ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

1.6 Μελέτη ακρότατων τιμών της συνάρτησης f(x,y)

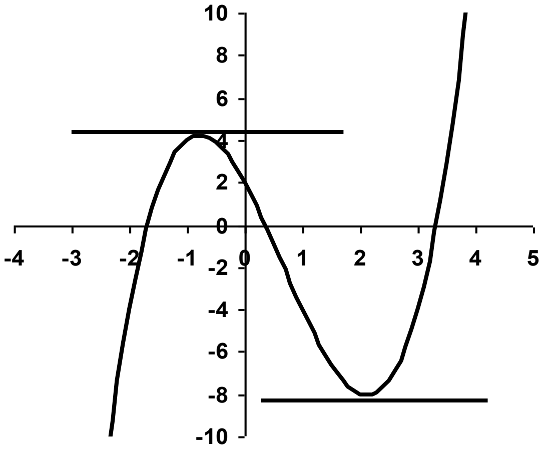
1.6.1 Υπενθυμίσεις

Στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής έχουμε πιθανό τοπικό ακρότατο στα σημεία όπου η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται:

$$f'(\rho) = 0$$

όπου δηλαδή η κλίση του γραφήματος της συνάρτησης ισούται με το μηδέν.

Εάν αριστερά από μια ρίζα ρ της παραγώγου, το πρόσημο της f ' είναι θετικό, ενώ δεξιά της το πρόσημο της f ' είναι αρνητικό, τότε στο σημείο x=ρ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Εάν, αντίθετα, αριστερά της ρ το πρόσημο της f' είναι αρνητικό και δεξιά θετικό τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.



Σχ.Α.6.1. Τοπικά ακρότατα συνάρτησης μιας μεταβλητής

Επομένως, για να έχουμε τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο x=ρ θα πρέπει στην περιοχή του ρ η συνάρτηση f να στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (θα πρέπει δηλαδή η παράγωγος f ' να είναι φθίνουσα συνάρτηση – οπότε η κλίση της f θα μειώνεται διαρκώς στην περιοχή του ρ). Όμως αυτό θα συμβαίνει όταν η 2η παράγωγος της f (η f '') θα είναι αρνητική[1].

Αντίθετα, θα έχουμε τοπικό ελάχιστο όταν η f θα στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, όταν δηλαδή η κλίση της θα αυξάνει, όταν δηλαδή η 2η παράγωγος θα είναι θετική. Όλα τα παραπάνω φαίνονται σχηματικά ως εξής: **Έστω πως $f'(x_o) = 0$.**

- Εάν $f''(x_o) > 0 \Rightarrow f'(x_o)$ αύξουσα $\Rightarrow$

Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και παρουσιάζει στο x_o τοπικό ελάχιστο

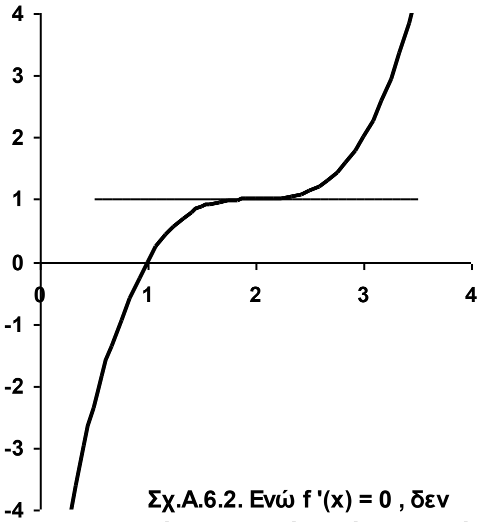
- Εάν $f''(x_o) < 0 \Rightarrow f'(x_o)$ φθίνουσα $\Rightarrow$

Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο

---

[1] *Να μην ξεχνούμε πως η 2η παράγωγος είναι η παράγωγος της 1ης παραγώγου. Άρα όταν η f '' είναι θετική, η f ' θα είναι αύξουσα. Κι επειδή η f ' δίνει τις κλίσεις της f, η f θα έχει κλίση διαρκώς αύξουσα, δηλαδή θα στρέφει τα κοίλα προς τα άνω.*

Τέλος υπάρχει και η δυνατότητα να μηδενίζεται η τιμή της παραγώγου f ‘ σε κάποιο x=ρ, χωρίς όμως η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο (όπως στο διπλανό γράφημα). Αυτό συμβαίνει όταν το πρόσημο της παραγώγου δεν αλλάζει εκατέρωθεν της ρίζας ρ, πράγμα που σημαίνει πως η ρίζα ρ είναι ρίζα άρτιας τάξης της παραγώγου (διπλή ρίζα, τετραπλή κ.λ.π.). Στην περίπτωση αυτή και η $2^{η}$ παράγωγος μηδενίζεται στο ρ, οπότε η $1^{η}$ παράγωγος παρουσιάζει ακρότατο (ενώ η f παρουσιάζει σημείο καμπής). Στο διπλανό γράφημα για παράδειγμα η κλίση παρουσιάζει στο ρ=2 ελάχιστο (η κλίση ήταν θετική, μειώθηκε στο μηδέν για ρ=2 –ελάχιστο- και στη συνέχεια άρχισε και πάλι να αυξάνει).



Σχ.Α.6.2. Ενώ f '(x) = 0 , δεν υπάρχει τοπικό ακρότατο αλλά σημείο καμπής.

1.6.1 Τοπικά ακρότατα στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Έστω η συνάρτηση z = f(x,y), η οποία έχει συνεχείς παραγώγους στον τόπο T όπου έχει ορισθεί. Σκεπτόμενοι όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, αντιλαμβανόμαστε πως για να παρουσιάζει η f τοπικό ακρότατο σε κάποιο σημείο (x_o,y_o) του T, θα πρέπει το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο αυτό να έχει μηδενική κλίση (να είναι παράλληλο προς το επίπεδο Oxy). Δηλαδή θα πρέπει να μηδενίζονται και οι δύο μερικές παράγωγοι:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

Τα σημεία του τόπου T για τα οποία ισχύουν και οι δύο προηγούμενες ισότητες ονομάζονται σημεία στάσης και είναι πιθανά σημεία όπου η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Έστω το σημείο στάσης (x_0,y_0). Για να υπάρχει τοπικό ακρότατο όμως θα πρέπει και οι δύο καμπύλες που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $z(x)=f(x,y_o)$ και $z(y)=f(x_o,y)$, που διέρχονται από το σημείο (x_o,y_o) και είναι «παράλληλες» προς τον άξονα των x η πρώτη και των y η δεύτερη, να στρέφουν τα κοίλα προς τα κάτω και οι δύο, οπότε θα έχουμε τοπικό μέγιστο, ή τα κοίλα προς τα άνω (πάλι και οι δύο), οπότε θα έχουμε τοπικό ελάχιστο. Θα πρέπει δηλαδή οι δεύτερες παράγωγοι (βλ. επόμενο διάγραμμα) να είναι και οι δύο είτε ταυτόχρονα αρνητικές ή ταυτόχρονα θετικές. Αντίθετα εάν οι δύο παράγωγοι είναι ετερόσημες, τότε η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Δηλαδή:

Εάν οι παράγωγοι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ και } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

είναι ομόσημες

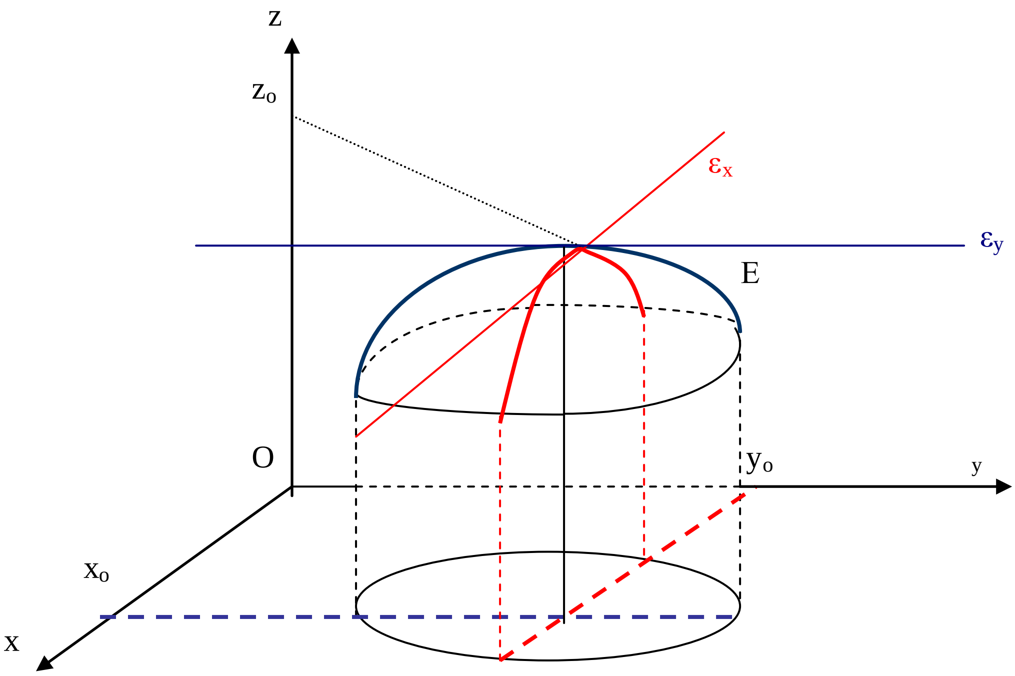
$\Rightarrow$

Η f παρουσιάζει ακρότατο:

μέγιστο εάν είναι αρνητικές

ή

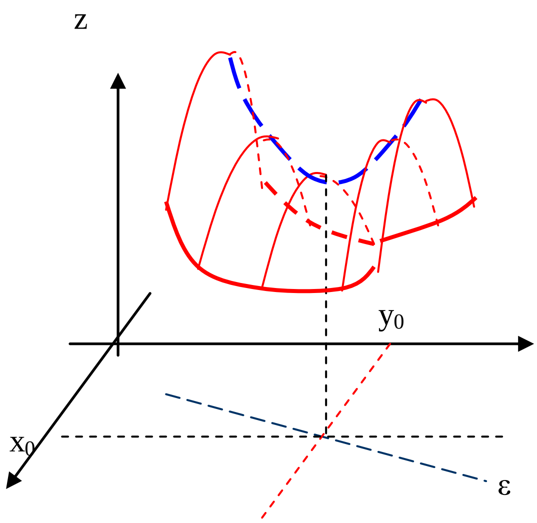
ελάχιστο εάν είναι θετικές



Σχ.1.6.3. Γεωμετρική ερμηνεία του σημείου στάσης. Οι ευθείες ε_x και ε_y έχουν κλίση ίση με το μηδέν. Επειδή μάλιστα οι δύο καμπύλες που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $z(x)=f(x,y_o)$ και $z(y)=f(x_o,y)$ στρέφουν τα κοίλα προς τα κάτω, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο (x_o,y_o).

Η προσέγγιση του προβλήματος, ενώ αποτελεί μια γενίκευση των όσων μάθαμε κατά τη μελέτη των συναρτήσεων μιας μεταβλητής, δεν είναι πάντα ακριβής. Ενδέχεται δηλαδή, σε κάποιο σημείο στάσης (x_0,y_0), παρ' όλον ότι οι δύο καμπύλες $f(x,y_0)$ και $f(x_0,y)$, στρέφουν τα κοίλα τους προς την ίδια διεύθυνση (άνω ή κάτω), το σημείο να είναι σαγματοειδές.

Να υπάρχουν δηλαδή κατευθύνσεις στον τόπο ορισμού (όπως η κατεύθυνση της ευθείας ε στο διπλανό σχήμα, που διέρχεται από το σημείο στάσης (x_0,y_0)) όπου η αντίστοιχη καμπύλη που δημιουργείται πάνω στην επιφάνεια της συνάρτησης f (η μπλε καμπύλη) να έχει στραμμένα τα κοίλα της προς την αντίθετη πλευρά.



Μια πληρέστερη διερεύνηση της περίπτωσης αυτής, η ανάλυση της οποίας υπερβαίνει το χαρακτήρα των σημειώσεων αυτών, χρησιμοποιεί σαν διακρίνουσα την ποσότητα:

$$\Delta = \mathrm{B}^2 - \mathrm{A}\Gamma \qquad \text{όπου} \qquad \mathrm{A}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ , \quad \mathrm{B}=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{και} \quad \Gamma=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Τα συμπεράσματα της ανάλυσης αυτής συνοψίζονται στα παρακάτω:

1. Εάν $\Delta<0$, τότε στο σημείο στάσης η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατη τιμή και ισχύει η ανάλυση που κάναμε προηγουμένως με τις παραγώγους $2^{ης}$ τάξης.

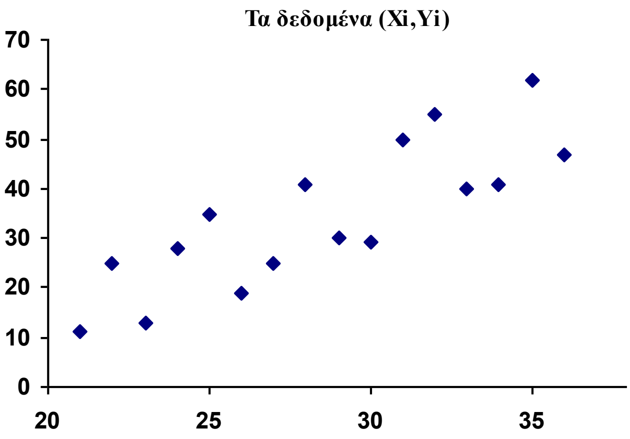
2. Εάν $\Delta>0$, τότε στο σημείο στάσης η συνάρτηση έχει τη μορφή σάγματος (παίρνει το όνομά του από το σάγμα (σαμάρι) μια και έχει αυτή τη μορφή).

3. Εάν $\Delta=0$, τότε χρειάζεται περεταίρω μελέτη με τις παραγώγους ανώτερης τάξης, η οποία θυμίζει την περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής όταν μηδενίζεται και η $2^{η}$ παράγωγος στο αντίστοιχο σημείο στάσης.

1.6.1 Θεωρητική άσκηση: Η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων (Ε.Ε.Τ.)

Δίνονται ν-σημεία του επιπέδου Oxy, με συντεταγμένες (x_i,y_i), I=1,2,…,ν. Επειδή δεν υπάρχει μια συνάρτηση που να συνδέει τις τιμές Χ με τις αντίστοιχες Υ, το γράφημα θα έχει τη διπλανή μορφή ενός νέφους σημείων. Διαγράμματα αυτής της μορφής συναντιούνται πολύ συχνά σε επιστήμες όπως η Οικονομία, η Βιολογία κ.λ.π.. Το μέγεθος Χ καλείται ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το Υ εξαρτημένη. Παραδείγματα τέτοιων δυάδων μπορεί να συναντήσει κάποιος πάρα πολλά, σε καθημερινή βάση.

- Χ το ύψος και Υ το βάρος των ανθρώπων,
- Χ το επενδυμένο κεφάλαιο και Υ το κέρδος των επιχειρήσεων,
- Χ ο κυβισμός του κινητήρα και Υ η κατανάλωση του αυτοκινήτου, κ.λ.π.

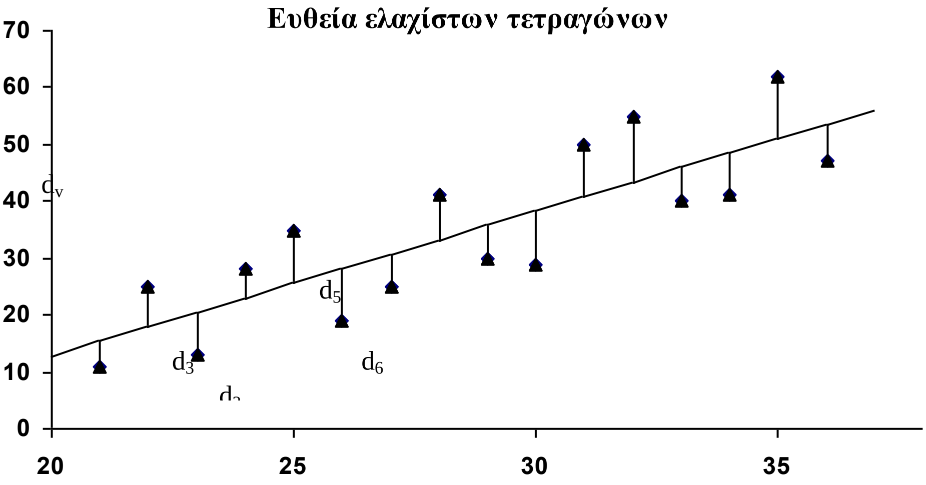


Σχ.1.6.4. Το νέφος των δεδομένων

> Για τα δεδομένα Χ και Υ ονομάζουμε **παλινδρόμηση,** την προσαρμογή μιας μαθηματικής καμπύλης πάνω στο νέφος των δεδομένων, ενώ ονομάζουμε **ευθύγραμμη παλινδρόμηση,** την προσαρμογή μιας ευθείας (ε: $y=\alpha x+\beta$) πάνω στο νέφος των δεδομένων.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους α και β έτσι ώστε η ευθεία ε να είναι η καλύτερα προσαρμοσμένη ευθεία στο νέφος των δεδομένων. Σαν τέτοια ευθεία επιλέγουμε την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων (Ε.Ε.Τ.). Για τον υπολογισμό της Ε.Ε.Τ. ορίζουμε τις αποστάσεις (d_i) των σημείων του νέφους από την ευθεία ε παράλληλα προς τον άξονα των y (όπως φαίνεται και στο σχ.Α.6.5.), αντίθετα απ' ότι θα περίμενε κανείς (κάθετα προς την ε). Ο βασικότερος λόγος έχει να κάνει με την ανεξαρτησία της μεταβλητής Χ. Εάν δηλαδή το νέφος των δεδομένων προέρχεται από τη δυάδα (Ύψος – Βάρος) και θεωρήσουμε πως η προσαρμοσμένη ευθεία συμβολίζει ένα μέσο όρο για το βάρος ανάλογα με το ύψος (τις τέλειες αναλογίες κατά κάποιο τρόπο, ανεξάρτητα με το ύψος), θα ήταν άτοπο η οποιαδήποτε διόρθωση να αφορούσε και το ύψος, εκτός από το βάρος.

Έστω λοιπόν πως η εξίσωση της Ε.Ε.Τ. είναι η: ε: $y = \alpha x + \beta$. Ορίζουμε την ποσότητα Α η οποία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των «αποστάσεων» του κάθε σημείου του νέφους από την ε. Έχουμε:



Σχ. 1.6.5. Το νέφος των δεδομένων (x_i ;y_i), η Ε.Ε.Τ.
και οι «αποστάσεις» d_i των σημείων του νέφους από την ε
(παράλληλα με τον άξονα των y).

$$A(\alpha,\beta) = [y_1 - (\alpha x_1 + \beta)]^2 + [y_2 - (\alpha x_2 + \beta)]^2 + \ldots + [y_\nu - (\alpha x_\nu + \beta)]^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu} \left[y_i - (\alpha x_i + \beta)\right]^2$$

Η παράσταση Α είναι μια συνάρτηση των α και β. Ζητούμε τώρα τον υπολογισμό της τιμής των α και β, έτσι ώστε η τιμή της Α να γίνεται ελάχιστη. Ζητούμε δηλαδή το τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης Α(α,β). Τα σημεία στάσης προκύπτουν από τις δύο εξισώσεις:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial A}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\sum_{i=1}^{\nu} \left[y_i - (\alpha x_i + \beta)\right]^2\right] = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[y_i - \alpha x_i + \beta\right]^2 = \quad [2]$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu} 2\left[y_i - \alpha x_i - \beta\right](-x_i) = \sum_{i=1}^{\nu} 2\left[-x_i y_i + \alpha x_i^2 + \beta x_i\right] = \quad [3]$$

---

[2] *Εφαρμόσαμε τη βασική ιδιότητα των παραγώγων σύμφωνα με την οποία η παράγωγος αθροίσματος είναι ίση με το άθροισμα των παραγώγων.*

[3] *Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε την ιδιότητα της αντιμετάθεσης των προσθετέων:*
$$\Sigma(x_i+y_i) = (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+ .. +(x_\nu+y_\nu) = (x_1+x_2+..+x_\nu) + (y_1+y_2+..+y_\nu) =$$
$$= \Sigma x_i + \Sigma y_i$$

$$= -2\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + 2\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + 2\beta\sum_{i=1}^{\nu} x_i = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + \beta\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i} \qquad (1.6.3.1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\sum_{i=1}^{\nu}\left[y_i - (\alpha x_i + \beta)\right]^2\right] = \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[y_i - \alpha x_i - \beta\right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} 2\left[y_i - \alpha x_i - \beta)\right](-1) = \sum_{i=1}^{\nu} 2\left[-y_i + \alpha x_i + \beta\right] =$$

$$= -2\sum_{i=1}^{\nu} y_i + 2\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i + 2\beta\sum_{i=1}^{\nu} 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i + \nu\beta = \sum_{i=1}^{\nu} y_i} \qquad (1.6.3.2)$$

Οι εξισώσεις 1.6.3.1 και 1.6.3.2 αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα α και β. Επιλύνοντας το σύστημα αυτό έχουμε για τα α και β:

$$\alpha = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right) - \nu\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2 - \nu\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2\right)}$$

και

$$\beta = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right) - \alpha\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)}{\nu}$$

Παραγωγίζοντας για δεύτερη φορά έχουμε:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[-2\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + 2\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + 2\beta\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right] = 2\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \; \mathbf{> 0}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \beta^2} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[-2\sum_{i=1}^{\nu} y_i + 2\alpha\sum_{i=1}^{\nu} x_i + 2\nu\beta\right] = 2\nu \; \mathbf{> 0}$$

Επειδή και οι δύο αυτές παράγωγοι είναι θετικές, συμπεραίνουμε πως το σημείο στάσης που μόλις υπολογίσαμε αντιστοιχεί στο μοναδικό τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης Α(α,β). Άρα για τις πιο πάνω τιμές των α και β το άθροισμα των τετραγώνων των «αποστάσεων» των σημείων του νέφους από την ευθεία ελαχιστοποιούνται (εξ' ου και ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων).

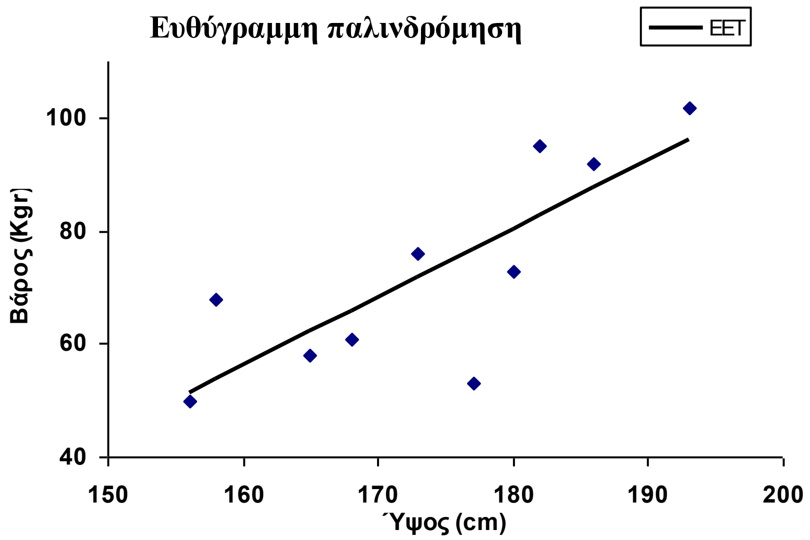
Αριθμητικό παράδειγμα: Δίνονται οι τιμές (x_i, y_i) , i=1,2,…,10 (Ύψος και βάρος 10 ατόμων). Στον παρακάτω πίνακα υπολογίζουμε τις τιμές των αθροισμάτων (Σx_i) , (Σy_i) , $(\Sigma x_i y_i)$ και (Σx_i^2) [4]

	Xi	Yi	Xi^2	XiYi
	156	50	24336	7800
	158	68	24964	10744
	165	58	27225	9570
	168	61	28224	10248
	173	76	29929	13148
	177	53	31329	9381
	180	73	32400	13140
	182	95	33124	17290
	186	92	34596	17112
	193	102	37249	19686
Αθροίσματα	1738	728	303376	128119

Με τα αθροίσματα του διπλανού πίνακα μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους α και β της Ε.Ε.Τ.:

$$\alpha = \frac{1738*728-10*128119}{1738^2-10*303376} = 1{,}214$$

$$\beta = \frac{728-1{,}214*1738}{10} = -138{,}235$$



[4] *Ας προσεχθεί πως οι ποσότητες (Σx_i^2) και $(\Sigma x_i)^2$ είναι τελείως διαφορετικές. Εάν για παράδειγμα $x_1=1$, $x_2=2$ και $x_3=3$ τότε*

$$(\Sigma x_i)^2 = (1+2+3)^2 = 36 \neq (\Sigma x_i^2) = 1^2+2^2+3^2 = 14$$