ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ

Μαθηματικά 2

Σταύρος Παπαϊωάννου

Ιούνιος 2015

Περιεχόμενα

4.4 Ο συντονισμός

Όπως είναι φανερό ο όρος που μας απασχολεί ιδιαίτερα είναι αυτός που περιγράφει την παραμένουσα κίνηση. Ιδιαίτερα μελετούμε το πλάτος D_μ της κίνησης αυτής, η οποία παραμένει αναλλοίωτη όσον καιρό συνεχίζει να επενεργεί η εξωτερική δύναμη f(t).
Οι τιμές των παραμέτρων k και c της λάμας, καθώς και η μάζα που έχει πακτωθεί στο άκρο της, καθορίζουν τις δύο κυκλικές συχνότητες ω_n και ω_D. Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε την επίδραση στην τιμή του πλάτους D_μ, η τιμή της συχνότητας ω_f της εξωτερικής δύναμης. Για το λόγο αυτό καθορίζουμε την παράμετρο λ:

$$\lambda = \frac{\omega_f}{\omega_n}$$

- $\lambda<1$ όταν $\omega_f < \omega$
- $\lambda>1$ όταν $\omega_f > \omega$
- $\lambda=1$ όταν $\omega_f = \omega$

$$D_\mu = \frac{d/m}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_f^{\,2})^2+\omega_f^{\,2}(c/m)^2}} = \frac{d/m}{\omega_n^2\sqrt{(1-\lambda^2)^2+\lambda^2(c/m\omega)^2}} =$$

$$= \frac{d/m\omega_n^2}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\xi^2\lambda^2}} \qquad \text{επειδή } \xi = c/2m\omega_n$$

Το πλάτος D_μ της ταλάντωσης εξαρτάται από το λ. Μεγιστοποιείται όταν ο παρονομαστής γίνεται ελάχιστος. Αναζητούμε λοιπόν την τιμή του λ που ελαχιστοποιεί την υπόρριζη ποσότητα του D_μ, την:

$$\Phi(\lambda) = (1-\lambda^2)^2+4\xi^2\lambda^2 = \lambda^4 + (4\xi^2-2)\lambda^2 + 1$$

Αυτό θα συμβαίνει στο σημείο όπου μηδενίζεται η παράγωγος της Φ(λ):

$$\Phi'(\lambda) = 4\lambda^3 + 2(4\xi^2-2)\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^3 - (1-2\xi^2)\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda^2 - (1-2\xi^2)) = 0$$

με ρίζες [(1)]: $\lambda = 0$ και $\lambda = \pm\sqrt{1-2\xi^2}$, από τις οποίες κρατούμε μόνο την θετική ρίζα. Τοποθετώντας την στην έκφραση του D_μ έχουμε:

$$\boxed{D_\mu = \frac{d/c\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Παρατηρούμε πως το μέγιστο πλάτος D_μ παρατηρείται για την τιμή του λ:

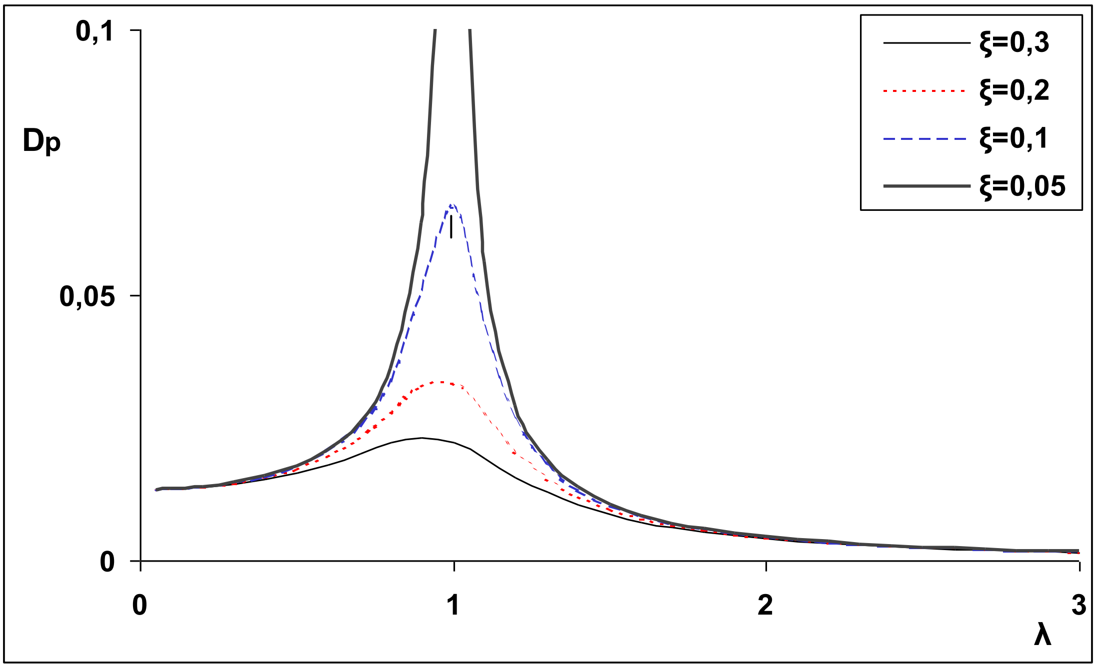
[(1)] *Η Φ πολυωνυμική συνάρτηση 4ου βαθμού με θετικό το συντελεστή του λ^4, που παρουσιάζει επομένως ένα τοπ. μέγιστο (στο λ=0) και δύο ελάχιστα.*

$$\lambda = \sqrt{1-2\xi^2}$$

όταν δηλαδή το λ είναι κοντά στη μονάδα. Στον επόμενο πίνακα παρατηρούμε την τιμή του λ σαν συνάρτηση της τιμής του ξ. Για τα ξ που μας ενδιαφέρουν ($0{,}05 < \xi < 0{,}2$) παρατηρούμε πως το λ είναι πολύ κοντά στο 1.

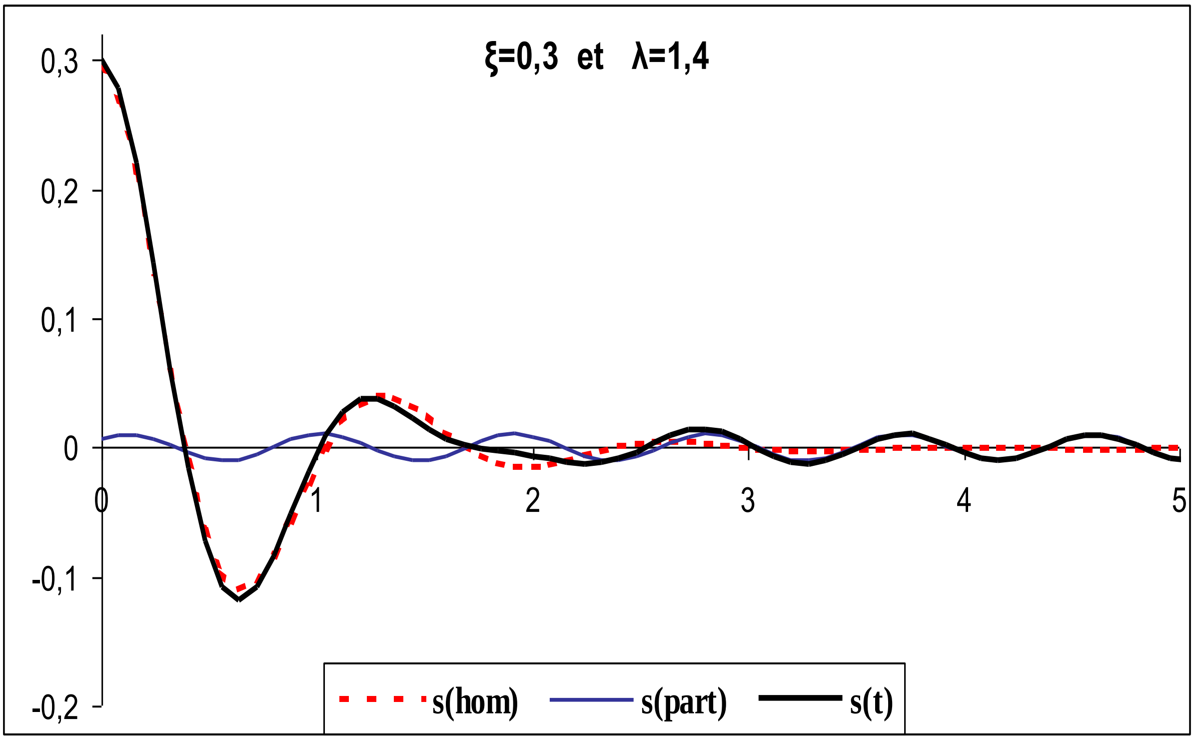
ξ=	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01	0,001
λ=	0,905539	0,959166	0,989949	0,997497	0,9999	0,999999

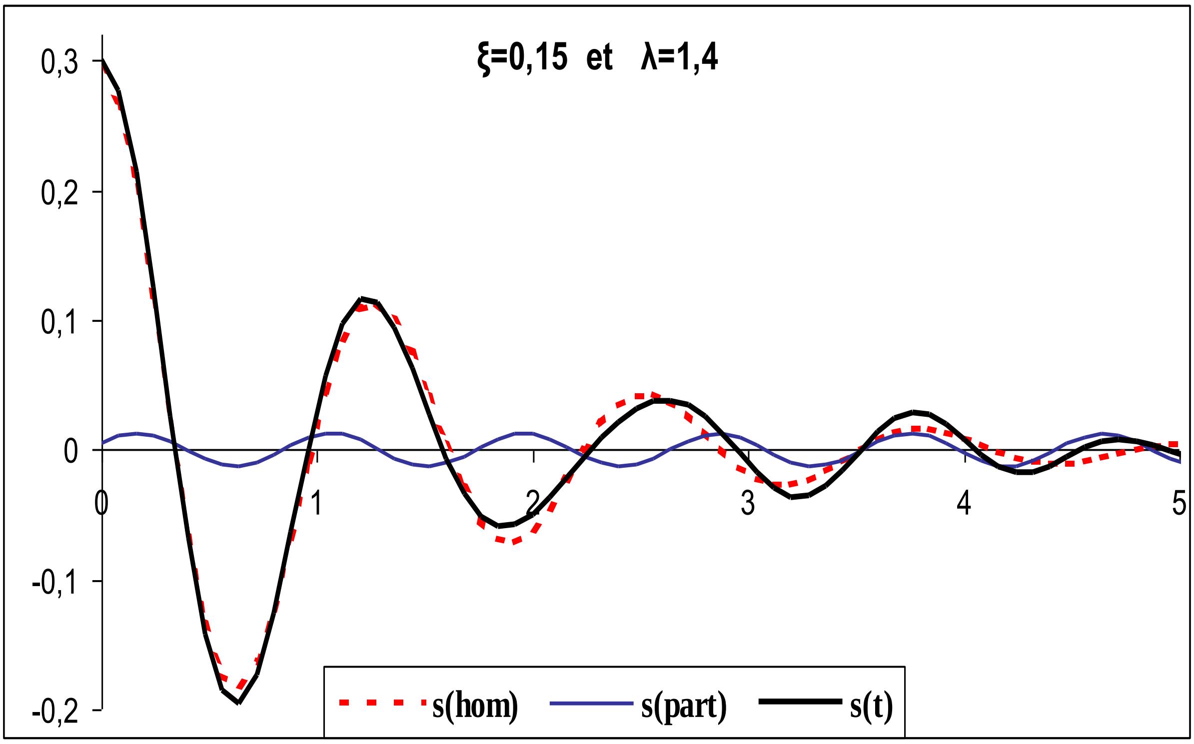
Στην επόμενη γραφική παράσταση παρατηρούμε το πλάτος D_μ σαν συνάρτηση του λ, για τα πρώτα 4 ξ του προηγούμενου πίνακα (ξ=0.3, 0.2, 0.1 και 0.05). Γίνεται φανερό πως το πλάτος μεγιστοποιείται όταν το λ είναι κοντά στο 1 (ακριβέστερα μεγιστοποιείται στα λ του προηγούμενου πίνακα).

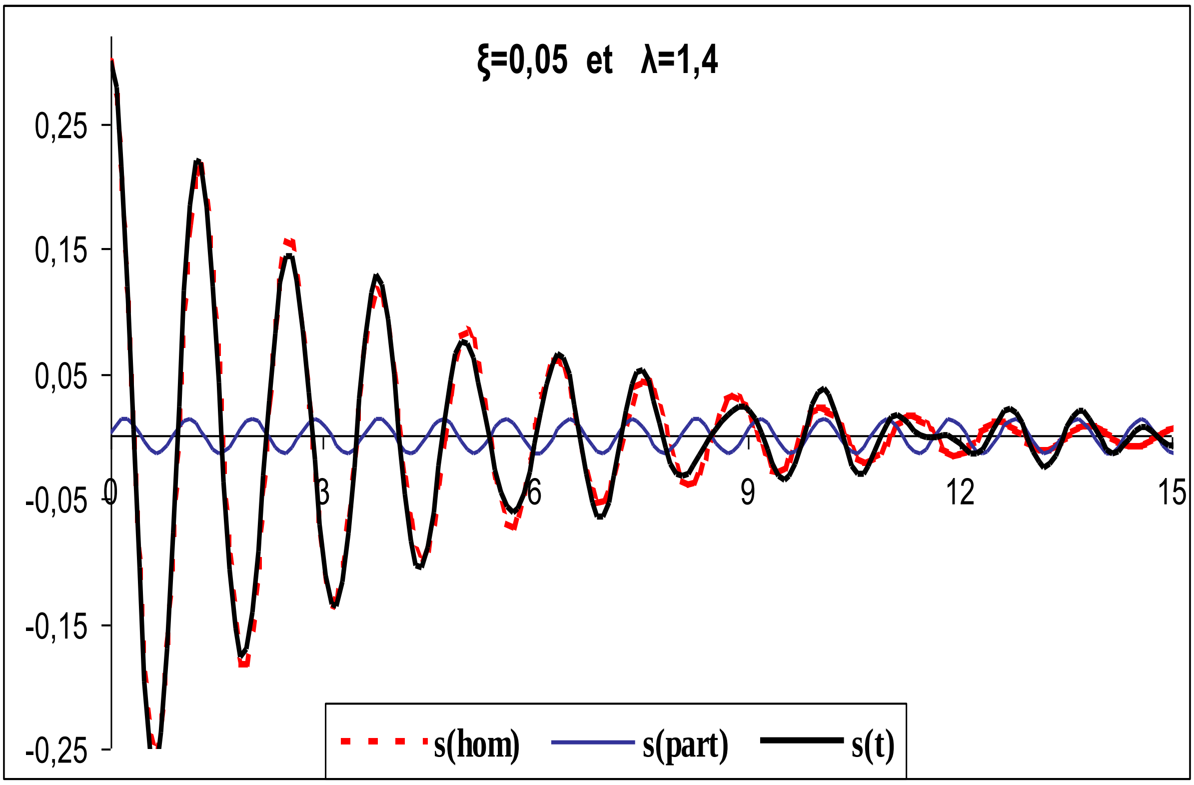


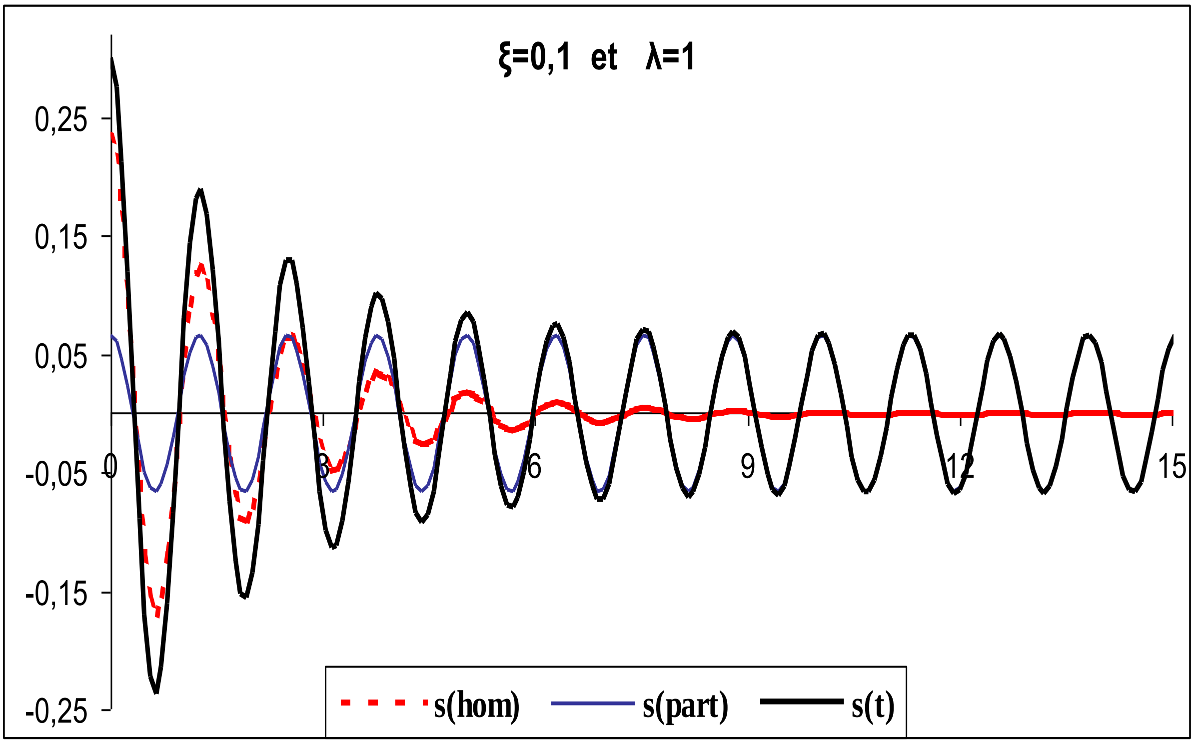
Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται συντονισμός. Παρατηρούμε πως το φαινόμενο του συντονισμού έχει να κάνει με την ταύτιση της ιδιοσυχνότητας της κατασκευής μας με τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης. Εάν επομένως δεν έχουμε καμία πληροφορία για την κυκλική συχνότητα της εξωτερικής δύναμης δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτε για να αποφύγουμε το συντονισμό. Μπορούμε όμως να μετριάσουμε την ένταση του φαινομένου, μεγαλώνοντας τον συντελεστή ιξώδους απόσβεσης (c), το οποίο αυξάνει την τιμή του ξ και μειώνει κατά πολύ το πλάτος της παραμένουσας ταλάντωσης κατά τον συντονισμό…

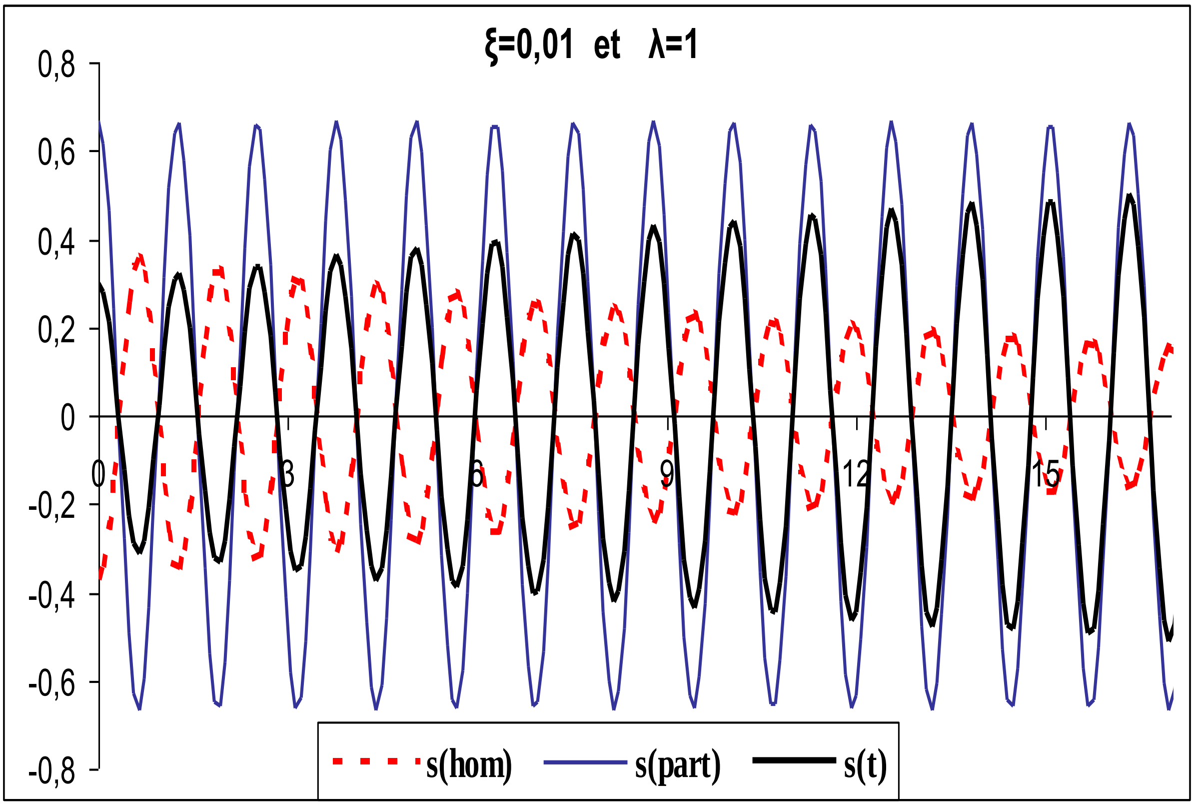
Παραδείγματα:






ξ=0,05 et λ=1,4
0,25
0,15
0,05
-0,05
-0,15
-0,25
0
3
6
9
12
15
s(hom)
s(part)
s(t)


ξ=0,1 et λ=1
0,25
0,15
0,05
-0,05
-0,15
-0,25
0
3
6
9
12
15
s(hom)
s(part)
s(t)

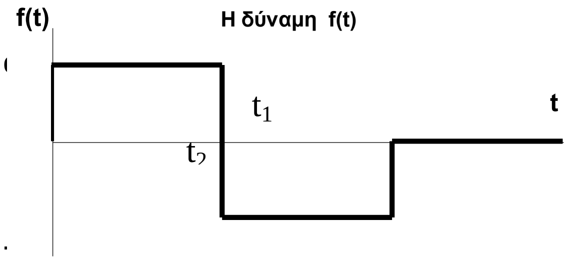


4.4 Παραδείγματα

1ο Παράδειγμα:

Λάμα μεταλλική με δεδομένα m(Kgr), k(Kgr/sec^2), c(Kgr/sec) και μηδενικές αρχικές συνθήκες. Η δύναμη που ασκείται δίνεται από τη σχέση:

$$f(t) = \begin{cases} d & \text{για } 0<t<t_1 \\ -d & \text{για } t_1<t<t_2 \\ 0 & \text{για } t>t_2 \end{cases}$$



Λύση:

Η δ.ε. του προβλήματος:

$$m\ddot{s} + c\dot{s} + ks = f(t) \qquad \ddot{s} + \frac{c}{m}\dot{s} + \omega^2 s = \frac{f(t)}{m} \qquad \text{όπου } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς δ.ε.: $r^2 + \frac{c}{m} r + \omega_n^2 = 0$ με ρίζες:

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \omega_n^2} = -\frac{c}{2m} \pm i\omega_n \sqrt{1-\xi^2} = -\omega_n \xi \pm i\omega_D$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις:

- $c_{\kappa\rho} = 2m\omega_n$ (η τιμή του c που μηδενίζει τη διακρίνουσα Δ)
- $\xi = \dfrac{c}{c_{\kappa\rho}} = \dfrac{c}{2m\omega_n}$
- $\omega_D = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

Η γενική λύση της ομογενούς **$s_o(t,D,\varphi) = De^{-\omega n \xi t}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\varphi)$** ενώ αναζητούμε μερική λύση της πλήρους υπό τη μορφή:

$s_\mu(t) = \alpha$ (πολυώνυμο μηδενικού βαθμού όπως και η f(t))

την οποία αντικαθιστούμε στην δ.ε. και βρίσκουμε:

$\omega_n^2\alpha =$ d/m για 0<t<t$_1$ οπότε α = $d/(m\omega_n^2)$ για 0<t<t$_1$

Επομένως η γενική λύση της πλήρους δ.ε. είναι η:

$$s(t,D,\varphi) = De^{-\omega n \xi t}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\varphi) \pm \frac{d}{m\omega_n^2}$$

με ταχύτητα:

$$v(t,D,\varphi) = -\omega_n \xi De^{-\omega n \xi t}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\varphi) - D\omega_D e^{-\omega n \xi t}\eta\mu(\omega_D t-\varphi)$$

(i) Περίπτωση 1η: 0<t<t$_1$. Υπολογίζουμε τη μερική λύση της δ.ε. σύμφωνα με τις δοσμένες αρχικές συνθήκες s(0)=0 και v(0)=0, τις οποίες αντικαθιστούμε στις σχέσεις της θέσης και της ταχύτητας (παίρνοντας το πρόσημο (+) για τον σταθερό όρο):

$0 = D\sigma\upsilon\nu(-\varphi) + d/m\omega_n^2 = D\sigma\upsilon\nu(\varphi) + d/m\omega_n^2$
$0 = -\omega_n \xi D\sigma\upsilon\nu(-\varphi) - \omega_D D\eta\mu(-\varphi) = -\omega_n \xi D\sigma\upsilon\nu(\varphi) + \omega_D D\eta\mu(\varphi)$

απ' όπου έχουμε:

$$D = -\frac{d}{m\omega_n^2 \sigma\upsilon\nu\phi} \quad \text{και} \quad \frac{\xi d}{m\omega_n} - \frac{\omega_D d\varepsilon\phi\phi}{m\omega_n^2} = 0$$

οπότε:

$$\boxed{\varphi = \text{Τοξεφ}\left(\frac{\xi\omega_n}{\omega_D}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\xi\omega_n}{\omega_D}\right) \quad \text{και} \quad D = -\frac{d}{m\omega_n^2 \sigma\upsilon\nu\phi}}$$

Η λύση αυτή θα λειτουργήσει μέχρι τη χρονική στιγμή t_1, κατά την οποία η θέση και η ταχύτητα της λάμας θα δίνεται από τις σχέσεις:

$$s_1 = s(t_1) \quad \text{και} \quad v_1 = v(t_1)$$

οι οποίες αποτελούν και την αρχική συνθήκη για το νέο (δεύτερο) σκέλος της συνάρτησης που περιγράφει τη δύναμη f(t).

(ii) Περίπτωση 2η: $t_1<t<t_2$. Από τη στιγμή t_1 και πέρα, η εξωτερική δύναμη f(t) αλλάζει πρόσημο, οπότε η συνάρτηση θέσης λειτουργεί με το πρόσημο (-) στο σταθερό όρο, ενώ πρέπει να ξαναϋπολογιστούν οι τιμές των σταθερών D και φ για τις νέες αρχικές συνθήκες: $s_1= s(t_1)$ και $v_1= v(t_1)$. Παίρνουμε λοιπόν τη γενική λύση …

$$s(t,D,\varphi) = De^{-\omega n\xi t}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\varphi) - \frac{d}{m\omega_n^2}$$

της οποίας η παράγωγος είναι ακριβώς όμοια με την προηγούμενη περίπτωση, και αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες:

$$s_1 = De^{-\omega n\xi t1}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t_1 -\varphi) - \frac{d}{m\omega_n^2}$$

$$v_1 = -\omega_n\xi De^{-\omega n\xi t1}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t_1-\varphi) – D\omega_D e^{-\omega n\xi t1}\eta\mu(\omega_D t_1-\varphi)$$

απ’ όπου προκύπτουν οι σχέσεις:

$$D = \left(s_1 + \frac{d}{m\omega_n^2}\right)\frac{e^{\omega_n\xi t_1}}{\sigma\upsilon\nu(\omega_D t_1 - \phi)}$$

και

$$\varepsilon\phi(\omega_D t_1 - \phi) = -\frac{1}{\omega_D}\left(\omega_n\xi + \frac{v_1}{s_1 + \frac{d}{m\omega_n^2}}\right)$$

απ’ όπου έχουμε:

$$\phi = \omega_D t_1 + \tau o \xi \varepsilon \phi\left(\frac{1}{\omega_D}\left(\omega_n \xi + \frac{v_1}{s_1 + \frac{d}{m\omega_n^2}}\right)\right)$$

Οι προηγούμενοι τύποι για τη συνάρτηση θέσης και την ταχύτητα, συνδυασμένοι με τις τιμές των αυθαίρετων σταθερών (D και φ) που μόλις υπολογίσαμε, λειτουργούν από τη χρονική στιγμή t_1 έως την στιγμή t_2. Η θέση και η ταχύτητα τη στιγμή t_2 δίνονται από τις σχέσεις:

$$s_2=s(t_2) \quad \text{και} \quad v_2=v(t_2)$$

οι οποίες αποτελούν και την αρχική συνθήκη για το νέο (τρίτο) σκέλος της συνάρτησης που περιγράφει τη δύναμη f(t).

(iii) Περίπτωση 3η: $t>t_2$. Από τη στιγμή t_2 και πέρα, η εξωτερική δύναμη μηδενίζεται. Άρα η δ.ε. που περιγράφει την κίνηση από το χρονικό αυτό σημείο και πέρα είναι η ομογενής δ.ε., της οποίας η γενική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$s_o(t,D,\varphi) = s(t,D,\varphi) = De^{-\omega n\xi t}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\varphi)$$

με συνάρτηση ταχύτητας

$$v(t,D,\varphi) = -\omega_n\xi De^{-\omega n\xi t}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\varphi) - \omega_D De^{-\omega n\xi t}\eta\mu(\omega_D t-\varphi)$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$s_2 = De^{-\omega n\xi t2}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t_2-\varphi)$
$v_2 = -\omega_n\xi De^{-\omega n\xi t2}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t_2-\varphi) - \omega_D De^{-\omega n\xi t2}\eta\mu(\omega_D t_2-\varphi)$

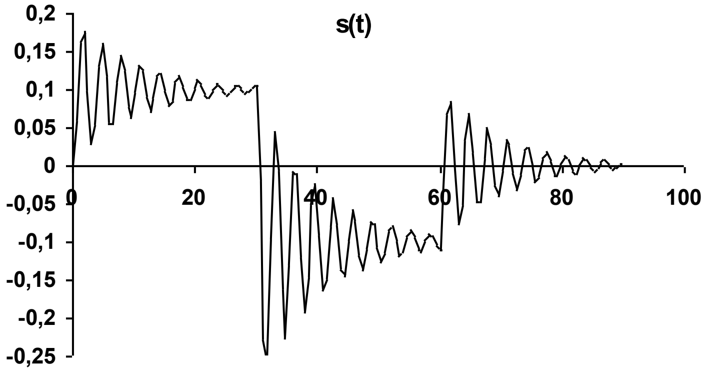
απ' όπου προκύπτουν οι σχέσεις:

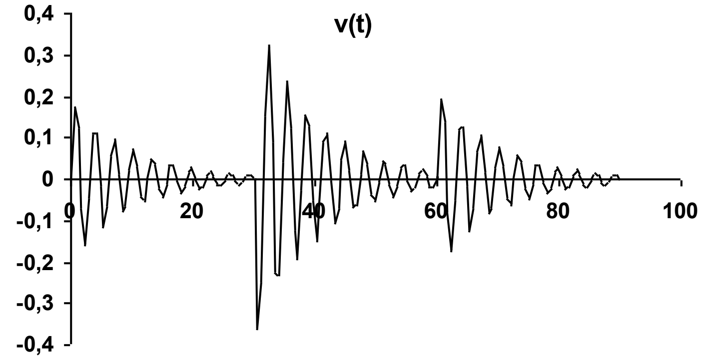
$$D = \frac{s_2 e^{\omega_n \xi t_2}}{\sigma\upsilon\nu(\omega_D t_2 - \phi)} \quad \text{και} \quad v_2 = -s_2\omega_n\xi - s_2\omega_D\varepsilon\phi(\omega_D t_2 - \phi)$$

οπότε

$$\phi = \omega_D t_2 + T o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{v_2 + s_2\omega_n\xi}{s_2\omega_D}\right)$$

Η γραφική παράσταση της συνολικής συνάρτησης θέσης (και για τα τρία σκέλη της f), καθώς και η αντίστοιχη ταχύτητα φαίνονται στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις για δύο διαφορετικές τιμές του ξ:





Στα διπλανά γραφήματα έχει επιλεγεί η τιμή:

ξ = 0,05

Παρατηρούμε πως μετά την αρχική δύναμη (θετικό τμήμα της f), η λάμα τείνει να σταθεροποιηθεί στη θέση s(t)=0,1. Αυτό συμβαίνει διότι ισχύει:

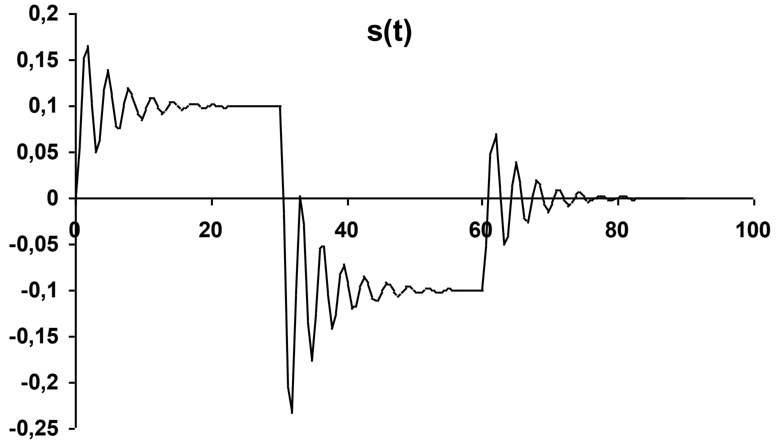
$$\frac{d}{m\omega_n^2} = 0{,}1$$

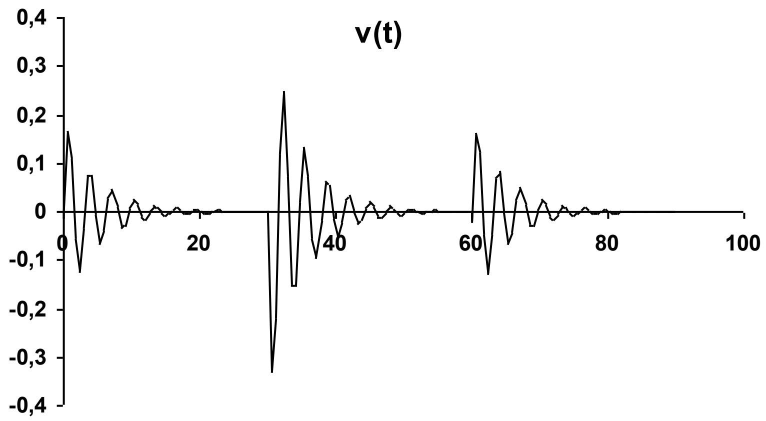
Όμοια από το t_1 (=30) και μετά μεταφέρεται σε α-ρνητικά s και τείνει να σταθεροποιηθεί στο s(t)=-0,1

Τέλος όταν μηδενίζεται η εξωτερική δύναμη, η λάμα τείνει να σταθεροποιηθεί στο κέντρο ισορροπίας s(t)=0. Σε κάθε τέλος του σκέλους όπου η λάμα τείνει να σταθεροποιηθεί, η ταχύτητα της κίνησης τείνει προς το μηδέν.

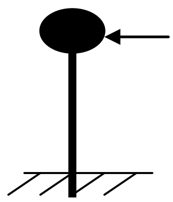
Η σταθεροποίηση είναι πολύ γρηγορότερη στο παρακάτω παράδειγμα, όπου η τιμή του συντελεστή απόσβεσης είναι διπλάσια:

ξ = 0,1





2^{o} Παράδειγμα:

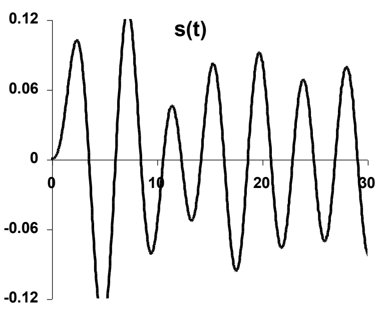


Έστω η διπλανή αβαρής μεταλλική λάμα πακτωμένη στο κάτω άκρο ενώ στο άνω υπάρχει μάζα m=10. Δίνονται οι συντελεστές ελαστικής επαναφοράς και απόσβεσης k=10 και c=2. Δίνεται τέλος η εξωτερική δύναμη f(t) = ημ(2t)

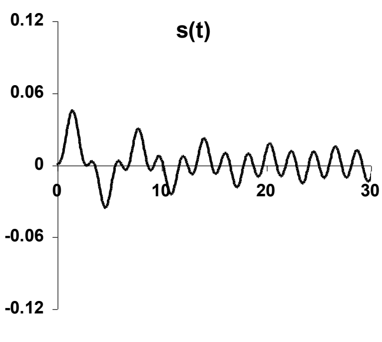
- Να γραφεί η δ.ε. της κίνησης.
- Ζητούνται (i) η γενική λύση της δ.ε. και (ii) η μερική λύση που αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες (για ευκολία πάρτε πως $\omega_D=\omega=1$):

$$s(0) = \dot{s}(0) = 0$$

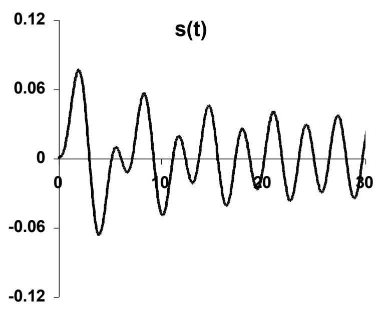
- Υπολογίστε τις παραμέτρους ω, $c_{κρ}$, ξ, ω_d, και λ. Για ποια τιμή της εξωτερικής συχνότητας ω_f έχουμε συντονισμό; Τα παρακάτω διαγράμματα αντιστοιχούν σε ω_f=1.5 , 2 και 3. Αιτιολογείστε τη σωστή αντιστοιχία.



Σχ.1^{o}



Σχ.2^{o}



Σχ.3^{o}

<u>Λύση:</u>

1) **Κατάστρωση της δ.ε.:** Θέτοντας s(t) τη συνάρτηση θέσης του άνω άκρου της λάμας, όπου είναι πακτωμένη η μάζα m, έχουμε:

F = ma όπου | $a = \ddot{s}(t)$ και F η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ενεργούν πάνω στη μάζα m.

$F = F_{\text{ελαστ. επαναφοράς}} + F_{\text{απόσβεσης}} + F_{\text{εξωτερική}} = -ks - c\dot{s}(t) + \eta\mu 2t$

οπότε καταλήγουμε στη δ.ε. που περιγράφει την κίνηση της μάζας m:

$$m\ddot{s}(t) = -c\dot{s} - ks + \eta\mu 2t \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} + \frac{c}{m}\dot{s} + \frac{k}{m}s = \frac{1}{m}\eta\mu 2t$$

Θέτοντας m=10, k=10 και c=2 έχουμε:

$$\ddot{s} + 0{,}2\dot{s} + s = 0{,}1\eta\mu 2t \qquad (1)$$

2) **Γενική λύση της δ.ε.(1):**

α) Αρχικά υπολογίζουμε τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$\ddot{s} + 0{,}2\dot{s} + s = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση

$$\rho^2 + 0{,}2\rho + 1 = 0$$

και ρίζες

$$\rho_{1,2} = \frac{-0{,}2 \pm \sqrt{0{,}04 - 4}}{2} = -0{,}1 \pm \frac{\sqrt{99}}{10}i = -0{,}1 \pm 0{,}99487\, i \approx -0{,}1 \pm i$$

και γενική λύση:

$$s_o(t, D, \phi) = De^{-0{,}1t}\sigma\upsilon\nu(1t - \phi)$$

Στο ίδιο συμπέρασμα θα φθάναμε εάν χρησιμοποιούσαμε τον τύπο:

$$s_o(t, D, \phi) = De^{-\omega\xi t}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t - \phi)$$

όπου

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1\ , \quad c_{\kappa\rho} = 2m\omega = 20\ , \quad \xi = \frac{c}{c_{\kappa\rho}} = \frac{2}{20} = 0{,}1\ ,$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} = 0{,}995$$

β) Αναζήτηση μιας μερικής λύσης της (1), υπό τη μορφή:

$$s_\mu(t) = A\eta\mu 2t + B\sigma\upsilon\nu 2t \quad \Rightarrow$$

$$\dot{s}_\mu(t) = 2A\sigma\upsilon\nu 2t - 2B\eta\mu 2t \quad \Rightarrow$$
$$\ddot{s}_\mu(t) = -4A\,\eta\mu 2t - 4B\sigma\upsilon\nu 2t$$

οπότε με αντικατάσταση στην (1)

$$[-4A\,\eta\mu 2t - 4B\sigma\upsilon\nu 2t] + 0{,}2[2A\sigma\upsilon\nu 2t - 2B\eta\mu 2t] + [A\eta\mu 2t + B\sigma\upsilon\nu 2t] = 0{,}1\eta\mu 2t \quad \Rightarrow$$

$$\eta\mu 2t[-4A-0{,}4B+A] + \sigma\upsilon\nu 2t[-4B+0{,}4A+B] = 0{,}1\eta\mu 2t$$

απ’ όπου προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{array}{l|l|l} -3A-0{,}4B = 0{,}1 & B = -1/229 & B = -0{,}004367 \\ -3B+0{,}4A = 0 & A = 7{,}5B & A = -0{,}032751 \end{array}$$

Στη συνέχεια, με τριγωνομετρικές πράξεις μετατρέπουμε το άθροισμα σε μια απλή ημιτονοειδή έκφραση:

$$A\eta\mu 2t + B\sigma\upsilon\nu 2t = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\eta\mu 2t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sigma\upsilon\nu 2t\right] =$$

$$= D_\mu\left[\eta\mu\theta\eta\mu(2t) + \sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu(2t)\right] = D_\mu\sigma\upsilon\nu(2t-\theta)$$

όπου $D_\mu = \sqrt{A^2+B^2} = 0{,}0327549$ και $\varepsilon\varphi(\theta) = A/B = 7{,}5$

Επειδή όμως τα Α και Β είναι αρνητικά, συμπεραίνουμε πως η γωνία θ βρίσκεται στο 3^o τεταρτημόριο, οπότε θα πρέπει στην τιμή που μας αποδίδει το Τοξεφ να προσθέσουμε (ή να αφαιρέσουμε) το π:

$$\theta = \text{Τοξεφ}\left[\frac{A}{B}\right] + \pi = 1{,}43824 + \pi = 4{,}5798\ \text{rad}$$

άρα

$$s_\mu(t) = A\eta\mu 2t + B\sigma\upsilon\nu 2t = -0{,}032751\eta\mu 2t - 0{,}0043668\sigma\upsilon\nu 2t =$$
$$= D_\mu\sigma\upsilon\nu(2t-\theta) = 0{,}033041\sigma\upsilon\nu(2t-4{,}5798)$$

γ) Γενική λύση της (1):

$$\boxed{s(t,D,\varphi) = s_o(t,D,\phi) + s_\mu(t) = De^{-0{,}1t}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\phi) + D_\mu\sigma\upsilon\nu(2t-\theta)} \qquad (2)$$

δ) Μερική λύση της (1), με βάση τις αρχικές συνθήκες:

Αρχικά υπολογίζουμε την παράγωγο της s(t):

$$\dot{s}(t) = -0{,}1De^{-0{,}1t}\sigma\upsilon\nu(\omega_D t-\phi) - \omega_D De^{-0{,}1t}\eta\mu(\omega_D t-\phi) - D_\mu\eta\mu(2t-\theta)$$

$s(0) = 0$ $\quad 0 = D\sigma\upsilon\nu(-\varphi) + D_\mu\sigma\upsilon\nu(-\theta)$

$\dot{s}(0) = 0$ $\quad 0 = -0{,}1D\sigma\upsilon\nu(-\varphi) - \omega_D D\eta\mu(-\varphi) - D_\mu\eta\mu(-\theta)$

$$D = -\frac{D_\mu \sigma\upsilon\nu(-\theta)}{\sigma\upsilon\nu(-\phi)}$$

$$0 = 0{,}1D_\mu\sigma\upsilon\nu(-\theta)+\omega_D D_\mu\sigma\upsilon\nu(-\theta)\varepsilon\varphi(-\varphi)-D_\mu\eta\mu(-\theta)$$

ή διαιρώντας με το $D_\mu Q$

$$0 = 0{,}1\sigma\upsilon\nu(-\theta)+\omega_D\sigma\upsilon\nu(-\theta)\varepsilon\varphi(-\varphi)-\eta\mu(-\theta)$$

Άρα έχουμε για τις 2 αυθαίρετες σταθερές:

$$-\phi = \text{Τοξεφ}\left[\frac{\eta\mu(-\theta)-0{,}1\sigma\upsilon\nu(-\theta)}{\omega_D\sigma\upsilon\nu(-\theta)}\right] = \text{Τοξεφ}\left[\frac{\varepsilon\phi(-\theta)-0{,}1}{\omega_D}\right] = -1{,}440617$$

και

$$D = 0{,}0336396$$

3) Υπολογίζουμε στη συνέχεια τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης για την οποία έχουμε το φαινόμενο του συντονισμού:

$$\lambda = \frac{\omega_f}{\omega} = \sqrt{1-2\xi^2} = 0{,}98995 \approx 1$$

Παρατηρούμε επομένως πως έχουμε συντονισμό όταν η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης γίνεται (πρακτικά) ίση με την ιδιοσυχνότητα (ω) της κατασκευής. Όσο λοιπόν η ω_f πλησιάζει τη μονάδα, τόσο το πλάτος της παραμένουσας κίνησης θα μεγαλώνει. Άρα το 1^o γράφημα αντιστοιχεί στο $\omega_f = 1{,}5$, το 2^o με το πολύ μικρό πλάτος ταλάντωσης στο $\omega_f = 3$ και το 3^o στο $\omega_f = 2$ (με ενδιάμεσο πλάτος παραμένουσας ταλάντωσης).

Στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε παρατηρώντας τις συχνότητες των παραμενουσών κινήσεων σε από τα τρία γραφήματα. **Γνωρίζουμε πως η κυκλική συχνότητα της παραμένουσας κίνησης θα είναι ίση με την κυκλική συχνότητα της εξωτερικής δύναμης, όπως επίσης γνωρίζουμε πως η κυκλική συχνότητα μιας περιοδικής συνάρτησης ισούται με τον αριθμό των κύκλων που λαμβάνουν χώρα σε ένα διάστημα (χρονικό εδώ) μήκους 2π.**

3^o Παράδειγμα: Σε μονοβάθμιο ταλαντωτή, χωρίς απόσβεση, με m=2, k=8 και c=0, επιδρά η δύναμη: $F_{\varepsilon\xi\omega\tau.} = 2\eta\mu(2t)$. Ζητούνται:

1. Οι μονάδες των συντελεστών k και c, εάν η μάζα μετριέται σε Kg.
2. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης της κίνησης.
3. Η μερική της λύση που αντιστοιχεί σε μηδενικές αρχικές συνθήκες.
4. Η γραφική παράσταση της παραμένουσας κίνησης.

<u>Λύση:</u>

1. Οι μονάδες:

$$F_{\alpha\pi o\sigma\beta.}\left(\mathrm{Kg}\frac{\mathrm{m}}{\sec^2}\right)=\mathrm{ku}\left(\frac{\mathrm{Kg}}{\sec^2}\mathrm{m}\right) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{k}\left(\frac{\mathrm{Kg}}{\sec^2}\right)$$

$$F_{E\lambda\alpha\sigma.\varepsilon\pi\alpha\nu.}\left(\mathrm{Kg}\frac{\mathrm{m}}{\sec^2}\right)=\mathrm{c}\dot{\mathrm{u}}\left(\frac{\mathrm{Kg}}{\sec}\frac{\mathrm{m}}{\sec}\right) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{c}\left(\frac{\mathrm{Kg}}{\sec}\right)$$

2. **Γενική λύση της δ.ε.**: $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=D_f\eta\mu(\omega_f t)$

$$2\ddot{u}+8u=2\eta\mu(2t) \qquad (1)$$

(i) **Γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς**: $2\ddot{u}+8u=0$, με χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2+4=0$ και ρίζες: $r_{1,2}=\pm 2i$

$$u_{o\mu}(t,D,\phi)=D\sigma\upsilon\nu(2t-\phi)$$

(ii) **Υπολογισμός μιας μερικής λύσης**: Παρατηρούμε πως η εξωτερική δύναμη που εξασκείται στην μάζα m του μονοβάθμιου ταλαντωτή είναι περιοδική, με κυκλική συχνότητα $\omega_f=2$, ενώ η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. έχει τις φανταστικές ρίζες: $\pm 2i$ (**<u>η χ.ε. έχει φανταστικές και όχι μιγαδικές ρίζες μόνον όταν η απόσβεση είναι μηδενική</u>**). Επομένως η μερική λύση που αναζητείται θα είναι της μορφής:

$$u_\mu(t)=t\left[A\eta\mu 2t+B\sigma\upsilon\nu 2t\right] \quad\Rightarrow$$

$$\dot{u}_\mu(t)=\left[A\eta\mu 2t+B\sigma\upsilon\nu 2t\right]+t\left[2A\sigma\upsilon\nu 2t-2B\eta\mu 2t\right] \quad\Rightarrow$$

$$\dot{u}_\mu(t)=2\left[2A\sigma\upsilon\nu 2t-2B\eta\mu 2t\right]+t\left[-4A\eta\mu 2t-4B\sigma\upsilon\nu 2t\right]$$

τις οποίες αντικαθιστούμε στην (1):

$$2\left[2A\sigma\upsilon\nu 2t-2B\eta\mu 2t\right]+t\left[-4A\eta\mu 2t-4B\sigma\upsilon\nu 2t\right]+4t\left[A\eta\mu 2t+B\sigma\upsilon\nu 2t\right]=\eta\mu 2t\Rightarrow$$

$$4A\sigma\upsilon\nu 2t-4B\eta\mu 2t=\eta\mu 2t$$

απ' όπου προκύπτει: A = 0 και B = -1/4. Άρα: $u_\mu(t)=-\frac{1}{4}t\sigma\upsilon\nu 4t$

(iii) Γενική λύση της (1):

$$u(t,D,\phi)=u_{o\mu}(t,D,\phi)+u_\mu(t)=D\sigma\upsilon\nu(2t-\phi)-\frac{1}{4}t\sigma\upsilon\nu 2t$$

3. Μερική λύση για μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$u(t,D,\phi)=D\sigma\upsilon\nu(2t-\phi)-\frac{1}{4}t\sigma\upsilon\nu 2t$$
$$\dot{u}(t,D,\phi)=-2D\eta\mu(2t-\phi)-\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu 2t+\frac{1}{2}t\eta\mu 2t$$

όπου αντικαθιστούμε τις αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned}0&=D\sigma\upsilon\nu(-\phi)-\frac{1}{4}t\sigma\upsilon\nu 2t\\0&=-2D\eta\mu(2t-\phi)-\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu 2t+\frac{1}{2}t\eta\mu 2t\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}0&=D\sigma\upsilon\nu(-\phi)\\0&=-2D\eta\mu(-\phi)-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

όπου από την 1^{η} προκύπτει $-\varphi = \pi/2$ και με αντικατάσταση στη 2^{η}: D=-1/8. Άρα η μερική λύση της δ.ε. (1):

$$u(t)=-\frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}t\sigma\upsilon\nu 2t$$

4. Στην ειδική αυτή περίπτωση συντονισμού, ενός ταλαντωτή με μηδενική απόσβεση εμφανίζονται δύο ιδιαίτερα φαινόμενα: Αρχικά, η μεταβατική κίνηση δεν είναι μεταβατική αλλά παραμένουσα, μια και δεν υπάρχει απόσβεση. Επιπλέον, στην παραμένουσα υπάρχει ο παράγοντας t που πολλαπλασιάζει το συνημίτονο, με αποτέλεσμα να αυξάνεται διαρκώς το πλάτος ταλάντωσης. Όλα αυτά γίνονται φανερά στο επόμενο γράφημα: