ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1.5.1 Υπολογισμός των μερικών παραγώγων. Συμβολισμοί

Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης περισσοτέρων μεταβλητών προκύπτει εύκολα από τα προηγούμενα. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση μερικά ως προς μία μεταβλητή της, θεωρώντας σταθερές όλες τις υπόλοιπες. Η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με ένα σύμβολο που είναι παραφθορά του κλασσικού d της πλήρους παραγώγισης: «∂»

Εάν θέλαμε να ορίσουμε και θεωρητικά τις μερικές παραγώγους θα γράφαμε τις γνωστές σχέσεις παραγώγισης:

- $$f'_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta\chi \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\right]$$
- $$f'_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\right]$$

Όλοι οι κανόνες παραγώγισης (παραγώγιση αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, καθώς και οι παράγωγοι των γνωστών συναρτήσεων και των σύνθετων συναρτήσεων) ισχύουν όπως τους γνωρίσαμε στις παραγώγους των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

1^o παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση: $z = f(x,y) = x^2y^3 - x\ln(xy)$. Υπολογίζουμε τις 2 μερικές παραγώγους.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\, x^2y^3 - x\ln(xy)] = 2xy^3 - \ln(xy) - x\frac{1}{xy}\frac{\partial}{\partial x}(xy) = 2xy^2 - \ln(xy) - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y^3 - x\ln(xy)] = 3x^2y^2 - x\frac{1}{xy}\frac{\partial}{\partial y}(xy) = 3x^2y^2 - \frac{x}{y}$$

Πρόκειται για δύο συναρτήσεις που δίνουν την κλίση της επιφάνειας που έχει εξίσωση $z = f(x,y)$, όταν μεταβάλλεται μόνο το x η πρώτη και μόνο το y η δεύτερη. Οι συναρτήσεις αυτές δίνουν μια συγκεκριμένη τιμή για την κλίση της επιφάνειας, όταν τους δοθούν οι συντεταγμένες ενός συγκεκριμένου σημείου (x_o,y_o). Εάν λοιπόν αναζητούμε τις δύο αυτές κλίσεις στο σημείο (0.5 , 2) έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0.5,2) = [2xy^2 - \ln(xy) - 1]_{x=0,5\ ,\ y=2} = 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0.5,2) = [3x^2y^2 - \frac{x}{y}]_{x=0,5\ ,\ y=2} = 2,75$$

2^o παράδειγμα: Όμοια υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων περισσότερων μεταβλητών. Έτσι, μια συνάρτηση ν-μεταβλητών θα έχει ν-μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ας παραγωγίσουμε λοιπόν τη συνάρτηση:

$$z = f(x,y,t) = x^3 - 3xy^2 + 3yt^4 - t\ln(y^2)$$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\, x^3 - 3xy^2 + 3yt^4 - t\ln(y^2)] = 3x^2 - 3y^2$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\, x^3 - 3xy^2 + 3yt^4 - t\ln(y^2)] = 6xy + 3t^4 - \frac{2t}{y}$

- $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[\, x^3 - 3xy^2 + 3yt^4 - t\ln(y^2)] = 12yt^3 - \ln(y^2)$

Εάν λοιπόν αναζητούμε την μερική παράγωγο της f ως προς y στο σημείο Σ(1,2,3), θα έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) = [\, 6xy + 3t^4 - \frac{2t}{y}\,]_{(1,2,3)} = 12 + 243 - 3 = 252$$

1.5.1 Παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων

Υπενθύμιση: Την παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης την συναντήσαμε και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Για παράδειγμα σύνθετη συνάρτηση είναι η:

$$f(u) = ημ(u) \quad όπου \quad u=4x^3$$

την οποία προτιμούσαμε να γράφουμε υπό τη μορφή:

$$f(x) = ημ(4x^3)$$

με παράγωγο την:

$$f'(x) = συν(4x^3)*(4x^3)' = 12x^2συν(4x^3)$$

Η παραγώγιση αυτή θεωρητικά περιγράφονταν από τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

Δηλαδή: Η παράγωγος μιας συνάρτησης f, ως προς τη θεμελιώδη μεταβλητή της (έστω x), ισούται με το γινόμενο της παραγώγου της f ως προς μια ενδιάμεση μεταβλητή, επί την παράγωγο της ενδιάμεσης μεταβλητής ως προς τη θεμελιώδη.

Τώρα θεωρούμε μία συνάρτηση της μορφής:

$$z = f(u,v) \quad όπου \quad \left|\begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{array}\right.$$

η οποία λέγεται σύνθετη συνάρτηση των μεταβλητών x και y με ενδιάμεσες μεταβλητές τις u και v. Είναι φανερό πως εάν αντικαταστήσουμε στην f τις u και v με τα ίσα τους θα προκύψει μια κανονική συνάρτηση 2 μεταβλητών, των x και y. Η παραγώγισή της γίνεται με τον ίδιο τρόπο που γινόταν και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής:

- $$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(u(x+\Delta x,y),v(x+\Delta x,y)) - f(u(x,y),v(x,y))}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\left[f(u(x+\Delta x,y),v(x+\Delta x,y)) - f(u(x,y),v(x+\Delta x,y))\right]}{\left(u(x+\Delta x,y)-u(x,y)\right)}\frac{\left[u(x+\Delta x,y)-u(x,y)\right]}{\Delta x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[f(u(x,y),v(x+\Delta x,y)) - f(u(x,y),v(x,y))\right]}{\left(v(x+\Delta x,y)-v(x,y)\right)}\frac{\left[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)\right]}{\Delta x}\right] \Rightarrow \text{[1]}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad 1.3.5$$

όμοια προκύπτει και η αντίστοιχη παράγωγος ως προς y:

- $$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(u(x,y+\Delta y),v(x,y+\Delta y)) - f(u(x,y),v(x,y))}{\Delta y}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\left[f(u(x,y+\Delta y),v(x,y+\Delta y)) - f(u(x,y),v(x,y+\Delta y))\right]}{\left(u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\right)}\frac{\left[u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\right]}{\Delta y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[f(u(x,y),v(x,y+\Delta y)) - f(u(x,y),v(x,y))\right]}{\left(v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right)}\frac{\left[v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right]}{\Delta y}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f(u,v)}{\partial y} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}} \qquad 1.3.5$$

Οι τύποι Α.3.5 δίνουν τελικά τις δύο μερικές παραγώγους της f ως προς τις βασικές μεταβλητές, μέσω των ενδιάμεσων u(x,y) και v(x,y). Τελικά η πρακτική εφαρμογή είναι πολύ απλούστερη από την απόδειξη. Ουσιαστικά αποτελεί μια επέκταση της σύνθετης παραγώγισης των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

---

[1] *Όπου προσθαφαιρέθηκε η ποσότητα* $f(u(x,y),v(x+\Delta x,y))$, *χωρίστηκε το κλάσμα σε δύο κλάσματα και το 1^o πολλαπλασιάστηκε και διαιρέθηκε με το* $[u(x+\Delta x,y)-u(x,y)]$, *ενώ το 2^o με το:* $[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)]$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση:

$f(u,v) = u^2 - v^3$, όπου u(x,y) = ημ(x-y)
και

να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι: $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$.

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - v^3)\frac{\partial}{\partial x}[\eta\mu(x-y)] + \frac{\partial}{\partial v}(u^2 - v^3)\frac{\partial}{\partial x}[\sigma\upsilon\nu(x+y)] =$$

$= 2u\sigma\upsilon\nu(x-y) + 3v^2\eta\mu(x+y)$

και

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - v^3)\frac{\partial}{\partial y}[\eta\mu(x-y)] + \frac{\partial}{\partial v}(u^2 - v^3)\frac{\partial}{\partial y}[\sigma\upsilon\nu(x+y)] =$$

$= -2u\sigma\upsilon\nu(x-y) + 3v^2\eta\mu(x+y)$

Παρατηρούμε πως θα βρίσκαμε ακριβώς τα ίδια εάν αντικαθιστούσαμε τις συναρτήσεις u και v στην f και παραγωγίζαμε κατά τα γνωστά:

$f(x,y) = \eta\mu^2(x-y) - \sigma\upsilon\nu^3(x+y)$ οπότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\,\eta\mu^2(x-y) - \sigma\upsilon\nu^3(x+y)\,] = 2\eta\mu(x-y)\sigma\upsilon\nu(x-y) + 3\sigma\upsilon\nu^2(x+y)\eta\mu(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\,\eta\mu^2(x-y) - \sigma\upsilon\nu^3(x+y)\,] = -2\eta\mu(x-y)\sigma\upsilon\nu(x-y) + 3\sigma\upsilon\nu^2(x+y)\eta\mu(x+y)$$

Τα αποτελέσματα είναι προφανώς ίδια…

1.5.1 Πεπλεγμένη παραγώγιση

Συχνά, όταν βλέπουμε την έκφραση, **F(x,y) = 0,** πιστεύουμε πως πρόκειται για μια σχέση που ορίζει μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, μπερδεύοντάς την με την **F(x,y) = z.** Η δεύτερη μορφή απαιτεί τον καθορισμό της τιμής των δύο μεταβλητών, με τις οποίες υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης z. Αντίθετα, στην πρώτη ισότητα, η γνώση της τιμής της μεταβλητής x, απαιτεί τον υπολογισμό της τιμής του y, έτσι ώστε το αριστερό μέλος της ισότητας να είναι ίσο με το μηδέν. Άρα, στην περίπτωση αυτή το y είναι εξαρτημένη μεταβλητή. Ονομάζουμε λοιπόν πεπλεγμένες συναρτήσεις αυτές που δεν είναι λυμένες ως προς την εξαρτημένη μεταβλητή τους. Η μορφή μιας πεπλεγμένης συνάρτησης μιας μεταβλητής είναι η:

F(x,y) = 0 κι αν λυνόταν ως προς y **y = f(x)**

Τη συνάρτηση αυτή την παραγωγίζαμε ακολουθώντας ένα «μηχανικό» κανόνα που έλεγε πως παραγωγίζουμε την F κανονικά ως προς x και ως προς y, σαν να ήταν η y μια ακόμη μεταβλητή. Τελειώνοντας όμως την κάθε παραγώγιση ως προς y, θυμόμασταν πως η y είναι συνάρτηση y(x) και πολλαπλασιάζαμε με το y'!

Παράδειγμα 1^{o}: Είναι γνωστή η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το κέντρο των αξόνων και ακτίνα ρ:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \qquad \rightarrow \qquad F(x,y) = x^2 + y^2 - \rho^2 = 0 \quad \rightarrow$$
$$y = f(x) = \pm\sqrt{\rho^2 - x^2}$$

Είναι ένα παράδειγμα όπου η πεπελεγμένη συνάρτηση μπορεί να λυθεί ως προς y. Συνήθως όμως γράφεται με πεπλεγμένη μορφή για να γίνεται άμεσα αντιληπτή.

Παράδειγμα 2^{o}: Δίνεται η συνάρτηση $F(x,y) = x^2 + y^3 + 3xy^2 - x\ln y = 0$. Παρατηρούμε πως η λύση της F(x,y)=0 ως προς y είναι πολύ δύσκολη, ενώ η λύση της ως προς x είναι ευκολότερη. Πράγματι, η εξίσωση αυτή αποτελεί ένα τριώνυμο ως προς x:

$$F(x,y) = x^2 + x(3y^2 - \ln y) + y^3 = 0$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση επιμένουμε να θεωρούμε πως η εν λόγω σχέση ορίζει ια συνάρτηση y με μεταβλητή το x. Παραγωγίζοντας σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα έχουμε:

$$2x + 3y^2y' + 3y^2 + 6xyy' - \ln y - \frac{xy'}{y} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$2x + 3y^2 - \ln y = y'\left(\frac{x}{y} - 3y^2 - 6xy\right) \quad \Rightarrow$$
$$y' = \frac{2x + 3y2\ \ln y}{\frac{x}{y} - 3y^2 - 6xy}$$

Τώρα, γνωρίζοντας να παραγωγίζουμε μερικά, θα αντιμετωπίσουμε το αριστερό μέλος της σχέσης F(x,y) = 0 σαν συνάρτηση δύο μεταβλητών, όπου όμως η y είναι συνάρτηση του x (y = y(x)). Ας παραγωγίσουμε λοιπόν μερικά ως προς x την ισότητα F(x,y) = 0, κατά μέλη:

$$F(x,y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

όπου βάλαμε και τον δεύτερο προσθετέο διότι όταν παραγωγίζουμε ως προς x πρέπει να συμπεριλάβουμε και το y το οποίο εμπεριέχει x [είναι συνάρτηση του x]. Επίσης, γράψαμε την παράγωγο του y ως προς x με το σύμβολο d αντί του ∂, διότι η y είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής και δεν έχει μερική παράγωγο αλλά ολική. Από την τελευταία σχέση βγαίνει και ο τύπος της πεπλεγμένης παραγώγου που (ουσιαστικά) χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}}$$

Ας εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$F(x,y) = x^2 + y^3 + 3xy^2 - x\ln y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}[x^2 + y^3 + 3xy^2 - x\ln y]}{\dfrac{\partial}{\partial y}[x^2 + y^3 + 3xy^2 - x\ln y]} = -\frac{2x + 3y^2 - \ln y}{3y^2 + 6xy - x/y}$$

1.4 Το ολικό διαφορικό

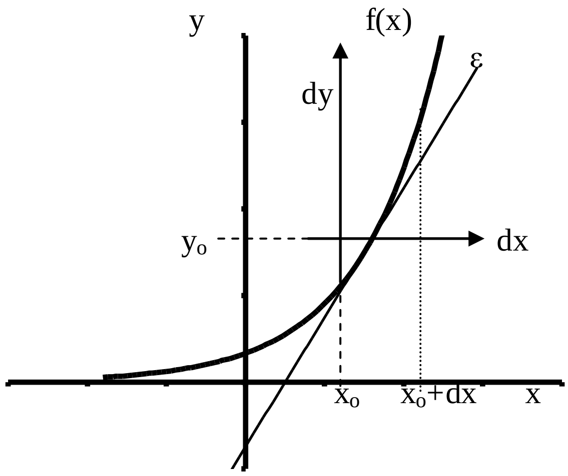
1.5.1 Το διαφορικό στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Έστω η συνάρτηση $y=f(x)$. Υπολογίζουμε την παράγωγό της στο σημείο x_o και χαράζουμε την ευθεία ε που εφάπτεται στην $f(x)$ στο σημείο $(x_o,f(x_o))$ κι έχει κλίση $\kappa = f'(x_o)$.

Χαράζουμε τώρα ένα νέο σύστημα αξόνων με κέντρο το σημείο $(x_o,f(x_o))$, με τον άξονα dx παράλληλο μ' αυτόν των x και τον άξονα dy παράλληλο με τον αντίστοιχο των y. Η εξίσωση της ευθείας ε στο νέο σύστημα γράφεται:

$$dy = \kappa dx = f'(x_o)dx$$

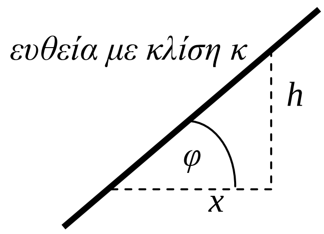
όπου στον άξονα dx μετριέται η μεταβολή στα x (με κέντρο το x_o), ενώ στον dy η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης y (με κέντρο το y_o).



__Παρατήρηση__: Τη σχέση

$$dy = \kappa dx = f\,'(x_o)dx$$

συναντούμε κάθε φορά που αντιμετωπίζουμε κλίσεις, Για παράδειγμα έχουμε το διπλανό κεκλιμένο επίπεδο με κλίση κ και ζητούμε τη διαφορά υψομέτρου h, που αντιστοιχεί σε οριζόντια μετατόπιση x :



$$\kappa = \varepsilon\varphi\varphi = h/x$$
$$h = x\varepsilon\varphi\varphi = \kappa x$$

Δεν μπορούμε να μην παρατηρήσουμε πως η εξίσωση αυτή συνδέεται με τη γνωστή γραφή της πρώτης παραγώγου:

$$dy = f\,'(x_o)dx \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{dx} = f\,'(x_o)$$

Ερμηνεύοντας αλγεβρικά και γεωμετρικά τη σχέση $df = f\,'dx$ θα λέγαμε πως:

Το διαφορικό προσεγγίζει την μεταβολή της τιμής της συνάρτησης f(x), όταν περνούμε από το σημείο x_o σε κάποιο διπλανό, το x_o+dx. Μόνο που τη μεταβολή της τιμής δεν την υπολογίζει από την καμπύλη της συνάρτησης, αλλά από την ευθεία που εφάπτεται στο σημείο (x_o,y_o) [όπου $y_o= f(x_o)$]. Προφανώς ο υπολογισμός αυτός είναι προσεγγιστικός και ισχύει για μικρό dx. Έτσι η σχέση του διαφορικού «διαβάζεται»:

Η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης f (dy), όταν περνούμε από το σημείο x στο σημείο x+dx, δίνεται, προσεγγιστικά, από το γινόμενο της παραγώγου της f (στο κεντρικό σημείο) με το ποσό της μεταβολής του x (dx).

Είναι φανερό πως εάν ζητείται η νέα τιμή στο σημείο x_o+dx, αυτή ισούται με το άθροισμα της παλιάς τιμής με τη διαφορά dy:

$$f(x_o+dx) = f(x_o) + dy = f(x_o) + f\,'(x_o)dx$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί προσεγγιστικά, με τη βοήθεια του διαφορικού η τιμή y = $\sqrt[3]{26{,}82}$.

Λύση: Η μορφή της παράστασης, μας οδηγεί στη συνάρτηση: $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$. Το διαφορικό της γράφεται:

$$dy = [\sqrt[3]{x}]'dx = [x^{1/3}]'dx = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$$

Το κεντρικό σημείο στο οποίο θα καθορίσουμε την τιμή της παραγώγου (και του διαφορικού), είναι ένα σημείο βολικό για τον υπολογισμό της τιμής των ριζικών και ταυτόχρονα πολύ κοντά στο x που μας ενδιαφέρει: 26,82. Προφανώς πρόκειται για το σημείο x_o=27:

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}dx = \frac{dx}{27}$$

Η τιμή του dx ισούται με την απόσταση του σημείου x=26,82 και του κεντρικού σημείου $x_o = 27$:

$$dx = 26,82 – 27 = -0,18$$

οπότε

$$dy = \frac{-0,18}{27} = -\frac{0,02}{3}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε πως η τιμή της μεταβολής dx μπορεί να είναι και αρνητική. Προφανώς η τιμή του y = $\sqrt[3]{26,82}$ υπολογίζεται εάν στην τιμή της συνάρτησης στο κεντρικό σημείο (x_o=27) προστεθεί η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης dy. Έχουμε λοιπόν:

$$y = \sqrt[3]{26,82} = f(26,82) = f(27) + dy = 3 – 0,0066667 = 2,993333$$

αντί του ακριβούς

$$y = \sqrt[3]{26,82} = 2,993318$$

Άσκηση: Έστω η συνάρτηση y = f(x) = ημx. Να υπολογισθεί η τιμή του ημ(3 rad) με τη βοήθεια της σχέσης του διαφορικού.

1.5.1 Το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης z = f(x,y)

Έστω η συνάρτηση z = f(x,y), ορισμένη σ’ έναν τόπο Τ, οι δύο μερικές παράγωγοί της πρώτης τάξης ($\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial x$) κι ένα σημείο (x_o,y_o) του τόπου Τ. Σύμφωνα με τη γεωμετρική ερμηνεία των μερικών παραγώγων που. παρουσιάστηκε στην παράγραφο Α.3.3, οι δύο νέες αυτές συναρτήσεις παρέχουν την κλίση της f όταν μεταβάλλεται μόνο το x (η πρώτη) και μόνο το y (η δεύτερη). Η επόμενη παράσταση καλείται ολικό διαφορικό της f :

$$\boxed{dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

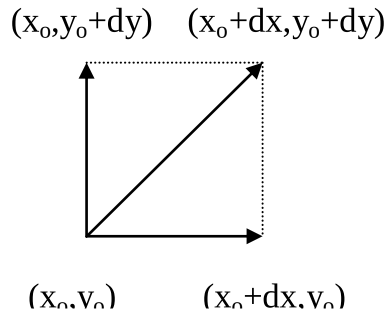
Ερμηνεύοντας γεωμετρικά τη σχέση του ολικού διαφορικού, την ορίζουμε στο σημείο (x_o,y_o) του τόπου Τ.

$$dz = df = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy$$

Παρατηρούμε πως το ολικό διαφορικό είναι το άθροισμα δύο ποσοτήτων:

της $h_x = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx$ και της $h_y = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$

Η ποσότητα h_x προσεγγίζει τη διαφορά της τιμής της συνάρτησης f, όταν περνούμε από το σημείο (x_o,y_o) στο σημείο (x_o+dx,y_o) , ενώ η ποσότητα h_y προσεγγίζει τη διαφορά της τιμής της συνάρτησης f, όταν περνούμε από το σημείο (x_o,y_o) στο σημείο (x_o,y_o+dy). Το ολικό διαφορικό, σαν το άθροισμά τους, προσεγγίζει τη διαφορά της τιμής της συνάρτησης f, όταν περνούμε από το σημείο (x_o,y_o) στο σημείο (x_o+dx,y_o+dy).



Ενώ δηλαδή το διαφορικό της συνάρτησης μιας μεταβλητής προσεγγίζει την καμπύλη της συνάρτησης με την ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη στο «κεντρικό» σημείο x_o, το ολικό διαφορικό προσεγγίζει την επιφάνεια που αντιστοιχεί στη συνάρτηση f(x,y), με το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας, στο «κεντρικό» σημείο (x_o,y_o).

Παρατήρηση: Ξαναδείτε το Σχ, Α.3.1. και σκεφθείτε πως οι δύο ευθείες ε_x και ε_y ορίζουν ένα επίπεδο που εφάπτεται στην καμπύλη-γράφημα της f(x,y), στο σημείο (x_0,y_0,z_0)

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί προσεγγιστικά η τιμή της παράστασης:

$$\kappa = \sqrt{4{,}1^2 + 2{,}95^2}\,.$$

Λύση: Η μορφή της παράστασης παραπέμπει στη συνάρτηση:

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ενώ σαν κεντρικό σημείο επιλέγουμε το (4,3), για το οποίο έχουμε μεταβολή στα x και στα y, dx=0,1 και dy=-0,05. Έτσι το ολικό διαφορικό της f στο σημείο αυτό γίνεται:

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy =$$

$$= \frac{4}{5}dx + \frac{3}{5}dy = 0{,}08 - 0{,}03 = 0{,}05$$

Άρα έχουμε για την τιμή της κ:

$$\kappa = f(4,3) + df = 5 + 0{,}05 = 5{,}05$$

Ολικό διαφορικό της συνάρτησης v=f(x,y,z). Όμοια ορίζεται και το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης περισσοτέρων μεταβλητών. Για παράδειγμα το ολικό διαφορικό της συνάρτησης v = f(x,y,z) δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{dv = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz}$$

Δηλαδή υπολογίζουμε προσεγγιστικά τη μεταβολή της τιμής της συνάρτησης v(x,y,z) όταν από το σημείο (x,y,z) του τρισδιάστατου τόπου ορισμού Τ, πηγαίνουμε στο σημείο (x+dx,y+dy,z+dz). Στον υπολογισμό αυτό προσθέτουμε τις τρεις μερικές μεταβολές:

- $h_x = \dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}dx$ όταν περνούμε από το σημείο (x,y,z) στο (x+dx,y,z)
- $h_y = \dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}dx$ όταν περνούμε από το σημείο (x,y,z) στο (x,y+dy,z)
- $h_z = \dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}dx$ όταν περνούμε από το σημείο (x,y,z) στο (x,y,z+dz)

Άσκηση: Να υπολογισθεί προσεγγιστικά η τιμή της παράστασης:

$$v = \sqrt{80.6} + \eta\mu(3) + \ln(2,7)$$

όπου ημ(3) = ημ(3 rad)

1.4 Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Όπως έχουμε διαπιστώσει, οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης f(x,y) είναι επίσης συναρτήσεις των ίδιων μεταβλητών με τη συνάρτηση. Άρα μπορούν να παραγωγισθούν κατ' επανάληψη. Έτσι προκύπτουν οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης,. Κάθε παράγωγος μπορεί να παραγωγισθεί μερικά ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή της. Ισχύουν οι συμβολισμοί:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ παραγωγίζουμε την f δύο φορές ως προς x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$ παραγωγίζουμε ως προς x την μερική παράγωγο της f ως προς y (παραγωγίζουμε την f πρώτα ως προς y και στη συνέχεια ως προς x.

Προκύπτει δηλαδή ένα δένδρο της μορφής

$$
\begin{tikzcd}
 & & f(x,y) \arrow[dl] \arrow[drr] & & & \\
 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \dfrac{\partial f}{\partial y} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \arrow[d] \arrow[dr] & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \arrow[d] & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \arrow[d] \\
\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} & \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} & \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}
\end{tikzcd}
$$

κ.λ.π.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω η συνάρτηση f(x,y) ορισμένη σε έναν τόπο T, στο εσωτερικό του οποίου η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης. Τότε ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$$

Το θεώρημα αυτό γενικεύεται όπως δείχνει η επόμενη ισότητα:

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y \partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial x \partial x \partial y \partial y} = ... = \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}$$

πράγμα που σημαίνει πως εάν πρέπει να παραγωγίσουμε 5 φορές την συνάρτηση f, 3 φορές ως προς x και 2 φορές ως προς y, μπορούμε να το κάνουμε με οποιαδήποτε σειρά. Το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο. Επομένως η συνάρτηση f(x,y) έχει τρεις μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης. Το θεώρημα αυτό το δεχόμαστε χωρίς απόδειξη…

Θεωρητική άσκηση: Να δειχθεί πως εάν η παράσταση:

$$A = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης f , τότε ισχύει η ισότητα:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Λύση: Εάν η παράσταση A είναι ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης f ,θα γράφεται:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{και} \quad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Έτσι θα έχουμε:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

και

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

όπου επειδή τα δεύτερα μέλη είναι ίσα (λόγω του προηγουμένου Θεωρήματος) και τα πρώτα μέλη θα είναι ίσα.

1^{o} παράδειγμα: Να υπολογισθούν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της συνάρτησης $z = f(x,y) = xy\eta\mu(xy) - x^2 + y^3$.

Λύση: Αρχικά υπολογίζουμε τις 2 μερικές παραγώγους πρώτης τάξης:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[xy\eta\mu(xy) - x^2 + y^3\right] = y\eta\mu(xy) + xy^2\sigma\upsilon\nu(xy) - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[xy\eta\mu(xy) - x^2 + y^3\right] = x\eta\mu(xy) + yx^2\sigma\upsilon\nu(xy) + 3y^2$$

και στη συνέχεια τις 3 μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[y\eta\mu(xy) + xy^2\sigma\upsilon\nu(xy) - 2x\right] = y^2\sigma\upsilon\nu(xy) + y^2\sigma\upsilon\nu(xy) - xy^3\eta\mu(xy) - 2 =$$

$$= 2y^2\sigma\upsilon\nu(xy) - xy^3\eta\mu(xy) - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[y\eta\mu(xy) + xy^2\sigma\upsilon\nu(xy) - 2x\right] = \eta\mu(xy) + xy\sigma\upsilon\nu(xy) + 2xy\sigma\upsilon\nu(xy) - x^2y^2\eta\mu(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x\eta\mu(xy) + yx^2\sigma\upsilon\nu(xy) + 3y^2\right] = x^2\sigma\upsilon\nu(xy) + x^2\sigma\upsilon\nu(xy) - yx^3\eta\mu(xy) + 6y$$

$$= 2x^2\sigma\upsilon\nu(xy) - yx^3\eta\mu(xy) + 6y$$

2^{o} παράδειγμα: Δίνεται η παράσταση:

$$A = \left[2x - \ln(y^2)\right]dx + \left[2y - \frac{2x}{y}\right]dy$$

Είναι το ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης f(x,y);

Λύση: Για να είναι ολικό διαφορικό η παράσταση Α θα πρέπει για τις συναρτήσεις $P(x,y) = 2x - \ln(y^2)$ και $Q(x,y) = \left[2y - \frac{2x}{y}\right]$, να ισχύει η ισότητα: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[2x - \ln(y^2)\right] = -\frac{2}{y}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2y - \frac{2x}{y}\right] = -\frac{2}{y}$$

Οπότε η ισχύς της προηγούμενης σχέσης μαρτυρά πως η παράσταση Α είναι το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης $f(x,y)$

Προφανώς, ο υπολογισμός της συνάρτησης f(x,y), της οποίας ολικό διαφορικό είναι η παράσταση Α, γίνεται με τη βοήθεια ολοκληρώσεων, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των διαφορικών εξισώσεων.