ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

3.3 Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με δ.ε. οι οποίες περιέχουν μέχρι και τη δεύτερη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης (y(x)). Ως γνωστόν οι γενική μορφή μιας τέτοιας δ.ε. είναι η:

$$F(x,y,y',y'') = 0$$

και επομένως η γενική τους λύση θα είναι μια διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων, της μορφής:

$$y = y(x,c_1,c_2)$$

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα ασχοληθούμε μόνο με γραμμικές δ.ε. $2^{ης}$ ταξης. Οι εξισώσεις αυτές λύνονται εύκολα και με τρόπο συστηματικό, ενώ είναι και ιδιαίτερα χρήσιμες σε θέματα Μηχανικής (ταλαντώσεις). Βέβαια, έχουμε ήδη ασχοληθεί με τις δ.ε. άμεσης ολοκλήρωσης, της μορφής:

$$y^{(\nu)}(x) = f(x)$$

οι οποίες λύνονται εύκολα με τη βοήθεια ν-διαδοχικών ολοκληρώσεων.

3.3.1 Γραμμικές δ.ε. $2^{ης}$ τάξης, με σταθερούς συντελεστές και μηδενικό β' μέλος (Ομογενείς)

Πρόκειται για δ.ε. της μορφής:

$$\mathbf{\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0 \quad με \ \alpha,\beta,\gamma} \in \mathrm{R}$$

ή καλύτερα

$$\boxed{\mathbf{y'' + ay' + by = 0}} \qquad (3.3.1)$$

όπου τα $a = \beta/\alpha$ και $b = \gamma/\alpha$ είναι πραγματικές σταθερές.

Στην επίλυση των δ.ε. αυτής της μορφής μας βοηθούν κάποια θεωρήματα τα οποία θα αναφέρουμε στη συνέχεια και τα οποία αποδεικνύονται πολύ εύκολα. Αρχικά όμως χρειαζόμαστε τον ορισμό των γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων.

Ορισμός: ν συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητες όταν δεν είναι δυνατό οποιαδήποτε από αυτές να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων ν-1 συναρτήσεων.

Για ευκολότερη κατανόηση θα δώσουμε το παράδειγμα τριών συναρτήσεων και δύο συναρτήσεων (περίπτωση που μας ενδιαφέρει άμεσα).

i) Οι συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες όταν καμιά απ' αυτές δεν μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων δύο. Για παράδειγμα, δεν μπορούν να υπάρξουν σταθερές α και β, για τις οποίες να ισχύει η σχέση:

$$f_1(x) = \alpha f_2(x) + \beta f_3(x)$$

ii) Όμοια, στην περίπτωση των δύο συναρτήσεων, οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες όταν δεν υπάρχει σταθερά α, για την οποία να ισχύει:

$$f_1(x) = \alpha f_2(x)$$

ή αλλιώς

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \alpha$$

Άρα οι συναρτήσεις:

$$f_1(x) = x^2\ ,\ f_2(x) = 3x\ ,\ f_3(x) = e^x\ ,\ f_4(x) = e^{3x}\quad \text{κ.λ.π.}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες ανά δύο, ενώ οι συναρτήσεις:

$$f_1(x) = x^2\ ,\ f_2(x) = 3x^2\ ,\ f_3(x) = -5x^2\ ,\ f_4(x) = ex^2\quad \text{κ.λ.π.}$$

είναι, ανά δύο, γραμμικά εξαρτημένες.

Γενικό Θεώρημα: Έστω η δ.ε. $y'' + ay' + by = 0$. Εάν οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της δ.ε. αυτής, τότε:

- Λύσεις της δ.ε. θα είναι και οι συναρτήσεις $c_1y_1(x)$ και $c_2y_2(x)$.
- Λύση της δ.ε. θα είναι επίσης και το άθροισμα $y(x,c_1,c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$
- Η τελευταία αυτή συνάρτηση θα είναι η γενική λύση της δοθείσας δ.ε..

Ας αποδείξουμε εδώ πως εάν οι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις της δ.ε. [άρα την επαληθεύουν], τότε λύση της θα είναι και η $y(x,c_1,c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η y επαληθεύει τη δ.ε.:

$$\left.\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ y' &= c_1y_1' + c_2y_2' \\ y'' &= c_1y_1'' + c_2y_2'' \end{aligned}\right| \Longrightarrow \begin{gathered}[y''+ay'+by = 0] \\ c_1y_1''+ c_2y_2'' + a(c_1y_1'+c_2y_2') + b(c_1y_1 + c_2y_2) = 0\end{gathered} \Longrightarrow$$

$$c_1\underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{=0} + c_2\underbrace{(y_2'' + ay_2' + by_2)}_{=0} = 0$$

όπου η κάθε παρένθεση μηδενίζεται επειδή οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις της δ.ε.. Τέλος η συνάρτηση $y(x,c_1,c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ είναι η γενική λύση της δ.ε. $y''+ay+by = 0$ [η οποία είναι $2^{ης}$ τάξης], διότι την επαληθεύει, ενώ περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές(1).

Επομένως η επίλυση της δ.ε. (3.3.1) καταλήγει στην αναζήτηση δύο γραμμικά ανεξάρτητων μερικών λύσεών της. Αναζητούμε λοιπόν μερικές λύσεις της μορφής $y(x) = e^{px}$ (όπου το p είναι μια σταθερά, πραγματική ή μιγαδική). Παραγωγίζουμε δύο φορές την y και θέτουμε τις y, y' και y'' στη δ.ε.:

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{px} \\ y' &= pe^{px} \\ y'' &= p^2e^{px} \end{aligned}\right| \quad \overset{[y''+ay'+by = 0]}{\Longrightarrow} \quad p^2e^{px} + ape^{px} + be^{px} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$e^{px}(p^2+ap+b) = 0$$

Επειδή η συνάρτηση e^{px} δεν μηδενίζεται ποτέ(2), η πιο πάνω εξίσωση επαληθεύεται όταν μηδενίζεται το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο (ως προς p) της παρένθεσης. Καταλήγουμε λοιπόν πως η συνάρτηση e^{px} είναι λύση της γραμμικής δ.ε. όταν το p είναι ρίζα του τριωνύμου:

$$\boxed{\mathbf{p^2 + ap + b = 0}} \qquad (3.3.2)$$

που ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της γραμμικής δ.ε..** Έχουμε λοιπόν τη γενική μέθοδο λύσης της γραμμικής - ομογενούς δ.ε. …

Γενική μέθοδος: Έστω η δ.ε. $y''+ay'+by = 0$. Υπολογίζουμε τις δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$p^2 + ap + b = 0 \qquad \text{τις} \qquad \rho_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

οπότε έχουμε δύο μερικές λύσεις της δ.ε., που είναι γραμμικά ανεξάρτητες (εάν $\rho_1 \neq \rho_2$). Επομένως η γενική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{y(x, c_1, c_2) = c_1e^{\rho_1 x} + c_2e^{\rho_2 x}} \qquad (3.3.3)$$

---

(1) *Είναι αναγκαίο το να βρεθούν 2 μερικές λύσεις γραμμικά ανεξάρτητες. Εάν για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ ήταν γραμμικά εξαρτημένες, τότε θα ίσχυε η σχέση: $y_1(x) = \kappa y_2(x)$, οπότε η «γενική λύση»*

$$y(x,c_1,c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1\kappa y_2(x) + c_2y_2(x) = y_2(x)[c_1\kappa+c_2] = Cy_2(x)$$

περιέχει μόνο μία αυθαίρετη σταθερά.

(2) *Όπως είδαμε στην παράγραφο Γ.2.1, ο τύπος του Euler για την εκθετική συνάρτηση με μιγαδικό εκθέτη:*

$$\boldsymbol{e^{m+ni} = e^m e^{ni} = e^m(\sigma\upsilon\nu\, n + i\eta\mu\, n)}$$

δίνει αρνητικές τιμές (εάν για παράδειγμα n=π). Δεν υπάρχει όμως όρισμα (δηλ. τιμή για το n), που να μηδενίζει την εκθετική συνάρτηση.

Διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με το είδος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης: Την περίπτωση των δύο πραγματικών διακεκριμένων ριζών, την περίπτωση μιας διπλής πραγματικής ρίζας και την περίπτωση των μιγαδικών ριζών. Ας το δούμε αναλυτικά…

i) Η χ.ε. έχει δύο πραγματικές ρίζες.

Η διακρίνουσα της χ.ε. [$\Delta = a^2 - 4b$] είναι θετική και η λύση περιγράφεται από τη σχέση 3.3.3.

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.
$y'' + y' - 6y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 7$.

Λύση: Γράφουμε την χ.ε. και υπολογίζουμε τις ρίζες της:

$$p^2 + p - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_1 = -3 \;\text{ και }\; \rho_2 = 2$$

Η γενική λύση:

$$\mathbf{y(x,c_1,c_2) = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}}$$

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης είμαστε υποχρεωμένοι να βρούμε την παράγωγο της γενικής λύσης:

$$\mathbf{y'(x,c_1,c_2) = -3c_1e^{-3x} + 2c_2e^{2x}}$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις των y και y', τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 7$, καταλήγουμε σε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με αγνώστους τις δύο αυθαίρετες σταθερές:

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + \;\; c_2 = 1 \\ -3c_1 + 2c_2 = 7 \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = -1 \;^{(1)} \\ c_2 = \;\; 2 \end{array}$$

και η μερική λύση που προκύπτει:

$$\mathbf{y(x) = -e^{-3x} + 2e^{2x}}$$

ii) Η χ.ε. έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

Η διακρίνουσα της χ.ε. [$\Delta = a^2 - 4b$] μηδενίζεται και δίνει μία διπλή πραγματική ρίζα: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Το πρόβλημα στην περίπτωση αυτή είναι πως η χ.ε. δίνει μία μόνο μερική λύση της δ.ε. [την $y_1(x) = e^{\rho x}$], ενώ χρειαζόμαστε δύο (και μάλιστα γραμμικά ανεξάρτητες). Θα

[(1)] *Εάν οι αρχικές συνθήκες ήταν $y(0) = 1$ και $y'(0) = 2$, τότε η τιμή των σταθερών θα ήταν $c_1=0$ και $c_2=1$, πράγμα που δεν ενοχλεί καθόλου…*

δείξουμε πως στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $y_2(x) = xe^{\rho x}$ είναι επίσης μερική λύση της δ.ε., ενώ είναι γραμμικά ανεξάρτητη της y_1.

Πράγματι, παραγωγίζουμε την y_2 και αντικαθιστούμε στη δ.ε.:

$$\left.\begin{aligned} y_2(x) &= xe^{\rho x} \\ y_2'(x) &= e^{\rho x} + \rho x e^{\rho x} = e^{\rho x}(\rho x+1) \\ y_2''(x) &= \rho e^{\rho x} + \rho e^{\rho x}(\rho x+1) = \rho e^{\rho x}(\rho x+2) \end{aligned}\right| \quad [y''+ay'+by = 0] \Longrightarrow$$

$$\rho e^{\rho x}(\rho x+2) + ae^{\rho x}(\rho x+1) + bxe^{\rho x} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$e^{\rho x}[\rho^2 x+2\rho+a\rho x+a+bx] = e^{\rho x}[x(\rho^2+a\rho+b) + 2\rho + a] = 0$$

Το περιεχόμενο της αγκύλης είναι ίσο με το μηδέν διότι:

- είναι μηδέν η παρένθεση $(\rho^2+a\rho+b)$, μια και είναι η ρ είναι ρίζα του τριωνύμου $p^2+ap+b=0$
- το a είναι ίσο με το -2ρ, διότι είναι ο συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου στο τριώνυμο: p^2+ap+b [(1)].

Άρα η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. όταν η χ.ε. έχει μία διπλή ρίζα ρ, δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{y(x,c_1,c_2) = c_1e^{\rho x} + c_2xe^{\rho x}}} \qquad (3.3.4)$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.
$y'' - 10y' + 25y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 2$.

Λύση: Γράφουμε την χ.ε. και υπολογίζουμε τις ρίζες της:

$$p^2 - 10p + 25 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_1 = \rho_2 = 5$$

Η γενική λύση:

$$\mathbf{y(x,c_1,c_2) = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}}$$

Για τον υπολογισμό της μερικής λύσης είμαστε υποχρεωμένοι να βρούμε την παράγωγο της γενικής λύσης:

$$\mathbf{y'(x,c_1,c_2) = 5c_1e^{5x} + c_2e^{5x} + 5c_2xe^{5x} = e^{5x}(5c_1 + c_2 + 5c_2x)}$$

---

(1) *Ως γνωστό εάν οι ρ_1 και ρ_2 είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, τότε αυτή γράφεται σαν γινόμενο παραγόντων:*

$$p^2+ap+b = (x-\rho_1)(x-\rho_2) = p^2 - (\rho_1+\rho_2)p + \rho_1\rho_2$$

απ' όπου προκύπτουν οι γνωστοί τύποι του Vieta:

$$a = -(\rho_1+\rho_2) \text{ και } b = \rho_1\rho_2$$

επομένως, στην περίπτωση της διπλής ρίζας ($\rho=\rho_1=\rho_2$) ισχύει: $a= -2\rho$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις των y και y', τις αρχικές συνθήκες y(0) = 1 και y'(0) = 2, καταλήγουμε σε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με αγνώστους τις δύο αυθαίρετες σταθερές:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 \qquad = 1 \\ 5c_1 + c_2 = 2 \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -3 \end{array}$$

οπότε η μερική λύση:

$$\mathbf{y(x) = e^{5x} - 3xe^{5x}}$$

iii) Η χ.ε. έχει δύο μιγαδικές (συζυγείς) ρίζες.

Η περίπτωση αυτή είναι κάπως πιο πολύπλοκη, αλλά και η πιο ενδιαφέρουσα σε επίπεδο εφαρμογών, μια και σ' αυτήν εντάσσονται τα προβλήματα των ταλαντώσεων.

Έστω πως η χ.ε. έχει τις παρακάτω συζυγείς μιγαδικές ρίζες:

$$\rho_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{-|\Delta|}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = m \pm ni$$

όπου η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική και για το λόγο αυτό υπολογίζουμε ως εξής: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-|\Delta|} = \sqrt{-1}\sqrt{|\Delta|} = i\sqrt{|\Delta|}$ όπου I είναι η φανταστική μονάδα, ενώ θέσαμε:

$m = -a/2$ το πραγματικό μέρος του μιγαδικού και

$n = \sqrt{|\Delta|}/2$ το φανταστικό μέρος του μιγαδικού

Η γενική λύση γράφεται κατά τα γνωστά:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{(m+ni)x} + c_2 e^{(m-ni)x}$$

Η σχέση αυτή παρουσιάζει τη γενική λύση της δ.ε.. Εφαρμόζοντας όμως τη σχέση του Euler που αφορά στις εκθετικές συναρτήσεις με μιγαδικό εκθέτη:

$$e^{\pm ix} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x$$

φθάνουμε σε ένα αποτέλεσμα πιο κατανοητό και λειτουργικό:

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 e^{(m+ni)x} + c_2 e^{(m-ni)x} = c_1 e^{mx} e^{inx} + c_2 e^{mx} e^{-inx} =$$

$$= e^{mx} \;\; c_1(\sigma\upsilon\nu nx + i\eta\mu nx) + c_2(\sigma\upsilon\nu nx - i\eta\mu nx) \;\; =$$

$$= e^{mx} \;\; (c_1 + c_2)\sigma\upsilon\nu nx + i(c_1 - c_2)\eta\mu nx \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x,A,B) \;= e^{mx}\left(A\sigma\upsilon\nu nx + B\eta\mu nx\right)} \qquad (3.3.5)$$

όπου θέσαμε δύο νέες αυθαίρετες σταθερές $A = c_1 + c_2$ και $B = i(c_1 - c_2)$.

Μπορούμε να απλοποιήσουμε κι άλλο την παράσταση της γενικής λύσης, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με την ποσότητα:

$$\sqrt{A^2+B^2}$$

$$y(x,A,B) = e^{mx}(A\sigma\upsilon\nu nx + B\eta\mu nx) =$$
$$= \sqrt{A^2+B^2}\,e^{mx}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sigma\upsilon\nu nx + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\eta\mu nx\right]$$

Παρατηρούμε πως οι ποσότητες:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{και} \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ανήκουν στο διάστημα [-1,1], ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους ισούται με τη μονάδα. Άρα υπάρχει κάποια γωνία φ για την οποία ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{και} \quad \eta\mu\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Θέτοντας τέλος $D = \sqrt{A^2+B^2}$, έχουμε την τελική μορφή της γενικής λύσης, με αυθαίρετες σταθερές τις D και φ:

$$y(x,D,\phi) = De^{mx}\ \sigma\upsilon\nu\phi\sigma\upsilon\nu nx + \eta\mu\phi\eta\mu nx \quad \Rightarrow$$

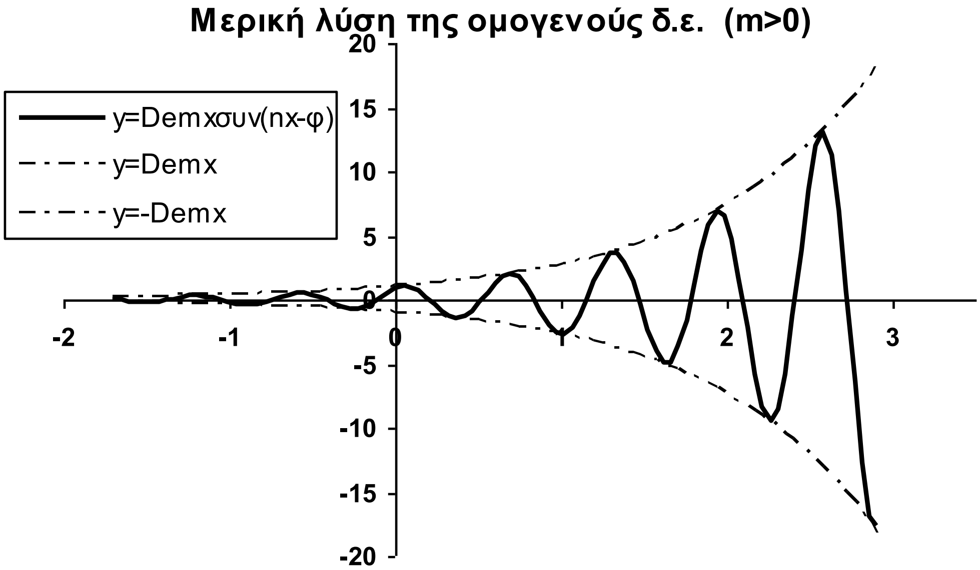
$$\boxed{y(x,D,\phi) = De^{mx}\sigma\upsilon\nu(nx-\phi)^{(1)}} \qquad (\Gamma.3.6)$$

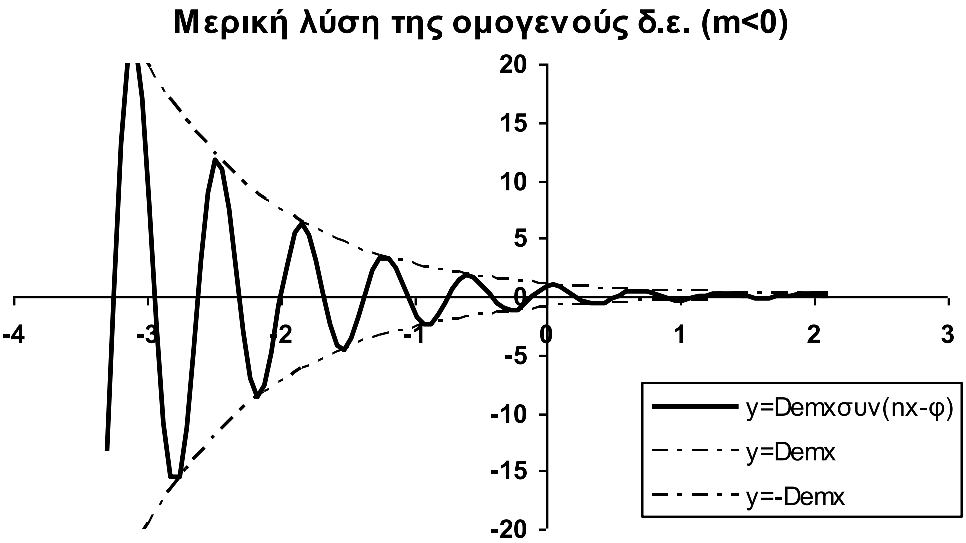
Η γενική λύση που περιγράφεται από τη σχέση Γ.3.6 παρουσιάζει μια ημιτονοειδή καμπύλη με μεταβαλλόμενο πλάτος. Στη σχέση αυτή η σταθερά D είναι συντελεστής του πλάτους της ημιτονοειδούς καμπύλης, ενώ η σταθερά φ καλείται διαφορά φάσης. Το συνολικό πλάτος της καμπύλης αυξάνει (καθώς αυξάνει το x) όταν ο συντελεστής m του εκθέτη (το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ρίζας) είναι θετικός. Αντίθετα, το συνολικό πλάτος της καμπύλης φθίνει όταν m<0 [1].

---

[1] *Όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο συνασυνβ-ημαημβ = συν(α-β)=συν(β-α)*

[1] Να θυμίσουμε πως m = -a/2 , οπότε θα είναι αρνητικό όταν ο συντελεστής a του y’, στη δ.ε. θα είναι θετικός.





Σχ. 3.3.1. Δύο μερικές λύσεις της δ.ε. y''+ay'+by = 0, όταν η διακρίνουσα της χ.ε. είναι αρνητική.
Στο 1^o έχουμε το a<0 [m>0] , ενώ στο 2^o έχουμε το a>0 [m<0].

Όλα τα παραπάνω μπορούν βα συμπεριληφθούν σε ένα τυπολόγιο της μορφής του παρακάτω πίνακα:

- Λύση της $y'' + ay' + by = 0$ $[a, b \in R]$
με χαρακτηριστική εξίσωση $\mathbf{r^2 + ar + b = 0}$ και r_1 και r_2 τις ρίζες αυτής.

Είδος των ριζών	**Γενική λύση**
$r_1 \neq r_2 \in R$	$y(x,c_1,c_2) = c_1e^{r1x} + c_2e^{r2x}$
$r_1 = r_2 \in R$	$y(x,c_1,c_2) = c_1e^{r1x} + c_2xe^{r1x}$
$r_{1,2} = m \pm in \in C$	$y(x,c_1,c_2) = c_1e^{r1x} + c_2e^{r2x} =$ $= e^{mx}[A\cos(nx) + B\sin(nx)] =$ $= De^{mx}\cos(nx-\varphi)$ (*)

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η γενική και η μερική λύση της δ.ε.
$y'' + 2y' + 65y = 0$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = 5$ και $y'(0) = 1$.

Λύση: Παρατηρούμε αρχικά πως ο συντελεστής του y' είναι θετικός. Άρα το πραγματικό μέρος των μιγαδικών ριζών θα είναι αρνητικό και το πλάτος της ημιτονοειδούς καμπύλης θα φθίνει. Γράφουμε την χ.ε. και υπολογίζουμε τις ρίζες της:

$$p^2 + 2p + 65 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-260}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-256}}{2} = \frac{-2 \pm 16i}{2} = -1 \pm 8i$$

Γράφουμε την γενική λύση απ' ευθείας από τη σχέση (Γ.3.6):

$$y(x,D,\phi) = De^{-x}\sigma\upsilon\nu(8x-\phi)$$

ενώ για τον υπολογισμό της μερικής λύσης χρειαζόμαστε και την παράγωγο:

$$y'(x,D,\phi) = -De^{-x}\sigma\upsilon\nu(8x-\phi) - 8De^{-x}\eta\mu(8x-\phi) =$$
$$= -De^{-x}\left[\sigma\upsilon\nu(8x-\phi) + 8\eta\mu(8x-\phi)\right]$$

Θέτοντας στις σχέσεις αυτές τις αρχικές συνθήκες, καταστρώνουμε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με αγνώστους τα D και φ, τα οποία και υπολογίζουμε:

$5 = y(0) = D\sigma\upsilon\nu(-\varphi)$	$D = \dfrac{5}{\sigma\upsilon\nu(-\phi)}$
$1 = y'(0) = -D[\sigma\upsilon\nu(-\varphi)+8\eta\mu(-\varphi)]$	$1 = -5 - 40\varepsilon\varphi(-\varphi)$

ή

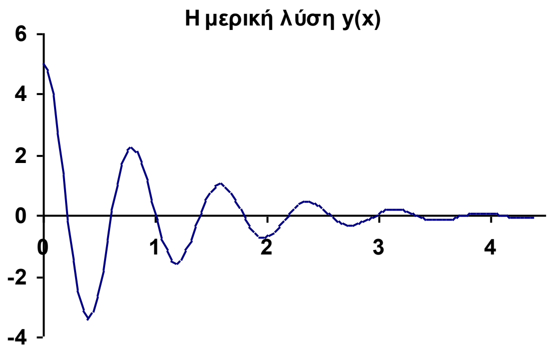
εφ(-φ) = -3/20 ή -φ = -0,1489 rad ή
και

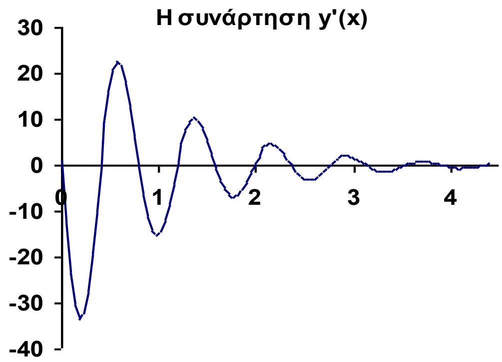
φ = 0,1489 rad
D = 5,056

οπότε η μερική λύση:

$$y(x) = 5{,}056\, e^{-x} \sigma\upsilon\nu(8x - 0{,}1489) \quad \text{και}$$
$$y'(x) = -5{,}056\, e^{-x} \left[\sigma\upsilon\nu(8x - 0{,}1489) + 8\eta\mu(8x - 0{,}1489)\right]$$

Στα επόμενα γραφήματα εμφανίζεται η γραφική παράσταση των δύο αυτών συναρτήσεων:





Σχ. 3.3.2. Μερική λύση της δ.ε. y'' + 2y' + 65y = 0.
Αριστερά η y(x) και δεξιά η y'(x). Παρατηρείστε πως
η παράγωγος έχει μεγαλύτερο πλάτος διακύμανσης, ενώ παρουσιάζει
ακρότατα (η y') εκεί που η y μηδενίζεται (αναμενόμενο…).