1 Γενικά

Αξίζει να θυμίσουμε πως η συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής είναι μια μονοσήμαντη αντιστοιχία ενός συνόλου A (υποσυνόλου του R - $A \subset R$) σε ένα σύνολο B ($B \subset R$).

Με τον τρόπο αυτό ο μηχανισμός της συνάρτησης f αντιστοιχίζει κάποιο στοιχείο x του συνόλου A (πεδίου ορισμού), σε ένα μόνο στοιχείο y του συνόλου B (συνόλου εικόνων ή πεδίου τιμών)

$$y=f(x)$$



Σχ. A.1.1.

Οι συναρτήσεις περισσοτέρων πραγματικών μεταβλητών είναι μια γενίκευση της έννοιας των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Η μορφή μιας συνάρτησης ν-μεταβλητών διατυπώνεται από τη σχέση:

$$y = f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_\nu)$$

όπου $x_1,x_2,x_3,\dots,x_\nu$ είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ y είναι η τιμή της συνάρτησης (ή όπως συχνά λέγεται: η εξαρτημένη μεταβλητή). Επομένως η συνάρτηση f για να λειτουργήσει χρειάζεται μια διατεταγμένη[1] ν-άδα δεδομένων. Επομένως το σύνολο ορισμού της θα έχει σαν στοιχεία διατεταγμένες ν-άδες, θα είναι δηλαδή ένα Καρτεσιανό γινόμενο (βλέπε στην επόμενη σελίδα) της μορφής:

$$A_1 x A_2 x \dots x A_\nu$$

όπου τα A_i θα είναι υποσύνολα του R ($A_i \subset R$)

---

[1] *Ονομάζουμε τη ν-άδα ($x_1,x_2,x_3,\dots,x_\nu$) διατεταγμένη διότι τα στοιχεία της έχουν αυστηρώς προκαθορισμένη σειρά, η οποία δεν επιτρέπεται να μεταβληθεί. Αυτό συμβαίνει διότι οι ν-άδες ($x_1,x_2,x_3,\dots,x_\nu$) και ($x_2,x_1,x_3,\dots,x_\nu$) αποτελούν δύο εντελώς διαφορετικά στοιχεία του συνόλου R^ν (του Καρτεσιανού γινομένου RxRx…xR), του γνωστού χώρου ν-διαστάσεων.*

Να παρατηρήσουμε επίσης πως εάν αντιμεταθέσουμε αμοιβαία δύο στοιχεία (π.χ. το x_1 και το x_2) μπορεί η f να μην λειτουργεί. Για παράδειγμα η συνάρτηση δύο μεταβλητών:

$$f(x,y)=y\ln x$$

λειτουργεί για τη δυάδα (1,-3) αλλά όχι για την (-3,1)

1.2 Συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών

Υπενθύμιση: Ονομάζουμε Καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων A και B, ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, όπου το πρώτο στοιχείο του κάθε ζεύγους ανήκει στο A και το δεύτερο στο B. Δηλαδή:

$$AxB = \{(x,y) \text{ όπου } x \in A \text{ και } y \in B\}$$

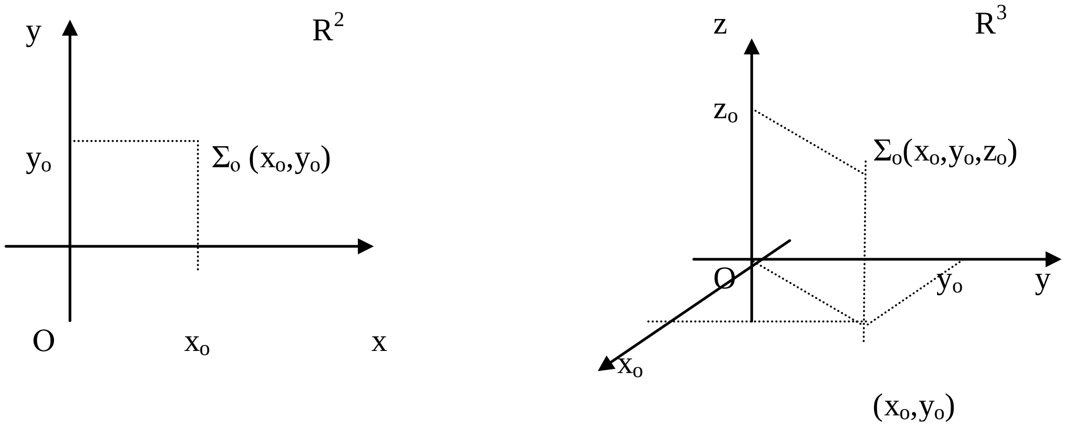
Εάν, για παράδειγμα, έχουμε τα σύνολα $A=\{1,2\}$ και $B=\{5,6\}$, τότε

$$AxB = \{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως το σύνολο AxB έχει σαν στοιχεία δυάδες, είναι δηλαδή ένα σύνολο τελείως διαφορετικό από τα σύνολα A και B. Με όμοιο τρόπο ορίζουμε το Καρτεσιανό γινόμενο περισσοτέρων συνόλων:

$$A_1xA_2x\ldots xA_\nu = \{(x_1,x_2,\ldots,x_\nu) \text{ όπου } x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ \ldots,\ x_\nu \in A_\nu\}$$

Ένα πολύ χρήσιμο Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων είναι το R^ν. Και από τα γινόμενα αυτά τα πιο γνωστά είναι το R^2 (το γνωστό επίπεδο Oxy) και το R^3 (ο γνωστός χώρος των τριών διαστάσεων Oxyz)



Σχ. 1.2.1. Το επίπεδο Oxy και ο χώρος των τριών διαστάσεων Oxyz

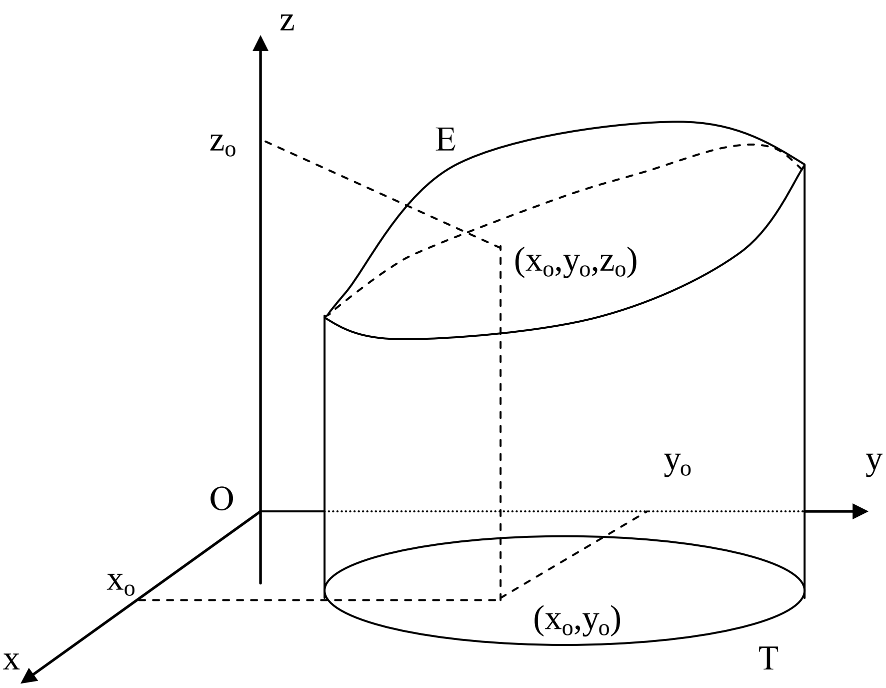
Το Καρτεσιανό γινόμενο R^2 περιέχει σαν στοιχεία τα σημεία ενός επιπέδου, στο οποίο ορίστηκε το Καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy. Το κάθε σημείο αντιστοιχεί σε μια διατεταγμένη δυάδα πραγματικών (x;y). Αντίστοιχα το Καρτεσιανό γινόμενο R^3 περιέχει τα σημεία του χώρου των τριών διαστάσεων, στον οποίο έχει ορισθεί το γνωστό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxyz. Το κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί σε μια διατεταγμένη τριάδα (x,y,z)

Ξαναγυρνώντας στις συναρτήσεις…

Επεκτείνοντας τώρα την λογική με την οποία «ορίσαμε» τη συνάρτηση μιας μεταβλητής [y=f(x)], θα λέγαμε πως μία συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών είναι μια λειτουργία f, που για να «λειτουργήσει» χρειάζεται δύο δεδομένα (π.χ. τους πραγματικούς x και y) έτσι ώστε να δώσει ένα τελικό αποτέλεσμα z: $z = f(x,y)$.

Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς πως το σύνολο (πεδίο) ορισμού μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών είναι ένα Καρτεσιανό γινόμενο δύο υποσυνόλων του R που συχνά καλείται και **Τόπος Ορισμού** της συνάρτησης (T). Είναι δηλαδή το πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $RxR=R^2$, ένα υποσύνολο δηλαδή του πραγματικού επιπέδου Oxy.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $z = f(x,y)$ απαιτεί ένα τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων, σαν το Καρτεσιανό τρισορθογώνιο Oxyz. Πάνω στο «οριζόντιο» επίπεδο Oxy αναπαριστάται ο τόπος ορισμού (T) της συνάρτησης f, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο (x_o,y_o) του T, μία τιμή $z_o = f(x_o,y_o)$. Τοποθετώντας την τιμή z_o στον αντίστοιχο άξονα ορίζουμε τη θέση ενός σημείου στο χώρο, του (x_o,y_o,z_o). Επομένως το σύνολο των σημείων του τόπου T αντιστοιχίζεται στα σημεία μιας επιφάνειας E σαν κι αυτή που φαίνεται στο επόμενο σχεδιάγραμμα. Είναι προφανές πως τμήματα της επιφάνειας E μπορεί να βρίσκονται κάτω από το επίπεδο Oxy, όταν βέβαια οι τιμές z της συνάρτησης είναι αρνητικές.



Σχ. 1.2.2. Στο παράδειγμα αυτό η επιφάνεια θυμίζει έναν «τρούλο» που «σκεπάζει» τον τόπο T (εάν πρόκειται για συνεχή συνάρτηση).

Ο τόπος T ορίζεται είτε από τις «ανάγκες» της συνάρτησης, είτε από τις προσωπικές μας επιλογές: Για παράδειγμα ας υπολογίσουμε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης:

$$z = f(x,y) = \ln(x) + x\sqrt{1-y^2}$$

Ισχύουν οι περιορισμοί:

- x>0 για να ορίζεται το lnx
- $-1 \leq y \leq 1$ για να ορίζεται σαν πραγματικός αριθμός το ριζικό.

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το καρτεσιανό γινόμενο των προηγουμένων διαστημάτων:

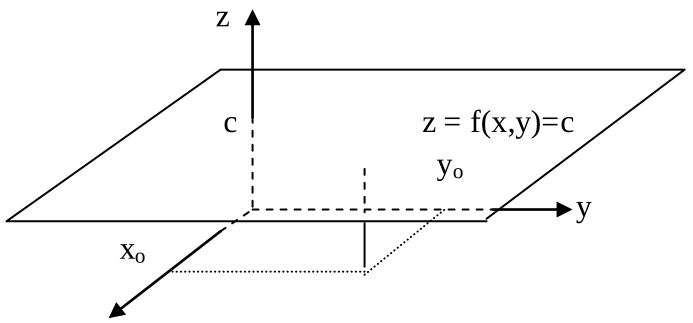
$$\Pi.O. = \{(x,y) \text{ όπου } x \in (0,\infty) \text{ και } y \in [-1,1]\}$$

Παραδείγματα απλών γραφικών παραστάσεων.

1^{o}) Η σταθερή συνάρτηση: Πρόκειται για τη συνάρτηση **$z = f(x,y) = z_0 = c$**, η οποία αποδίδει σε οποιοδήποτε δεδομένο (x,y) την σταθερή τιμή z_0.

Προφανώς το «φυσικό» πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι ολόκληρο το επίπεδο Oxy, δηλαδή το RxR, ενώ η γραφική της παράσταση είναι ένα επίπεδο παράλληλο με το Oxy, το οποίο τέμνει (κάθετα) τον άξονα Oz στο σημείο:

$$z=z_0=c$$



Αξίζει να υπενθυμίσουμε πως στις συναρτήσεις της μιας μεταβλητής η αντίστοιχη σταθερή συνάρτηση είναι η y = f(x) = c, της οποίας η γραφική παράσταση είναι μία ευθεία παράλληλη με τον άξονα των x, που τέμνει (κάθετα) των άξονα των y στο σημείο c. Η αντιστοιχία λοιπόν είναι προφανής.

2^{o}) Η σφαίρα (το ημισφαίριο).

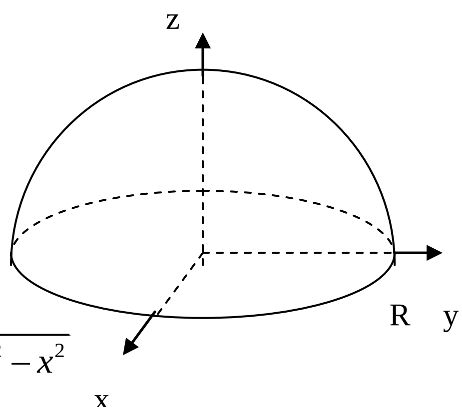
i) Με κέντρο το κέντρο των αξόνων.

Αρχικά να θυμηθούμε πως, στο επίπεδο Oxy, ο κύκλος με κέντρο το κέντρο των αξόνων, δίνεται από την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

η οποία ορίζει με πεπλεγμένο τρόπο την y σαν συνάρτηση του x. Λύνοντάς την ως προς το y έχουμε τις (2) συναρτήσεις:

$$\sqrt{R^2 - x^2}$$



όπου το πρόσημο (+) αντιστοιχεί στο ημικύκλιο που βρίσκεται στο 1^{o} και 2^{o} τεταρτημόριο (θετικά y), ενώ το πρόσημο (-) αντιστοιχεί στο ημικύκλιο που βρίσκεται στο 3^{o} και 4^{o} τεταρτημόριο (αρνητικά y).

Στις 3 διαστάσεις η εξίσωση της σφαίρας είναι εντελώς ανάλογη:

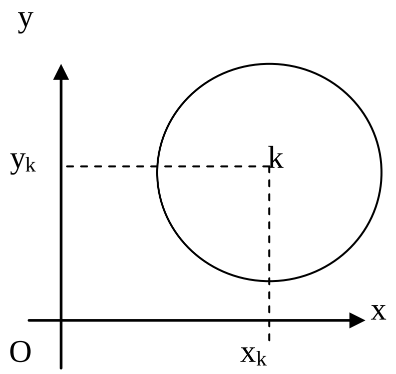
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad z(x) = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

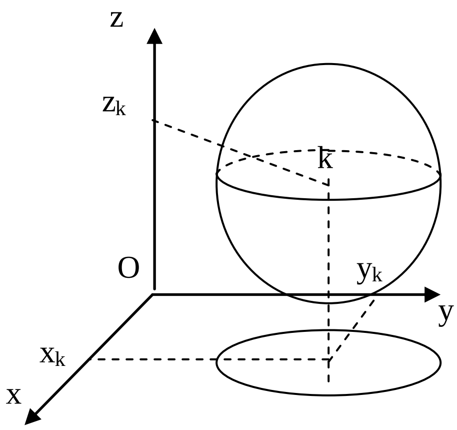
όπου με το πρόσημο (+) έχουμε το ημισφαίριο που αντιστοιχεί στα θετικά z και με το πρόσημο (-) έχουμε το ημισφαίριο που αντιστοιχεί στα αρνητικά z. Προφανώς, ο κύκλος $x^2 + y^2 = R^2$ του επιπέδου Oxy είναι και το πεδίο ορισμού της σφαίρας.

ii) Με κέντρο το κέντρο το σημείο (x_k,y_k,z_k).

Ως γνωστόν η εξίσωση ενός κύκλου, στο επίπεδο Oxy, με κέντρο το σημείο (x_k,y_k) και ακτίνα R, δίνεται από την σχέση:

$$(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = R^2$$





Ακολουθώντας την ίδια λογική φθάνουμε στην εξίσωση της σφαίρας με κέντρο το σημείο: (x_k,y_k,z_k) και ακτίνα R.

$$(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2 = R^2$$

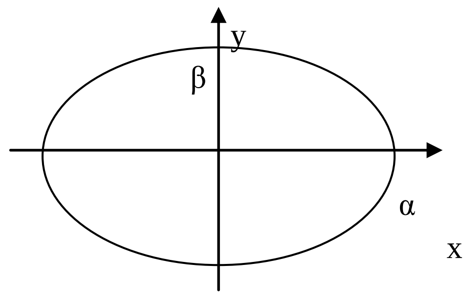
Και εδώ να δηλώσουμε πως το πεδίο ορισμού για τα δύο ημισφαίρια της σφαίρας (το άνω και το κάτω) είναι και πάλι ο προηγούμενος κύκλος με εξίσωση:

$$(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = R^2$$

3^o) Το ελλειψοειδές.

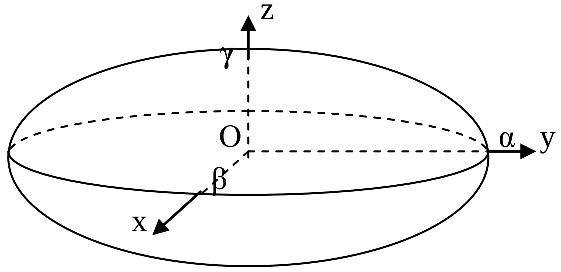
Να θυμίσουμε πως η εξίσωση μιας έλλειψης, στο επίπεδο Oxy, με κέντρο το κέντρο των αξόνων και μεγάλο ημιάξονα α (στην κατεύθυνση του άξονα των x) και μικρό τον β, είναι η:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$



Όμοια η εξίσωση του ελλειψοειδούς με κέντρο το κέντρο των αξόνων και ημιάξονες α (στα x), β (στα y) και γ (στα z) είναι η:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

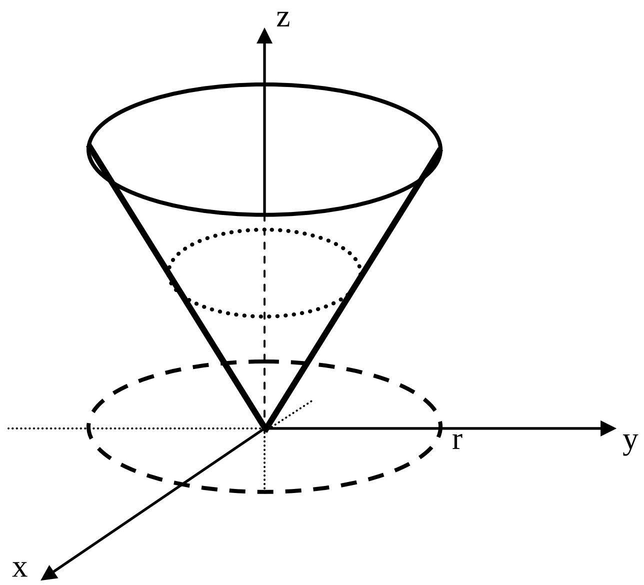


με πεδίο ορισμού (για άλλη μια φορά) την προηγούμενη έλλειψη.

4^{o}) Ο Κώνος. Η συνάρτηση:

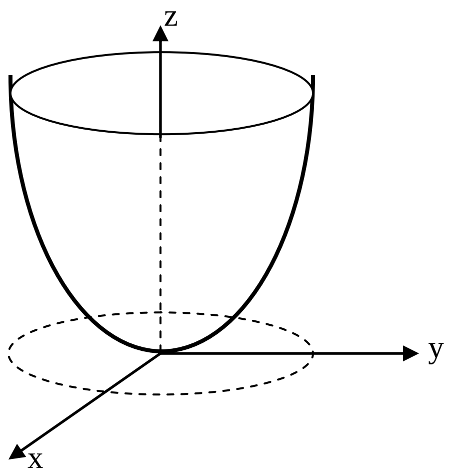
$$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

ορίζεται σε ολόκληρο το R^2, διότι η f μπορεί να «λειτουργήσει» για οποιαδήποτε δυάδα πραγματικών. Συχνά, όμως, ορίζεται σ' ένα συγκεκριμένο πεδίο ορισμού, ανάλογα με το πρόβλημα που μας απασχολεί κάθε φορά. Έτσι, η εν λόγω συνάρτηση, ορισμένη σε έναν κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα r, ορίζει τον κώνο του παρακάτω σχήματος.



Σχ. 1.2.3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,
όπου σαν τόπο Τ επιλέξαμε τον κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα r.

5^{o}) Παραβολοειδές εκ περιστροφής. Πρόκειται για την συνάρτηση:



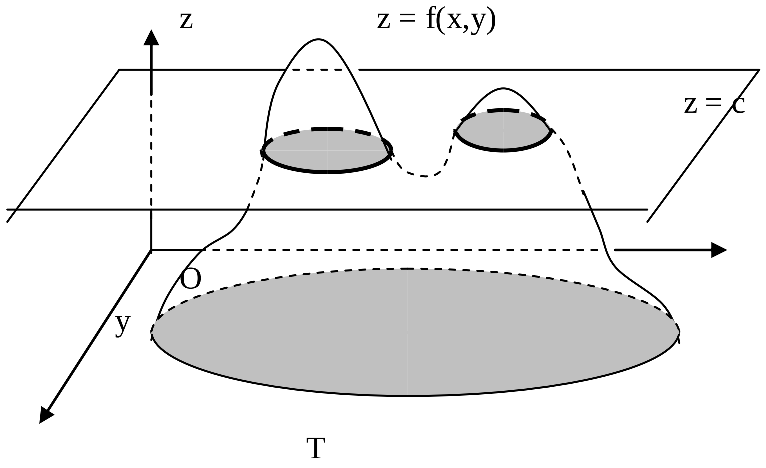
$$z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

όπου, συνήθως, το πεδίο ορισμού είναι ένας κυκλικός τόπος με κέντρο το κέντρο O του επιπέδου Oxy.

6. Ισοϋψείς (ισοσταθμικές) καμπύλες.

Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $z = f(x,y)$, ορισμένη στον τόπο T. Στο γράφημα αυτό φέρνουμε το επίπεδο z=c, το οποίο είναι παράλληλο του Oxy και τέμνει τον άξονα των z στο c. Το επίπεδο αυτό τέμνει και την επιφάνεια της f κατά μήκος μιας καμπύλης (εδώ δύο ελλείψεις) με εξίσωση:

$$f(x,y) = c$$



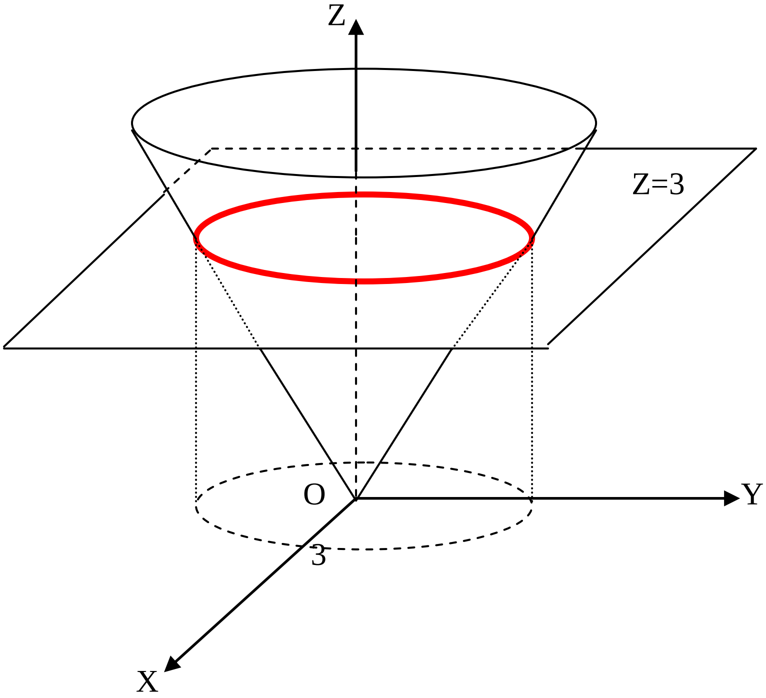
Ξαναγυρίζοντας λοιπόν στον κώνο με εξίσωση

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ψάχνουμε την τομή του κώνου με το επίπεδο z = 3. Η τομή αυτή έχει εξίσωση την:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3^2$$

δηλαδή αντιστοιχεί σε κύκλο με ακτίνα 3.



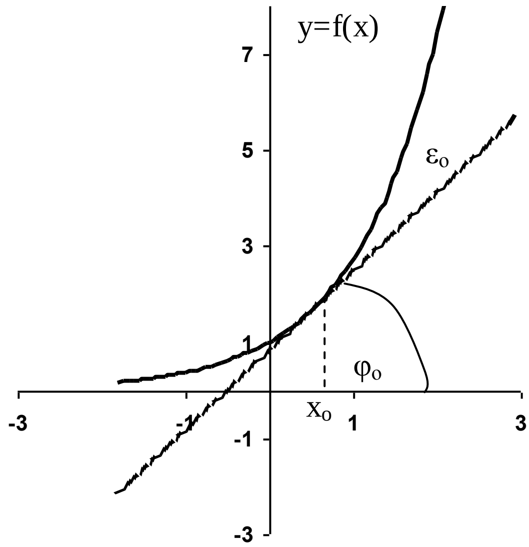
1.3 Μερικές παράγωγοι

1.3..1 Υπενθυμίσεις

Όπως ήδη γνωρίζουμε, η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής y=f(x), δίνει το ρυθμό μεταβολής της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής (y) όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη (x). Για την πρώτη παράγωγο χρησιμοποιήσαμε επίσης τις εκφράσεις «ταχύτητα μεταβολής της τιμής της f» και «κλίση» της συνάρτησης f.

Στο διπλανό γράφημα παρατηρούμε την καμπύλη μιας συνάρτησης f(x), και την ευθεία ε_o η οποία εφάπτεται στο γράφημα της f στο σημείο x_o. Γνωρίζουμε πως η συνάρτηση που δίνει τις κλίσεις της f είναι η παράγωγός της. Έχουμε λοιπόν:

Κλίση της f(x) στο x_o =
κλίση της ευθείας ε_o στο x_o =
= $\varepsilon\varphi(\varphi_o)$ = f '(x_o)



Να τονίσουμε πως η κλίση μιας συνάρτησης f σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο λέγεται <u>παράγωγος αριθμός</u> της f, ενώ η συνάρτηση που δίνει τις κλίσεις της f στο τυχαίο σημείο x. καλείται <u>παράγωγος συνάρτηση</u>.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) = x^2-5$ έχει παράγωγο συνάρτηση την $f'(x) = 2x$, ενώ η κλίση της συνάρτησης f στο x=3 ισούται με 6 ($f'(3) = 6$).

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$. Να υπολογισθεί η κλίση της f στο σημείο $x_0 = 0{,}5$, καθώς και η εξίσωση της ευθείας ε_o που εφάπτεται στην καμπύλη στο ίδιο σημείο.

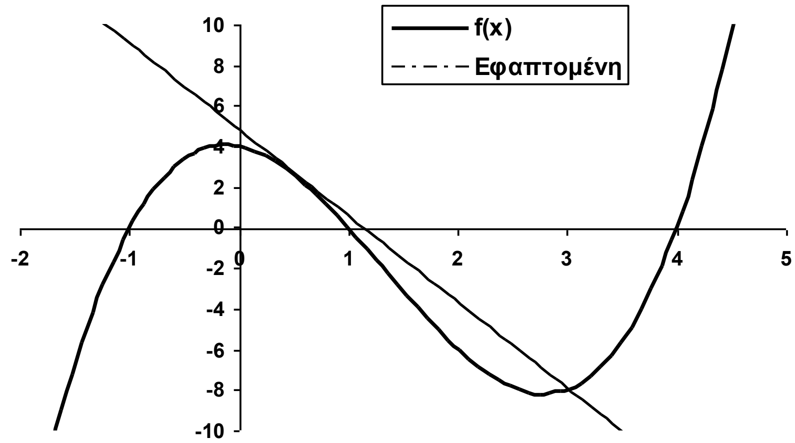
Λύση: Στην εξίσωση της ευθείας $\varepsilon : y = \alpha x + \beta$ η παράμετρος α ισούται με την κλίση της. Επειδή η ευθεία ε εφάπτεται στην καμπύλη της f, στο σημείο (0,5,f(0,5)) η κλίση της θα ταυτίζεται με την τιμή της παραγώγου της f :

$$\alpha = f'(0{,}5) = [\, x^3 - 4x^2 - x + 4 \,]'_{x=0{,}5} =$$
$$= [3x^2 - 8x - 1]_{x=0{,}5} = -4{,}25$$

ενώ ο σταθερός όρος β δίνεται από τη σχέση:

$$\beta = y_o - \alpha x_0 = 4{,}75 \qquad \text{όπου} \qquad y_o = f(0{,}5) = 2{,}625$$

Στο επόμενο γράφημα εμφανίζεται η συνάρτηση f και η ευθεία που εφάπτεται σ' αυτήν στο σημείο x=0,5 .



<u>**Άσκηση:**</u> Να βρεθεί η κλίση της προηγούμενης συνάρτησης στο σημείο καμπής της, καθώς και η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο γράφημα της f, στο σημείο αυτό. [**Σημείωση:** Σημείο καμπής είναι το σημείο αλλαγής των κυρτών και κοίλων μιας συνάρτησης, στο οποίο η πρώτη παράγωγος παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και μηδενίζεται – επομένως– η δεύτερη…]

1.3..2 Φυσική ερμηνεία των μερικών παραγώγων

Υποθέτουμε πως το αυτοκίνητό μας έχει κατά τοις τελευταίες εβδομάδες ψηλή κατανάλωση καυσίμου. Ο μηχανικός του συνεργείου μας λέει:

Το πρόβλημα της κατανάλωσης θα βελτιωθεί εάν:

- επαναλάβουμε τις εργασίες συντήρησης,
- αυξήσουμε κατά 10% την πίεση στα λάστιχα
- εάν ελαττώσουμε δραματικά την πίεση στο γκάζι.

Ουσιαστικά ο μηχανικός, μας παρομοίασε την κατανάλωση, με μια συνάρτηση 3 μεταβλητών. Εάν υλοποιήσουμε ταυτόχρονα και τις τρεις συμβουλές του δεν θα μπορέσουμε να αντιληφθούμε τη συνεισφορά της κάθε μιας παραμέτρου στην τελική μείωση της κατανάλωσης. Για το λόγο αυτό κρατούμε σταθερές τις τιμές των δύο παραμέτρων και μεταβάλλουμε την τρίτη. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης όταν μεταβάλλουμε σταδιακά τον καθένα από τους τρεις προαναφερθέντες παράγοντες.

Την ίδια λογική εφαρμόζουμε και στις συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών. Διατηρούμε σταθερές τις τιμές όλων των μεταβλητών της συνάρτησης, εκτός από μία, την οποία μεταβάλλουμε (θεωρώντας μόνον αυτή σαν μεταβλητή).

Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση: $z = f(x,y)$ και ένα σημείο (x_o,y_o) του τόπου T, όπου ορίζεται. Ο ρυθμός (η ταχύτητα) με την οποία μεταβάλλεται η τιμή της συνάρτησης z, όταν μεταβάλλεται μόνο το x (παραμένοντας στην περιοχή του x_o) ενώ το y παραμένει σταθερά ίσο με το y_o, ονομάζεται μερική παράγωγος της f στο σημείο (x_o,y_o).

1.3..3 Γεωμετρική ερμηνεία των μερικών παραγώγων

.

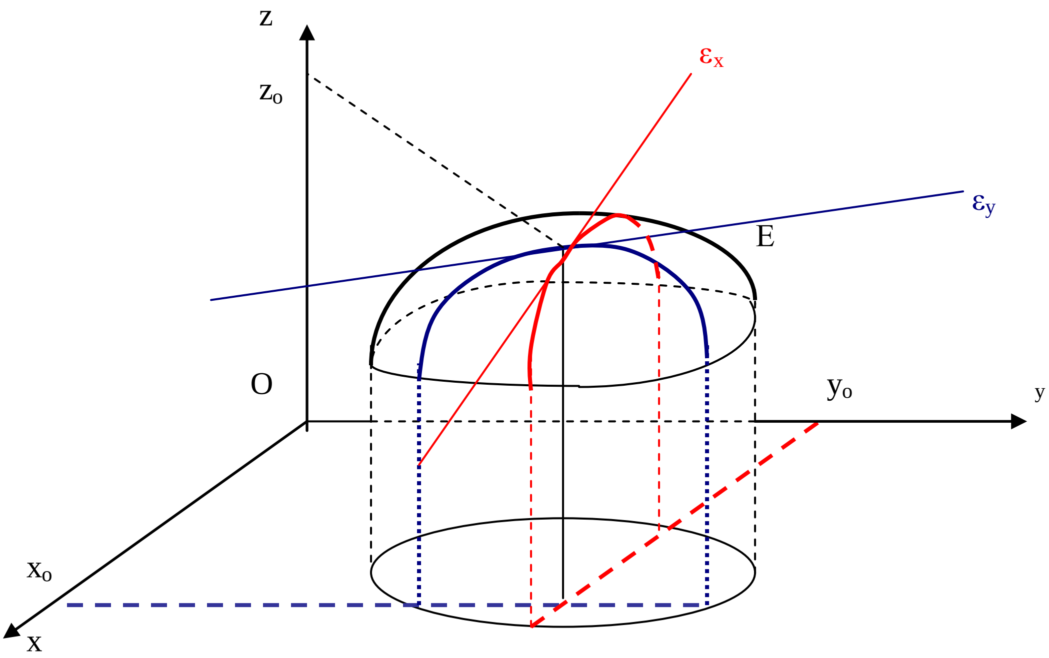
Ξαναγυρνούμε στη σχήμα A.2.2. όπου εμφανίζεται το «γράφημα» μιας συνάρτησης 2 μεταβλητών, της $f(x,y)$, που ορίζεται πάνω στον τόπο T του επιπέδου Oxy. Θεωρούμε επίσης το σημείο (x_o,y_o) του T και την εικόνα του μέσω της f, (την τιμή της f $z_o = f(x_o,y_o)$), με την οποία καθορίζεται το σημείο (x_o,y_o,z_o) του τρισδιάστατου χώρου. Όπως εξηγήσαμε το σύνολο αυτό των εικόνων δημιουργεί την επιφάνεια E, που είναι το γράφημα της (συνεχούς) συνάρτησης f.

Μεταφερόμαστε τώρα στο σχήμα A.3.1.. Θα θεωρήσουμε όλα τα σημεία του τόπου T των οποίων η συντεταγμένη y είναι σταθερά ίση με το y_o, ενώ το x τους μεταβάλλεται. Η εικόνα των σημείων αυτών του T επάνω στην επιφάνεια E δημιουργεί την κόκκινη καμπύλη, που είναι «παράλληλη» με το επίπεδο Oxz κι αντιστοιχεί στη συνάρτηση μιας μεταβλητής $z=f(x,y_0)$. Όμοια θεωρούμε όλα τα σημεία του τόπου T των οποίων η συντεταγμένη x είναι σταθερά ίση με το x_o ενώ το y τους μεταβάλλεται. Η εικόνα των σημείων αυτών του T επάνω στην επιφάνεια E δημιουργεί την μπλε καμπύλη, που είναι «παράλληλη» με το επίπεδο Oyz [$z=f(x_0,y)$].

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε προηγουμένως η μερική παράγωγος της f ως προς x (θεωρώντας το y σταθερό ίσο με y_o) είναι η κλίση της ευθείας ε_x που εφάπτεται στην κόκκινη καμπύλη (την παράλληλη προς το επίπεδο Oxz). Αντίθετα, η μερική παράγωγος της f ως προς y (θεωρώντας το x σταθερό ίσο με x_o) είναι η κλίση της ευθείας ε_y που εφάπτεται στην μπλε καμπύλη (την παράλληλη προς το επίπεδο Oyz).

Έχουμε δηλαδή:

κλίση της ε_x = $f'_x = \dfrac{df(x,y_0)}{dx}(x_0,y_0)$ και κλίση της ε_y = $f'_y = \dfrac{df(x_0,y)}{dy}(x_0,y_0)$



Σχ.Α.3.1. Γεωμετρική ερμηνεία των μερικών παραγώγων.