ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

4 ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

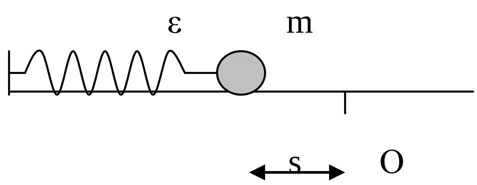
4.1 Γενικά

Έστω ένα υλικό σημείο που κινείται πάνω σε μία ευθεία. Για να ορισθεί η θέση του χρειαζόμαστε τον ορισμό ενός συστήματος συντεταγμένων, δηλαδή ένα κέντρο, τη θετική φορά και τη μονάδα του μήκους. Επειδή η θέση του σημείου αυτού ορίζεται με μία παράμετρο-συντεταγμένη μιλάμε για ένα μηχανικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας (β.ε.).

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα κίνηση που μπορούμε να μελετήσουμε στα συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας (β.ε.) είναι η αρμονική ταλάντωση. Πρόκειται για την κίνηση ενός υλικού σημείου που κινείται όταν του ασκείται μια δύναμη η οποία είναι ανάλογη της απομάκρυνσής του από ένα σημείο του άξονα κίνησης. Το εν λόγω σημείο τοποθετείται, συνήθως, στο κέντρο του άξονα και ονομάζεται σημείο ισορροπίας. Άρα εάν s είναι η συντεταγμένη ενός σημείου της ευθείας, η δύναμη που ασκείται από το κέντρο μπορεί να ισούται με:

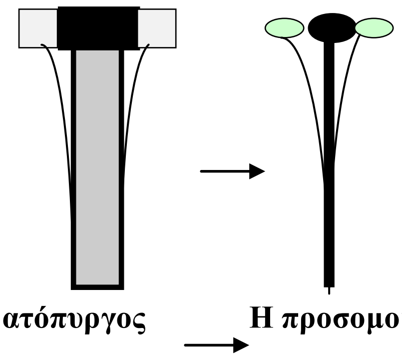
- $F(t) = -ks(t)$ όπου το αρνητικό πρόσημο στη δύναμη οφείλεται στο ότι η δύναμη έχει φορά ακριβώς αντίθετη από τη μετακίνηση, οπότε μιλούμε για ελκτικό κέντρο.
- $F(t) = ks(t)$ όπου η δύναμη έχει την ίδια φορά με τη μετακίνηση, οπότε μιλούμε για απωστικό κέντρο (οπότε βέβαια δεν εκτελείται ταλάντωση, αλλά διαρκώς επιταχυνόμενη απομάκρυνση –εκθετικά).

Πρόβλημα 1ο: Μία σφαίρα μάζας m ολισθαίνει πάνω σε έναν οριζόντιο άξονα, χωρίς τριβή, ενώ είναι πακτωμένη σε ένα ελατήριο ε. Το σύστημα έχει το σημείο O σαν σημείο ισορροπίας, ενώ η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου είναι ανάλογη της απομάκρυνσης x της σφαίρας m, από το σημείο ισορροπίας.



Πρόβλημα 2ο: Έστω μία μεταλλική λάμα. κατακόρυφα τοποθετημένη, πακτωμένη στο κάτω της άκρο, ενώ στο άνω άκρο της βρίσκεται μία σημειακή μάζα m. Θεωρούμε πως η λάμα είναι ελαστική με βάρος αμελητέο, σε σχέση με τη μάζα m του άνω άκρου, ενώ το μήκος της είναι πολύ μεγαλύτερο της κίνησης που κάνει το άνω άκρο με τη μάζα m, πράγμα που μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την κίνηση της μάζας «ευθύγραμμη».

Το πρόβλημα της λάμας θα μπορούσε να αποτελέσει την προσομοίωση ενός υδατόπυργου, του οποίου η μάζα είναι αμελητέα σε σχέση με τη μάζα του νερού που βρίσκεται στην κορυφή του, ενώ το ύψος του είναι τέτοιο που η μετακίνηση της κορυφής είναι, πρακτικά, ευθύγραμμη.



Ο Υδατόπυργος **Η προσομοίωση**

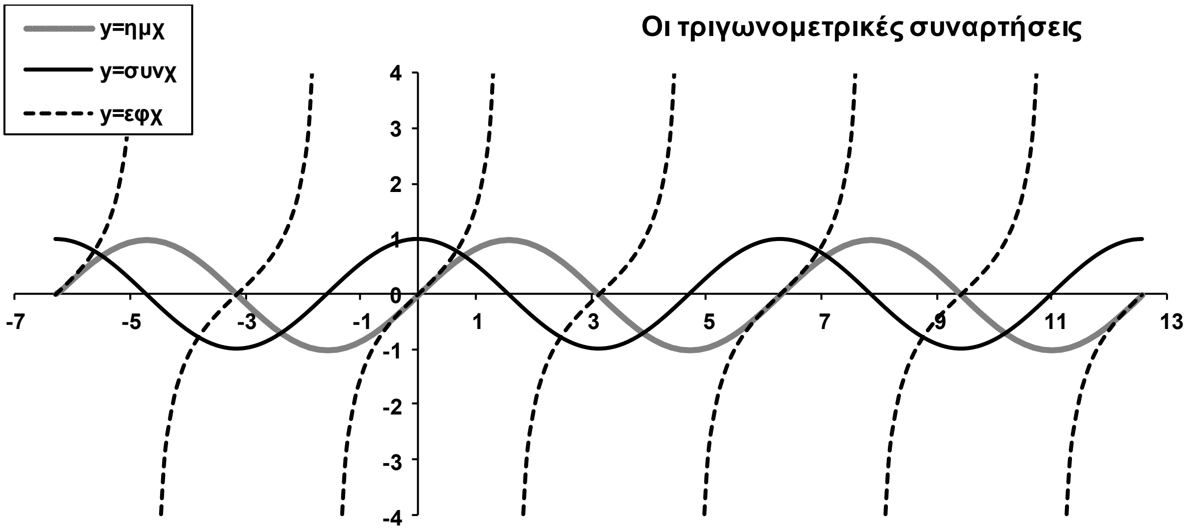
4.1 Υπενθυμίσεις από την Τριγωνομετρία: Οι περιοδικές συναρτήσεις

Μία συνάρτηση f(t) ονομάζεται περιοδική όταν ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{f(t+T) = f(t)} \quad \textbf{για κάθε t}$$

όπου η ποσότητα T (εφ' όσον είναι η μικρότερη για την οποία ισχύει η πιο πάνω σχέση) ονομάζεται περίοδος της συνάρτησης f. Οι πιο γνωστές περιοδικές συναρτήσεις είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

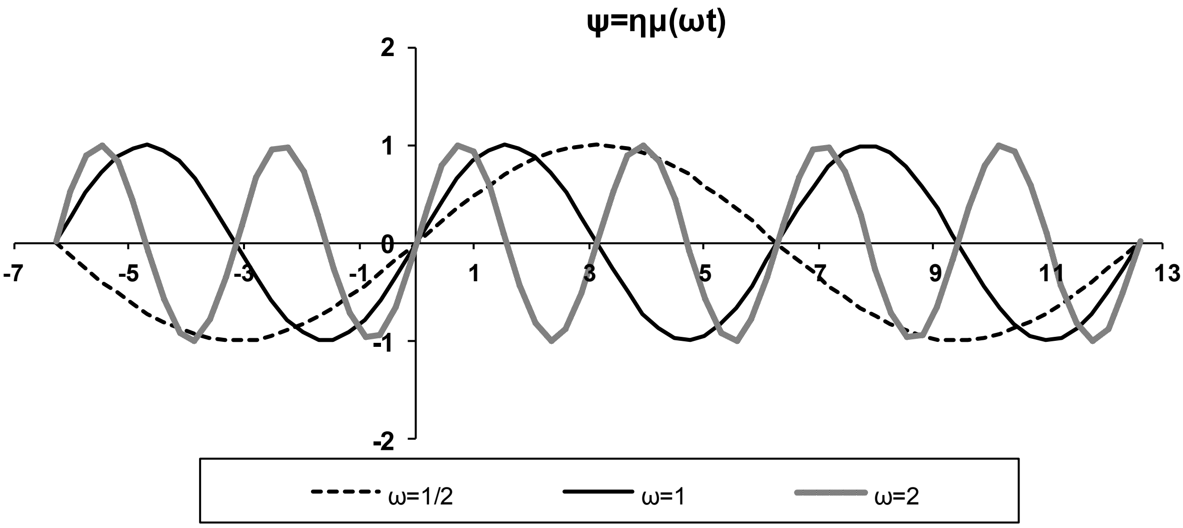
y = ημx με περίοδο T = 2π
y = συνx με περίοδο T = 2π
y = εφx με περίοδο T = π



Εύκολα μπορούμε να φανταστούμε πως για τη συνάρτηση y = ημ(ωx) η περιοδικότητα ίση με 2π αφορά στην ποσότητα ωx. Άρα η περίοδος της συνάρτησης αυτής (φυσικά ως προς το x) είναι ίση με:

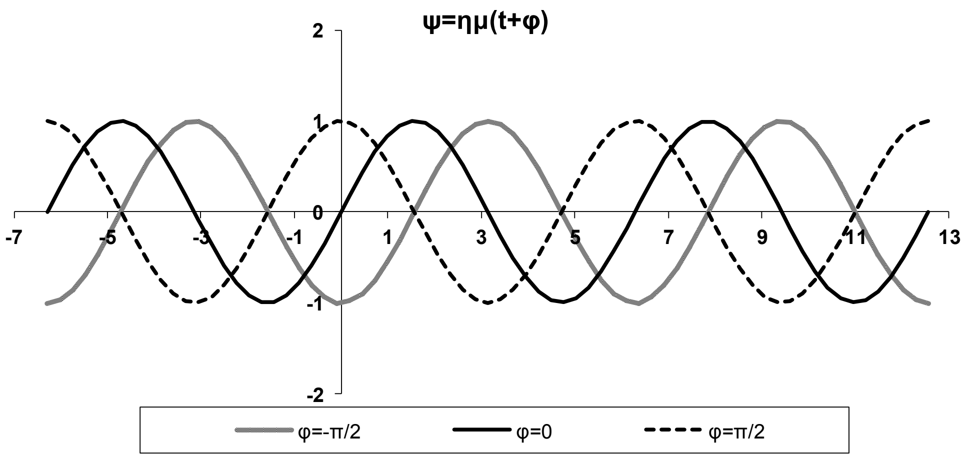
$$\boxed{\mathbf{T = 2\pi/\omega}}$$

ενώ η ποσότητα **ω ονομάζεται κυκλική συχνότητα** της συνάρτησης και ισούται με το πλήθος των κύκλων που διαγράφει η ημ(ωx) στο διάστημα [0,2π], κάτι που γίνεται φανερό κι από το παρακάτω γράφημα.



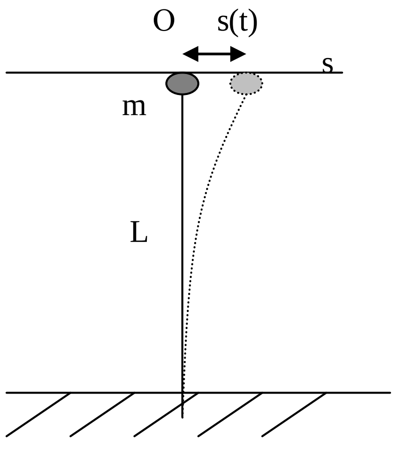
Παρατηρούμε πως το πλήθος των κύκλων (κυμάτων) που υπάρχει
στο διάστημα [0,2π] είναι, σε κάθε περίπτωση, ίσο με την τιμή του ω.

Στη συνάρτηση y = ημ(ωx-φ), η παράμετρος φ ονομάζεται διαφορά φάσης της συνάρτησης και εκφράζεται σε ακτίνια (rad). Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί αντιλαμβανόμαστε πως η ποσότητα φ μετακινεί δεξιά ή αριστερά το γράφημα της συνάρτησης. Έτσι, εάν προστίθεται η φ, τότε το γράφημα μετακινείται (κατά φ) προς τα αριστερά, ενώ όταν αφαιρείται, τότε το γράφημα μετακινείται (πάντα κατά φ) προς τα δεξιά.



Το γράφημα της συνάρτησης μετακινείται προς τα αριστερά
όταν το φ προστίθεται και προς τα δεξιά όταν αφαιρείται.

4.1 Ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση



Θεωρούμε πως στη μάζα m επιδρά μόνο η δύναμη ελαστικής επαναφοράς της λάμας L. Η μάζα m κινείται πάνω στην ευθεία s, και η κίνησή της περιγράφεται (συναρτήσει του χρόνου t) από τη συνάρτηση θέσης:

Συνάρτηση θέσης: s=s(t)

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης είναι η συνάρτηση που περιγράφει την ταχύτητα της κίνησης, ενώ η δεύτερη παράγωγος είναι η συνάρτηση που περιγράφει την επιτάχυνση της κίνησης.

Η συνάρτηση ταχύτητας: $$v(t) = \dot{s}(t) = \frac{ds}{dt}$$

Η συνάρτηση επιτάχυνσης: $$\alpha(t) = \ddot{s}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

Η μοναδική δύναμη που επιδρά στη μάζα m είναι η δύναμη επαναφοράς της λάμας, η οποία είναι ανάλογη της απομάκρυνσης s από το ελκτικό κέντρο:

$$\mathbf{F_{\varepsilon\pi\alpha\nu.}(t) = -ks(t)}$$

όπου η σταθερή k λέγεται και σταθερά του Hook, ενώ, όπως είπαμε ήδη, το αρνητικό πρόσημο δείχνει πως η δύναμη έχει πάντα το αντίθετο πρόσημο (την αντίθετη φορά) από την απομάκρυνση.

Η δ.ε. της κίνησης γράφεται κατά τα γνωστά (από το $F_{ολ}$=mα)

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ks$$

ή

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{k}{m}s = 0} \qquad (4.3.1.)$$

με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

με δύο φανταστικές ρίζες:

$$r_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad r_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Θέτοντας $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ έχουμε τις δύο ρίζες να γράφονται: $r_{1,2} = \pm i\omega_n$

$$\boxed{s(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} = D\sigma\upsilon\nu(\omega_n t - \varphi)}$$

Η σταθερή D αποκαλείται πλάτος ταλάντωσης του υλικού σημείου, ενώ η γωνία φ λέγεται αρχική φάση. Όπως είδαμε οι τιμές των αυθαίρετων σταθερών D και φ υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες: $s(0) = s_0$ και $s'(0) = v(0) = v_0$.

Παρατηρήσεις:

1η) Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η παράμετρος ω_n ονομάζεται συχνότητα της ταλάντωσης και ισούται με το πλήθος των κύκλων (των κυμάτων) της ημιτονοειδούς καμπύλης που υπάρχουν στο διάστημα [0,2π]. Τέλος, η περίοδος της ημιτονοειδούς καμπύλης είναι το μήκος του διαστήματος [0,T] στο οποίο υπάρχει ένας πλήρης κύκλος (ένα πλήρες κύμα) της συνάρτησης. Η περίοδος δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_n}}$$

2η) Η κυκλική συχνότητα ω_n είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του k και αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της μάζας m. Άρα λάμα με τετραπλάσιο συντελεστή ελαστικότητας k, θα δημιουργεί ταλάντωση με διπλάσια κυκλική συχνότητα. Αντίστροφα λειτουργεί η μάζα m. Τετραπλάσια μάζα υποδιπλασιάζει την κυκλική συχνότητα.

Μερική λύση: Για να υπολογίσουμε τη μερική λύση πρέπει να βρούμε την παράγωγο της s(t) (την ταχύτητα) :

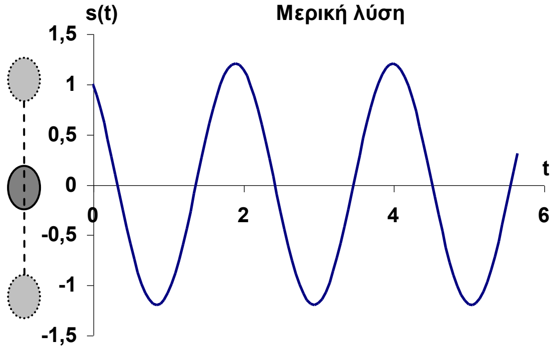
$$s(t) = D\sigma\upsilon\nu(\omega_n t-\varphi) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \dot{s}(t) = -D\omega_n \eta\mu(\omega_n t-\varphi)$$

όπου θα αντικαταστήσουμε τις αρχικές συνθήκες: $s(0) = s_0$ και $s'(0) = v(0) = v_0$

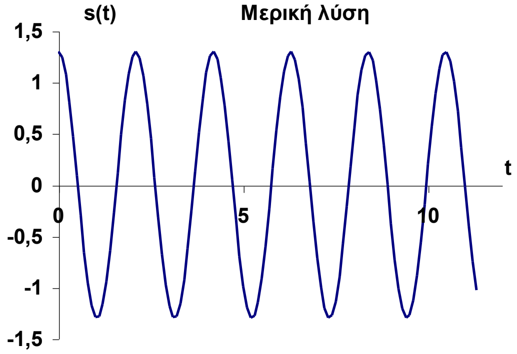
$$\left.\begin{array}{l} s_0 = D\sigma\upsilon\nu(-\varphi) \\ v_0 = -D\omega_n \eta\mu(-\varphi) \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} D = s_0/\sigma\upsilon\nu(-\varphi) \\ \varepsilon\varphi(-\varphi) = -v_0/(s_0\omega_n) \end{array}$$

Παρατηρήσεις:

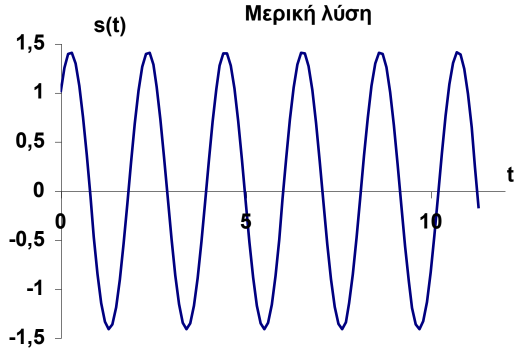
1η) Να θυμίσουμε για άλλη μια φορά πως η γραφική παράσταση της συνάρτησης θέσης s(t), περιγράφει την κίνηση του υλικού σημείου m. Η κίνηση αυτή λαμβάνει χώρα πάνω στον άξονα των διαστημάτων (s), ενώ η καμπύλη της s(t) δίνει τη θέση του m πάνω στον άξονα s, για κάθε χρονική στιγμή t. Παρατηρώντας το διπλανό γράφημα, [το οποίο αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες: s(0)=1 και v(0)=-2], διαπιστώνουμε πως το σημείο m εκτελεί μια ταλάντωση γύρω από το σημείο 0 του άξονα των διαστημάτων (s), το οποίο είναι το ελκτικό κέντρο, ή αλλιώς το σημείο ισορροπίας.



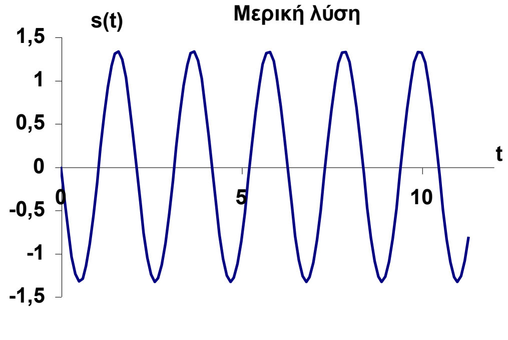
2η) Στα επόμενα γραφήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις 4 μερικών λύσεων, που αντιστοιχούν σε 4 διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Αξίζει να συσχετισθούν οι παραστάσεις με τις αρχικές τους συνθήκες.



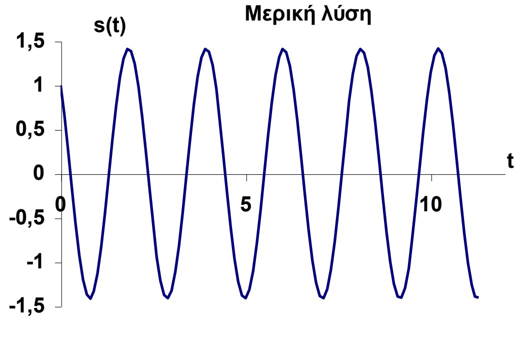
Αρχικές συνθήκες:
s(0) = 1,3 και v(0) = 0



Αρχικές συνθήκες:
s(0) = 1 και v(0) = 3



Αρχικές συνθήκες:
s(0) = 0 και v(0) = -4



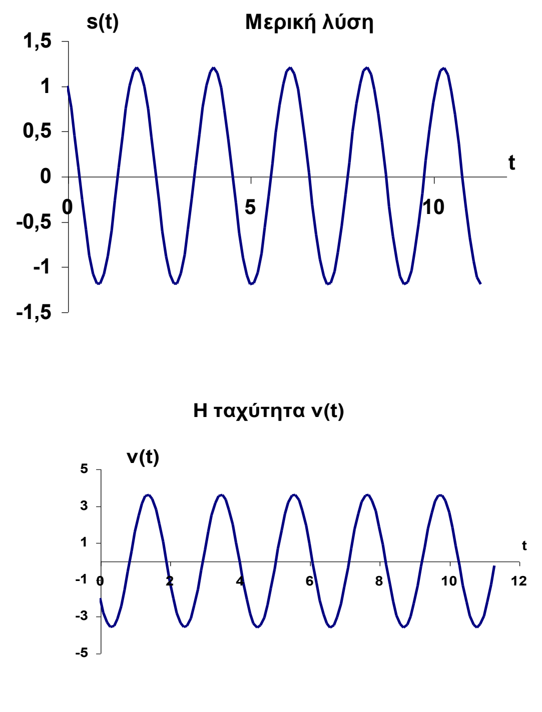
Αρχικές συνθήκες:
s(0) = 1 και v(0) = -3

3η) Ερμηνεύοντας τη λύση (έστω τη γενική), $s(t) = D\text{συν}(\omega_n t - \varphi)$, αλλά και τα πιο πάνω γραφήματα, έχουμε να τονίσουμε πως η ταλάντωση που εκτελεί το υλικό σημείο m έχει σταθερό πλάτος (D) και επομένως συνεχίζεται επ’ άπειρο.

4η) Η μερική λύση που αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες [δηλαδή s(0)=0 και v(0)=0], είναι η εκ ταυτότητος μηδενική συνάρτηση:

$$s(t) = 0 \text{ και } v(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

Αυτό είναι λογικό, μια και στην αρχή των χρόνων (t=0) το υλικό σημείο m βρίσκεται στο κέντρο ισορροπίας O, ενώ είναι ακίνητο. Αρά θα παραμείνει στο σημείο αυτό.



Η θέση και η ταχύτητα για αρχικές συνθήκες: s(0) = 1 και v(0) = -2

5η) Στα διπλανά γραφήματα εμφανίζονται η συνάρτηση θέσης και η ταχύτητα για τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Παρατηρούμε πως η ταχύτητα μηδενίζεται στα σημεία όπου η θέση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο [κάτι αναμενόμενο, μια και η ταχύτητα είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης]. Αλλά και από φυσικής άποψης είναι κάτι αναμενόμενο μια και η ταχύτητα μηδενίζεται όταν το υλικό σημείο βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση από το ελκτικό κέντρο.

Αντίθετα, η ταχύτητα γίνεται μέγιστη τη στιγμή που το σημείο m διέρχεται από το κέντρο ισορροπίας [το οποίο είναι και σημείο καμπής της s(t), πράγμα που σημαίνει μηδενισμό της 2ης παραγώγου, μηδενισμό δηλαδή της επιτάχυνσης. Αυτό όμως είναι αλήθεια γιατί στο σημείο O η δύναμη επαναφοράς μηδενίζεται.]

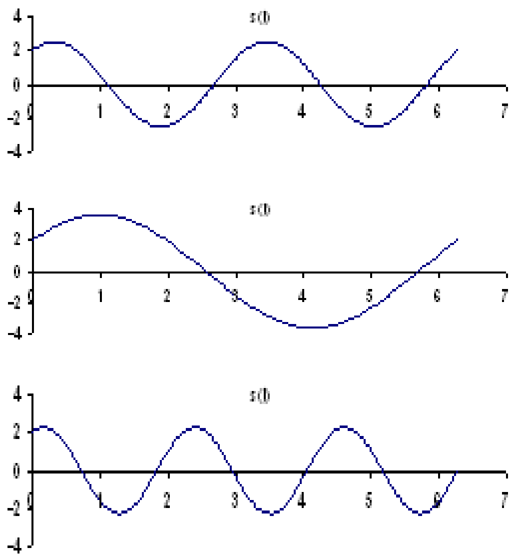
<u>Άσκηση:</u> Να επιλυθεί το προηγούμενο παράδειγμα, εάν δίνονται οι τιμές:

$$m = 5 \text{ και } k = 20$$

ενώ οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$s(0) = 2 \text{ και } v(0) = 3$$

Στα διπλανά γραφήματα δίνονται οι παραστάσεις που αντιστοιχούν στις λύσεις με m=5 και τρία διαφορετικά k=5, 20, 40. Να αντιστοιχίσετε το κατάλληλο k με την σωστή γραφική παράσταση.



4.1 Ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση

Ονομάζουμε απόσβεση την ιδιότητα που έχουν τα υλικά σώματα να αντιδρούν σε οποιαδήποτε αλλαγή της μορφής τους. Η δύναμη της αντίδρασης αυτής είναι ανάλογη της ταχύτητας με την οποία μεταβάλλεται το σχήμα του σώματος. Άρα η σχέση της δύναμης απόσβεσης που επενεργεί σε ένα σώμα, που μεταβάλλει τη φόρμα του με ταχύτητα v, είναι η:

$$F_{\alpha\pi\acute{o}\sigma\beta.} = -cv(t)$$

όπου το πρόσημο μείον δείχνει πως η δύναμη της αντίδρασης έχει αντίθετη φορά με την ταχύτητα v(t). Η νέα δ.ε. που λαμβάνει υπ' όψη της και τη δύναμη της απόσβεσης είναι η:

$$\mathbf{m\ddot{s} = F_{o\lambda.} = F_{\varepsilon\pi\alpha\nu.} + F_{\alpha\pi\acute{o}\sigma\beta.} = -c\dot{s} - ks} \quad \text{ή}$$

$$\ddot{s} + \frac{c}{m}\dot{s} + \frac{k}{m}s = 0 \quad \text{ή} \quad \ddot{s} + \frac{c}{m}\dot{s} + \omega_n^{\,2}s = 0 \qquad (4.3.1)$$

όπου οι ποσότητες m, k, c (και $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$) είναι πάντα θετικές.

Η χαρακτηριστική εξίσωση (χ.ε.) της (3.1) είναι η:

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \omega_n^{\,2} = 0$$

με ρίζες:

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\omega_n^{\,2}}}{2} \qquad \text{και διακρίνουσα} \qquad \Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\omega_n^{\,2}$$

όπου η διακρίνουσα Δ δημιουργεί τρεις διαφορετικές υποπεριπτώσεις, ανάλογα με το είδος των ριζών της χ.ε.:

- Δ>0 οπότε $\frac{c^2}{m^2} - 4\omega_n^{\,2} > 0$ και $c > 2m\omega_n$ ή $c > 2\sqrt{km}$
- Δ=0 οπότε $\frac{c^2}{m^2} - 4\omega_n^{\,2} = 0$ και $c = 2m\omega_n$ ή $c = 2\sqrt{km}$
- Δ<0 οπότε $\frac{c^2}{m^2} - 4\omega_n^{\,2} < 0$ και $c < 2m\omega_n$ ή $c < 2\sqrt{km}$

Ονομάζοντας κρίσιμη τιμή για το συντελεστή c, την τιμή που αντιστοιχεί στο Δ=0 έχουμε:

$$\boxed{c_{\kappa\rho} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}}$$

και ονομάζουμε **συντελεστή απόσβεσης** το κλάσμα:

$$\boxed{\xi = \frac{c}{c_{\kappa\rho}}} \qquad (4.3.2)$$

όπου c είναι η απόσβεση του προβλήματός μας. Γίνεται φανερό πως όταν Δ>0 θα έχουμε ξ>1 (και $c>c_{κρ}$), όταν Δ=0 θα έχουμε ξ=1 και τέλος όταν Δ<0 (και $c<c_{κρ}$) θα είναι το ξ<1. Συχνά μάλιστα εκφράζεται το ξ επί τοις εκατό (π.χ. ξ=0.035 σημαίνει ξ=3,5 %.).

Ας εξετάσουμε αναλυτικά μία-μία τις τρεις αυτές περιπτώσεις:

(i) Δ>0 [ξ>1]:

Οι δύο ρίζες της χ.ε. είναι πραγματικές και διακεκριμένες:

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\omega_n^{\,2}}}{2} \qquad (\text{όπου } r_{1,2} < 0)$$

Πράγματι, οι τιμές $r_{1,2}$ είναι αρνητικές διότι η υπόρριζη ποσότητα είναι πάντα μικρότερη του c^2/m^2. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$c_{κρ} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}$$
$$c = \xi c_{κρ} = 2\xi m\omega_n = 2\xi\sqrt{km}$$

οι δύο ρίζες $r_{1,2}$ γράφονται, σαν συναρτήσεις των ω_n και ξ:

$$\mathbf{r_{1,2}} = -\frac{c}{2m} \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\sqrt{\frac{k}{m}} \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\omega_n(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$$

Επομένως η γενική λύση της δ.ε. (5.1) καθώς και η συνάρτηση της ταχύτητας (η παράγωγος) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{s(t) = c_1} e^{r_1 t} + \mathbf{c_2} e^{r_2 t}$$
$$\mathbf{v(t) = ds/dt = c_1 r_1} e^{r_1 t} + \mathbf{c_2 r_2} e^{r_2 t}$$

Θέτοντας στις σχάσεις αυτές τις αρχικές συνθήκες $s(0)=s_0$ και $v(0)=v_0$ υπολογίζουμε τις σταθερές c_1 και c_2.

$$\mathbf{c_1} = \frac{s_0 r_2 - v_0}{r_2 - r_1} \quad \mathbf{et} \quad \mathbf{c_2} = \frac{v_0 - s_0 r_1}{r_2 - r_1}$$

Εφαρμογή:

Στο παράδειγμα του υδατόπυργου υιοθετούμε διάφορες τιμές για το ξ: ξ=2, ξ=1,5 και ξ=1,01 , οπότε έχουμε:

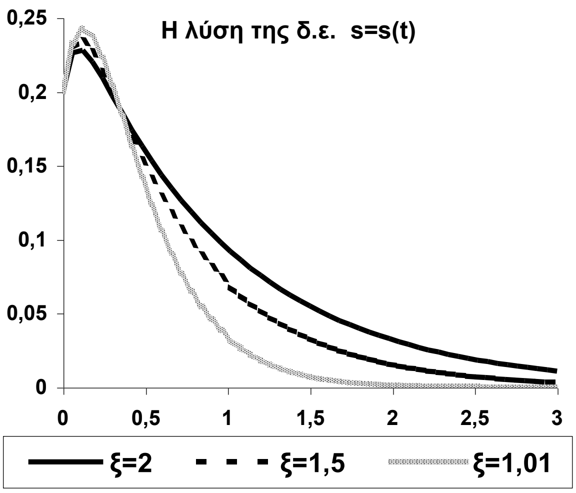
- η μάζα του νερού που συγκεντρώνεται στο άνω μέρος του είναι 50000 Kgr
- ο συντελεστής ελαστικότητας του ισούται με $k = 0,8*10^6$ Kgr/sec^2

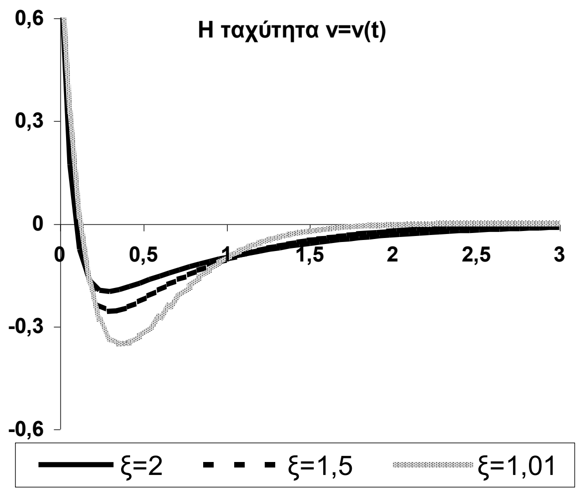
- $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 4\ sec^{-1}$
- $c_{\kappa\rho} = 2\sqrt{km} = 0{,}4*10^6$ Kgr/sec και $c = 0{,}4*10^6\xi$

Υιοθετώντας τις αρχικές συνθήκες $s_0=s(0)=0{,}2$ m και $v_0=v(0)=0{,}8$ m/sec υπολογίζουμε τις παραμέτρους που μας χρειάζονται για τις διάφορες τιμές του ξ:

ξ =	2	1,5	1,01
r_1=	-14,9282	-10,4721	-4,6071
r_2=	-1,0718	-1,52786	-3,4729
C_1=	-0,07321	-0,12361	-1,31774
C_2=	0,273205	0,323607	1,517745

οπότε η μερική λύση της δ.ε. s(t) και η παράγωγός της v(t) φαίνονται στα γραφήματα:





Παρατηρούμε πως όταν ο συντελεστής απόσβεσης ξ είναι μεγαλύτερος της μονάδας, τότε η αντίδραση της κατασκευής μας στη δύναμη ελαστικής επαναφοράς είναι τόσο ισχυρή που η μάζα στο άνω άκρο δεν εκτελεί ταλάντωση, αλλά απλά πλησιάζει ασυμπτωτικά το σημείο ισορροπίας. Μάλιστα όσο μεγαλύτερο είναι το ξ τόσο πιο αργή είναι και η μετακίνηση…

(ii) Δ=0 [ξ=1]:

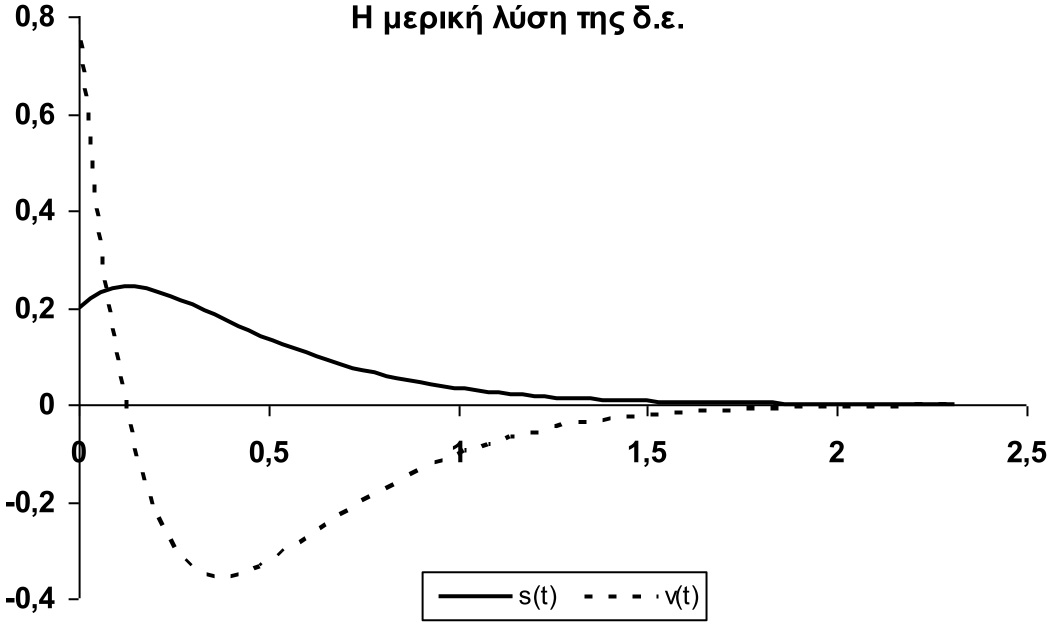
Η χ.ε. της δ.ε. έχει μία διπλή πραγματική και αρνητική ρίζα: $\mathbf{r_{1,2} = r = -c/2m}$. Επομένως η γενική λύση της δ.ε. και η παράγωγός της δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{s(t) = c_1e^{rt} + c_2te^{rt} = e^{rt}(c_1+c_2t)}$$
$$\mathbf{v(t) = ds/dt = e^{rt}(c_1r+c_2rt+c_2)}$$

ενώ η μερική λύση (για $s_0=s(0)$ και $v_0=v(0)$)

$$c_1 = s_0 \quad \text{και} \quad c_2 = v_0 - rs_0$$

Για τα δεδομένα της προηγούμενης παραγράφου [m=50000 Kgr, k=800000 Kgr/sec^2 και αρχικές συνθήκες $s_0 = 0{,}2$ m και $v_0 = 0{,}8$ m/sec, έχουμε: $r=-4$, $c_1 = 0{,}2$ και $c_2 = 1{,}6$.



Παρατηρούμε πως και στην περίπτωση αυτή, όταν ο συντελεστής απόσβεσης ξ είναι ίσος με τη μονάδα, η αντίδραση της κατασκευής στη δύναμη ελαστικής επαναφοράς είναι, επίσης, τόσο ισχυρή που η μάζα στο άνω άκρο δεν εκτελεί ταλάντωση, αλλά απλά πλησιάζει ασυμπτωτικά το σημείο ισορροπίας. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια η τιμή ξ=1 είναι οριακή. Για κάθε ξ<1 η κίνηση γίνεται ταλάντωση γύρω από το κέντρο ισορροπίας, η οποία σβήνει με την πάροδο του χρόνου.

(iii) Δ<0 [ξ<1]:

Στην περίπτωση αυτή η χ.ε. της δ.ε. είναι μιγαδικές και γράφονται:

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\omega_n^2}}{2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \omega_n^2} =$$

$$= -\frac{c\omega_n}{2m\omega_n} \pm \sqrt{-\left(\omega_n^2 - \frac{c^2}{4m^2}\right)} = -\frac{c\omega_n}{c_{\kappa\rho}} \pm \sqrt{-\omega_n^2\left(1 - \frac{c^2}{4m^2\omega_n^2}\right)} =$$

$$= -\omega_n \xi \pm i\omega_n \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{c_{\kappa\rho}^2}\right)} = -\omega_n \xi \pm i\omega_n \sqrt{1-\xi^2} =$$

οπότε, εάν θέσουμε $\omega_D = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, η γενική λύση της δ.ε. γράφεται:

$$s(t,D,\varphi) = De^{-\omega n\xi t}\ \sigma\upsilon\nu(\omega_D t - \varphi)$$

Η ω_D είναι η νέα κυκλική συχνότητα που αφορά στην κίνηση με απόσβεση και διαφοροποιείται από την κυκλική συχνότητα ω_n που αντιστοιχεί σε μία κατασκευή που έχει την ίδια μάζα και την ίδια ελαστικότητα αλλά δεν έχει μηχανισμό απόσβεσης (ξ=0).

Στη συνέχεια, για να υπολογίσουμε τη μερική λύση, παραγωγίζουμε τη γενική λύση s(t,D,φ) και έχουμε:

$$v(t,D,\varphi) = ds/dt = -\omega_n\xi De^{-\omega n\xi t}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\varphi) - \omega_D De^{-\omega n\xi t}\eta\mu(\omega_D t-\varphi) =$$

$$= -De^{-\omega n\xi t}[\omega_n\xi\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\varphi) + \omega_D\eta\mu(\omega_D t-\varphi)]$$

ενώ η μερική λύση (για s_0=s(0) και v_0=v(0))

$$s_0 = D\sigma\upsilon\nu(-\varphi)$$
$$v_0 = -D\omega_n\xi\sigma\upsilon\nu(-\varphi) - D\omega_D\eta\mu(-\varphi)$$

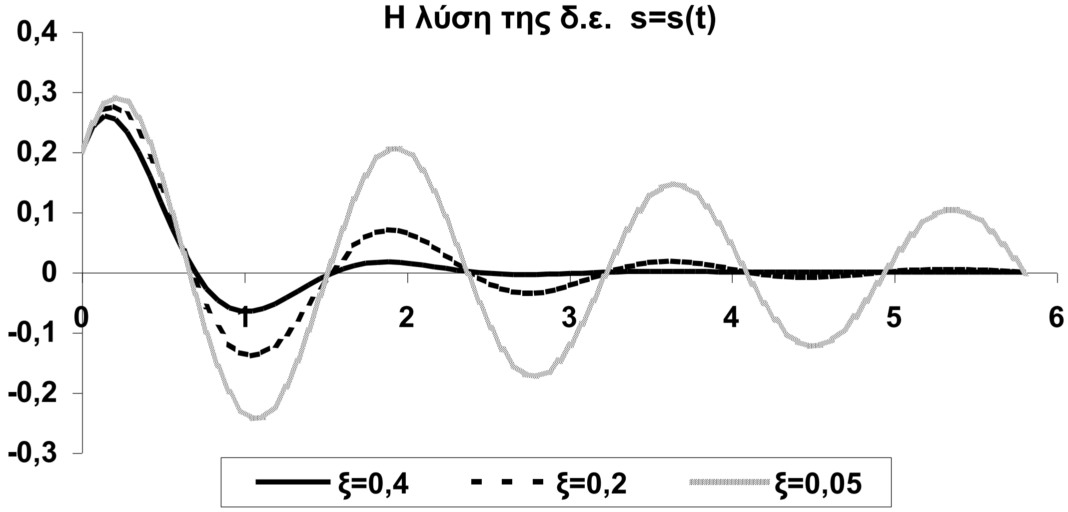
απ’ όπου:

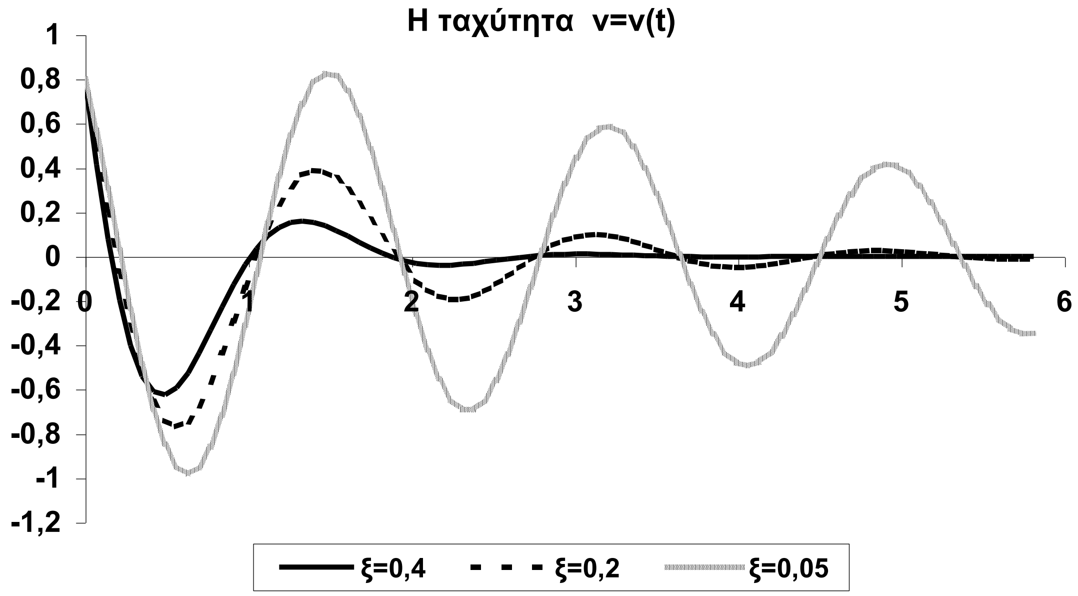
$$\varphi = \text{Τοξεφ}\left(\frac{v_0}{\omega_D s_0} + \frac{\omega_n\xi}{\omega_D}\right)$$
$$\text{και} \qquad D = s_0/\sigma\upsilon\nu(\varphi)$$

Τα συνολικά δεδομένα καθώς και οι τιμές των παραμέτρων που προκύπτουν εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα. Αμέσως μετά υπάρχει το γράφημα των συναρτήσεων s(t) και v(t) για τρεις τιμές της παραμέτρου ξ. Παρατηρούμε πως όσο ισχυρότερο είναι το ξ, τόσο ταχύτερα σταματά η ταλάντωση της κατασκευής.

m=	50000
k=	800000
ω =	4
C κ ρ =	400000
so=	0,2
vo=	0,8
ω D=	3,666061

ξ	0,4	0,2	0,05
D=	0,365148	0,329502	0,304138
ϕ =	0,991157	0,918545	0,853173





4.1 Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Τώρα στο προηγούμενο πρόβλημα θα προσθέσουμε και μια εξωτερική δύναμη που επιδρά στην κατασκευή (πάντα πρόκειται για την λάμα με τη σημειακή μάζα συγκεντρωμένη στην κορυφή της – ή τον υδατόπυργο). Η δύναμη αυτή μεταβάλλεται με το χρόνο f(t) και θεωρούμε πως επιδρά στη σημειακή μάζα (πράγμα που είναι σωστό έστω και εάν η δύναμη επιδρά στη βάση της λάμας). Οι συντελεστές ελαστικότητας και ιξώδους απόσβεσης της λάμας συμβολίζονται και πάλι k και c. Η δ.ε. της κίνησης είναι λοιπόν η:

$$m^* \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - c^* \frac{ds}{dt} + f(t)$$

ή

$$m\ddot{s} + c\dot{s} + ks = f(t) \qquad (6.1)$$

Μια από τις απλούστερες περιπτώσεις που συνήθως υιοθετούνται για την εξωτερική δύναμη f(t) είναι η

$$\boxed{\mathbf{f(t) = d\eta\mu(\omega_f t)}}$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την δ.ε. (6.1) μόνον όταν η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς έχει μιγαδικές ρίζες, όταν δηλαδή έχουμε την τιμή της παραμέτρου ξ μικρότερη της μονάδας. Ας ξαναθυμηθούμε τις ποσότητες και τις σχέσεις που χρησιμοποιούμε:

- $\ddot{s} + \frac{c}{m}\dot{s} + \omega_n{}^2 s = \frac{d}{m} * \eta\mu\omega_f t$ Η δ.ε. του προβλήματος.
- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης εάν δεν
- $\ddot{s} + \frac{c}{m}\dot{s} + \omega_n{}^2 s = 0$ Η αντίστοιχη ομογενής.
- $\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\omega_n{}^2 < 0$ Η Διακρίνουσα της χ.ε. της ομογενούς.
- $c_{\kappa\rho} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}$ Η κρίσιμη τιμή της παραμέτρου c για την οποία ισχύει $\Delta=0$
- $\xi = c/c_{\kappa\rho} = c/2m\omega_n$ Συντελεστής απόσβεσης.
- $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ Η κυκλ. συχνότητα της ταλάντωσης με απόσβεση.
- ω_f Η κυκλικη συχνοτητα της εξωτερικης δυναμης

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{s_o(t) = De^{-\omega_\nu \xi t}\, \sigma\upsilon\nu(\omega_D t - \varphi)}$$

με D και φ τις δύο αυθαίρετες σταθερές της ολοκλήρωσης.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε μια μερική λύση της πλήρους δ.ε., της οποίας η γενική μορφή είναι η:

$$\mathbf{s_\mu(t) = A\eta\mu\omega_f t + B\sigma\upsilon\nu\omega_f t}$$

$$\left.\begin{aligned} s_\mu(t) &= A\eta\mu\omega_f t + B\sigma\upsilon\nu\omega_f t \\ \dot{s}_\mu(t) &= A\omega_f\sigma\upsilon\nu\omega_f t - B\omega_f\eta\mu\omega_f t \\ \ddot{s}_\mu(t) &= -A\omega_f^2\eta\mu\omega_f t - B\omega_f^2\sigma\upsilon\nu\omega_f t \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$-A\omega_f^2\eta\mu\omega_f t - B\omega_f^2\sigma\upsilon\nu\omega_f t + (c/m)[\,A\omega_f\sigma\upsilon\nu\omega_f t - B\omega_f\eta\mu\omega_f t] + \omega_n^2[A\eta\mu\omega_f t + B\sigma\upsilon\nu\omega_f t] = = (d/m)\eta\mu\omega_f t$$

$$\eta\mu\omega_f t[-A\omega_f^2 - (c/m)B\omega_f + \omega_n^2 A] + \sigma\upsilon\nu\omega_f t[-B\omega_f^2 + (c/m)A\omega_f + \omega_n^2 B] = (d/m)\eta\mu\omega_f t$$

Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα 2 εξισώσεων με αγνώστους τα A και B:

$$-A\omega_f^2 - (c/m)B\omega f + \omega_n^2 A = (d/m)$$
$$-B\omega_f^2 + (c/m)A\omega_f + \omega_n^2 B = 0$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{d(\omega_n^2 - \omega_f^2)/m}{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + \omega_f^2(c/m)^2} \\ B &= \frac{-d\omega_f c/m^2}{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + \omega_f^2(c/m)^2} \end{aligned}}$$

Πριν αντικαταστήσουμε τις τιμές των A και B στην μετρική λύση, ας την διατυπώσουμε ως εξής (όμοια λογική μ΄αυτήν που χρησιμοποιήσαμε για την γεν. λύση της ομογενούς δ.ε. με μιγαδικές ρίζες της χ.ε.):

$$s_\mu(t) = A\eta\mu\omega_f t + B\sigma\upsilon\nu\omega_f t = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\eta\mu\omega_f t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sigma\upsilon\nu\omega_f t\right] =$$
$$= \sqrt{A^2+B^2}[\eta\mu\theta\eta\mu\omega_f t + \sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\omega_f t] = D_\mu\sigma\upsilon\nu(\omega_f t - \theta)$$

Άρα

$$\boxed{s_\mu(t) = D_\mu\sigma\upsilon\nu(\omega_f t - \theta)}$$

όπου $D_\mu = \sqrt{A^2+B^2} = \dfrac{\sqrt{d^2(\omega_n^2-\omega_f^2)^2/m^2 + d^2\omega_f^2c^2/m^4}}{(\omega_n^2-\omega_f^2)^2+\omega_f^2(c/m)^2} =$

$$= \frac{(d/m)\sqrt{(\omega_n^2-\omega_f^2)^2+\omega_f^2(c/m)^2}}{(\omega_n^2-\omega_f^2)^2+\omega_f^2(c/m)^2} = \frac{d/m}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_f^2)^2+\omega_f^2(c/m)^2}}$$

και

$\theta \;= \text{Τοξεφ}(A/B)$

Επομένως η γενική λύση της δοσμένης δ.ε. (και η συνάρτηση θέσης και η ταχύτητα) δίνεται από την επόμενη δυάδα σχέσεων:

$$\mathbf{s(t) = s_o(t) + s_\mu(t) = De^{-\omega n\xi t}\,\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\varphi) + D_\mu \sigma\upsilon\nu(\omega_f t-\theta)}$$

$$\mathbf{v(t) = -\omega_n \xi De^{-\omega n\xi t}\,\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\varphi) - \omega_D De^{-\omega n\xi t}\,\eta\mu(\omega_D t-\varphi) - \omega_f D_\mu \eta\mu(\omega_f t-\theta)}$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες στις δύο αυτές σχέσεις, υπολογίζουμε τη μερική λύση (την τιμή των αυθαίρετων σταθερών D και φ). Η μερική λύση για τη γενική περίπτωση αρχικών συνθηκών **[$s(0)=s_0$ et $v(0)=v_0$]** υπολογίζεται ως εξής:

$D\sigma\upsilon\nu\varphi + D_\mu \sigma\upsilon\nu\theta = s_0$

$-D\omega_n \xi \sigma\upsilon\nu(\varphi) + D\omega_D\, \eta\mu\varphi + D_\mu \omega_f \eta\mu\theta = v_0$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{s_0 - D_\mu \sigma\upsilon\nu\theta}{D}$$

ενώ εάν δεχθούμε πως $0<\varphi<\pi/2$, θα έχουμε ($\eta\mu\varphi = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\phi}$):

$$\eta\mu\varphi = \frac{1}{D}\sqrt{D^2 - (s_0 - D_\mu \cos\theta)^2}$$

Αντικαθιστούμε τις δύο αυτές σχέσεις στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος και βρίσκουμε την τιμή της σταθεράς D

$$D = \sqrt{(s_0 - D_\mu \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + \left[\frac{v_0 + \omega_n \xi (s_0 - D_\mu \sigma\upsilon\nu\theta) - D_\mu \omega_f \eta\mu\theta}{\omega_D}\right]^2}$$

και της φ:

$$\varphi = \text{Τοξσυν}\left(\frac{s_0 - D_\mu \sigma\upsilon\nu\theta}{D}\right)$$

Συμπεράσματα:

- Μελετήσαμε το πρόβλημα της συμπεριφοράς μιας μονοδιάστατης ελαστικής κατασκευής με απόσβεση ($\xi<1$), στην οποία επιδρά μια ημιτονοειδής εξωτερική δύναμη [της μορφής $f(t) = d\eta\mu(\omega_f t)$] με κυκλική συχνότητα ω_f.

- Η λύση της δ.ε, του προβλήματος, είναι το άθροισμα δύο όρων.

$$\mathbf{s(t) = s_o(t) + s_\mu(t) = De^{-\omega n\xi t}\,\sigma\upsilon\nu(\omega_D t\text{-}\varphi) + D_\mu \sigma\upsilon\nu(\omega_f t\text{-}\theta)}$$

- Ο πρώτος όρος (που είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς) περιγράφει την αντίδραση του ελάσματος που ανταποκρίνεται στις αρχικές συνθήκες και στα χαρακτηριστικά της λάμας, ενώ δεν επηρεάζεται από την εξωτερική δύναμη f(t). Η κυκλική της συχνότητα ω_D εξαρτάται μόνο από την ελαστικότητα και την απόσβεση της λάμας. Περιέχει τον όρο $\mathbf{e^{-\omega n\xi t}}$ που τείνει γρήγορα στο μηδέν καθώς μεγαλώνει το t, πράγμα που σημαίνει πως η αρμονική αυτή ταλάντωση γρήγορα παύει να λειτουργεί, γι αυτό και η κίνηση αυτή ονομάζεται **μεταβατική**.

- Ο δεύτερος όρος είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση σταθερού πλάτους D_μ, που αποτελεί την αντίδραση της λάμας στην εξωτερική δύναμη f(t) και καλείται **παραμένουσα** κίνηση.

- Η κυκλική συχνότητα της παραμένουσας ταλάντωσης είναι ίση με την αντίστοιχη της εξωτερικής δύναμης f(t). Το πλάτος όμως D_μ εξαρτάται από όλες σχεδόν τις παραμέτρους που χρησιμοποιήσαμε, γι αυτό θα το μελετήσουμε αναλυτικά στη συνέχεια.